

ČESKÉ VYSOKÉ UČENÍ TECHNICKÉ V PRAZE

FAKULTA JADERNÁ A FYZIKÁLNĚ INŽENÝRSKÁ

BAKALÁŘSKÁ PRÁCE

INTERFERENCE, LOKALIZACE
A KVANTOVÉ PROCHÁZKY

2010

IVA BEZDĚKOVÁ

Poděkování

Děkuji tímto vedoucímu této práce, prof. Igoru Jexovi, DrSc., za projevenou ochotu při konzultacích a podnětné připomínky. Děkuji také konzultantovi, Ing. Martinu Štefaňákovi, Ph.D., za užitečné rady a pomoc s matematickými programy.

Prohlašuji, že jsem svou bakalářskou práci vypracovala samostatně a použila jsem pouze podklady uvedené v příloženém seznamu.

Nemám závažný důvod proti užití tohoto školního díla ve smyslu §60 Zákona č.121/2000 Sb., o právu autorském, o právech souvisejících s právem autorským a o změně některých zákonů (autorský zákon).

V Bolaticích, dne 7.7 2009

Iva Bezděková

Název: Interference, lokalizace a kvantové procházky

Autor: Iva Bezděková

Obor: Matematické inženýrství

Zaměření: Matematická fyzika

Druh práce: Bakalářská práce

Vedoucí práce: prof. Ing. Igor Jex, DrSc., FJFI ČVUT

Konzultant: Ing. Martin Štefaňák, Ph.D., FJFI ČVUT

Abstrakt: Tato práce uvádí čtenáře do problematiky kvantových procházek. Soustředí se spíše na podrobné uvedení do problému než na shrnutí dosavadních znalostí o kvantových procházkách. Dále se však zaměřuje na otázku tvaru matic mincí při kvantové procházce po přímce kdy chodec může jít vpravo, vlevo nebo zůstat stát. Výsledkem je klasifikace mincí.

Klíčová slova: náhodná procházka, kvantová procházka, unitární transformace, mince.

Title: Interference, localization and quantum walks

Abstract: This work feature reader into the quatnum walks. It concentrate on detailed introduction into the problem rather than on summarization of present knowledge. Moreover it focuses on lattice three-state quantum walk and it's coin. It results in coin classification.

Key words: random walk, quantum walk, unitary transformation, coin

Obsah

Úvod.....	2
1 Klasická náhodná procházka.....	3
1.1 Jednorozměrná procházka.....	5
1.2 Dvourozměrná procházka.....	7
1.3 Aplikace.....	9
1.3.1 Wienerův proces (Brownův pohyb).....	9
1.3.2 Náhodná procházková hypotéza.....	10
1.3.3 Ideální řetězec.....	12
2 Kvantová procházka.....	15
2.1 Kvantová procházka po přímce.....	16
2.2 Pohybová rovnice kvantové procházky.....	19
2.2 Kvantitativní analýza procházky, Fourierova transformace, metoda stacionární fáze..	20
3 Klasifikace mincí pro kvantovou procházku na přímce o třech možných stavech.....	24
3.1 Provedení.....	25
3.2 Klasifikace.....	27
3.2.1 Šest nul.....	27
3.2.2 Čtyři nuly.....	30
3.2.3 Méně než čtyři nuly.....	32
4 Závěr.....	36
5 Reference.....	37
6 Příloha.....	39

Úvod

Cílem této práce je seznámit se s obdobou náhodných procházek v kvantovém světě, tedy s procházkami kvantovými. Tato problematika kvantové fyziky by se mohla stát velice důležitou, neboť se předpokládá, že může poskytnout nový náhled na kvantové algoritmy realizované v zatím pouze teoreticky fungujících kvantových počítačích.

V první kapitole se zabýváme klasickou náhodnou procházkou a jejími vlastnostmi v jednorozměrném a dvourozměrném případě. Převážná část kapitoly je zaměřena na ukázkou využití teorie náhodné procházky v jiných vědeckých oborech. Mimo vyjmenování řady využití jsou některé aplikace náhodné procházky popsány detailněji. Jedná se o popis Brownova pohybu, aplikaci ve finanční sféře jako teorii popisující vývoj cen akcií na burze. Poslední z aplikací bude ve fyzice polymerů popis ideálního řetězce.

V kapitole druhé přejdeme od náhodné procházky ke kvantové. Popíšeme jak je realizována, a také se podíváme na její vlastnosti a rozdíly oproti procházce klasické. Speciálně se zaměříme na kvantovou procházku po přímce a rozebereme možnosti řešení časového vývoje procházky za pomoci Fourierovy transformace a metody stacionární fáze.

Třetí kapitola je převážně praktická. Zkoumáme vlastnosti kvantové procházky po přímce, přičemž v každém kroku může chodec jít o krok doleva, doprava nebo zůstat stát. Zajímáme se, zda existuje třída matic mincí taková, aby propagátor s příslušnou maticí měl alespoň jedno vlastní číslo konstantní. Z požadavků unitarity matice a konstantního vlastního čísla propagátoru najdeme omezující podmínky pro tvar. Na základě těchto podmínek vytvoříme klasifikaci.

V práci je použito několik základních pojmů z lineární algebry a také z funkcionální analýzy. Vzhledem k tomu, že tyto pojmy jsou poměrně známé, nejsou v textu definovány, avšak každému z pojmů přísluší odkaz na publikaci, ve které si jej čtenář může vyhledat.

Text obsahuje jednu přílohu. V té je vysvětleno několik dalších pojmů obsažených v textu. Neznalost těchto pojmů však nebrání pochopení textu, hrají zde roli dodatečných informací, jež by mohly čtenáře zajímat.

1 Klasická náhodná procházka

Klasická náhodná procházka je děj nepodléhající deterministickému vývoji. Každý následující stav objektu (chodce) je určen náhodně. Často se místo názvu náhodná procházka setkáme s názvem chůze opilého. Uvažujeme-li, že se přesun chodce děje po krocích, pak mluvíme o takzvaných disktrétních procházkách. Kroky bývají obvykle stejné délky a jejich směr je náhodný. Z matematického hlediska pod pojmem náhodná procházka nejčastěji uvažujeme Markovského proces (příloha A) Existuje však mnoho dalších typů procházek. Jsou to například náhodná procházka na grafu nebo náhodná procházka ve vyšších dimenzích. Dále může procházky dělit na spojité a disktrétní v čase. Ve většině případů uvažujeme procházku pro disktrétní čas $\{t_i; i \in \mathbb{N}\}$ a k němu příslušné pozice chodce $\{x_i; i \in \mathbb{N}\}$. Při spojité procházce je pozice chodce dána hodnotou $x=x(t)$ definována pro $t \geq 0$.

Na chodce můžeme klást různé omezující podmínky popisující blíže jeho pohyb. Chodec se může pohybovat po jednorozměrné přímce, kde s určitou pravděpodobností vykoná krok vlevo či vpravo. Může se pohybovat v rovině, kde určíme možné směry pohybu a jejich pravděpodobnosti. Jako příklad pohybu v rovině můžeme vzít nekonečnou plochu v níž vytvoříme pomyslnou čtvercovou síť. Chodec se tak v každém kroku ocitne na křižovatce, kde se může rozhodnout mezi čtyřmi cestami určenými čtvercovou sítí, přičemž každá z těchto cest je stejně pravděpodobná. Většinou se také omezujeme na procházky disktrétní v čase.

Náhodné procházky se dají klasifikovat na základě jejich asymptotického chování. Příkladem může být schopnost chodce vrátit se do počátku kde procházku započal. Tímto problémem se zabýval maďarský vědec George Pólya. Označíme $p(d)$ pravděpodobnost návratu do počátku, přičemž d je dimenze prostoru. V roce 1921 Pólya dokázal, že pohybuje-li se chodec v dimenzi $d=\{1, 2\}$, pak je pravděpodobnost návratu chodce do počátku $p(d)=1$. Pro dimenzi $d>2$, je $p(d)<1$. Později Watson [17], McCrea a Whipple [20], Domb [19], Glasser a Zucker [18] ukázali, že pro dimenzi $d=3$ je

$$p(3)=1-\frac{1}{u(3)}=0,34053\dots \quad (1.1)$$

Pravděpodobnost $p(3)$ je uváděna v on-line encyklopedii (*The On-Line Encyclopedia of Integer Sequences* [15]) jako sekvence číslo A086230. Konstanta $u(3)$ je definována jako

$$u(3)=\frac{3}{(2\pi)^3} \int_{-\pi}^{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} \frac{dx dy dz}{3-\cos x-\cos y-\cos z} \quad (1.2)$$

Je to takzvaný Watsonův trojný integrál. Jeho číselnou hodnotu (hodnotu konstanty $u(3)$) najdeme v on-line encyklopedii [15] pod číslem sekvence A086231. Pro další dimenze byly také zjištěny pravděpodobnosti pro návrat do počátku. Montroll (1956) ukázal, že pro dimenzi $d > 3$ a k ní příslušnou pravděpodobnost $p(d)$ platí

$$p(d) = 1 - \frac{1}{u(d)}, \quad (1.3)$$

kde

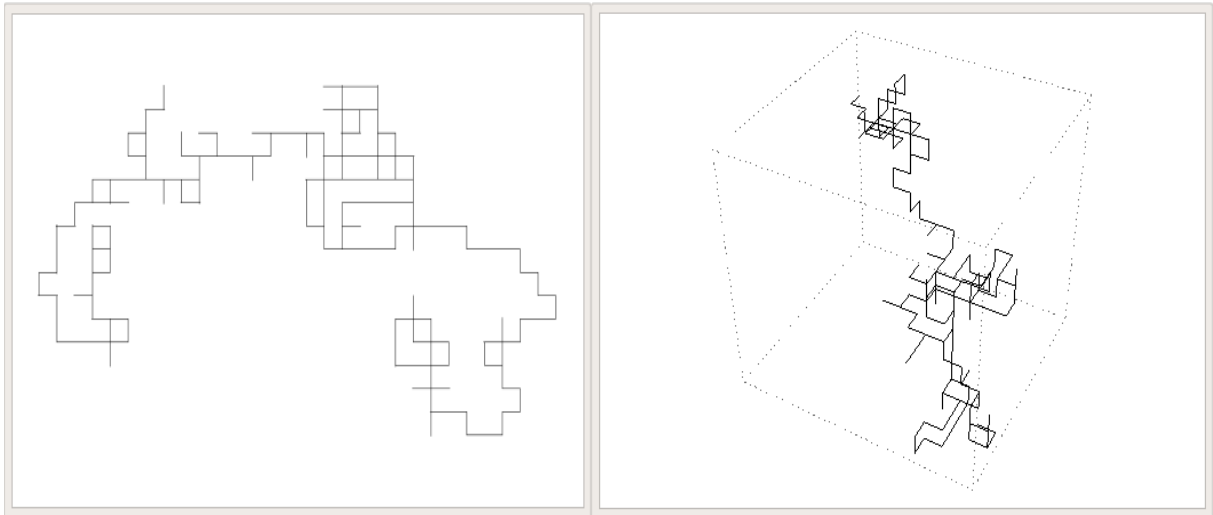
$$\begin{aligned} u(d) &= \frac{d}{(2\pi)^d} \int_{-\pi}^{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} \dots \int_{-\pi}^{\pi} (d - \sum_{k=1}^d \cos x_k)^{-1} dx_1 dx_2 \dots dx_d \quad (1.4) \\ &= \int_0^{\infty} (I_0(\frac{t}{d}))^d e^{-t} dt . \end{aligned}$$

Funkce $I_0(z)$ je modifikovaná Besselova funkce prvního druhu (příloha A). Pravděpodobnost $p(d)$ návratu do počátku byla spočtena i pro vyšší dimenze než $d=3$. V tabulce je uveden přehled hodnot pravděpodobností u různých dimenzí a k nim příslušná čísla sekvencí z online encyklopedie [15].

d	Číslo sekvence	p(d)
3	A086230	0,340537
4	A086232	0,193206
5	A086233	0,135178
6	A086234	0,104715
7	A086235	0,0858449
8	A086236	0,0729126

Tabulka 1: Čísla sekvencí v on-line encyklopedii [15] a jim odpovídající hodnoty pravděpodobnosti návratu chodce do počátku pro dimenze $d = 3, 4, \dots, 8$.

Se zvyšující se dimenzí prostoru má chodec v každém kroku o dvě možnosti posunu více, než v dimenzi o jedna nižší. Z tabulky 1 je vidět, že pravděpodobnost opětovného nalezení chodce v počátku pro zvyšující se dimenzi prostoru poměrně rychle klesá.



Obrázek 1: Náhodná procházka v rovině po 300 krocích [1] a v prostoru po 200 krocích [2]

1.1 Jednorozměrná procházka

Jako nejjednodušší případ můžeme uvést náhodnou procházku po přímce. Chodec se v každém kroku může posunout o krok pouze vpravo nebo vlevo, přičemž kroky mají stejnou délku. Výběr směru posunu chodce se děje se stejnou pravděpodobností. Jako jednu z možných realizací tohoto výběru můžeme uvažovat házení mincí. Podle toho zda padne rub nebo líc určíme, kdy se chodec posune vpravo nebo vlevo. Krok vpravo budeme brát jako krok kladným směrem, krok vlevo jako krok záporným směrem. Dále budeme uvažovat, že krok vpravo se děje s pravděpodobností p , krok vlevo s pravděpodobností $1-p$. Zajímá nás výsledná pravděpodobnost $P(k_p)$, tedy pravděpodobnost nalezení chodce ve vzdálenosti k_p kroků vpravo od počátku po vykonaných n krocích. Obecně pro pravděpodobnost $P(X)$ určitého jevu X platí

$$P(X) = \frac{k}{m}, \quad (1.1.1)$$

kde k je počet výsledků příznivých jevu X a m je celkový počet výsledků. V případě jednorozměrné procházky bude jev X nalezení chodce ve vzdálenosti k_p od počátku. Číslo k odpovídá počtu cest k zjišovanému cíli, tedy počtu cest do bodu k_p . Číslo m udává celkový počet všech možných cest. V případě jednorozměrné procházky to povede na binomické

rozdělení pro pravděpodobnost $P(k_p)$. Získáme vztah

$$P(k_p) = \binom{n}{k_p} p^{k_p} (1-p)^{n-k_p}. \quad (1.1.2)$$

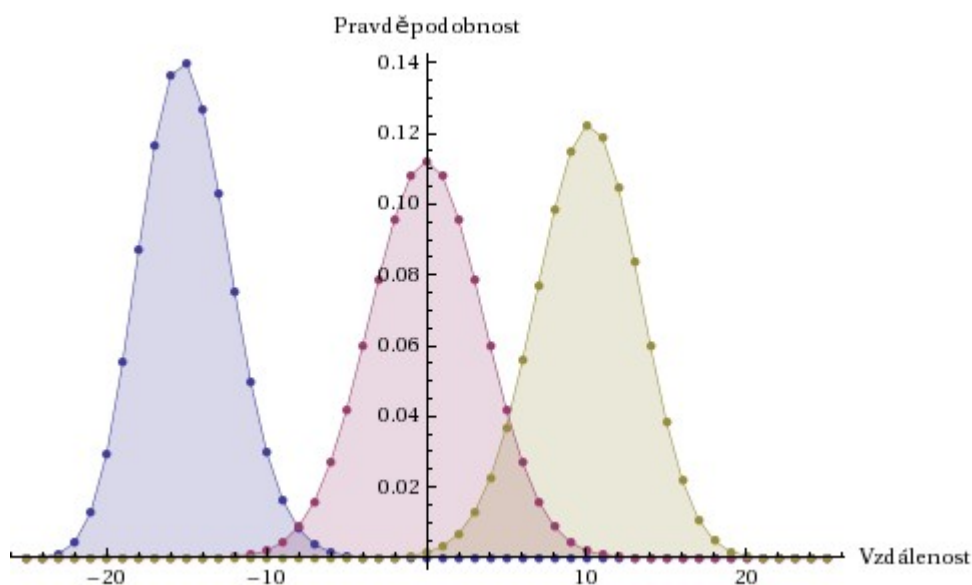
Pokud nás zajímá pravděpodobnost $P(k_l)$ nalezení chodce po n krocích ve vzdálenosti k_l kroků vlevo od počátku dospějeme k podobnému vztahu

$$P(k_l) = \binom{n}{k_l} p^{n-k_l} (1-p)^{k_l}. \quad (1.1.3)$$

Celkový počet kroků n je součet kroků vpravo k_p a kroků vlevo k_l .

Dále bude platit, že:

Střední počet kroků vpravo je	$\langle k_p \rangle = p \cdot n$
Střední počet kroků vlevo je	$\langle k_l \rangle = n - \langle k_p \rangle = (1-p) \cdot n$
Variance středního počtu kroků je	$\sigma^2 = \langle k_p^2 \rangle - \langle k_p \rangle^2 = np(1-p)$



Obrázek 2: Pravděpodobnost P nalezení náhodného chodce v určité vzdálenosti od počátku pro počet kroků $n = 50$ a pravděpodobnosti $p = 0, 2$ (modře); $0, 5$ (červeně); $0, 7$ (žlutě).

Z grafu je zřejmé, že při pravděpodobnosti $p = 0,5$ bude graf symetricky rozprostřen okolo počátku. Taková procházka se nazývá symetrická. Střední hodnota symetrické procházky bude $\mu = 0$ a střední kvadratická odchylka (variance) $\sigma = \sqrt{n}$. Hodnota σ vyjadřuje jak se pravděpodobnostní rozdělení chová okolo jeho střední hodnoty μ . Z grafu (Obrázek 2) je vidět, že pravděpodobnost nalezení chodce v určitém místě bude se zvyšující se vzdáleností od střední hodnoty rychle klesat.

1.2 Dvourozměrná procházka

Pro dvourozměrnou diskrétní procházku si můžeme představit nekonečnou plochu (město), protkanou čtvercovou sítí. Chodec se ve městě může pohybovat pouze po této síti vždy o krok stejné délky z jedné křižovatky sítě na libovolnou ze čtyř křižovatek přilehlých. Můžeme říct, že dvourozměrná procházka je kombinace dvou jednorozměrných procházek po přímcích, jež jsou na sebe kolmé. Pokud u jednorozměrné procházky určujeme posun vlevo či vpravo podle toho, zda padne rub nebo líc mince, dá se říct, že u dvourozměrné procházky musíme tento hod provést dvakrát na každý vykonaný krok chodce. V prvním hod mincí rozhodneme, po které z dvou na sebe kolmých přímků se budeme pohybovat. Při druhém hod mincí určíme, zda provedeme krok vlevo nebo vpravo (tomu u svislé přímků odpovídá krok nahoru nebo dolů). Pokud bude mince vyvážená, rub i líc padá se stejnou pravděpodobností $p=1/2$, bude procházka opět symetrická. Každá ze čtyř cest proběhne také se stejnou pravděpodobností $p=1/4$. Nastavení mince můžeme různými způsoby měnit a získávat tak procházky, které již symetrické nebudou. Bude-li například převažovat posun vpravo nad posunem vlevo a posun nahoru nad posunem dolů, najdeme chodce po libovolném počtu kroku s největší pravděpodobností ve části města ohraničené polopřímkou směřující od počátku směrem doprava a polopřímkou směřující od počátku směrem nahoru tj. první kvadrant.

Obecnějším případem je následující situace. Uvážíme, že se chodec může pohybovat libovolně do všech směrů. Pohyb tak obecně můžeme popsat vektorem o dvou komponentách

$$\vec{r}(t) = (x(t), y(t))^T$$

odpovídajících pohybu do navzájem kolmých směrů. Dále

$$\vec{r}(t) = \vec{r}(t - \Delta t) + \vec{\eta}(t) \quad ,$$

kde $\vec{\eta}(t)$ je nezávislý přírůstek. Omezíme se opět na diskrétní průběh a kroky stejné délky l . Kroky $\vec{r}_j = (x_j, y_j)^T, |\vec{r}_j| = l, j \in \mathbb{N}$ můžeme vyjádřit za pomoci fáze jako $r_j = l \cdot e^{i\Phi_j}$, kde $\Phi_j \in [0, 2\pi]$. Z požadavku náhodnosti vektoru budou fáze Φ_j náhodné. Položme nejprve pro jednoduchost délku kroku $l=1$. Po n provedených krocích pak bude pozice chodce \vec{r} dána

jako

$$\vec{r} = \sum_{j=1}^n \vec{r}_j. \quad (1.2.1)$$

Vyjádříme-li vztah (1.2.1) za pomoci fáze získáme vztah

$$r = \sum_{j=1}^n e^{i\phi_j}. \quad (1.2.2)$$

Z toho pro čtverec absolutní hodnoty a pro střední hodnotu budou platit vztahy

$$|r|^2 = \sum_{j=1}^n e^{i\phi_j} \sum_{k=1}^n e^{-i\phi_k} = n + \sum_{j,k=1, j \neq k}^n e^{i(\phi_j - \phi_k)} \quad (1.2.3)$$

$$\langle |r|^2 \rangle = n + \left\langle \sum_{j,k=1, j \neq k}^n e^{i(\phi_j - \phi_k)} \right\rangle. \quad (1.2.4)$$

Neboť z náhodnosti fází plyne i náhodný rozdíl fází, bude $\left\langle \sum_{j,k=1, j \neq k}^n e^{i(\phi_j - \phi_k)} \right\rangle = 0$. Střední vzdálenost od počátku tedy bude $|r| = \sqrt{n}$. Nebude-li délka kroku l jednotková, bude platit $|r| = l\sqrt{n}$.

1.3 Aplikace

Teorie popisující náhodnou procházku se dá využít v řadě různých vědeckých oborů. Například v ekonomii existuje Náhodná procházková hypotéza [10], která zvažuje náhodný vývoj cen aktiv na trhu. Ve fyzice se dá náhodná procházka využít jako zjednodušený model transportních jevů (například Brownova pohybu [4], [31]) a jiných. V psychologii vysvětluje vztah mezi dobou jakou člověk potřebuje k učinění určitého rozhodnutí a pravděpodobností, že rozhodnutí bude učiněno. V genetice náhodná procházka popisuje vlastnosti genetických odchylek. V matematice se používá k výpočtu řešení Laplaceovy rovnice $\Delta\Phi=0$. Ve

2. světové válce byla náhodná procházka použita jako model pro unklého válečného zajatce. V ekologii může být náhodná procházka využita k popisu pohybu zvířat, příležitostně i jako model pro pohyb lidí. Využívá se také ke studiu polymerů, kde popisuje ideální řetězec [21], [22]. V informatice se využívá k odhadování velikosti webu. Při výzkumu mozku se za pomoci náhodné procházky dají modelovat kaskády neuronů startující mozek. V oblasti hazardu se využívá k modelování hazardních her. Bylo zjištěno, že také pohybující se bakterie konají náhodnou procházku, a to asymetrickou.

1.3.1 Wienerův proces (Brownův pohyb)

Wienerovým procesem nazýváme náhodnou procházku s infinitezimálně malými kroky. Pro tento proces se můžeme setkat i s jiným názvem, a to Brownův pohyb. Brownův pohyb je neustálý náhodný pohyb částic v kapalinách a plynech, jenž byl poprvé pozorován biologem Robertem Brownem [4], [31]. Z matematického pohledu je Wienerův proces stochastický proces, a jeden z nejlépe známých Léviho procesů (proces stochastický kde přírůstky jsou nezávislé na poloze).

Wienerův proces hraje důležitou roli jak v čisté tak aplikované matematice. V aplikované matematice je využíván k reprezentaci integrálu Gaussovského bílého šumu (příloha A), jehož využití najdeme v elektrotechnice k modelování šumu. V čisté matematice hraje důležitou roli ve stochastickém počítání nebo také při studiu harmonických funkcí. Wienerův proces je také řídicím procesem pro Schramm-Loewnerův vývoj (pravděpodobnostní teorie, druh náhodných rovinných křivek založených na řešení Lownerovy diferenciální rovnice s Brownovým pohybem jako vstupem), známý pod zkratkou SLE (Schramm-Loewner evolution). Z použití ve fyzice můžeme mimo popisu Brownova pohybu zmínit, že Wienerův proces tvoří základ pro formulaci dráhového integrálu v kvantové mechanice.

Wienerův proces $W(t)$, je charakterizován třemi základními vlastnostmi:

- 1) $W(0)=0$
- 2) $t \rightarrow W(t)$ (trajektorie procesu) je skoro všude spojitá
- 3) $W(t)$ má na poloze nezávislé přírůstky s rozdělení $W(t)-W(s) \sim N(0,t-s)$,
pro $0 \leq s < t$

Kde $W(t)$ jsou přírůstky (infinitezimálně malé kroky), $N(\mu, \sigma^2)$ značí normální rozdělení se střední hodnotou μ a σ^2 je rozptyl. Třetí podmínka na nezávislé přírůstky na poloze znamená, že $W(t_1)-W(s_1)$ a $W(t)-W(s)$ jsou nezávislé pro $0 \leq s \leq t \leq s_1 \leq t_1$

Pro hustotu pravděpodobnosti normálního rozdělení platí vztah

$$\rho(x) = \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{(x-\mu)^2}{2\sigma^2}}. \quad (1.3.1.1)$$

Hustota pravděpodobnosti pro fixní čas $t > 0$ u Wienerova procesu je (z vlastnosti 3) normální rozdělení se střední hodnotou $\mu = 0$ rozptylem $\sigma^2 = t$, platí tedy vztah

$$\rho_{W(t)}(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi t}} e^{-\frac{x^2}{2t}}. \quad (1.3.1.2)$$

1.3.2 Náhodná procházková hypotéza

Náhodná procházková hypotéza je finanční teorie popisující vývoj akcií na trhu. Už na přelomu 20. století se francouzský matematik Louis Jean-Baptiste Alphonse Bachelier ve své disertační práci s názvem „Teorie Spekulace“ publikované roku 1900 zabýval využitím Brownova pohybu ke studiu akciových trhů. Byla to vůbec první práce využívající vyšší matematiku ke studiu financí. Louis Bachelier je díky své práci označován za první osobu, která modelovala Brownův pohyb.

První samostatný koncept vytvořil profesor Massachusettského technického institutu Paul Cootner roku 1964 v knize „The Random Character of Stock Market Prices“ [11]. Ačkoliv byla hypotéza známá už dříve, populární se stala teprve roku 1973 kdy profesor ekonomie z Princetonské University Burton Malkiel napsal knihu „A Random Walk Down Wall Street“ [10]. Hypotéza uvádí, že minulé a nynější ceny akcií nemají žádný vliv na předpověď cen budoucích. Pohyb ceny se vyvíjí jako náhodná procházka, proto vývoj cen akcií nemůže být předvídan. To podle Malkiela platí hlavně pro krátká časová období. Podle této hypotézy jsou jakékoliv analýzy pokoušející se předpovědět budoucí cenu akcií zbytečné.

Profesor Malkiel testoval hypotézu s pomocí svých studentů. Každému dal pomyslný balíček akcií s počáteční hodnotou padesát dolarů, přičemž výsledná hodnota balíčku po každém uplynulém dni byla závislá na hoď mincí. Pokud padl líc mince cena šla o stupeň nahoru, pokud padl rub mince šla cena o stupeň dolů. Jako při symetrické náhodné procházce

byla stejná pravděpodobnost pro možnost, že se cena zvýší či naopak sníží. Výsledná data nechal burzovním analytikem vynést do grafu. Když analytik graf viděl, řekl profesorovi, že musí okamžitě nakoupit akcie. Malkiel mu pověděl, že data pro graf jsou založena pouze na házení mincí. Analytik byl z toho zjištění velice nešťastný, avšak Malkiel usoudil, že to značí ničemu nepodléhající náhodný vývoj akciových trhů. Podle Malkiela je nejvýhodnější dlouhodobá investice, akcie nakoupit a držet.

Tato hypotéza našla uplatnění i mimo finanční trhy, a to na sportovním poli. Ve Philadelphijském basketbalovém týmu NBA (National Basketball Association) psychologové zkoumali u všech hráčů každý koš během jedné a půl sezóny. Výsledkem bylo, že neexistuje žádný kladný vztah mezi košem a výsledkem následujícího pokusu o koš.

Kritikové této teorie však tvrdí, že se ceny akcií vskutku řídí podle specifických znaků a tyto znaky lze s dobrou přesností předpovídat. K potvrzení tohoto faktu existuje jak několik ekonomických studií, tak i kniha dvou profesorů ekonomie (Andrew W. Lo a Archie Craig MacKinlay) s názvem „Non Random Walk Down Wall Street“ [28]. V knize se dvojice profesorů snaží dokázat nesprávnost náhodné procházkové hypotézy.

Je pravdou, že s vývojem techniky má každý k aktuálním informacím z trhu přístup mnohem dříve, než tomu bylo v roce 1973, kdy vyšla Malkielova kniha o náhodné procházkové hypotéze. Mnoho lidí se proto domnívá, že hypotéza popisuje spíše tehdejší akciové trhy, které neodpovídají těm dnešním. Investice se dnes staly zábavou pro každého. Vzhledem k faktům argumentujícím pro hypotézu i proti ní je na každém investujícím jedinci zda je ji nakloněn či není.

1.3.3 Ideální řetězec

Další z aplikací náhodné procházky je ideální řetězec, známý také pod názvem volně připojitelný řetězec (freely-joined chain). Je to nejjednodušší model sloužící k popisu polymerů, neboť jako u ideálního plynu se zde zanedbávají všechny interakce mezi částicemi tvořící řetězec, což jsou monomery. Model popisuje monomery jako tuhé tyčinky s pevnou délkou. Každá tyčinka je připojena k předcházející libovolně, není žádný vztah mezi orientací tyčinky a tyčinek k ní přiléhajících.

Řekněme, že polymer je složen z n monomerů, kde délka každého z nich je l . Pokud neuvažujeme žádné působení sil mezi monomery, bude $d=n.l$ celková délka polymeru po jeho rozvinutí. Tyčinky (monomery) jsou orientovány náhodně, necht' každé z nich odpovídá jeden z vektorů $\vec{r}_i; 1 \leq i \leq n$, přičemž vektory jsou stejné délky l . Zavedeme vektor \vec{R} jako spojnicí počátku a konce řetězce. Z náhodnosti rozmístění monomerů vzhledem k

monomerům okolním platí, že

$$\langle \vec{R} \rangle = \sum_{i=1}^n \langle \vec{r}_i \rangle = \vec{0}. \quad (1.3.3.1)$$

Pro druhou mocnitu spojnice bude platit následující:

$$\begin{aligned} \langle \vec{R}^2 \rangle &= \langle \vec{R}_n \cdot \vec{R}_n \rangle \\ &= \left\langle \left(\sum_{i=1}^n \vec{r}_i \right) \cdot \left(\sum_{j=1}^n \vec{r}_j \right) \right\rangle \\ &= \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n \langle \vec{r}_i \cdot \vec{r}_j \rangle \\ &= l^2 \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n \langle \cos \theta_{ij} \rangle \end{aligned} \quad (1.3.3.2)$$

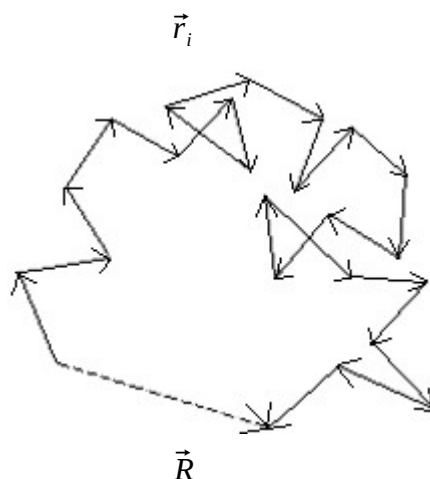
Protože mezi úhly otočení není žádný vztah, musí platit $\langle \cos \theta_{ij} \rangle = 0$ pro $i \neq j$. Pro kvadrát spojnice dostáváme

$$\langle \vec{R}^2 \rangle = nl^2. \quad (1.3.3.3)$$

Nalezení střední hodnot je jednoduché. Pro pravděpodobnostní rozdělení je situace složitější, ale řešitelná. Dá se dokázat, že pro vektor \vec{R} platí následující pravděpodobnostní rozdělení:

$$\rho(\vec{R}) = \left(\frac{3}{2\pi nl^2} \right)^{3/2} e^{-\frac{3\vec{R}^2}{2nl^2}}. \quad (1.3.3.4)$$

Odvození tohoto vztahu je popsáno například v [22].



Obrázek 3: Krátký ideální řetězec s vyznačeným vektorem spojnice \vec{R}

Místo vektoru spojnice počátku a konce řetězce se ve fyzice polymerů častěji užívá poloměru rotace makromolekuly R_G . Tento údaj je mnohem intuitivnější, dává dobrou představu o velikosti útvaru a navíc jej lze i experimentálně ověřit. Kvadrát poloměru rotace R_G je definován jako

$$R_G^2 \stackrel{\text{def}}{=} \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n (\vec{R}_i - \vec{R}_{cm})^2 \quad (1.3.3.5)$$

kde

$$\vec{R}_{cm} \stackrel{\text{def}}{=} \frac{1}{n} \sum_{j=1}^n (\vec{R}_j). \quad (1.3.3.6)$$

Z toho pro poloměr rotace máme

$$R_G^2 = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n (\vec{R}_i - \vec{R}_j)^2. \quad (1.3.3.7)$$

V našem případě volně připojitelného řetězce platí

$$R_G = \sqrt{\frac{n}{6}} l. \quad (1.3.3.8)$$

Kvadrát poloměru rotace je průměr kvadrátu vzdálenosti libovolného bodu řetězce. Poloměr rotace není roven klasickému fyzikálnímu poloměru. Dá se o něm však říct, že je to amplituda fluktuace systému.

Jako další, složitější modely polymerů zanedbávající interakce mezi monomery můžeme uvést například volně rotující řetězec. V tomto modelu uvažujeme jak stejnou délku tyčinek tak i úhel θ mezi tyčinkami stejný. V případě velmi tuhých řetězců se používá modelu červovitého řetězce. Zde máme stejné délky tyčinek a stejný úhel θ jako pro volně rotační řetězec, jen valenční úhelbereme θ velmi malý. Proto můžeme $\cos\theta$ aproximovat. Pro tyto modely obecně platí stejné vztahy pro výpočet kvadrátu vektoru spojnice počátku a konce řetězce \vec{R} (1.3.3.2) a rotačního poloměru R_G (1.3.3.5-7).

2 Kvantová procházka

Kvantová procházka je analogií náhodné procházky pro kvantovou částici. Chová se však jinak než klasická procházka, tedy jinak než bychom očekávali, což je velice zajímavý námět ke studiu. Kvantovou procházku můžeme stejně jako procházku klasickou dělit na diskrétní a spojitou.

U diskrétní kvantové procházky uvažujme, že polohu částice na přímce popíšeme pomocí bazických vektorů $|i\rangle$, $i \in \mathbb{Z}$. Náhodný krok u klasické procházky zde nahradíme superpozicí možných kroků

$$|i\rangle \rightarrow a|i-1\rangle + b|i+1\rangle. \quad (2.1)$$

To znamená, že se chodec s pravděpodobností a posune vlevo a s pravděpodobností b vpravo. Požadujeme přitom unitaritu, symetrii vůči posunutí a aby obraz bazového vektoru tvořila superpozice daných dvou přílehlých vektorů. Těmto podmínkám ale budou vyhovovat pouze triviální případy a to pro pohyb v jednom směru (tedy buď platí $b = 0$ a $|a| = 1$, nebo se naopak $a = 0$ a $|b| = 1$). Řešením tohoto problému je daný prostor rozšířit o takzvaný prostor „mince“. Bázi prostoru H_C tvoří vektory $|\uparrow\rangle, |\downarrow\rangle$, které odpovídají pohybu vpravo padne-li líc mince, vlevo padne-li rub. To znamená, že v každém kroku děláme dvě operace. Hození mince C a následný posun S . Kvantová procházka je tedy definována na tenzorovém součinu těchto dvou prostorů $H = H_S \otimes H_C$ působením transformace U .

$$U = S.(C \otimes I) \quad (2.2)$$

Operátor S působí na bazické vektory tenzorového součin následujícím způsobem:

$$|i\rangle \otimes |\uparrow\rangle \xrightarrow{S} |i+1\rangle \otimes |\uparrow\rangle \quad (2.3)$$

$$|i\rangle \otimes |\downarrow\rangle \xrightarrow{S} |i-1\rangle \otimes |\uparrow\rangle \quad (2.4)$$

A C je unitární transformace, takzvaná „ mince“.

$$|i\rangle \otimes |\uparrow\rangle \xrightarrow{C} |i\rangle \otimes |\uparrow\rangle + |i\rangle \otimes |\downarrow\rangle \quad (2.5)$$

$$|i\rangle \otimes |\downarrow\rangle \xrightarrow{C} |i\rangle \otimes |\uparrow\rangle + |i\rangle \otimes |\downarrow\rangle \quad (2.6)$$

2.1 Kvantová procházka po přímce

Podle toho, jakou zvolíme minci C , můžeme ovlivnit vlastnosti procházky. Častou volbou mince $C \in \mathbb{C}^{2 \times 2}$ je Hadamardova mince H , neboť patří mezi mince, u kterých můžeme pozorovat vlastnosti analogické klasické procházce a navíc má jednoduché vyjádření. Pokud se rozhodneme pro měření po jedné iteraci (hod mincí a následný posun) obdržíme stejné pravděpodobnostní rozdělení jako u klasické procházky probíhající s pravděpodobností $p = 1/2$ (krok vlevo stejně pravděpodobný jako krok vpravo). Je to dáno faktem, že absolutní hodnoty prvků mince budou stejné (a to $1/\sqrt{2}$). Hadamardova mince bude tvaru

$$H = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}. \quad (2.7)$$

Podíváme se jak působí operátor U , kde jako minci C uvažujeme Hadamardovu minci H , na počáteční stav $|0\rangle \otimes |\downarrow\rangle$.

$$|0\rangle \otimes |\downarrow\rangle \xrightarrow{H} \frac{1}{\sqrt{2}} (|0\rangle \otimes (|\uparrow\rangle - |\downarrow\rangle)) \xrightarrow{S} \frac{1}{\sqrt{2}} (|1\rangle \otimes |\uparrow\rangle - |-1\rangle \otimes |\downarrow\rangle) \quad (2.8)$$

Jde vidět, že po první iteraci každý ze stavů $|1\rangle \otimes |\uparrow\rangle, |-1\rangle \otimes |\downarrow\rangle$ nastane s pravděpodobností $1/2$. Minci s touto vlastností se říká vyvážená. Působení operátoru U ve více po sobě následujících iteracích na počáteční stav $|0\rangle \otimes |\downarrow\rangle$ bude vypadat

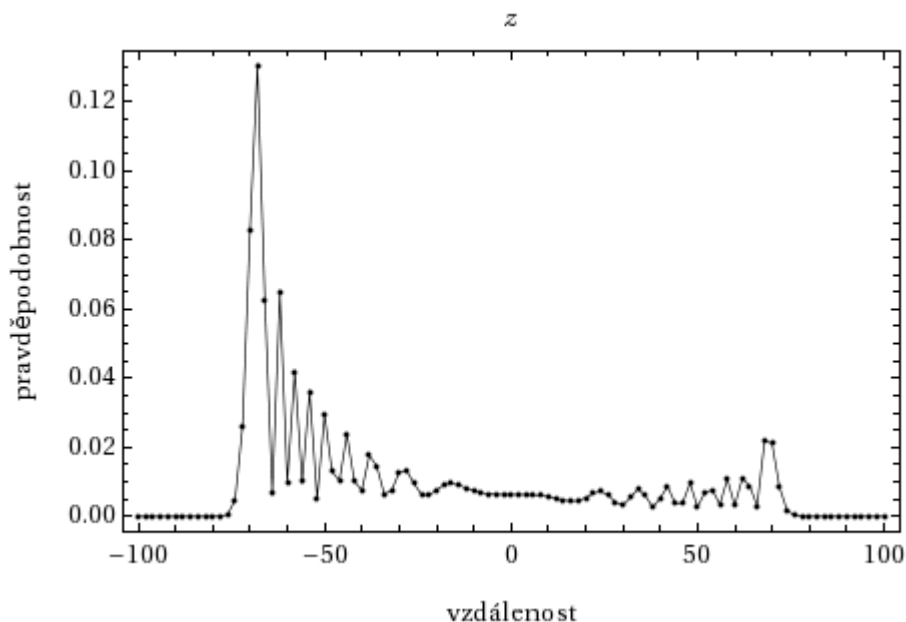
$$|0\rangle \otimes |\downarrow\rangle \xrightarrow{U} \frac{1}{\sqrt{2}} (|1\rangle \otimes |\uparrow\rangle - |-1\rangle \otimes |\downarrow\rangle) \quad (2.9)$$

$$\xrightarrow{U^2} \frac{1}{2} (|2\rangle \otimes |\uparrow\rangle - |0\rangle \otimes (|\uparrow\rangle - |\downarrow\rangle) + |-2\rangle \otimes |\downarrow\rangle) \quad (2.10)$$

$$\xrightarrow{U^3} \frac{1}{2\sqrt{2}} (|3\rangle \otimes |\uparrow\rangle + |1\rangle \otimes |\downarrow\rangle + |-1\rangle \otimes |\uparrow\rangle - 2|-1\rangle \otimes |\downarrow\rangle - |-3\rangle \otimes |\downarrow\rangle) \quad (2.11)$$

Zde už je vidět rozdíl oproti klasické procházce. Pravděpodobnostní schéma této procházky bude mnohem složitější než u klasické procházky. Už ve třetím kroku je zřetelná asymetrie v pozicích $|1\rangle$ (proběhne s pravděpodobností $1/8$) a $|-1\rangle$ (proběhne s pravděpodobností $5/8$). Pravděpodobnostní rozdělení této kvantové procházky tedy nebude symetrické, částice

má tendenci jít doleva. Je to proto, že Hadamardova mince násobí číslem -1 pouze v případě vektoru $|\downarrow\rangle$. Kdybychom za počáteční stav zvolili $|0\rangle\otimes|\uparrow\rangle$ chovala by se procházka stejně, jen bychom ji v počátku museli otočit okolo pravděpodobnostní osy. Částice v tomto počátečním stavu by měla tendenci jít doprava.

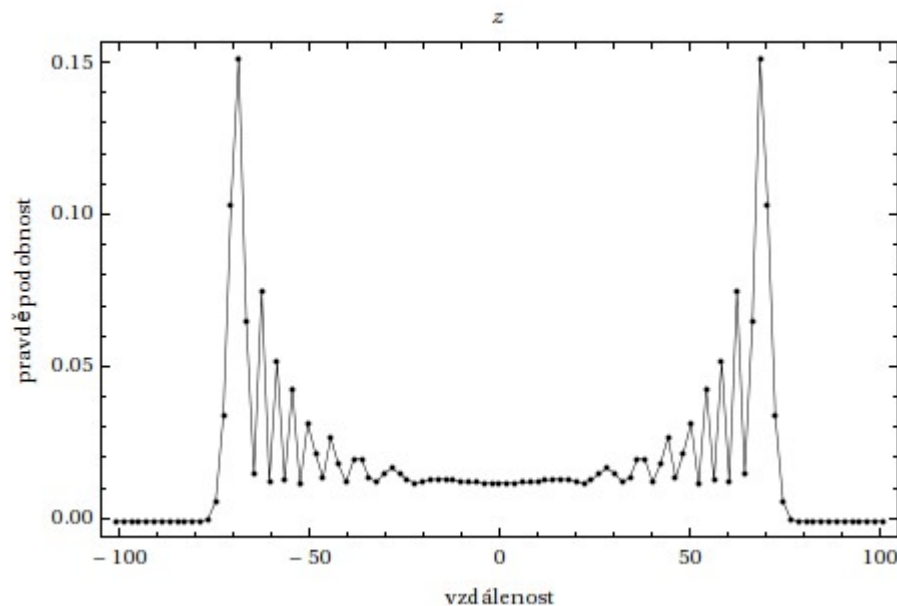


Obrázek 4: Graf pravděpodobnosti nalezení částice v určité vzdálenosti při počátečním stavu $|0\rangle\otimes|\downarrow\rangle$ po provedených 100 krocích

Lze získat i symetrické pravděpodobnostní rozdělení. Například zvolíme-li za počáteční stav superpozici vektorů $|\uparrow\rangle, |\downarrow\rangle$

$$\frac{1}{\sqrt{2}}(|0\rangle\otimes|\uparrow\rangle+i|0\rangle\otimes|\downarrow\rangle), \quad (2.12)$$

který spojuje oba výše popsané počáteční stavy. Z obrázku 5 je vidět, že při této počáteční podmínce bude získané pravděpodobnostní rozdělení opravdu symetrické.



Obrázek 5: Graf pravděpodobnosti nalezení částice v určité vzdálenosti při symetrickém

počátečním stavu $\frac{1}{\sqrt{2}}(|0\rangle \otimes |\uparrow\rangle + i|0\rangle \otimes |\downarrow\rangle)$ po provedených 100 krocích

Kvantová procházka po přímce je jednoduchý příklad, na kterém je dobře vidět mnoho vlastností procházky. Často také slouží jako nástroj k popisu procházky na komplikovanějších grafech.

V [9] Fahri a Gutman definovali spojitou kvantovou procházku v čase. Není zde nutné zavádět minci, místo toho vezmeme soubor stavů $|i\rangle$, $i \in \mathbb{Z}$ a definujeme Hamiltonián H jako

$$H|i\rangle = -|i-1\rangle + 2|i\rangle - |i+1\rangle. \quad (2.13)$$

Procházka ve spojitém čase je pak jen aplikací operátoru U^{iHt} .

2.2 Pohybová rovnice kvantové procházky

Jak jsme již uvedli, chování chodce při klasické symetrické náhodné procházce po přímce můžeme popsat jako situaci, kdy házíme mincí. Předem určíme která strana mince bude odpovídat kroku vpravo či vlevo. Tedy podle toho, zda padne rub nebo líc, půjde chodec doprava nebo doleva.

U kvantové částice je třeba, jak bylo zmíněno v předchozí kapitole, zavést ještě prostor mince. Můžeme uvažovat, že tento prostor bude tvořit další stupeň volnosti částice. Tento nový stupeň volnosti bude řídit pohyb částice 'vlevo' a 'vpravo', čemuž odpovídají vlastní vektory $|\downarrow\rangle$ a $|\uparrow\rangle$. V jakémkoliv daném čase bude částice ve stavu popsáném superpozicí těchto dvou stavů $|\downarrow\rangle, |\uparrow\rangle$, proto je i výsledný stav popsán dvousložkovou vlnovou funkcí, kde jedna složka odpovídá pohybu 'vlevo', druhá pohybu 'vpravo'. V každém kroku minci odpovídá jistá unitární transformace a částice se pak pohybuje buď krok doprava (pro $|\uparrow\rangle$ stav) nebo krok doleva (pro $|\downarrow\rangle$ stav).

Uvažujme opět Hadamardovu minci (2.4)

$$H = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix},$$

jejíž působení na počáteční stav je popsáno v předchozí kapitole viz (2.5). Nyní se budeme snažit najít řešení vlnové funkce v čase. Vlnová funkce $\psi(n, t)$ bude popisovat pozici částice n v čase t , a jak jsme se již zmínili, bude mít 2 komponenty. Tyto komponenty odpovídají amplitudám nalezení částice v bodě n a čase t ve stavu $|\downarrow\rangle$ (znamenající pohyb vlevo) nebo $|\uparrow\rangle$ (znamenající pohyb vpravo).

$$\psi(n, t) = \begin{pmatrix} \psi_{\downarrow}(n, t) \\ \psi_{\uparrow}(n, t) \end{pmatrix} \quad (2.1.1)$$

Časový vývoj vlnové funkce $\psi(n, t)$ bude následovný:

$$\psi(n, t+1) = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & -1 \end{pmatrix} \psi(n-1, t) + \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \psi(n+1, t) \quad (2.1.2)$$

Kde označíme

$$\frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & -1 \end{pmatrix} = M_{up} \quad \text{a} \quad \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} = M_{down} \quad (2.1.3)$$

Nechť počáteční podmínky pro tento vztah pro stav $|\downarrow\rangle$ jsou:

$$\psi(0, 0) = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} \quad \text{a} \quad \psi(n, \cdot) = \begin{pmatrix} \cdot \\ \cdot \end{pmatrix} \quad \text{pro } n \text{ nenulové}$$

Hadamardova procházka se za pomoci této formulace redukuje na řešení dvoudimenzionální lineární diferenční rovnice.

2.2 Kvantitativní analýza procházky, Fourierova transformace, metoda stacionární fáze

K tomu, abychom zjistili vývoj kvantové procházky v čase, využijeme Fourierovy transformace. Vzhledem k tomu, že časový vývoj je unitární, můžeme jej vyjádřit za pomoci vlastních čísel a vlastních vektorů. Toto vyjádření však bývá poměrně složité a tedy ne zcela vhodné pro další výpočet. Použijeme proto Fourierovu transformaci ke zjednodušení tohoto vyjádření a další výpočet budeme provádět ve Fourierově obrazu, přičemž kdykoliv se provedením inverzní Fourierovy transformace můžeme dostat zpět k původním proměnným.

Uvažujme že se pohybujeme ve Schwarzově prostoru $S(\mathbb{R})$. Pro danou f ze Schwarzova prostoru definujeme vztahem (2.2.1) funkci \tilde{f} :

$$\tilde{f}(y) := \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{\mathbb{R}^n} e^{-iy \cdot x} f(x) dx \quad (2.2.1)$$

Přítom bude platit že \tilde{f} bude také ze Schwarzova prostoru (důkaz např. v [24]). Toto zobrazení budeme značit $\mathcal{F}_0: S(\mathbb{R}^n) \rightarrow S(\mathbb{R}^n)$, tedy $\mathcal{F}_0 f := \tilde{f}$. K zobrazení \mathcal{F}_0 existuje inverzní. Označme jej \mathcal{F}_0' a je dané vztahem

$$(\mathcal{F}_0' f)(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{\mathbb{R}^n} e^{ix \cdot y} f(y) dy. \quad (2.2.2)$$

Vzhledem k tomu že Schwarzův prostor je hustý v prostoru integrabilních funkcí L^1 a platí $\|\mathcal{F}_0 f\|_\infty \leq \text{const} \cdot \|f\|_1$ kde $\|\cdot\|_1$ je norma v prostoru L^1 , můžeme zobrazení \mathcal{F}_0 spojitě rozšířit z prostoru L^1 do prostoru spojitých funkcí s kompaktním nosičem C_∞ .

Fourierovou transformací tedy nazveme zobrazení $\mathcal{F}: L^1 \rightarrow C_\infty$. Mějme funkci $f \in L^1$, pak pro Fourierovu transformaci funkce f bude platit:

$$\tilde{f}(y) = (\mathcal{F} f)(y) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{\mathbb{R}^n} e^{-iy \cdot x} f(x) dx \quad (2.2.3)$$

V našem případě funkce není spojitě závislá na vzdálenosti (na proměnné n), proto zde Fourierova transformace ve směru od proměnné n k proměnné k nebude dána integrálem.

Mějme funkci $f: Z \rightarrow C$, její Fourierova transformace $\tilde{f}: [-\pi, \pi] \rightarrow C$ je definována jako

$$\tilde{f}(k) = \sum_n f(n) e^{ikn}. \quad (2.2.4)$$

Inverzní Fourierova transformace bude

$$f(n) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} \tilde{f}(k) e^{-ikn} dk. \quad (2.2.5)$$

Fourierova transformace, kterou použijeme k řešení pohybové rovnice kvantové procházky na přímce, je izomorfismus z prostoru $l^2(C)$ [24] do prostoru kvadraticky integrabilních funkcí na intervalu $(-\pi, \pi)$, tj. $L^2(-\pi, \pi)$. Z vlnové funkce $\psi(n, t)$ (2.1.1) tak získáme funkci $\tilde{\psi}(k, t)$ ve Fourierově obrazu, která je pro analýzu chování v čase jednodušší. Zpětnou transformací pak získáme hledané řešení v proměnných pozice n a času t . Funkce $\tilde{\psi}(k, t)$ pro $k \in (-\pi, \pi)$ bude dána jako

$$\tilde{\psi}(k, t) = \sum_n \psi(n, t) e^{ikn}. \quad (2.2.6)$$

A pro všechna k a počáteční stav 'vlevo' bude platit $\tilde{\psi}(k, 0) = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$. Ze vztahů (2.1.1), (2.1.2), (2.2.6) odvodíme časový vývoj vlnové funkce $\tilde{\psi}(k, t)$ ve Fourierově obrazu.

$$\begin{aligned} \tilde{\psi}(k, t+1) &= \sum_n (M_{up} \psi(n-1, t) + M_{down} \psi(n+1, t)) e^{ikn} \\ &= e^{ik} M_{up} \sum_n \psi(n-1, t) e^{ik(n-1)} + e^{-ik} M_{down} \sum_n \psi(n+1, t) e^{ik(n+1)} \\ &= (e^{ik} M_{up} + e^{-ik} M_{down}) \tilde{\psi}(k, t) \end{aligned} \quad (2.2.7)$$

Označíme

$$M_k = (e^{ik} M_{up} + e^{-ik} M_{down}) = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} e^{-ik} & e^{-ik} \\ e^{ik} & -e^{ik} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} e^{-ik} & 0 \\ 0 & e^{ik} \end{pmatrix} \cdot H \quad (2.2.8)$$

a dostaneme jednoduchý tvar rovnice (2.2.7):

$$\tilde{\psi}(k, t+1) = M_k \tilde{\psi}(k, t) \quad (2.2.9)$$

Tímto máme rekurentní vzorec ve Fourierově obrazu. Z něj a ze znalosti počátečního stavu plyne vztah $\tilde{\psi}(k, t) = M_k^t \tilde{\psi}(k, 0)$.

K dalšímu zjednodušení popisu využijeme toho, že M_k je unitární matice z prostoru $\mathbb{C}^{2,2}$. Pak ji můžeme napsat jako

$$M_k = \lambda_k^1 |v_k^1\rangle\langle v_k^1| + \lambda_k^2 |v_k^2\rangle\langle v_k^2|, \quad (2.2.10)$$

kde λ_k^1, λ_k^2 jsou vlastní čísla a $|v_k^1\rangle, |v_k^2\rangle$ vlastní vektory matice M_k . Ze znalosti vlastních čísel a vlastních vektorů matice M_k obdržíme pro M_k^t z rovnice (2.2.9) pro časový vývoj jednoduché vyjádření

$$M_k^t = (\lambda_k^1)^t |v_k^1\rangle\langle v_k^1| + (\lambda_k^2)^t |v_k^2\rangle\langle v_k^2|. \quad (2.2.11)$$

Vlastní hodnoty matice M_k jsou $\lambda_1 = \exp(-i\omega_k)$ a $\lambda_2 = \exp(i(\pi + \omega_k))$, kde ω_k je definováno vztahem $\omega_k = (\sin \omega_k)/\sqrt{2}$, tedy ω_k je úhel z intervalu $(-\pi/2, \pi/2)$. Po vypočtení vlastních vektorů bychom získali vlnovou funkci ve Fourierově obrazu ve tvaru:

$$\tilde{\psi}_\downarrow(k, t) = \frac{1}{2} \left(1 + \frac{\cos k}{\sqrt{1 + \cos^2 k}}\right) e^{-i\omega_k t} + \frac{(-1)^t}{2} \left(1 - \frac{\cos k}{\sqrt{1 + \cos^2 k}}\right) e^{i\omega t} \quad (2.2.12)$$

$$\tilde{\psi}_\uparrow(k, t) = \frac{ie^{ik}}{2\sqrt{1 + \cos^2 k}} (e^{-i\omega_k t} - (-1)^t e^{i\omega_k t}) \quad (2.2.13)$$

Zpětnou Fourierovou transformací se dostaneme zpět do reálných proměnných, pro vlnovou funkci tak získáme tvar:

$$\psi_\downarrow(n, t) = \frac{1 + (-1)^{n+t}}{2} \int_{-\pi}^{\pi} \frac{dk}{2\pi} \left(1 + \frac{\cos k}{\sqrt{1 + \cos^2 k}}\right) e^{-i(\omega_k t + kn)} \quad (2.2.14)$$

$$\psi_\uparrow(n, t) = \frac{1 + (-1)^{n+t}}{2} \int_{-\pi}^{\pi} \frac{dk}{2\pi} \left(\frac{e^{ik}}{\sqrt{1 + \cos^2 k}}\right) e^{-i(\omega_k t + kn)} \quad (2.2.15)$$

Budeme-li se zajímat o to, jak se procházka bude chovat v dlouhém časovém období, tedy když čas t pošleme do nekonečna, využijeme metodu známou jako metoda stacionární

fáze. Metoda stacionární fáze popisuje asymptotické chování oscilujících integrálů tvaru:

$$I(a, t) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} g(k) e^{-i\Phi(k, a)t} dk. \quad (2.2.16)$$

Studium chování procházky pro čas t jdoucí do nekonečna odpovídá studiu chování oscilujícího integrálu, to je vidět porovnáme-li vztahy (2.2.13-14) pro řešení pohybové rovnice v reálných proměnných s tvarem oscilujícího integrálu (2.2.15). Z teorie [25], [27] plyne, že exponenciála v integrálu je pro vysoké časy rychle oscilující funkce, a pokud je funkce g hladká, příspěvky k hodnotě integrálu se v přílehlých intervalech budou navzájem rušit. Proto má cenu zkoumat pouze takové body, kde k oscilaci nechochází. Tomu budou odpovídat stacionární body fáze Φ .

3 Klasifikace mincí pro kvantovou procházku na přímce o třech možných stavech

Zkusíme se podívat na kvantovou procházku po přímce, kdy má chodec v každém kroku tři možnosti posunu. Buď se posune doleva nebo zůstane na místě nebo se posune doprava. Prostor mince má tedy tři bazické stavy, označme je jako $|L\rangle$, (vlevo) $|S\rangle$, (stát) $|R\rangle$, (vpravo). V každém kroku na tyto stavy působí unitární transformace takto:

$$|L\rangle = c_{11}|L\rangle + c_{12}|S\rangle + c_{13}|R\rangle \quad (3.1)$$

$$|S\rangle = c_{21}|L\rangle + c_{22}|S\rangle + c_{23}|R\rangle \quad (3.2)$$

$$|R\rangle = c_{31}|L\rangle + c_{32}|S\rangle + c_{33}|R\rangle \quad (3.3)$$

Platí

$$C_L = \begin{pmatrix} c_{11} & c_{12} & c_{13} \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad C_S = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ c_{21} & c_{22} & c_{23} \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad C_R = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ c_{31} & c_{32} & c_{33} \end{pmatrix} \quad (3.4)$$

Matice mince $C = C_L + C_S + C_R$. Pro vlnovou funkci pak v analogii se vztahem (2.1.2) platí:

$$\psi(n, t+1) = C_L \psi(n+1, t) + C_S \psi(n, t) + C_R \psi(n-1, t) \quad (3.5)$$

Po provedení Fourierovy transformace (viz (2.2.8)) získáme pohybovou rovnici ve tvaru:

$$\tilde{\psi}(k, t+1) = \begin{pmatrix} e^{ik} & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & e^{-ik} \end{pmatrix} \cdot C \tilde{\psi}(k, t), \quad (3.6)$$

Z rovnice (3.6) máme pro propagátor U_k ve Fourierově obrazu vztah

$$U_k = \begin{pmatrix} e^{ik} & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & e^{-ik} \end{pmatrix} \cdot C. \quad (3.7)$$

Vektory $\{(e^{ik}, 0, 0), (0, 1, 0), (0, 0, e^{-ik})\}$ jsou vlastní vektory procházky. Odpovídají možným posunům chodce (vpravo, zůstane na místě, vlevo) ve Fourierově obrazu. Hledáme tvar možné unitární transformace C , aby propagátor U_k měl alespoň jedno vlastní číslo nezávislé na proměnné k , neboť lokalizace chodce je s touto vlastností (nezávislostí vlastního čísla na proměnné k), úzce spojena. Očekáváme, že s rostoucím počtem kroků se bude i pravděpodobné nalezení chodce pohybovat směrem doprava a doleva, jak je vidět na obrázcích 4 a 5. Avšak v případě, že alespoň jedno vlastní číslo není závislé na k , můžeme očekávat zajímavější pravděpodobnější rozdělení. Kromě dvou vln jdoucích doprava a doleva bude mít pravděpodobnostní rozdělení ještě jeden vrchol. Ten bude se vzdáleností od počátku exponenciálně klesat. V triviálních případech se chodec může například nacházet jen v několika bodech rozložených okolo počátku. Jak konkrétně se bude pravděpodobnostní rozdělení chovat je však závislé na příslušném tvaru mince a dovolených pohybech chodce. Víme, že alespoň jedna mince pro kterou propagátor bude mít vlastní číslo konstantní existuje. Inui, Konno a Segawa [33] zjistili že právě matice mince tvaru

$$G = \frac{1}{3} \begin{pmatrix} -1 & 2 & 2 \\ 2 & -1 & 1 \\ 2 & 2 & -1 \end{pmatrix}$$

bude požadavku vyhovovat.

3.1 Provedení

Pokusíme se tedy najít omezující podmínky na matici C tak, aby vyhovovala požadavku unitarity [24], [32] a operátor U_k měl jedno vlastní číslo [24], [32] konstantní. Bez újmy na obecnosti toto vlastní číslo můžeme položit rovno jedné. Vzhledem k tomu, že se jedná pouze o matici 3x3, nebudeme ji parametrizovat ale použijeme obecný tvar $C = \{c_{ij}\}$, kde prvky c_{ij} jsou obecně komplexní.

$$C = \begin{pmatrix} c_{11} & c_{12} & c_{13} \\ c_{21} & c_{22} & c_{23} \\ c_{31} & c_{32} & c_{33} \end{pmatrix} \quad (3.1.1)$$

Potom

$$U_k = \begin{pmatrix} e^{ik} & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & e^{-ik} \end{pmatrix} \cdot C = \begin{pmatrix} e^{ik} c_{11} & e^{ik} c_{12} & e^{ik} c_{13} \\ c_{21} & c_{22} & c_{23} \\ e^{-ik} c_{31} & e^{-ik} c_{32} & e^{-ik} c_{33} \end{pmatrix} \quad (3.1.2)$$

Kvůli požadované unitaritě musíme zavést podmínku na determinant $|\det C|=1$. My se však omezíme na $\det C = 1$.

Charakteristická rovnice [32] propagátoru U_k daného vztahem (3.1.2) bude

$$\det C - \lambda(\text{sub}33 + \text{sub}22 + \text{sub}11) + \text{Tr}(U_k)\lambda^2 - \lambda^3 = 0, \quad (3.1.3)$$

kde λ je vlastní číslo propagátoru, $\text{sub}(ij)$ odpovídá subdeterminantu operátoru U_k s vyškrtnutým i -tým řádkem a j -tým sloupcem. $\text{Tr}(U_k)$ je stopa [24], [32] operátoru U_k . Díky požadavku na determinant mince $\det C = 1$ a vlastní číslo propagátoru $\lambda = 1$ se charakteristická rovnice zjednoduší na

$$\text{sub}33 + \text{sub}22 + \text{sub}11 = \text{Tr}(U_k). \quad (3.1.4)$$

Hledáme řešení rovnice (3.1.4). Ta obsahuje tři subdeterminanty a stopu, která je dána součtem tří diagonálních členů. Požadujeme, aby matice C měla všechny prvky konstantní. Rovnice (3.1.4) je však závislá na proměnné k . Otázkou je, jak získat z této rovnice podmínky na tvar koeficientů matice C , které jsou konstantní, tedy nezávislé na proměnné k . Zkusíme proto rozdělit rovnici (3.1.4) na rovnice tři tak, že každému ze tří subdeterminantů na levé straně rovnice přiřadíme jeden člen stopy propagátoru na straně pravé. Takovýchto trojic rovnic bude celkem šest, podle toho, jak na pravé strany rovnic nakombinujeme členy stopy. Řešíme-li každou trojici rovnic vzhledem ke koeficientům matice C zjistíme, že pouze jedna kombinace členů stopy na pravé straně dá pro koeficienty hodnoty nezávislé na proměnné k . Konkrétně to bude kombinace kdy volíme:

$$\text{sub}11 = e^{-ik} c_{33} \quad (3.1.5)$$

$$\text{sub}22 = c_{22} \quad (3.1.6)$$

$$\text{sub}33 = e^{ik} c_{11} \quad (3.1.7)$$

Řešením rovnic (3.1.5-7) dostaneme omezující podmínky pro matici C . Ty jsme získali pouze na základě využití jedničkového determinantu matice C v charakteristické rovnici propagátoru. Proto musíme zpětným dosazením do matice C ověřit, zda podmínky opravdu vyhovují požadavku determinantu rovného jedné. Ač se tímto krokem několik získaných podmínek vyruší, neboť podmínky pro determinant nevyhovují, většina z nich se rozštěpí na několik dalších případů vyhovujících tomuto požadavku. Máme veliký počet podmínek, které jsou však stále závislé na mnoha parametrech. Další omezení získáme požadavkem unitarity. Každou ze získaných podmínek dosadíme opět do původní matice a ověříme zda nebo kdy se součin se sdruženou maticí rovná matici jednotkové, tedy kdy $CC^* = I$. Tímto se počet možných tvarů matice C značně redukuje.

3.2 Klasifikace

Pokusíme se získané podmínky na tvar matice C rozdělit podle počtu nul v matici. Unitární matice rozměru 3×3 přitom může obsahovat nejvýše šest nul.

3.2.1 Šest nul

Matice mince C obsahuje šest nul. Podmínkám unitarity a determinantu rovnému jedné bude v nejjednodušším případě vyhovovat jednotková matice.

$$C_{6nul}^{spec I} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \quad (3.2.1.1)$$

Obecně ale koeficienty v matici bereme komplexní, tedy (3.2.1) je pouze speciálním případem matice:

$$C_{6nul}^I = \begin{pmatrix} \frac{1}{c_{33}} & 0 & 0 \\ c_{33} & 1 & 0 \\ 0 & 0 & c_{33} \end{pmatrix} \quad (3.2.1.2)$$

Platí $|c_{33}| = 1$. Vlastní hodnoty a k nim ve stejném pořadí příslušné vlastní vektory propagátoru U_k (3.1.2) s mincí (3.2.2) jsou:

Vl. hodnoty: $1, c_{33}e^{-ik}, e^{ik}/c_{33}$
 Vl. vektory: $(1, 0, 0), (0, 1, 0), (0, 0, 1)$

To vypovídá o triviálním vývoji procházky, stavy mince se navzájem nemíchají.

Podobně bude požadavkům vyhovovat matice s prvky umístěnými pouze na vedlejší diagonále

$$C_{6nul}^{spec II} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad (3.2.1.3)$$

kteřá bude speciálním případem matice:

$$C_{6nul}^{II} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & -\frac{1}{c_{31}} \\ 0 & 1 & 0 \\ c_{31} & 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad (3.2.1.4)$$

kde opět musí platit $|c_{31}| = 1$. Vlastní hodnoty a vlastní vektory (ve stejném pořadí k vlastním hodnotám) propagátoru s mincí (3.2.4) budou:

Vl. hodnoty: $i, -i, 1$
 Vl. vektory: $(ie^{ik}/c_{31}, 0, 1), (-ie^{ik}/c_{31}, 0, 1), (0, 1, 0)$

V matici (3.2.4) není zahrnut ještě jeden případ s prvky pouze na vedlejší diagonále, a to vezmeme-li v matici člen $c_{22} = -1$. Zbytek matice zůstane stejný, pouze kvůli determinantu v prvním řádku matice zmizí minus. Vlastní čísla a vlastní vektory budou podobné, pouze imaginární jednotka zmizí.

Vl. hodnoty: $-1, -1, 1$
 Vl. vektory: $(-e^{ik}/c_{31}, 0, 1), (0, 1, 0), (e^{ik}/c_{31}, 0, 1)$

Předposlední možnost pro unitární matici obsahující šest nul jsou:

$$C_{6nul}^{spec III} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} \text{ resp. } C_{6nul}^{III} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & \frac{1}{c_{21}c_{32}} \\ c_{21} & 0 & 0 \\ 0 & c_{32} & 0 \end{pmatrix} \quad (3.2.1.5)$$

Pro hodnoty c_{21}, c_{32} platí $|c_{21}| = |c_{32}| = 1$. Vlastní hodnoty a vlastní vektory propagátoru s mincí (3.2.5) budou:

Vl. hodnoty: $1, (-1)^{1/3}, (-1)^{2/3}$
 Vl. vektory: $(e^{ik}/c_{21}c_{31}, e^{ik}/c_{32}, 1), ((-1)^{2/3}e^{ik}/c_{21}c_{31}, (-1)^{1/3}e^{ik}/c_{32}, 1),$
 $(-1)^{1/3}e^{ik}/c_{21}c_{31}, (-1)^{2/3}e^{ik}/c_{32}, 1).$

Poslední možností bude matice, kde nenulové prvky budou umístěny na místech matice transponované k matici (3.2.5), tedy:

$$C_{6nul}^{spec III} = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix} \text{ resp. } C_{6nul}^{III} = \begin{pmatrix} 0 & \frac{1}{c_{31}c_{23}} & 0 \\ 0 & 0 & c_{23} \\ c_{31} & 0 & 0 \end{pmatrix} \quad (3.2.1.6)$$

Platí $|c_{31}| = |c_{23}| = 1$. Vlastní hodnoty propagátoru s mincí (3.2.6) budou stejné jako v případě mince předchozí:

Vl. hodnoty: $1, (-1)^{1/3}, (-1)^{2/3}$
 Vl. vektory: $(e^{ik}/c_{31}, c_{23}, 1), ((-1)^{1/3}e^{ik}/c_{31}, (-1)^{2/3}c_{23}, 1), ((-1)^{2/3}e^{ik}/c_{31}, (-1)^{1/3}c_{23}, 1)$

S výjimkou první diagonální matice jsme pro případ matice mince s šesti nulami dostali všechna vlastní čísla propagátoru nezávislá na k . V takovémto systému ale nebude žádná dynamika.

3.2.2 Čtyři nuly

Podíváme se na případ, kdy jsou v minci čtyři nuly. Tomuto požadavku pro unitární matici s determinanem rovným jedné určitě odpovídají matice (3.2.7-9), kde r je volitelný parametr. Umístíme-li nuly do druhého řádku a druhého sloupce dostaneme:

$$C_{4nuly}^{specI} = \begin{pmatrix} \sqrt{r} & 0 & \sqrt{1-r} \\ 0 & 1 & 0 \\ \sqrt{1-r} & 0 & -\sqrt{r} \end{pmatrix} \quad (3.2.2.1)$$

Matice (3.2.7) odděluje stav, kdy částice zůstane stát, od posunu doprava či doleva. Vše co začíná ve stavu 'stát' zůstane stát už napořád. Pro zajímavost uvedeme i vlastní hodnoty a vlastní vektory propagátoru s mincí (3.2.7):

Vl. hodnoty: $1, 1/2 e^{-ik} (-\sqrt{r} + e^{2ik} \sqrt{r} - \sqrt{4e^{2ik} + r - 2e^{2ik} r + e^{4ik} r}),$
 $1/2 e^{-ik} (-\sqrt{r} + e^{2ik} \sqrt{r} + \sqrt{4e^{2ik} + r - 2e^{2ik} r + e^{4ik} r})$

Vl. vektory: $(0, 1, 0), (\frac{\sqrt{r} + e^{2ik} \sqrt{r} - \sqrt{4e^{2ik} + r - 2e^{2ik} r + e^{4ik} r}}{2\sqrt{1-r}}, 0, 1)$
 $(\frac{\sqrt{r} + e^{2ik} \sqrt{r} + \sqrt{4e^{2ik} + r - 2e^{2ik} r + e^{4ik} r}}{2\sqrt{1-r}}, 0, 1)$

Umístíme-li nuly do třetího řádku a prvního sloupce a do do prvního řádku a třetího sloupce dostaneme tvary matice mince:

$$C_{4nuly}^{specII} = \begin{pmatrix} 0 & \sqrt{r} & \sqrt{1-r} \\ 0 & \sqrt{1-r} & -\sqrt{r} \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix} \quad (3.2.2.2)$$

$$C_{4nuly}^{specIII} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ \sqrt{r} & \sqrt{1-r} & 0 \\ \sqrt{1-r} & -\sqrt{r} & 0 \end{pmatrix}, \quad (3.2.2.3)$$

Vzhledem k poměrně rozsáhlému vyjádření pro vlastní vektory uvedeme pouze jak vypadají vlastní hodnoty. Ty jsou pro obě matice (3.2.8), (3.2.9) stejné:

VI. hodnoty: $-1, 1/2(1+\sqrt{1-r}-\sqrt{-2+2\sqrt{1-r-r}}), 1/2(1+\sqrt{1-r}+\sqrt{-2+2\sqrt{1-r-r}})$

Všechny vlastní hodnoty jsou konstantní, opět tedy v případě použití propagátoru s mincemi (3.2.8) a (3.2.9) nezískáme dynamický systém. Tvary matic (3.2.7-9) se dají zjistit bez použití postupu popsaného v kapitole 3.1. Postupujeme-li však jak je v kapitole 3.1 popsáno, dostaneme tvar:

$$C_{4nuly}^I = \begin{pmatrix} c_{11} & 0 & \frac{-1+|c_{11}|^2}{i \Im c_{31} \pm \sqrt{1-|c_{11}|^2 - (\Im c_{31})^2}} \\ 0 & 1 & 0 \\ i \Im c_{31} \pm \sqrt{1-|c_{11}|^2 - (\Im c_{31})^2} & 0 & \bar{c}_{11} \end{pmatrix} \quad (3.2.2.4)$$

Prvky matice (3.2.10) jsou obecně komplexní, vše znamená to co obvykle.

$$c_{ij} = \Re c_{ij} + i \Im c_{ij}$$

$$|c_{ij}|^2 = (\Re c_{ij} + i \Im c_{ij})(\Re c_{ij} - i \Im c_{ij}) = c_{ij} \bar{c}_{ij}$$

Vyjádření pro vlastní vektory bude opět poměrně prostorově náročné, uvedeme proto pouze vlastní hodnoty:

$$\begin{aligned} \text{VI. hodnoty:} \quad & 1, 1/2 e^{-ik} (\bar{c}_{11} + c_{11} e^{2ik} + 2 \sqrt{e^{2ik} (-1 + (\Re c_{11} \cos k - \Im c_{11} \sin k)^2)}) \\ & 1/2 e^{-ik} (\bar{c}_{11} + c_{11} e^{2ik} - 2 \sqrt{e^{2ik} (-1 + (\Re c_{11} \cos k - \Im c_{11} \sin k)^2)}) \end{aligned}$$

Pro umístění nul v prvním sloupci a třetím řádku bude mít matice tvar:

$$C_{4nuly}^{II} = \begin{pmatrix} 0 & \frac{1 - (\Re c_{22})^2}{-i \Im c_{23} \pm \sqrt{1 - (\Re c_{22})^2 - (\Im c_{23})^2}} & \Re c_{22} \\ 0 & \Re c_{22} & i \Im c_{23} \pm \sqrt{1 - (\Re c_{22})^2 - (\Im c_{23})^2} \\ -1 & 0 & 0 \end{pmatrix} \quad (3.2.2.5)$$

Pro vlastní hodnoty propagátoru s mincí (3.2.11) bude platit:

$$\text{VI. hodnoty: } \begin{aligned} & 1, 1/2(-1 + \Re c_{22} - \sqrt{-3 - 2\Re c_{22} + (\Re c_{22})^2}), \\ & 1/2(-1 + \Re c_{22} + \sqrt{-3 - 2\Re c_{22} + (\Re c_{22})^2}) \end{aligned}$$

Poslední tvar s nulami v prvním řádku a třetím sloupci bude, jak by se dalo očekávat, velice podobný tvaru (3.2.11), jen budou symetricky podle diagonály přehozené prvky, tedy:

$$C_{4\text{nuly}}^{\text{III}} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & -1 \\ \frac{1 - (\Re c_{22})^2}{-i \Im c_{23} \pm \sqrt{1 - (\Re c_{22})^2 - (\Re c_{23})^2}} & \Re c_{22} & 0 \\ \Re c_{22} & i \Im c_{23} \pm \sqrt{1 - (\Re c_{22})^2 - (\Im c_{23})^2} & 0 \end{pmatrix} \quad (3.2.2.6)$$

Vlastní čísla přitom zůstanou stejná jako v případě (3.2.11).

Mezi tvary (3.2.7-9) a tvary (3.2.10-12) lze vidět mnoho podobností. Ač jsme neuváděli vlastní vektory, například matice (3.2.7) a (3.2.10) mají jeden stejný vlastní vektor, a to (0,1,0). Zbylé dva vlastní vektory jsou si také podobné, a to zvláště zvolíme-li imaginární části vystupující v matici (3.2.10) nulové. Podobnost vlastních vektorů platí i v případě matice (3.2.8) resp. (3.2.9) a matice (3.2.11) resp. (3.2.12). Pokud zvolíme imaginární část v (3.2.11-12) nulovou, dostaneme prakticky stejný tvar jako v případě (3.2.8-9).

3.2.3 Méně než čtyři nuly

Dále bychom se měli zajímat, jak by měla vypadat mince obsahující dvě nuly. Bohužel žádné takové řešení se tímto způsobem nepodařilo nalézt. Zajímavé však je, že vyšlo jedno řešení obsahující pouze jednu nulu na vedlejší diagonále. Vzhledem ke složitosti výsledných rovnic a velkému počtu proměnných se bylo potřeba k získání tohoto řešení omezit pouze na reálné prvky v matici. Řešení je závislé pouze na jednom reálném parametru c_{22} .

$$C_{\text{inula}} = \begin{pmatrix} \frac{-(1-c_{22})^2 \sqrt{c_{22}}}{(-1+c_{22})^2} & \frac{(1-c_{22})^{3/2} \sqrt{c_{22}}}{-1+c_{22}} & 1-c_{22} \\ -\sqrt{1-c_{22}} & c_{22} & \frac{(-1+c_{22}) \sqrt{c_{22}}}{\sqrt{1-c_{22}}} \\ 0 & -\sqrt{1-c_{22}} & -\sqrt{c_{22}} \end{pmatrix} \quad (3.2.3.1)$$

Takovýchto řešení bude prakticky osm, neboť libovolná kombinace znamének plus a minus před prvky na pozicích c_{21} , c_{32} , c_{33} bude také řešením. Uvedeme alespoň vlastní hodnoty propagátoru s mincí (3.2.13).

VI. hodnoty:

$$1, \frac{1}{2}(-1+c_{22}-2\sqrt{c_{22}}\cos k - e^{-ik}\sqrt{-3+c_{22}^2-4(-1+e)\sqrt{c_{22}}\cos k+2c_{22}\cos 2k}(\cos 2k+i\sin 2k))$$

$$\frac{1}{2}(-1+c_{22}-2\sqrt{c_{22}}\cos k + e^{-ik}\sqrt{-3+c_{22}^2-4(-1+e)\sqrt{c_{22}}\cos k+2c_{22}\cos 2k}(\cos 2k+i\sin 2k))$$

Poslední případ je, kdy mince neobsahuje ani jednu nulu. Ze stejného důvodu jako v předchozím případě jsme se museli omezit pouze na reálné prvky matice. Výsledné řešení je závislé na dvou reálných parametrech, tedy:

$$C = \begin{pmatrix} -\sqrt{-A} & \frac{(-1+c_{rr}+c_{rr}^r)\sqrt{-A}}{\sqrt{A}} & \frac{\sqrt{\frac{A}{c_{rr}^r}}((-1+c_{rr})c_{rr}+c_{rr}^r)}{-1+c_{rr}+c_{rr}^r} \\ \frac{(-1+c_{rr})c_{rr}\sqrt{\frac{A}{c_{rr}^r}}}{-1+c_{rr}+c_{rr}^r} & c_{rr} & \frac{-(-1+c_{rr})\sqrt{-A}}{c_{rr}} \\ \sqrt{\frac{A}{c_{rr}^r}} & c_{rr} & -\sqrt{-A} \end{pmatrix} \quad (3.2.3.2)$$

Jako A jsme označili výraz: $A = \frac{c_{rr}^r(-1+c_{rr}+c_{rr}^r)}{(-1+c_{rr})^r}$

Matice (3.2.14) nebude jediným řešením, prvky c_{21} , c_{31} , c_{33} , kde pro tyto prvky platí

$$c_{21} = \frac{(-1+c_{22})c_{32}\sqrt{\frac{A}{c_{32}^2}}}{-1+c_{22}+c_{32}^2}, \quad c_{31} = \sqrt{\frac{A}{c_{32}^2}}, \quad c_{33} = -\sqrt{-A},$$

nahradit prvky $-c_{21}$, $-c_{31}$, c_{33} nebo c_{21} , c_{31} , $-c_{33}$ popřípadě $-c_{21}$, $-c_{31}$, $-c_{33}$. Propagátor s mincí (3.2.14) má jedno vlastní číslo rovné jedné, zbylá vlastní čísla a vlastní vektory mají velmi dlouhé a komplikované vyjádření, proto je uvádět nebudeme.

Na začátku kapitoly 3 jsme se zmínili o takzvané Groverově matici tvaru

$$G = \frac{1}{3} \begin{pmatrix} -1 & 2 & 2 \\ 2 & -1 & 1 \\ 2 & 2 & -1 \end{pmatrix}, \quad (3.2.3.3)$$

u níž bylo dokázáno [33], že propagátor s mincí tohoto tvaru má jedno vlastní číslo nezávislé na k , konkrétně rovno jedné, navíc procházka s touto mincí je netriviální, neboť vlastní vektor odpovídající tomuto vlastnímu číslu na k závisí. Vlastní vektory matice G jsou

$$(-1, 0, 1), (-1, 1, 0), (1, 1, 1),$$

přičemž první dva vektory přísluší vlastnímu číslu -1 , poslední přísluší vlastnímu číslu 1 . Provedeme ortonormalizační proces, tím získáme vektory

$$\left(\frac{-1}{\sqrt{2}}, 0, \frac{1}{\sqrt{2}}\right), \left(\frac{-1}{\sqrt{6}}, \sqrt{\frac{2}{3}}, -\frac{1}{\sqrt{6}}\right), \left(\frac{1}{\sqrt{3}}, \frac{1}{\sqrt{3}}, \frac{1}{\sqrt{3}}\right)$$

Zavedeme projektor na vektor v vztahem $(P(v))_{ij} = v_i v_j$ a matici G předefinujeme za pomoci projektoru a přidání fáze φ jako:

$$G_1 = P\left(\left(\frac{1}{\sqrt{3}}, \frac{1}{\sqrt{3}}, \frac{1}{\sqrt{3}}\right)\right) - P\left(\left(\frac{-1}{\sqrt{2}}, 0, \frac{1}{\sqrt{2}}\right)\right) + e^{i\varphi} P\left(\left(\frac{-1}{\sqrt{6}}, \sqrt{\frac{2}{3}}, -\frac{1}{\sqrt{6}}\right)\right) \quad (3.2.3.4)$$

Matice G_1 pak bude tvaru

$$G_1 = \begin{pmatrix} \frac{-1}{6} + \frac{e^{i\varphi}}{6} & \frac{1}{3} - \frac{e^{i\varphi}}{3} & \frac{5}{6} + \frac{e^{i\varphi}}{6} \\ \frac{1}{3} - \frac{e^{i\varphi}}{3} & \frac{1}{3} + 2\frac{e^{i\varphi}}{3} & \frac{1}{3} - \frac{e^{i\varphi}}{3} \\ \frac{5}{6} + \frac{e^{i\varphi}}{6} & \frac{1}{3} - \frac{e^{i\varphi}}{3} & \frac{-1}{6} + \frac{e^{i\varphi}}{6} \end{pmatrix}. \quad (3.2.3.5)$$

Zaměníme-li v propagátoru matici G za matici G_1 , zůstane jedno vlastní číslo rovno jedné, a příslušný vlastní vektor závisí na proměnné k . Bude se tedy stále jednat o netriviální procházku.

4 Závěr

Cílem práce bylo seznámit se s pojmy náhodná procházka, kvantová procházka, zvláště pak kvantová procházka po přímce. V prvních dvou kapitolách je shrnut teoretický úvod k této problematice, u klasické náhodné procházky včetně aplikací. Ve třetí kapitole je na zadaném typu kvantové procházky po přímce zkoumána problematika matic mincí. Jedná se o procházku kdy má chodec v každém kroku možnost jít doleva, doprava nebo zůstat stát.

Zajímá nás, jaký tvar musí mít matice mince C , pokud požadujeme alespoň jedno vlastní číslo propagátoru U_k konstantní. Toto vlastní číslo položíme rovno jedné. Dále z požadavku unitarity a omezení se na determinant matice C rovný jedné získáme tvar charakteristické rovnice propagátoru, v němž již vystupují pouze tři subdeterminanty propagátoru a jeho stopa. Z této charakteristické rovnice budeme při hledání omezujících podmínek na tvar matice C vycházet.

Získali jsme podmínky pro tvary matice, následně provedli klasifikaci. Tu jsme provedli na základě počtu nul v matici. Z vypočtených podmínek jsme získali tvary mince s šesti, čtyřmi, jednou a žádnou nulou. Většina těchto matic povede na triviální nebo žádnou dynamiku systému. Získali jsme však i matice které mají malý počet nul a povedou na dynamický systém. Jedná se o matici s jednou nulou. Ta je závislá na dvou reálných parametrech. A matici s žádnou nulou, závislou pouze na jednom reálném parametru. Dále jsme zjistili, že přidáním fáze v Groverově minci zůstane vlastní číslo propagátoru rovno jedné, navíc se bude stále jednat o netriviální procházku.

5 Reference

- [1] *Lattice Random Walk in 2D* from The Wolfram Demonstrations Project <<http://demonstrations.wolfram.com/LatticeRandomWalkIn2D/>>
Contributed by: Stephen Wolfram
- [2] *Lattice Random Walk in 3D* from The Wolfram Demonstrations Project <<http://demonstrations.wolfram.com/LatticeRandomWalkIn3D/>>
Contributed by: Stephen Wolfram
- [3] Revuz, D., Yor, M. *Continuous martingales and Brownian motion*, second edition, Springer-Verlag 1994.
- [4] Brown, R., *A brief account of microscopical observations made in the months of June, July and August, 1827, on the particles contained in the pollen of plants; and on the general existence of active molecules in organic and inorganic bodies*. Phil. Mag. 4, 161–173, 1828. (PDF version of original paper including a subsequent defense by Brown of his original observations, Additional remarks on active molecules.)
- [5] Kempe, J. *Quantum random walks - an introductory overview*. *Contemporary Physics*, 44, 307–327 s., 2003
- [6] Ambainis, A. *Quantum walks and their algorithmic applications*. ArXiv:quant-ph/0403120
- [7] Nayak, A., Vishvanath, A. *Quantum walk on the line*. arXiv: quant-ph/0010117
- [8] Santha, M., *Quantum walk based search algorithms*. arXiv:quant-ph/0808.0059/
- [9] Farhi, E., Gutmann, S., *Quantum computation and decision trees*. Physical Review A, 1998
- [10] Malkiel, B. G., *A Random Walk Down Wall Street* (6th ed.). W.W. Norton & Company, Inc.. ISBN 0393062457, 1973
- [11] Cootner, P. H.. *The random character of stock market prices*. MIT Press. ISBN 9780262030090, 1964
- [12] Wikipedia, the free encyclopedia. *Random walk hypothesis*. <http://en.wikipedia.org/wiki/Random_walk_hypothesis>, [rev. 28. 4. 2010]
- [13] Weisstein, E. W. *Random Walk--2-Dimensional*. From *MathWorld--A Wolfram Web* <<http://mathworld.wolfram.com/RandomWalk2-Dimensional.html>>[rev. 28. 4. 2010]
- [14] Weisstein, Eric W. *Pólya's Random Walk Constants*. From *MathWorld--A Wolfram Web* <<http://mathworld.wolfram.com/PolyasRandomWalkConstants.html>>[rev. 5. 5. 2010]
- [15] Sloane, N. J. A. Sequences A086230, A086231, A086232, A086233, A086234, A086235, and A086236 in *The On-Line Encyclopedia of Integer Sequences*.

- [16] Montroll, E. W. *Random Walks in Multidimensional Spaces, Especially on Periodic Lattices*. *J. SIAM* **4**, 241-260, 1956.
- [17] Watson, G. N. *Three Triple Integrals*. *Quart. J. Math., Oxford Ser. 2* **10**, 266-276 s, 1939.
- [18] Glasser, M. L. and Zucker, I. J. *Extended Watson Integrals for the Cubic Lattices*. *Proc. Nat. Acad. Sci. U.S.A.* **74**, 1800-1801, 1977.
- [19] Domb, C. *On Multiple Returns in the Random-Walk Problem*. *Proc. Cambridge Philos. Soc.* **50**, 586-591 s, 1954.
- [20] McCrea, W. H., Whipple, F. J. W. *Random Paths in Two and Three Dimensions*. *Proc. Roy. Soc. Edinburgh* **60**, 281-298, 1940.
- [21] Osuji, Ch., *ENAS 606: Polymer Physics*. <<http://www.eng.yale.edu/polymers/docs/classes/polyphys/.../handout2.pdf>>, 2009
- [22] *Polymer Theory: Freely Joined Chain*. <<http://www.statmech.org/rsh/freejoint.pdf>>, 2003
- [23] Wikipedia, the free encyclopedia. *Ideal chain*. <http://en.wikipedia.org/wiki/Ideal_chain>, [rev. 5. 5. 2010]
- [24] Blank, J., Exner, P., Havlíček, M. *Lineární operátory v kvantové fyzice*. Karolinum, Praha, 1993. 678 s.
- [25] Bleistein, N., Handelsman, R. *Asymptotic Expansions of Integrals*, Dover, New York, 1975
- [26] Hazewinkel, M., *Stationary phase method*, of the Encyclopaedia of Mathematics, Springer, ISBN 978-1556080104, 2001
- [27] Guillemin, V., Sternberg, S., , *Geometric Asymptotics*, (Chapter 1), American Mathematical Society, 1977, 480 s.
- [28] Lo, Andrew W.; Mackinlay, Archie Craig. *A Non-Random Walk Down Wall Street* (5th ed.). Princeton University Press. pp. 4–47. ISBN 0691092567, 2002
- [29] Lawler, G. F., *Schramm-Loewner Evolution*, arXiv:math.PR/0712:3256v1/
- [30] Wikipedia, the free encyclopedia. *Wiener process*. <http://en.wikipedia.org/wiki/Wiener_process>, [rev.28. 4. 2010]
- [31] Morters P., Peres Y., *Brownian Motion*, Berkeley 2008, <http://stat.berkeley.edu/users/peres/bmbook.pdf>
- [32] Pytlíček, J. *Lineární algebra a geometrie*. Skripta ČVUT, Vydavatelství ČVUT, Praha, 2002, 122 s.
- [33] Inui, N., Konno, N., Segawa, E. *One-dimensional three-state quantum walk*, *Phys. Rev E* **72**, 056112, 2005

6 Příloha

Markovského proces:

Poskytuje matematický náhled v procesech rozhodování, a to v situacích kdy jsou výsledky z části náhodné a z části pod kontrolou uživatele.

Modifikovaná Besselova funkce prvního druhu:

Modifikovaná Besselova funkce prvního druhu $I_n(z)$ je definována jako křivkový integrál:

$$I_n(z) = \frac{1}{2\pi i} \oint e^{\frac{z}{2}\left(\frac{t+1}{t}\right)} t^{-n-1} dt$$

Bílý šum:

Bílý šum je náhodný signál, který má stejný výkon v jakémkoli frekvenčním pásmu stejné šířky. Je často používán například v sirénách pohotovostních vozidel pro jeho schopnost proniknout ostatními zvuky, ale nezpůsobovat ozvěnu.