

ČESKÉ VYSOKÉ UČENÍ TECHNICKÉ V PRAZE
Fakulta jaderná a fyzikálně inženýrská

BAKALÁŘSKÁ PRÁCE

2009

Jaromír Pírko

Poděkování

Na tomto místě bych rád poděkoval panu Ing.Severínu Poštovi, Ph.D. za konzultace, cenné rady a literaturu týkající se zvoleného tématu.

Čestné prohlášení

Prohlašuji na tomto místě, že jsem předloženou práci vypracoval samostatně a že jsem uvedl veškerou použitou literaturu.

V Praze dne 7. července 2009

.....
Jaromír Pírko

Název práce:

Orbity Weylových grup

Autor: Jaromír Pírko

Obor: Matematické inženýrství / Matematická fyzika

Druh práce: Bakalářská práce

Vedoucí práce: Ing. Severín Pošta, Ph.D. Katedra matematiky, FJFI, ČVUT

Abstrakt: Uvedeme definice orbity k Weylovým grupám. Seznámíme se se součinem orbit a jeho dekompozicí na podorbity. Pro výpočet složitějších rozkladů zavedeme generující funkce a dekompoziční matice. Uvedeme definice funkcí na orbitě. Získané znalosti uplatníme při rozvoji funkce do řady symetrických a antisymetrických funkcí.

Klíčová slova: Orbita Weylových grup, Lieova algebra, dekompozice, funkce na orbitě.

Title: **Orbits of Weyl groups**

Author: Jaromír Pírko

Abstract: We present the definitions of Weyl group orbits and we summarize the product of the orbit and the decomposition of their product. We describe decomposition matrices and generating functions in the more complicated cases of the embeddings. We define the orbit functions and give example of their use.

Key words: Orbits of Weyl groups, Lie algebra, decomposition, orbit functions.

OBSAH

1. Úvod	5
2. Lieova algebra	5
3. Klasifikace Lieových prostých algeber	10
4. Orbita Weylových grup	16
5. Součin orbit a dekompozice součinu orbit	22
6. Použití dekompozičních matic	28
7. Generující funkce	31
8. Funkce na orbitech weylovy grupy	32
Reference	36

1. ÚVOD

Tato práce se především zabývá tzv. orbitami Weylovy grupy. Tyto orbity souvisí s konečnými grupami W geometrických symetrií, generovaných transformacemi r_i (takových, že $r_i^2 = 1$, $i = 1, 2, \dots, n$) n -dimenzionálního Eukleidova prostoru E_n , vůči $n-1$ dimenzionálnímu podprostoru obsahujícího počátek. V této práci se budeme také věnovat funkcím na orbitech symetrických grup W , které jsou Weylovými grupami z třídy tzv. polojednoduchých (poloprostých) Lieových grup. V závěru se stručně zmíníme o jejich aplikaci.

Nyní nastíníme postup, který budeme dále podrobně rozebírat. Vezmeme bod $\lambda \in E_n$ (v určité bázi) a zapůsobíme na něj prvky grupy W . Označíme orbitu bodu λ vůči grupě W jako $O(\lambda)$, což je v podstatě množina všech bodů, navzájem různých, ve tvaru $w\lambda$, $w \in W$. Funkce na orbitě jsou definovány jako

$$\phi_\lambda(x) = \sum_{\mu \in O(\lambda)} e^{2\pi i \langle \mu, x \rangle},$$

kde $\langle \mu, x \rangle$ je skalární součin na E_n . Tyto funkce jsou invariantní vzhledem ke grupě W : $\phi_\lambda(wx) = \phi_\lambda(x)$, $w \in W$ a to je vlastnost, díky níž mohou být funkce na orbitě chápány jako symetrické exponenciální funkce.

Jak známo n -dimensionální exponenciální funkce $e_n^{2\pi(m_1x_1 + \dots + m_nx_n)}$ pro celočíselné m_1, \dots, m_n určují rozklad funkcí do Fourierových řad. Symetrické a antisymetrické orbit-funkce mají souvislost s exponencialními multidimenzionálními symetrickými a antisymetrickými funkcemi. Ukážeme příklad rozkladu tří dvoudimenzionálních funkce do tzv. funkcí na orbitě.

2. LIEOVA ALGEBRA

Abychom mohli definovat orbitu Weylovy grupy a následně funkci na orbitě, je třeba uvést některé pojmy z oblasti Lieových algeber a jejich klasifikací přes kořenové systémy.

Definice 1. Lieova algebra nad tělesem F je vektorový prostor L nad tělesem F spolu se zadaným bilineárním zobrazením

$$(1) \quad L \times L \rightarrow L, (x, y) \mapsto [x, y],$$

vyhovující následujícím vztahům:

$$(2) \quad [x, x] = 0,$$

$$(3) \quad [x, [y, z]] [y, [z, x]] [z, [x, y]] = 0, \quad x, y, z \in L,$$

odkud dostaneme jednoduchý vztah

$$(4) \quad [x, y] = -[y, x], \quad x, y, z \in L.$$

Příklad 1. Příkladem struktury Lieovy algebry v prostoru R^3 může být např. vektorový součin $(x, y) \rightarrow x \wedge y$, kde

$$x \wedge y = (x_2y_3 - x_3y_2, x_3y_1 - x_1y_3, x_1y_2 - x_2y_1).$$

Dalšími příklady Lieových algeber jsou:

- (1) $\text{gl}(V)$ (množina lineárních zobrazení $V \rightarrow V$ tzv. obecná lineární algebra), kde $[x, y] = x \circ y - y \circ x$, kde \circ značí složené zobrazení.
- (2) $\text{gl}(n, F)$ (vektorový prostor všech matic $n \times n$, pro které je $[x, y] = xy - yx$).
- (3) $\text{sl}(n, F)$ (vektorový prostor matic s nulovou stopou, který je podprostorem prostoru $\text{gl}(n, F)$).

Definice 2. Pod Lieovou podalgebrou algebry L rozumíme vektorový prostor $K \subseteq L$ takový, že

$$[x, y] \in K, \quad x, y \in K.$$

Pod pojmem ideál Lieovi algebry L , rozumíme podprostor I , pro který platí

$$[x, y] \in I, \quad x \in L, \quad y \in I.$$

Řekneme, že Lieova algebra je řešitelná, pokud pro nějaké přirozené $m \geq 1$ platí:

$$(5) \quad L^{(m)} = 0, \quad L^{(m)} = [L^{(m-1)}, L^{(m-1)}],$$

$$(6) \quad [L^{(m-1)}, L^{(m-1)}] = \{[x, y] \mid x, y \in L^{(m-1)}\}.$$

Lemma 1. *Nechť L je konečnědimenzionální Lieova algebra. Potom v L existuje právě jeden řešitelný ideál, obsahující všechny řešitelné ideály z L .*

Nechť R je řešitelný ideál s největší možnou dimenzí, a necht' I je jiný řešitelný ideál. $R + I$ je řešitelný ideál. Protože $R \subseteq R + I$, platí $\dim R \leq \dim(R + I)$. Ale my jsme vybrali R s maximální možnou dimenzí a proto musí platit $\dim R = \dim(R + I)$, z čehož dostáváme $R = R + I$, takže I je obsažen v R .

Definice 3. Takový ideál R z lemmatu 1 nazveme radikálem algebry L a značíme $\text{rad } L$. Nenulové Lieově algebře budeme říkat, že je poloprostá pokud nemá nenulové řešitelné ideály. To je ekvivalentní s podmínkou, že $\text{rad } L = 0$.

Lemma 2. *Nechť L je Lieova algebra, potom faktorová algebra $L/\text{rad } L$ je poloprostá.*

Definice 4. Dolní centrální posloupnost Lieovy algebry L definujeme jako

$$(7) \quad L^k = [L, L^k], \quad k \geq 2, \quad L^1 = L,$$

kde L je tzv. derivovaná algebra definovaná jako $L^1 = [L, L]$.

Z definice je zřejmé, že platí $L \supseteq L^1 \supseteq L^2$. A protože součin ideálů je ideál, je L^k ideál L . Název centrální posloupnost z definice plyne z faktu, že L^k/L^{k+1} je obsažen v centru L/L^{k+1} .

Poznámka 1. Abychom byli schopni popsat libovolnou Lieovu algebru L , musíme být schopni popsat

- (1) libovolnou řešitelnou Lieovu algebru (k tomu využijeme tzv. Lieovu větu viz. dále).
- (2) libovolnou poloprostou Lieovu algebru (ukážeme, že každá poloprostá Lieova algebra je direktním součtem prostých Lieových algeber).

Definice 5. Lieovu algebru L nazveme jako prostá, pokud neobsahuje jiné ideály než 0 a L a pokud sama není abelovská.

Nyní potřebujeme nalézt všechny Lieovy algebry nad \mathbb{C} . To nám umožní následující věta, kterou uvedeme bez důkazu.

Věta 1. Každá konečně-dimenzionální prostá Lieova algebra nad \mathbb{C} je (až na pět vyjímek označovaných jako e_6, e_7, e_8, f_4, g_2) izomorfní s jednou ze tří tzv. klasických Lieových algeber:

$$sl(n, \mathbb{C}), \quad so(n, \mathbb{C}), \quad sp(n, \mathbb{C}).$$

Příklad 2. V příkladě 1 jsme už zavedli algebru $sl(n, \mathbb{C})$. Dále dodefinujeme $so(n, \mathbb{C})$, a $sp(n, \mathbb{C})$. Pokud $S \in gl(n, \mathbb{C})$, definujeme Lieovu podalgebru

$$(8) \quad gl_S(n, \mathbb{C}) := \{x \in gl(n, \mathbb{C}) \mid x^t S = -Sx\}.$$

Vezmeme-li $n = 2l$ a matici S s bloky $l \times l$, kde

$$(9) \quad S = \begin{pmatrix} 0 & I_l \\ I_l & 0 \end{pmatrix},$$

definujeme $so(2l, \mathbb{C}) = gl_S(2l, \mathbb{C})$.

Pokud $n = 2l + 1$ vezmeme

$$(10) \quad S = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & I_l \\ 0 & I_l & 0 \end{pmatrix}$$

a definujeme $so(2l + 1, \mathbb{C}) = gl_S(2l + 1, \mathbb{C})$.

Lieovy algebry $sp(n, \mathbb{C})$ jsou definovány pouze pro sudá n . Vezmeme

$$(11) \quad S = \begin{pmatrix} 0 & I_l \\ -I_l & 0 \end{pmatrix}$$

a definujeme $sp(2l, \mathbb{C}) = gl_S(2l, \mathbb{C})$.

Definice 6. Vahou Lieovy podalgebry A algebry $gl(V)$ je lineární zobrazení $\lambda : A \rightarrow F$ takové, že

$$(12) \quad V_\lambda = \{v \in V \mid a(v) = \lambda(a)v \quad a \in A\}$$

je nenulový podprostor V .

Následující věta ukáže, jak popsat libovolnou Lieovu řešitelnou algebru z poznámky 1.

Věta 2. (Lieova) Necht V je konečnědimenzionální komplexní vektorový prostor a L je řešitelná Lieova podalgebra $\mathfrak{gl}(V)$. Potom existuje báze prostoru V , ve které každý prvek L je vyjádřen horní trojúhelníkovou maticí.

Definice 7. Necht L je Lieova algebra nad tělesem F . Reprezentace L Lieovy algebry je homomorfismus $\varphi : L \rightarrow \mathfrak{gl}(V)$. Definujeme sruženou reprezentaci ad pro Lieovu algebra L jako reprezentaci L . $\text{ad} : L \rightarrow \mathfrak{gl}(L)$, kde $(\text{ad } x)(y) := [x, y]$, $x, y \in L$.

Dále se budeme zabývat rozkladem libovolné poloposté Lieovy algebry z poznámky 1.

Příklad 3. Vezměme si konkrétní příklad na kterém předvedeme rozklad Lieovy algebry: $\mathfrak{sl}(3, \mathbb{C})$, tzn.

$$(13) \quad \mathfrak{sl}(3, \mathbb{C}) = \left\{ \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix} \mid a_{ij} \in \mathbb{C}, a_{11} + a_{22} + a_{33} = 0 \right\}$$

a označme tzv. Cartanovu podalgebra (podalgebra všech diagonálních matic) H :

$$(14) \quad H = \left\{ \begin{pmatrix} a_{11} & 0 & 0 \\ 0 & a_{22} & 0 \\ 0 & 0 & a_{33} \end{pmatrix} \mid a_{ii} \in \mathbb{C}, a_{11} + a_{22} + a_{33} = 0 \right\}.$$

Tato Cartanova podalgebra má tu vlastnost, že když sestrojíme zobrazení $\text{ad}(h)$ pro $h \in H$, jsou diagonalizovatelná. A protože komutují, jsou tzv. současně diagonalizovatelná.

Označme e_{ij} matice, které mají jedničku na pozici (i, j) a jinde nuly. Platí následující:

$$(15) \quad \text{ad } h(e_{ij}) = [h, e_{ij}] = he_{ij} - e_{ij}h = (a_{ii} - a_{jj})e_{ij}.$$

To znamená, že matice e_{ij} , $i \neq j$ je vlastním vektorem $\text{ad } h$.

Označme $\varepsilon_{ij} : H \rightarrow \mathbb{C}$ lineární funkcionál, který je definován předpisem

$$(16) \quad \varepsilon_{ii}(h) = \varepsilon_{ii} \begin{pmatrix} a_{11} & 0 & 0 \\ 0 & a_{22} & 0 \\ 0 & 0 & a_{33} \end{pmatrix} = a_{ii}.$$

Pak máme

$$(17) \quad \text{ad } h(e_{ij}) = (\varepsilon_{ii} - \varepsilon_{jj})(h)e_{ij}.$$

Tyto lineární funkcionály $(\varepsilon_{ii} - \varepsilon_{jj})$ jsou naše váhy z definice 6. V našem konkrétním případě pro $\mathfrak{sl}(3, \mathbb{C})$ je jich šest (označme je α_{ij} , $i \neq j$, $i, j = 1, 2, 3$) a odpovídající váhové prostory označme

$$(18) \quad L_{ij} = \{x \in \mathfrak{sl}(3, \mathbb{C}) \mid \text{ad } h(x) = (\varepsilon_{ii} - \varepsilon_{jj})(h)(x) \quad h \in H\},$$

pro které platí $L_{ij} = \text{lin}\{e_{ij}\}$, tj. jsou jednodimenzionální.

Dostali jsme tak rozklad algebry $\mathfrak{sl}(3, \mathbb{C})$ ve tvaru:

$$(19) \quad \mathfrak{sl}(3, \mathbb{C}) = H \oplus \bigoplus_{i \neq j} L_{ij}.$$

Definice 8. Množinu lineárních funkcionalů z rovnosti (17) označme jako

$$(20) \quad \phi = \{\alpha_{ij} \in H^* \mid i \neq j, \quad \alpha_{ij} \neq 0 \wedge L_{\alpha_{ij}} \neq 0\},$$

kde jednotlivá $\alpha \in \phi$ jsou tzv. kořeny L a odpovídající L_{ij} z rovnosti (18) (označíme je L_α) jsou odpovídající kořenové prostory.

Pomocí značení 7 můžeme (19) přepsat jako

$$(21) \quad \text{sl}(3, \mathbb{C}) = H \oplus \bigoplus_{\alpha \in \phi} L_\alpha.$$

Definice 9. Podmnožinu R reálného vektorového prostoru E nazveme kořenovým systémem, pokud splňuje následující podmínky:

- (1) R je konečná a lineární obal R tvoří E . Navíc R neobsahuje 0.
- (2) Pokud $\alpha \in R$, potom $\pm\alpha \in R$.
- (3) Pokud $\alpha \in R$, potom zrcadlení r_α (kde $r_\alpha(x) = x - \frac{2(x, \alpha)}{(\alpha, \alpha)}\alpha$) permutuje prvky R .
- (4) Pokud $\alpha, \beta \in R$, potom $\langle \beta, \alpha \rangle \in \mathbb{Z}$.

Prvky z R jsou tzv. kořeny.

V našem konkrétním případě $\text{sl}(3, \mathbb{C})$ z příkladu 3 bude kořenový systém ϕ vypadat takto

$$(22) \quad \phi = \{\alpha_{12}, \alpha_{13}, \alpha_{21}, \alpha_{23}, \alpha_{31}, \alpha_{32}\}.$$

V bázi H^* , kterou zvolíme jako $(\varepsilon_{11}, \varepsilon_{22}, \varepsilon_{33})$, prepíšeme ϕ jako

$$(23) \quad \{(1, -1, 0), (1, 0, -1), (0, 1, -1), (-1, 1, 0), (-1, 0, 1), (0, -1, 1)\},$$

zde je lineární obal $\phi = E$, prvky ϕ tedy tvoří systém kořenů z definice 8.

Dále v systému kořenů zavedeme bázi.

Definice 10. Podmnožina B systému kořenů R je bází R , pokud

- (1) B je bází vektorového prostoru E ,
- (2) každé $\beta \in R$ lze zapsat jako

$$(24) \quad \beta = \sum_{\alpha \in B} k_\alpha \alpha$$

tak, že $k_\alpha \in \mathbb{Z}$, kde všechny nenulové koeficienty k_α mají stejná znaménka. Pokud jsou všechna znaménka koeficientů v definičním vzorci kladná, je β tzv. kladný kořen vůči bázi B , jinak tzv. záporný kořen vůči bázi B .

Naše ϕ z (22) si tedy lze v bázi zvolené jako $\alpha_{12} = \alpha$ a $\beta = \alpha_{23}$ přepsat do tvaru

$$(25) \quad \phi = \{\alpha, \alpha + \beta, \beta, -\alpha, -(\alpha + \beta), -\beta\}.$$

3. KLASIFIKACE LIEOVÝCH PROSTÝCH ALGEBER

Ke klasifikaci prostých Lieovych algeber je třeba zavést několik dalších pojmů jako Cartanova matice, Coxeter-Dynkinovy diagramy.

Lemma 3. *Nechť R je kořenový systém v prostoru E s vnitřním reálným součinem $\langle \cdot, \cdot \rangle$, který je definován pro $\alpha, \beta \in E$ vztahem*

$$(26) \quad \langle \alpha, \beta \rangle := \frac{2(\alpha, \beta)}{(\beta, \beta)},$$

kde (\cdot, \cdot) je klasický skalární součin, a nechť $\alpha, \beta \in R$ tak, že $\alpha \neq \pm\beta$. Potom

$$\langle \alpha, \beta \rangle \langle \beta, \alpha \rangle \in \{0, 1, 2, 3\}.$$

Úhel mezi dvěma kořeny se klasicky snadno spočítá pomocí vzorce

$$(27) \quad \theta = \arccos \frac{(\alpha, \beta)}{\|\alpha\| \cdot \|\beta\|}, \quad \alpha, \beta \in R,$$

v případě, kdy chceme spočítat úhel mezi bazickými vektory α, β z (25), dostaneme z (27)

$$(28) \quad \arccos \frac{((1, -1, 0), (0, 1, -1))}{\|(1, -1, 0)\| \cdot \|(0, 1, -1)\|} = \frac{2\pi}{3}.$$

Následující tabulka přehledně ukazuje napočítané $\langle \alpha, \beta \rangle$ a $\langle \beta, \alpha \rangle$ a odpovídající úhly mezi bazickými vektory různých systémů kořenů

$\langle \alpha, \beta \rangle$	$\langle \beta, \alpha \rangle$	θ	$\frac{(\beta, \beta)}{(\alpha, \alpha)}$
0	0	$\frac{\pi}{2}$	-
1	1	$\frac{\pi}{3}$	1
-1	-1	$\frac{2\pi}{3}$	1
1	2	$\frac{\pi}{4}$	2
-1	-2	$\frac{3\pi}{4}$	2
1	3	$\frac{\pi}{6}$	3
-1	-3	$\frac{5\pi}{6}$	3

Tab.1

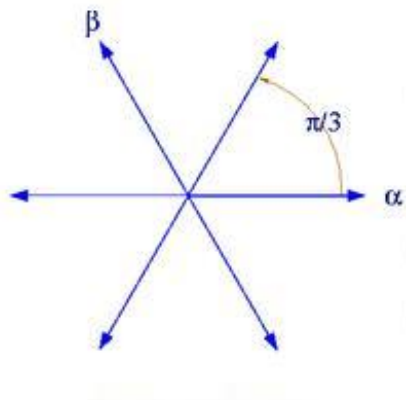
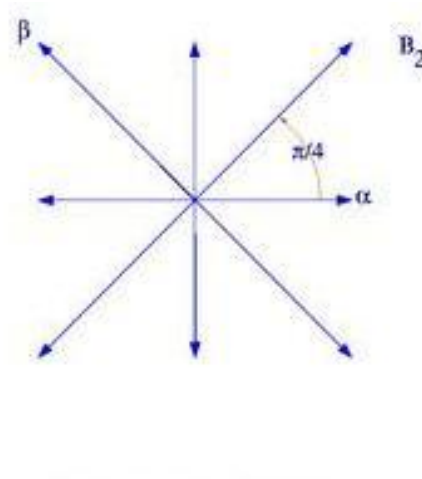
Lemma 4. *Nechť $\alpha, \beta \in R$:*

- (1) Pokud úhel mezi α a β je tupý, potom $\alpha + \beta \in R$.
- (2) Pokud úhel mezi α a β je ostrý a $(\beta, \beta) \geq (\alpha, \alpha)$ potom $\alpha - \beta \in R$.

Příklad 4. Nechť je u nás $E = \mathbb{R}^2$ s Eukleidovským vnitřním součinem (26) použitím (27) jsme dostali mezi bazickými vektory R úhel $\frac{2\pi}{3}$. Z lemmatu 4 a definice 8 je vidět, že výsledný kořenový systém ϕ má skutečně 6 prvků: $\{\alpha, \beta, \alpha + \beta, -\alpha, -\beta, -\alpha - \beta\}$. Tento kořenový systém se značí jako A_2 (obr.1).

Dále si vezmeme úhel mezi bazickými kořeny $\theta = \frac{3\pi}{4}$. Z lematu 4 opět dostaneme, že do kořenového systému patří i $\alpha + \beta$ a zapůsobením s_α (def. 8) na β zjistíme, že do systému kořenů patří $2\alpha + \beta$. Tento systém se značí jako B_2 (obr.2).

Pro další dva možné úhly $\theta = \frac{5\pi}{6}, \frac{\pi}{2}$ dostaneme kořenové systémy na obrázku 3.

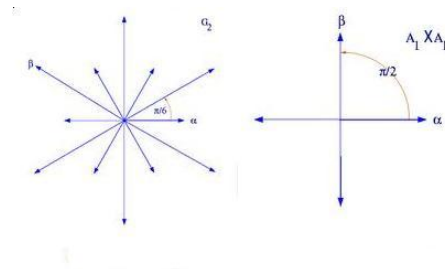
OBRÁZEK 1. Kořenový systém A_2 .OBRÁZEK 2. Kořenový systém B_2 .

Ke každému kořenu $\alpha \in R$ máme definováno zrcadlení r_α , dané vztahem

$$(29) \quad r_\alpha(x) = x - \frac{2(x, \alpha)}{(\alpha, \alpha)}\alpha,$$

ktéře působí jako lineární zobrazení na E .

Proto můžeme uvažovat grupu invertibilních lineárních transformací E generovaných reflexemi r_α pro $\alpha \in R$. Tato grupa je známá jako Weylova grupa $W(R)$ příslušná Lieově algebře.

OBRÁZEK 3. Kořenový systém G_2 a $A_1 \times A_1$.

Lemma 5. Weylova grupa odpovídající kořenovému systému R je konečná. Nechť B je báze R . Pokud $\alpha \in B$, potom zrcadlení r_α permutuje množinu pozitivních kořenů různých od α .

Definice 11. Nechť $B = (\alpha_1, \dots, \alpha_l)$ je báze systému kořenů R . Cartanovou maticí systému R je matice $l \times l$, která na i, j -té pozici má $\langle \alpha_i, \alpha_j \rangle$, pro který platí

$$(30) \quad M_{ij} = \frac{2\langle \alpha_i, \alpha_j \rangle}{\langle \alpha_j, \alpha_j \rangle} = \langle \alpha_i, \alpha_j \rangle = \langle r_\beta(\alpha_i), r_\beta(\alpha_j) \rangle$$

pro libovolný kořen β .

Poznámka 2. Cartanovy matice jednoduchých Lieových algeber je možné najít v mnoha publikacích. Uvedeme je pro hodnoty 2 a 3, které později budeme využívat.

$$(31) \quad A_2 = \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ -1 & 2 \end{pmatrix}, \quad C_2 = \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ -2 & 2 \end{pmatrix}, \quad G_2 = \begin{pmatrix} 2 & -3 \\ -1 & 2 \end{pmatrix},$$

$$(32) \quad A_3 = \begin{pmatrix} 2 & -1 & 0 \\ -1 & 2 & -1 \\ 0 & -1 & 2 \end{pmatrix}, \quad C_3 = \begin{pmatrix} 2 & -1 & 0 \\ -1 & 2 & -1 \\ 0 & -2 & 2 \end{pmatrix}, \quad B_3 = \begin{pmatrix} 2 & -1 & 0 \\ -1 & 2 & -2 \\ 0 & -1 & 2 \end{pmatrix}.$$

Prosté kořeny $\alpha_i, i = 1, 2, \dots, n$, tvoří bázi prostoru E_n navíc se zavádí tzv. ω -báze fundamentálních vah $\omega_1, \omega_2, \dots, \omega_n$ s vlastností

$$(33) \quad \frac{2\langle \alpha_i, \omega_k \rangle}{\langle \alpha_j, \alpha_j \rangle} = \delta_{jk}.$$

α -báze a ω -báze jsou svázány Cartanovou maticí M_{jk} takto:

$$(34) \quad \alpha_j = \sum_{k=1}^n M_{jk} \omega_k, \quad \omega_j = \sum_{k=1}^n (M^{-1})_{jk} \alpha_k.$$

Poznámka 3. Pro rank 2 a 3 jsou inverzní Cartanovy matice

$$(35) \quad A_2^{-1} = \frac{1}{3} \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}, \quad C_2^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & \frac{1}{2} \\ 1 & 1 \end{pmatrix}, \quad G_2^{-1} = \begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 1 & 2 \end{pmatrix},$$

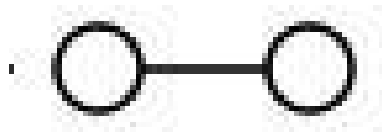
$$(36) \quad A_3^{-1} = \frac{1}{4} \begin{pmatrix} 3 & 2 & 1 \\ 2 & 4 & 2 \\ 1 & 2 & 3 \end{pmatrix}, \quad C_3^{-1} = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 2 & 2 & 2 \\ 2 & 4 & 4 \\ 1 & 2 & 3 \end{pmatrix}, \quad B_3^{-1} = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 2 & 2 & 1 \\ 2 & 4 & 2 \\ 2 & 4 & 3 \end{pmatrix}.$$

Definice 12. Úhly mezi kořeny lze přehledně určit z tzv. Coxeter-Dynkinových diagramů. Vrcholy diagramů znázorňují kořeny z báze kořenového systému. Mezi vrcholy např. α, β je nakresleno tolik spojnic $d_{\alpha\beta}$ kolik vychází ze vztahu

$$(37) \quad d_{\alpha\beta} = \langle \alpha\beta \rangle \langle \beta\alpha \rangle \in \{0, 1, 2, 3\}.$$

Pokud je $d_{\alpha\beta} > 1$, což nastane, když délka α je různá od β a když kořeny nejsou na sebe kolmé, kreslí se šipka od delšího kořenu ke kratšímu.

V našem jednoduchém příkladě 2 by diagram vypadal jako na obr. 4:



OBRÁZEK 4. Diagram pro A_2 .

Přehledně jsou Dynkinovy diagramy pro kořenové systémy jednotlivých Liových algeber vidět na obrázku 5. Následující příklad shrne postup při rozkladu Lieovy algebry a vytvoření Dynkinových diagramů.

Příklad 5. Rozklad algebry $\mathfrak{so}(2l+1, \mathbb{C}) = B_l$:

Nechť $L = \mathfrak{gl}_S(2l+1, \mathbb{C})$ pro $l \geq 1$, kde

$$S = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & I_l \\ 0 & I_l & 0 \end{pmatrix},$$

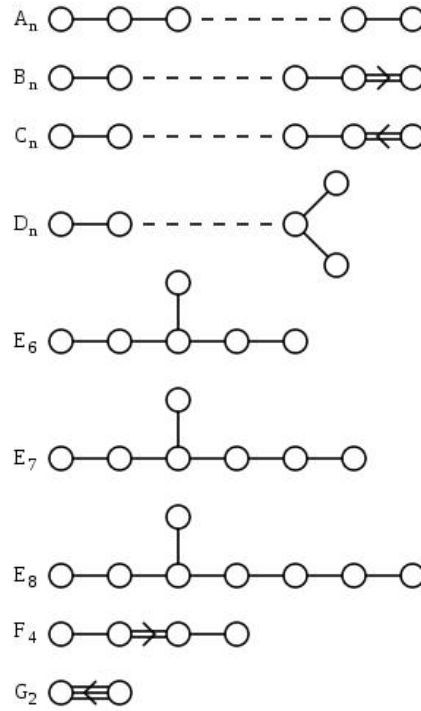
pak L bude dle příkladu 2

$$(38) \quad L = \{x \in \mathfrak{gl}(n, \mathbb{C}) \mid x^t S = -Sx\}.$$

Převedením L do bloků dostaneme

$$(39) \quad L = \begin{pmatrix} 0 & c^t & -b^t \\ b & m & p \\ -c & q & -m^t \end{pmatrix}.$$

Označme H množinu všech diagonálních matic v L a prvky matice očíslovme 0 až $2l$. Pro $h \in H$ máme diagonální prvky $0, a_1, \dots, a_l, -a_1, \dots, -a_l$, kde můžeme h zapsat jako



OBRÁZEK 5. Dynkinovy diagramy pro kořenové systémy některých Lieových algeber

$$(40) \quad h = \sum_{i=1}^l a_i (e_{ii} - e_{i+l, i+l}).$$

Uvažujme podprostor tvořený maticemi s nenulovými prvky na pozicích označených ve (39) jako b a c . Tyto podprostory mají bázi tvořenou množinou

$$(41) \quad \{[b_i, c_i \mid (b_i = e_{i,0} - e_{0, l+i}), (c_i = e_{0,i} - e_{l+i,0}), (1 \leq i \leq l)]\}.$$

Snadno se ukáže, že

$$(42) \quad [h, b_i] = a_i b_i, \quad [h, c_i] = -a_i c_i,$$

rozšíříme soubor $\{b_i, c_i\}$ na bázi L , tvořenou prvky

$$(43) \quad m_{ij} = e_{ij} - e_{l+j, l+i} \quad \text{pro } 1 \leq i \neq j \leq l,$$

$$(44) \quad p_{ij} = e_{i, l+j} - e_{j, l+i} \quad \text{pro } 1 \leq i < j \leq l,$$

$$(45) \quad q_{ji} = p_{ij}^t = e_{l+j,i} - e_{l+i,j} \quad \text{pro } 1 \leq i < j \leq l,$$

Je vidět, že prvky báze m_{ij}, p_{ij}, q_{ji} jsou vlastními vektory zobrazení $\text{ad}(h)$, protože

$$(46) \quad [h, m_{ij}] = (a_i - a_j)m_{ij},$$

$$(47) \quad [h, p_{ij}] = (a_i + a_j)p_{ij},$$

$$(48) \quad [h, q_{ji}] = -(a_i + a_j)q_{ji},$$

Nyní ze vztahů (43-48) zapíšeme seznam kořenů do tabulky:

kořen	ε_i	$-\varepsilon_i$	$\varepsilon_i - \varepsilon_j$	$\varepsilon_i + \varepsilon_j$	$-(\varepsilon_i + \varepsilon_j)$
vlastní vektor	b_i	c_i	$m_{ij} (i \neq j)$	$p_{ij} (i \leq j)$	$q_{ji} (i \not\leq j)$

Tab.2

Báze kořenového systému (definice 9) je tedy dána vztahem

$$(49) \quad B = \{\alpha_i \mid 1 \leq i \leq l\} \cup \{\beta_l\},$$

kde $\alpha_i = \varepsilon_i - \varepsilon_{i+1}$ a $\beta_l = \varepsilon_l$. Pokud $1 \leq i < l$,

$$\varepsilon_i = \alpha_i + \alpha_{i+1} + \dots + \alpha_{l-1} + \beta_l$$

a pokud $1 \leq i < j < l$,

$$\varepsilon_i - \varepsilon_j = \alpha_i + \alpha_{i+1} + \dots + \alpha_{l-1},$$

$$\varepsilon_i + \varepsilon_j = \alpha_i + \dots + \alpha_{j-1} + 2(\alpha_j + \alpha_{j+1} + \dots + \alpha_{l-1} + \beta_l).$$

Nyní spočítáme prvky Cartanovy matice (def. 10):

$$\langle \alpha_i, \alpha_j \rangle = \begin{cases} 2 & i = j, \\ -1 & |i - j| = 1, \\ 0 & \text{jinak.} \end{cases}$$

$$\langle \alpha_i, \beta_l \rangle = \begin{cases} -2 & i = l - 1, \\ 0 & \text{jinak.} \end{cases}$$

$$\langle \beta_l, \alpha_i \rangle = \begin{cases} -1 & i = l - 1, \\ 0 & \text{jinak.} \end{cases}$$

Toto nám ukazuje ((def 12) a (37)) jak bude vypadat Dynkinův diagram.

Kořenový systém $\mathfrak{so}(2l + 1, \mathbb{C})$ se označuje jako B_l .

Pro rank 3 tak dostaneme matici, kterou máme v definici 9 označenou jako B_3 .

Značení pro další kořenové systémy je následující:

OBRÁZEK 6. Dynkinovy diagramy pro korenový systém B_n .

- (1) $\mathfrak{sp}(2l, \mathbb{C})$ značíme též C_l .
- (2) $\mathfrak{sl}(l+1, \mathbb{C})$ značíme též A_l .

Těmito korenovými systémy se již nebudeme podrobně zabývat.

4. ORBITA WEYLOVÝCH GRUP

Definice 13. Necht' y je libovolný prvek Eukleidova prostoru E_n . Orbitou Weylovky grupy nazveme množinu $O(y)$ takovou, že

$$(50) \quad O(y) = \{wy \mid w \in W\}.$$

Počet prvků v orbitě označíme jako $|O(y)|$ a platí následující: $|O(0)| = 1$, $|O(y)| = |W|$, kde y je vnitřním bodem Weylovky komory.

Příklad 6. Vraťme se nyní k rozkladu z příkladu 3 a spočítejme orbitu Weylovky grupy generovanou reflexemi r_α, r_β , kde α, β tvoří bázi systému kořenů daných v (25). Orbitsy budeme počítat k prvkům $x \in E_n$ zadaných ve ω -bázi (34) o složkách a, b tzn. $(x)_\omega = (a, b)$.

Nyní pro souřadnice s_i a λ_i bodu λ Eukleidova prostoru E_n v ortogonální bázi $\{e_1, e_2 \dots e_n\}$ a v bázi $\{\omega_1, \omega_2 \dots \omega_n\}$ (viz 33) platí:

$$(51) \quad \begin{aligned} s_1 &= \frac{n}{n+1}\lambda_1 + \frac{n-1}{n+1}\lambda_2 + \frac{n-1}{n+1}\lambda_3 + \dots + \frac{2}{n+1}\lambda_{n-1} + \frac{1}{n+1}\lambda_n, \\ s_2 &= -\frac{1}{n+1}\lambda_1 + \frac{n-1}{n+1}\lambda_2 + \frac{n-1}{n+1}\lambda_3 + \dots + \frac{2}{n+1}\lambda_{n-1} + \frac{1}{n+1}\lambda_n, \\ s_3 &= -\frac{1}{n+1}\lambda_1 - \frac{2}{n+1}\lambda_2 + \frac{n-1}{n+1}\lambda_3 + \dots + \frac{2}{n+1}\lambda_{n-1} + \frac{1}{n+1}\lambda_n, \\ &\vdots \\ s_n &= -\frac{1}{n+1}\lambda_1 - \frac{2}{n+1}\lambda_2 - \frac{3}{n+1}\lambda_3 - \dots - \frac{n-1}{n+1}\lambda_{n-1} + \frac{1}{n+1}\lambda_n, \\ s_{n+1} &= -\frac{1}{n+1}\lambda_1 - \frac{2}{n+1}\lambda_2 - \frac{3}{n+1}\lambda_3 - \dots - \frac{n-1}{n+1}\lambda_{n-1} - \frac{n}{n+1}\lambda_n, \end{aligned}$$

a inverzní vztah je:

$$(52) \quad \lambda_i = s_i - s_{i+1} \quad \text{pro } 1 \leq i \leq l.$$

Podle definice orbity (50) dostaneme pro $l = 2$:

reflexe	r_{α_i}	$(\lambda)_{w_i}$	$(\lambda)_{e_i}$	$r_{\alpha_i}(\lambda)_{e_i}$	$(r_{\alpha_i}(\lambda))_{w_i}$
	r_{α_1}	(a, b)	$(\frac{2a}{3} + \frac{b}{3}, -\frac{a}{3} + \frac{b}{3}, -\frac{a}{3} - \frac{2b}{3})$	$(-\frac{a}{3} + \frac{b}{3}, \frac{2a}{3} + \frac{b}{3}, -\frac{a}{3} - \frac{2b}{3})$	$(-a, a+b)$
	r_{α_2}	(a, b)	$(\frac{2a}{3} + \frac{b}{3}, -\frac{a}{3} + \frac{b}{3}, -\frac{a}{3} - \frac{2b}{3})$	$(\frac{2a}{3} + \frac{b}{3}, -\frac{a}{3} - \frac{2b}{3}, -\frac{a}{3} + \frac{b}{3})$	$(a+b, -b)$
	r_{α_1}	$(a+b, -b)$	$(\frac{2a}{3} + \frac{b}{3}, -\frac{a}{3} - \frac{2b}{3}, -\frac{a}{3} + \frac{b}{3})$	$(-\frac{a}{3} - \frac{2b}{3}, \frac{2a}{3} + \frac{b}{3}, -\frac{a}{3} + \frac{b}{3})$	$(-a-b, a)$
	r_{α_2}	$(-a, a+b)$	$(-\frac{a}{3} + \frac{b}{3}, \frac{2a}{3} + \frac{b}{3}, -\frac{a}{3} - \frac{2b}{3})$	$(-\frac{a}{3} + \frac{b}{3}, -\frac{a}{3} - \frac{2b}{3}, \frac{2a}{3} + \frac{b}{3})$	$(b, -a-b)$
	r_{α_1}	$(b, -a-b)$	$(-\frac{a}{3} + \frac{b}{3}, -\frac{a}{3} - \frac{2b}{3}, \frac{2a}{3} + \frac{b}{3})$	$(-\frac{a}{3} - \frac{2b}{3}, -\frac{a}{3} + \frac{b}{3}, \frac{2a}{3} + \frac{b}{3})$	$(-b, -a)$
	r_{α_2}	$(-a-b, a)$	$(-\frac{a}{3} - \frac{2b}{3}, \frac{2a}{3} + \frac{b}{3}, -\frac{a}{3} + \frac{b}{3})$	$(-\frac{a}{3} - \frac{2b}{3}, -\frac{a}{3} + \frac{b}{3}, \frac{2a}{3} + \frac{b}{3})$	$(-a, a+b)$

orbita Weylovy grupy má tedy tvar:

$$(53) \quad O(a, b) = \{(a, b), (-a, a + b), (a + b, -b), (-a - b, a), (b, -a - b), (-b, -a)\}.$$

Okamžitě je vidět, že

$$(54) \quad O(a, 0) = \{(a, 0), (-a, a), (0, -a)\},$$

$$(55) \quad O(0, b) = \{(0, b), (b, -b), (-b, 0)\}.$$

Příklad 7. Podobným způsobem najdeme orbity pro A_3 ($l = 3$). Pomocí vztahu (51), jehož aplikaci znázorníme šipkou, dostaneme, že

$$(56) \quad (\lambda)_{\omega_i} = (a, b, c) \implies (\lambda)_{e_i} = \left(\frac{3a}{4} + \frac{2b}{4} + \frac{c}{4}, -\frac{a}{4} + \frac{2b}{4} + \frac{c}{4}, -\frac{a}{4} - \frac{2b}{4} + \frac{c}{4}, -\frac{a}{4} - \frac{2b}{4} - \frac{3c}{4} \right).$$

$$\begin{array}{l} (\lambda)_{\omega_i} \quad r_{\alpha_i} \quad r_{\alpha_i}(\lambda)_{e_i} \\ \left(\frac{3a}{4} + \frac{2b}{4} + \frac{c}{4}, -\frac{a}{4} + \frac{2b}{4} + \frac{c}{4}, -\frac{a}{4} - \frac{2b}{4} + \frac{c}{4}, -\frac{a}{4} - \frac{2b}{4} - \frac{3c}{4} \right) \rightarrow \left(-\frac{a}{4} + \frac{2b}{4} + \frac{c}{4}, \frac{3a}{4} + \frac{2b}{4} + \frac{c}{4}, -\frac{a}{4} - \frac{2b}{4} + \frac{c}{4}, -\frac{a}{4} - \frac{2b}{4} - \frac{3c}{4} \right), \\ \left(\frac{3a}{4} + \frac{2b}{4} + \frac{c}{4}, -\frac{a}{4} + \frac{2b}{4} + \frac{c}{4}, -\frac{a}{4} - \frac{2b}{4} + \frac{c}{4}, -\frac{a}{4} - \frac{2b}{4} - \frac{3c}{4} \right) \rightarrow \left(\frac{3a}{4} + \frac{2b}{4} + \frac{c}{4}, -\frac{a}{4} + \frac{2b}{4} + \frac{c}{4}, -\frac{a}{4} - \frac{2b}{4} + \frac{c}{4}, -\frac{a}{4} - \frac{2b}{4} - \frac{3c}{4} \right), \\ \left(\frac{3a}{4} + \frac{2b}{4} + \frac{c}{4}, -\frac{a}{4} + \frac{2b}{4} + \frac{c}{4}, -\frac{a}{4} - \frac{2b}{4} + \frac{c}{4}, -\frac{a}{4} - \frac{2b}{4} - \frac{3c}{4} \right) \rightarrow \left(\frac{3a}{4} + \frac{2b}{4} + \frac{c}{4}, -\frac{a}{4} + \frac{2b}{4} + \frac{c}{4}, -\frac{a}{4} - \frac{2b}{4} + \frac{c}{4}, -\frac{a}{4} - \frac{2b}{4} - \frac{3c}{4} \right), \\ \left(\frac{3a}{4} + \frac{2b}{4} + \frac{c}{4}, -\frac{a}{4} + \frac{2b}{4} + \frac{c}{4}, -\frac{a}{4} - \frac{2b}{4} + \frac{c}{4}, -\frac{a}{4} - \frac{2b}{4} - \frac{3c}{4} \right) \rightarrow \left(-\frac{a}{4} + \frac{2b}{4} + \frac{c}{4}, \frac{3a}{4} + \frac{2b}{4} + \frac{c}{4}, -\frac{a}{4} - \frac{2b}{4} + \frac{c}{4}, -\frac{a}{4} - \frac{2b}{4} - \frac{3c}{4} \right), \\ \left(-\frac{a}{4} + \frac{2b}{4} + \frac{c}{4}, \frac{3a}{4} + \frac{2b}{4} + \frac{c}{4}, -\frac{a}{4} - \frac{2b}{4} + \frac{c}{4}, -\frac{a}{4} - \frac{2b}{4} - \frac{3c}{4} \right) \rightarrow \left(-\frac{a}{4} + \frac{2b}{4} + \frac{c}{4}, -\frac{a}{4} - \frac{2b}{4} + \frac{c}{4}, \frac{3a}{4} + \frac{2b}{4} + \frac{c}{4}, -\frac{a}{4} - \frac{2b}{4} - \frac{3c}{4} \right), \\ \left(\frac{3a}{4} + \frac{2b}{4} + \frac{c}{4}, -\frac{a}{4} - \frac{2b}{4} + \frac{c}{4}, -\frac{a}{4} + \frac{2b}{4} + \frac{c}{4}, -\frac{a}{4} - \frac{2b}{4} - \frac{3c}{4} \right) \rightarrow \left(\frac{3a}{4} + \frac{2b}{4} + \frac{c}{4}, -\frac{a}{4} - \frac{2b}{4} + \frac{c}{4}, -\frac{a}{4} + \frac{2b}{4} + \frac{c}{4}, -\frac{a}{4} - \frac{2b}{4} - \frac{3c}{4} \right), \\ \left(-\frac{a}{4} + \frac{2b}{4} + \frac{c}{4}, \frac{3a}{4} + \frac{2b}{4} + \frac{c}{4}, -\frac{a}{4} - \frac{2b}{4} + \frac{c}{4}, -\frac{a}{4} - \frac{2b}{4} - \frac{3c}{4} \right) \rightarrow \left(-\frac{a}{4} + \frac{2b}{4} + \frac{c}{4}, -\frac{a}{4} - \frac{2b}{4} + \frac{c}{4}, \frac{3a}{4} + \frac{2b}{4} + \frac{c}{4}, -\frac{a}{4} - \frac{2b}{4} - \frac{3c}{4} \right), \\ \left(-\frac{a}{4} + \frac{2b}{4} + \frac{c}{4}, \frac{3a}{4} + \frac{2b}{4} + \frac{c}{4}, -\frac{a}{4} - \frac{2b}{4} + \frac{c}{4}, -\frac{a}{4} - \frac{2b}{4} - \frac{3c}{4} \right) \rightarrow \left(-\frac{a}{4} - \frac{2b}{4} + \frac{c}{4}, -\frac{a}{4} + \frac{2b}{4} + \frac{c}{4}, \frac{3a}{4} + \frac{2b}{4} + \frac{c}{4}, -\frac{a}{4} - \frac{2b}{4} - \frac{3c}{4} \right), \\ \left(\frac{3a}{4} + \frac{2b}{4} + \frac{c}{4}, -\frac{a}{4} - \frac{2b}{4} + \frac{c}{4}, -\frac{a}{4} + \frac{2b}{4} + \frac{c}{4}, -\frac{a}{4} - \frac{2b}{4} - \frac{3c}{4} \right) \rightarrow \left(\frac{3a}{4} + \frac{2b}{4} + \frac{c}{4}, -\frac{a}{4} - \frac{2b}{4} + \frac{c}{4}, -\frac{a}{4} + \frac{2b}{4} + \frac{c}{4}, -\frac{a}{4} - \frac{2b}{4} - \frac{3c}{4} \right), \\ \left(-\frac{a}{4} - \frac{2b}{4} + \frac{c}{4}, \frac{3a}{4} + \frac{2b}{4} + \frac{c}{4}, -\frac{a}{4} + \frac{2b}{4} + \frac{c}{4}, -\frac{a}{4} - \frac{2b}{4} - \frac{3c}{4} \right) \rightarrow \left(-\frac{a}{4} - \frac{2b}{4} + \frac{c}{4}, \frac{3a}{4} + \frac{2b}{4} + \frac{c}{4}, -\frac{a}{4} + \frac{2b}{4} + \frac{c}{4}, -\frac{a}{4} - \frac{2b}{4} - \frac{3c}{4} \right), \\ \left(-\frac{a}{4} + \frac{2b}{4} + \frac{c}{4}, -\frac{a}{4} - \frac{2b}{4} + \frac{c}{4}, -\frac{a}{4} - \frac{2b}{4} - \frac{3c}{4}, \frac{3a}{4} + \frac{2b}{4} + \frac{c}{4} \right) \rightarrow \left(-\frac{a}{4} - \frac{2b}{4} + \frac{c}{4}, -\frac{a}{4} + \frac{2b}{4} + \frac{c}{4}, -\frac{a}{4} - \frac{2b}{4} - \frac{3c}{4}, \frac{3a}{4} + \frac{2b}{4} + \frac{c}{4} \right), \end{array}$$

Odpovídající orbity v ω -bázi jsou:

$$(57) \quad \begin{array}{l} (r_{\alpha_i}(\lambda))_{\omega_i} \\ (-a, a + b, c), \\ (a + b, -b, b + c), \\ (a, b + c, -c), \\ (-a, a + b + c, -c), \\ (b, -a - b, a + b + c), \\ (a + b, c, -b - c), \\ (b + c, -a - b - c, a + b), \\ (-b, -a, a + b + c), \\ (a + b + c, -c, -b), \\ (-a - b, a, +b + c), \\ (-b, b + c, -a - b - c), \end{array}$$

Do orbity Weylvy grupy pro A_3 patří kromě prvků z (52) navíc všechny prvky, které mají složky v opačném pořadí s opačným znaménkem, tedy

$$(58) \quad \begin{aligned} &(-c, -b, -a), \\ &(-c, -a - b, a), \\ &(-b - c, b, -a - b), \\ &(c, -b - c, -a), \\ &(c, -a - b - c, a), \\ &(-a - b - c, a + b, -b), \\ &(b + c, -c, -a - b), \\ &(-a - b, a + b + c, -b - c), \\ &(-a - b - c, b, a), \\ &(b, c, -a - b - c), \\ &(-b - c, -a, a + b), \\ &(a + b + c, -b - c, b), \end{aligned}$$

Pro A_3 lze snadno najít další orbity:

$$(59) \quad O(a, 0, 0) = \{(a, 0, 0), (-a, a, 0), (0, 0, -a), (0, -a, a)\},$$

$$(60) \quad O(0, b, 0) = \{(0, b, 0), (b, -b, b), (b, 0, -b), (-b, b, -b), (0, -b, 0), (-b, 0, b)\},$$

$$(61) \quad O(0, 0, c) = \{(0, 0, c), (0, c, -c), (c, -c, 0), (-c, 0, 0)\}.$$

Příklad 8. Pro algebru $\mathfrak{sp}(2l, \mathbb{C}) (=C_l)$ určíme orbity Weylvy grupy pro $l = 2$ a 3 .

V příkladu 2 jsme definovali algebru $L = \mathfrak{sp}(2l, \mathbb{C}) = \mathfrak{gl}_S(2l, \mathbb{C})$, kde

$$S = \begin{pmatrix} 0 & I_l \\ -I_l & 0 \end{pmatrix},$$

L obsahuje prvky blokové matice ve tvaru:

$$(62) \quad \left\{ \begin{pmatrix} m & p \\ q & -m^t \end{pmatrix} \mid p = p^t, \quad q = q^t \right\}.$$

Označíme H množinu diagonálních matic algebry L . Prvek $h \in H$ bude mít tvar

$$(63) \quad h = \sum_{i=1}^l a_i (e_{ii} - e_{i+l, i+l})$$

a báze algebry L je ve tvaru

$$(64) \quad m_{ij} = e_{ij} - e_{l+j, l+i}, \quad 1 \leq i \neq j \leq l,$$

$$(65) \quad p_{ij} = e_{i, l+j} - e_{j, l+i}, \quad 1 \leq i \leq j \leq l,$$

$$(66) \quad q_{ji} = p_{ij}^t = e_{l+j,i} - e_{l+i,j}, \quad 1 \leq i \leq j \leq l.$$

Zapůsobením zobrazení ad h (viz 15) na tuto bázi získáme

$$(67) \quad [h, m_{ij}] = (a_i - a_j)m_{ij},$$

$$(68) \quad [h, p_{ij}] = (a_i + a_j)p_{ij},$$

$$(69) \quad [h, q_{ji}] = -(a_i + a_j)q_{ji},$$

a pokud se $i = j$ dostaneme, že

$$(70) \quad [h, p_{ij}] = (2a_i)p_{ij},$$

$$(71) \quad [h, q_{ji}] = -(2a_i)q_{ji}.$$

Podle značení (17) získáme kořenový systém shrnutý v následující tabulce:

kořen	$2\varepsilon_i$	$-2\varepsilon_i$	$\varepsilon_i - \varepsilon_j$	$\varepsilon_i + \varepsilon_j$	$-(\varepsilon_i + \varepsilon_j)$
vlastní vektor	p_{ii}	q_{ii}	$m_{ij} (i \neq j)$	$p_{ij} (i < j)$	$q_{ji} (i < j)$

Tab. 3 Báze kořenového systému (def. 12) je tedy dána

$$(72) \quad B = \{\alpha_i \mid 1 \leq i \leq l\} \cup \{\beta_l\},$$

$$(73) \quad \alpha_i = \varepsilon_i - \varepsilon_{i+1}, \quad 1 \leq i < l-1 \quad a \quad \beta_l = 2\varepsilon_l.$$

Nyní pro souřadnice s_i a λ_i bodu λ Eukleidova prostoru E_n v ortogonální bázi $\{e_1, e_2, \dots, e_n\}$ a v bázi $\{\omega_1, \omega_2, \dots, \omega_n\}$ platí:

$$(74) \quad \begin{aligned} s_1 &= \lambda_1 + \lambda_2 + \dots + \lambda_{n-1} + \lambda_n, \\ s_2 &= \lambda_2 + \dots + \lambda_{n-1} + \lambda_n, \\ \dots &= \dots + \dots + \dots, \\ s_n &= \lambda_n, \end{aligned}$$

a inverzní vztah:

$$(75) \quad \lambda_i = s_i - s_{i+1}, \quad 1 \leq i < l-1 \quad a \quad \lambda_l = s_l.$$

Reflexe Weylovy grupy $(r_{\alpha_1}, r_{\alpha_2}, \dots, r_{\alpha_{l-1}})$ působí na ortogonální souřadnice vektoru $\lambda = \sum_{i=1}^n s_i e_i$ jako permutace

i -té a $i+1$ -té souřadnice a $r_{\alpha_l} = r_\beta$ mění u jedné z těchto souřadnic znaménko.

Pokud $L = C_2$ (tj. $l = 2$) vypočteme orbitu Weylovy grupy generované reflexemi (r_{α_1}, r_β) . Vezměme λ v bázi ω_i pomocí (74) převedeme do ortogonální báze a použijeme jednu z reflexí (r_{α_1}, r_β) a převedeme zpět do ω -báze (75).

Pro nás je podle (73) $\alpha_1 = (1, -1), \beta = (0, 2)$. (Šipka značí zobrazení pomocí reflexe).

$$(76) \quad (a, b)_{w_i} = (a + b, b)_{e_i} \implies (a + b, b) - \frac{2((a+b,b)(\alpha_1))}{(\alpha_1)(\alpha_1)}(\alpha_1) = \\ = (b, a + b) = (-a, a + b,).$$

Další výpočty shrnuje tabulka:

$$(77) \quad \begin{array}{ccc} (\lambda)_{e_i} & r_i(\lambda)_{e_i} & (r_i(\lambda))_{w_i} \\ (a + b, b) & (b, a + b) & (-a, a + b,) \\ (a + b, b) & (a + b, -b) & (a + 2b, -b) \\ (a + b, -b) & (-b, a + b) & (-a - 2b, a + b) \end{array}$$

Další 4 prvky orbity lišící se pouze zaménkem od právě spočítaných bychom získali působením reflexí na prvky s opačným znaménkem.

Celková orbita tedy vypadá následovně:

$$(78) \quad O(a, b) = \{\pm(a, b) \pm (-a, a + b,) \pm (a + 2b, -b) \pm (-a - 2b, a + b)\}.$$

Příklad 9. Pro C_3 (tzn. $l = 3$), když $(\lambda)_{\omega_i} = (s_1, s_2, s_3)$, dostáváme $8 \cdot 3! = 48$ možností, jak se změní 8 různě oznaménkovaných trojic souřadnic:

$$\begin{array}{ccc} s_1 & s_2 & s_3 \\ -s_1 & s_2 & s_3 \\ s_1 & -s_2 & s_3 \\ s_1 & s_2 & -s_3 \\ -s_1 & -s_2 & s_3 \\ -s_1 & s_2 & -s_3 \\ s_1 & -s_2 & -s_3 \\ -s_1 & -s_2 & -s_3 \end{array}$$

Pro výpočet orbity Weylovoy grupy generované reflexemi $(r_{\alpha_1}, r_{\alpha_2}, r_{\beta})$ vezmeme λ v bázi ω_i (viz 33), pomocí (74) převedeme do ortogonální báze a použijeme jednu z reflexí $(r_{\alpha_1}, r_{\alpha_2}, r_{\beta})$ a převedeme zpět do ω -báze (vztah 75).

Báze kořenového systému vypadá (viz 73) takto: $\alpha_1 = (1, -1, 0), \alpha_2 = (0, 1, -1), \beta = (0, 0, 2)$. (V následujícím schématu šipka opět znamená zobrazení prvku pomocí reflexe definované ve vztahu (29))

$$(79) \quad (a, b, c) = (a + b + c, b + c, c) \implies (a + b + c, b + c, c) - \frac{2((a+b+c,b+c,c)(\alpha_1))}{(\alpha_1)(\alpha_1)}(\alpha_1) = \\ = (b + c, a + b + c, c) = (-a, a + b, c)$$

Následující tabulka shrne výpočet 24 prvků orbity:

$(\lambda)_{e_i}$	$r_i(\lambda)_{e_i}$	$(r_i(\lambda))_{w_i}$
$(a+b+c, b+c, c)$	$(b+c, a+b+c, c)$	$(-a, a+b, c)$
$(a+b+c, b+c, c)$	$(a+b+c, c, b+c)$	$(a+b, -b, b+c)$
$(a+b+c, b+c, c)$	$(a+b+c, b+c, -c)$	$(a, b+2c, -c)$
$(a+b+c, b+c, -c)$	$(b+c, a+b+c, -c)$	$(-a, a+b+2c, -c)$
$(a+b+c, b+c, -c)$	$(a+b+c, b+c, c)$	(a, b, c)
$(a+b+c, b+c, -c)$	$(a+b+c, -c, b+c,)$	$(a+b+2c, -b-2c, b+c)$
$(a+b+c, -c, b+c,)$	$(-c, a+b+c, b+c)$	$(-a-b-2c, a, b+c)$
$(a+b+c, -c, b+c,)$	$(a+b+c, -c, -b-c,)$	$(a+b+2c, b, -b-c)$
$(a+b+c, c, b+c)$	$(c, a+b+c, b+c)$	$(-a-b, a, b+c)$
$(a+b+c, c, b+c)$	$(a+b+c, c, -b-c)$	$(a+b, 2c+b, -b-c)$
$(c, a+b+c, b+c)$	$(c, a+b+c, -b-c)$	$(-a-b, a+2b+2c, -b-c)$
$(c, a+b+c, b+c)$	$(c, b+c, a+b+c)$	$(-b, -a, a+b+c)$
$(a+b+c, c, -b-c)$	$(c, a+b+c, -b-c)$	$(-a-b, a+2b+2c, -b-c)$
$(a+b+c, c, -b-c)$	$(a+b+c, -b-c, c)$	$(a+2b+2c, -b-2c, c)$
$(b+c, a+b+c, -c)$	$(b+c, -c, a+b+c)$	$(b+2c, -a-b-2c, a+b+c)$
$(b+c, a+b+c, -c)$	$(b+c, a+b+c, c)$	$(-a, a+b, c)$
$(c, b+c, a+b+c)$	$(c, b+c, -a-b-c)$	$(-b, a+2b+2c, -a-b-c)$
$(c, a+b+c, -b-c)$	$(c, -b-c, a+b+c,)$	$(b+2c, -a-2b-2c, a+b+c)$
$(a+b+c, -b-c, c)$	$(-b-c, a+b+c, c)$	$(-a-2b-2c, a+b, c)$
$(-c, a+b+c, b+c)$	$(-c, a+b+c, -b-c)$	$(-a-b-2c, a+2b+2c, -b-c)$
$(-b-c, a+b+c, c)$	$(-b-c, a+b+c, -c)$	$(-a-2b-2c, a+b+2c, -c)$
$(c, b+c, -a-b-c)$	$(b+c, c, -a-b-c)$	$(b, a+b+2c, -a-b-c)$
$(b+c, -c, a+b+c)$	$(-c, b+c, a+b+c)$	$(-b-2c, -a, a+b+c)$
$(c, b+c, a+b+c)$	$(b+c, c, a+b+c)$	$(b, -a-b, a+b+c)$

Dalších 24 prvků orbity lišících se pouze zaménkem bychom získali stejným působením reflexí na prvky s opačným znaménkem.

Dále snadno dostáváme prvky speciálních případů orbit:

$$O(a, b, 0) = \{\pm(a, b, 0), \pm(a+b, -b, b), \pm(-a, a+b, 0), \pm(b, -a-b, a+b), \pm(-a-b, a, b), \pm(-b, -a, a+b), \\ \pm(-a-2b, b, 0), \pm(-a-b, -b, b), \pm(a+2b, -a-b, 0), \pm(b, a+b, -a-b), \pm(a+b, -a-2b, b), \pm(-b, a+2b, -a-b)\},$$

$$O(a, 0, 0) = \{\pm(a, 0, 0) \pm (a, -a, 0) \pm (0, a, -a)\},$$

$$O(0, b, 0) = \{\pm(0, b, 0) \pm (b, -b, b) \pm (b, 0, -b) \pm (2b, -b, 0) \pm (-b, -b, b) \pm (b, -2b, b)\},$$

$$O(0, 0, c) = \{\pm(0, 0, c) \pm (0, 2c, -c) \pm (2c, -2c, c) \pm (2c, 0, -c)\}.$$

Příklad 10. Pro B_3 shrnuje výpočet následující tabulka:

$$(\lambda)_{w_i} = (a, b, c) \implies (\lambda)_{e_i} = (a+b+\frac{c}{2}, b+\frac{c}{2}, \frac{c}{2}),$$

$$\begin{array}{lll}
(\lambda)_{s_i} & \implies r_i(\lambda)_{s_i} & \implies (r_i(\lambda))_{w_i} \\
(a+b+\frac{c}{2}, b+\frac{c}{2}, \frac{c}{2}) & (b+\frac{c}{2}, a+b+\frac{c}{2}, \frac{c}{2}) & (-a, a+b, c) \\
(a+b+\frac{c}{2}, b+\frac{c}{2}, \frac{c}{2}) & (a+b+\frac{c}{2}, \frac{c}{2}, b+\frac{c}{2}) & (a+b, -b, 2b+c) \\
(a+b+\frac{c}{2}, b+\frac{c}{2}, \frac{c}{2}) & (a+b+\frac{c}{2}, b+\frac{c}{2}, -\frac{c}{2}) & (a, b+c, -c) \\
(b+\frac{c}{2}, a+b+\frac{c}{2}, \frac{c}{2}) & (b+\frac{c}{2}, \frac{c}{2}, a+b+\frac{c}{2}) & (b, -a-b, 2a+2b+c) \\
(b+\frac{c}{2}, a+b+\frac{c}{2}, \frac{c}{2}) & (b+\frac{c}{2}, a+b+\frac{c}{2}, -\frac{c}{2}) & (-a, a+b+c, -c) \\
(a+b+\frac{c}{2}, \frac{c}{2}, b+\frac{c}{2}) & (\frac{c}{2}, a+b+\frac{c}{2}, b+\frac{c}{2}) & (-a-b, a, 2b+c) \\
(a+b+\frac{c}{2}, \frac{c}{2}, b+\frac{c}{2}) & (a+b+\frac{c}{2}, \frac{c}{2}, -b-\frac{c}{2}) & (a+b, b+c, -2b-c) \\
(a+b+\frac{c}{2}, b+\frac{c}{2}, -\frac{c}{2}) & (a+b+\frac{c}{2}, -\frac{c}{2}, b+\frac{c}{2}) & (a+b+c, -b-c, 2b+c) \\
(b+\frac{c}{2}, \frac{c}{2}, a+b+\frac{c}{2}) & (\frac{c}{2}, b+\frac{c}{2}, a+b+\frac{c}{2}) & (-b, -a, 2a+2b+c) \\
(b+\frac{c}{2}, \frac{c}{2}, a+b+\frac{c}{2}) & (b+\frac{c}{2}, \frac{c}{2}, -a-b-\frac{c}{2}) & (b, a+b+c, -2a-2b-c) \\
(\frac{c}{2}, a+b+\frac{c}{2}, b+\frac{c}{2}) & (\frac{c}{2}, a+b+\frac{c}{2}, -b-\frac{c}{2}) & (-a-b, a+2b+c, -2b-c) \\
(a+b+\frac{c}{2}, \frac{c}{2}, -b-\frac{c}{2}) & (a+b+\frac{c}{2}, -b-\frac{c}{2}, \frac{c}{2}) & (a+2b+c, -b-c, c) \\
(a+b+\frac{c}{2}, -\frac{c}{2}, b+\frac{c}{2}) & (-\frac{c}{2}, a+b+\frac{c}{2}, b+\frac{c}{2}) & (-a-b-c, a, 2b+c) \\
(a+b+\frac{c}{2}, -\frac{c}{2}, b+\frac{c}{2}) & (a+b+\frac{c}{2}, -\frac{c}{2}, -b-\frac{c}{2}) & (a+b+c, b, -2b-c) \\
(\frac{c}{2}, b+\frac{c}{2}, a+b+\frac{c}{2}) & (\frac{c}{2}, b+\frac{c}{2}, -a-b-\frac{c}{2}) & (-b, a+2b+c, -2a-2b-c) \\
(b+\frac{c}{2}, \frac{c}{2}, -a-b-\frac{c}{2}) & (b+\frac{c}{2}, -a-b-\frac{c}{2}, \frac{c}{2}) & (a+2b+c, -a-b-c, c) \\
(-\frac{c}{2}, a+b+\frac{c}{2}, b+\frac{c}{2}) & (-\frac{c}{2}, b+\frac{c}{2}, a+b+\frac{c}{2}) & (-b-c, -a, 2a+2b+c) \\
(-\frac{c}{2}, a+b+\frac{c}{2}, b+\frac{c}{2}) & (-\frac{c}{2}, a+b+\frac{c}{2}, -b-\frac{c}{2}) & (-a-b-c, a+2b+c, -2b-c) \\
(a+b+\frac{c}{2}, -\frac{c}{2}, -b-\frac{c}{2}) & (a+b+\frac{c}{2}, -b-\frac{c}{2}, -\frac{c}{2}) & (a+2b+c, -b, -c) \\
(a+b+\frac{c}{2}, -b-\frac{c}{2}, \frac{c}{2}) & (-b-\frac{c}{2}, a+b+\frac{c}{2}, \frac{c}{2}) & (-a-2b-c, a+b, c) \\
(\frac{c}{2}, a+b+\frac{c}{2}, -b-\frac{c}{2}) & (\frac{c}{2}, -b-\frac{c}{2}, a+b+\frac{c}{2}) & (b+c, -a-2b-c, 2a+2b+c) \\
(-\frac{c}{2}, b+\frac{c}{2}, a+b+\frac{c}{2}) & (b+\frac{c}{2}, -\frac{c}{2}, a+b+\frac{c}{2}) & (b+c, -a-b-c, 2a+2b+c) \\
(b+\frac{c}{2}, -\frac{c}{2}, a+b+\frac{c}{2}) & (b+\frac{c}{2}, -\frac{c}{2}, -a-b-\frac{c}{2}) & (b+c, a+b, -2a-2b-c)
\end{array}$$

Dalších 24 prvků se liší od již spočítaných pouze ve znaménku.

Snadno získáme další orbity:

$$O(a, 0, 0) = \{\pm(a, 0, 0) \pm(a, -a, 0) \pm(0, a, -2a)\},$$

$$O(0, b, 0) = \{\pm(0, b, 0) \pm(b, -b, 2b) \pm(-b, 0, 2b) \pm(-2b, b, 0) \pm(-b, -b, 2b) \pm(b, -2b, 2b)\},$$

$$O(0, 0, c) = \{\pm(0, 0, c) \pm(c, -c, c) \pm(0, c, -c) \pm(-c, 0, c)\}.$$

5. SOUČIN ORBIT A DEKOMPOZICE SOUČINU ORBIT

Definice 14. Součin dvou orbit $O(\lambda)$ a $O(\lambda')$ značíme $O(\lambda) \otimes O(\lambda')$ a definujeme ho jako množina bodů ve tvaru $\lambda_1 + \lambda_2$ kde $\lambda_1 \in O(\lambda)$ a $\lambda_2 \in O(\lambda')$.

Příklad 11. Mějme orbitu A_1 pro $a \neq b$, $a, b \in E$. Pro součin $O(a) \otimes O(b)$ dostaneme:

$$(80) \quad O(a) \otimes O(b) = \{a, -a\} \otimes \{b, -b\} = \{a+b, -a-b\} \cup \{|a-b|, -|a-b|\} = O(a+b) \cup O(|a-b|).$$

Pro vyšší dimenze nejprve uvažujme dekompozici součinu orbit $O(\lambda) = \{w\lambda \mid w \in W/W_\lambda\}$ a $O(\mu) = \{w\mu \mid w \in W/W_\mu\}$. Součin tedy podle definice (13) bude ve tvaru:

$$(81) \quad \begin{aligned} O(\lambda) \otimes O(\mu) &= \{w\lambda + w'\mu \mid w \in W/W_\lambda, w' \in W/W_\mu\} = \\ &= \{w\lambda + w_1\mu \mid w \in W/W_\lambda\} \cup \{w\lambda + w_2\mu \mid w \in W/W_\lambda\} \cup \dots \cup \{w\lambda + w_n\mu \mid w \in W/W_\lambda\}, \end{aligned}$$

kde $w_1, w_2, \dots, w_n \in W/W_\mu$.

Lemma 6. *Součin $O(\lambda) \otimes O(\lambda')$ obsahuje pouze orbity ve tvaru $O(|w\lambda + \mu|)$, $w \in W/W_\lambda$, kde $|w\lambda + \mu|$ je dominantní váha orbity obsahující $w\lambda + \mu$. Navíc každá orbita $O(|w\lambda + \mu|)$, $w \in W/W_\lambda$, je v součinu $O(\lambda) \otimes O(\lambda')$.*

Pro každý dominantní prvek $w\lambda + w_i\mu$ z (78) existuje $w'' \in W$ takový, že $w''(w\lambda + w_i\mu) = w'\lambda + \mu$. To znamená, že $w\lambda + w_i\mu$ je ve tvaru $|w'\lambda + \mu|$, $w' \in W/W_\lambda$. Naopak vezmeme každý prvek $w\lambda + \mu$, $w \in W/W_\lambda$, který patří do součinu $O(a) \otimes O(b)$. To znamená, že také $|w\lambda + \mu|$ patří do tohoto součinu. Proto orbita $O(|w\lambda + \mu|)$ je obsažena v součinu $O(a) \otimes O(b)$ a tím je lemma dokázáno.

Lemma 7. *Nechť $O(\lambda)$ a $O(\mu)$ jsou orbity takové, že $\lambda \neq 0, \mu \neq 0$ a necht' všechny prvky $w\lambda + \mu, w \in W/W_\lambda$ jsou striktně dominantní, potom*

$$(82) \quad O(\lambda) \otimes O(\mu) = \bigsqcup_{w \in W/W_\lambda} O(w\lambda + \mu).$$

Nechť $O(\lambda)$ a $O(\mu)$ jsou orbity takové, že $\lambda \neq 0, \mu \neq 0$. Necht' všechny prvky $w\lambda + \mu, w \in W/W_\lambda$ jsou dominantní, potom

$$(83) \quad O(\lambda) \otimes O(\mu) = \bigsqcup_{w \in W/W_\lambda} n_{w\lambda + \mu} O(w\lambda + \mu),$$

kde $n_{w\lambda + \mu} = |W_{w\lambda + \mu}|$.

Nechť $\lambda \neq 0$, potom všechny prvky $w\lambda + \mu, w \in W/W_\lambda$ jsou dominantní právě tehdy, když $W_\mu = \{1\}$. Potom na pravé straně (78) je $|W|$ členů. Pokud $w\lambda + \mu$ je striktně dominantní, tj. $W_{w\lambda + \mu} = \{1\}$, potom je tento člen zastoupen pouze jednou. To znamená, že $n_{w\lambda + \mu} = 1$. Pokud $w\lambda + \mu$ je umístěn na jedné z Weyelových stěn, potom je tento člen zastoupen $n_{w\lambda + \mu} = |W_{w\lambda + \mu}|$ -krát. Proto je v součinu orbit $O(\lambda) \otimes O(\mu)$ orbita $O(w\lambda + \mu)$ zastoupena $n_{w\lambda + \mu}$ -krát. Následující příklady určí dekompozice součinu orbit pro jednoduché případy algebry C_2 .

Příklad 12. $O(a, 0) \otimes O(a, 0) = ?$

Ze (76) je $O(a, b) = \{\pm(a, b) \pm (-a, a + b), \pm(a + 2b, -b) \pm (-a - 2b, a + b)\}$, tedy u nás

$$O(a, 0) = \{(a, -a), (-a, a), (a, 0), (-a, 0)\}.$$

Prvky $w\lambda$ a $w\lambda + \mu$ jsou v následující tabulce:

$$(84) \quad \begin{array}{cc} w\lambda & w\lambda + \mu \\ (a, -a) & (2a, -a) \\ (-a, a) & (0, a) \\ (a, 0) & (2a, 0) \\ (-a, 0) & (0, 0) \end{array}$$

$$\begin{array}{ccc} (a, a) & \implies & (0, a) \\ \uparrow r_\beta & & \\ (2a, -a) & \implies & (a, -a) \\ \downarrow r_\alpha & & \\ (-a, a) & \implies & (-2a, a) \\ \downarrow r_\beta & & \\ (-a, -a) & \implies & (0, -a) \end{array}$$

Podle lemmatu 8 je násobnost orbity $O(0, a)$ 2, protože

$$(85) \quad 2 = n_{w\lambda + \mu} = n_{w(a, 0) + (a, 0)} = n_{(-a, a) + (a, 0)} = n_{(0, a)} = |W_{w(a, 0) + (a, 0)}|, \\ \text{kde } W_{w\lambda + \mu} = \{w' \in W \mid w'(w\lambda + \mu) = w\lambda + \mu\}.$$

Podobně pro $O(0, 0)$ získáme násobnost 4. Celkem tedy dostáváme rozklad součinu

$$(86) \quad O(a, 0) \otimes O(a, 0) = O(2a, 0) \cup 2O(0, a) \cup 4O(0, 0).$$

Příklad 13. $O(a, 0) \otimes O(0, a) = ?$ Máme $O(a, 0) = \{(a, -a), (-a, a), (a, 0), (-a, 0)\}$. Pro $\omega\lambda$ a $\omega\lambda + \mu$ platí:

$$(87) \quad \begin{array}{cc} w\lambda & w\lambda + \mu \\ (a, -a) & (a, 0) \\ (-a, a) & (-a, 2a) \\ (a, 0) & (a, a) \\ (-a, 0) & (-a, a) \end{array}$$

Zobrazíme nedominantní prvky do dominantní Weylovky komory a spočítáme podle (82) násobnost prvků orbit v dekompozici:

$$(88) \quad \begin{array}{ccc} & (a, 0) & \implies & (a, 0) \\ & \uparrow r_\alpha & & \\ (-a, a) & \implies & (0, a) & \\ & \downarrow r_\beta & & \\ & (0, -a) & \implies & (a, -a) \\ & & & \\ & (2a, a) & \implies & (a, a) \\ & \uparrow r_\alpha & & \\ (-a, 2a) & \implies & (a, 2a) & \\ & \downarrow r_\beta & & \\ & (a, -2a) & \implies & (3a, -2a) \end{array}$$

$$(88) \quad O(a, 0) \otimes O(0, a) = O(a, a) \cup 2O(a, 0).$$

Dále postupujeme analogicky jako v předchozích příkladech. Jednotlivé kroky uvádíme schematicky již bez komentáře.

Příklad 14. $O(a, 0) \otimes O(0, 2a) = ?$

$O(a, 0) = \{(a, -a), (-a, a), (a, 0), (-a, 0)\}$. Pro $\omega\lambda$ a $\omega\lambda + \mu$ máme:

$$(89) \quad \begin{array}{cc} w\lambda & w\lambda + \mu \\ (a, -a) & (a, a) \\ (-a, a) & (-a, 3a) \\ (a, 0) & (a, 2a) \\ (-a, 0) & (-a, 2a) \end{array}$$

$$\begin{array}{ccc}
(-2a, a) & \implies & (-3a, a) & & (-3a, 2a) & \implies & (-5a, 2a) \\
\uparrow r_\alpha & & & & \uparrow r_\alpha & & \\
(a, -2a) & \implies & (3a, -2a) & & (2a, -3a) & \implies & (5a, -3a) \\
\uparrow r_\beta & & & & \uparrow r_\beta & & \\
(-a, 2a) & \implies & (a, 2a) & & (-a, 3a) & \implies & (2a, 3a) \\
\downarrow r_\alpha & & & & \downarrow r_\alpha & & \\
(2a, a) & \implies & (a, a) & & (3a, 2a) & \implies & (a, 2a) \\
\downarrow r_\beta & & & & \downarrow r_\beta & & \\
(2a, -a) & \implies & (3a, -a) & & (3a, -2a) & \implies & (5a, -2a) \\
\downarrow r_\alpha & & & & \downarrow r_\alpha & & \\
(-a, 2a) & \implies & (-3a, 2a) & & (-2a, 3a) & \implies & (-5a, 3a) \\
\downarrow r_\beta & & & & \downarrow r_\beta & & \\
(-a, -2a) & \implies & (a, -2a) & & (-2a, -3a) & \implies & (a, -3a)
\end{array}$$

(90) $O(a, 0) \otimes O(0, 2a) = O(a, 2a) \cup O(a, a).$

Příklad 15. $O(2a, 0) \otimes O(0, a) = ?$

$$O(a, 0) = \{(a, -a), (-a, a), (a, 0), (-a, 0)\}$$

$$\begin{array}{cc}
w\lambda & w\lambda + \mu \\
(2a, 0) & (2a, a) \\
(-2a, 2a) & (-2a, 3a) \\
(2a, -2a) & (2a, -a) \\
(-2a, 0) & (-2a, a)
\end{array}$$

(91)

Zobrazíme nedominantní prvky do dominantní Weylovky komory a spočítáme podle (82) násobnost prvků orbit v dekompozici

$$\begin{array}{ccc}
(a, a) & \implies & (0, a) & & (-a, 3a) & \implies & (-4a, 3a) \\
\uparrow r_\beta & & & & \uparrow r_\alpha & & \\
(a, -a) & \implies & (2a, -a) & & (3a, -a) & \implies & (4a, -a) \\
\uparrow r_\alpha & & & & \uparrow r_\beta & & \\
(-2a, a) & \implies & (-a, a) & & (3a, a) & \implies & (2a, a) \\
\downarrow r_\beta & & & & \uparrow r_\alpha & & \\
(-a, -a) & \implies & (0, -a) & & (-2a, 3a) & \implies & (a, 3a) \\
& & & & \downarrow r_\beta & & \\
(-a, -a) & \implies & (0, -a) & & (a, -3a) & \implies & (4a, -3a) \\
\uparrow r_\beta & & & & \downarrow r_\alpha & & \\
(-a, a) & \implies & (-2a, a) & & (-3a, a) & \implies & (-4a, a) \\
\uparrow r_\alpha & & & & \downarrow r_\beta & & \\
(2a, -a) & \implies & (a, -a) & & (-3a, -a) & \implies & (-2a, -a) \\
\downarrow r_\beta & & & & & & \\
(a, a) & \implies & (0, a) \in & & & &
\end{array}$$

(92) $O(2a, 0) \otimes O(0, a) = O(2a, a) \cup 2O(0, a).$

Příklad 16. $O(a, b) \otimes O(a, b) = ?$ Ze (75) máme

$$(93) \quad O(a, b) = \{\pm(a, b) \pm (-a, a + b) \pm (a + 2b, -b) \pm (-a - 2b, a + b)\}.$$

$$(94) \quad \begin{array}{cc} w\lambda & w\lambda + \mu \\ (a, b) & (2a, 2b) \\ (-a, -b) & (0, 0) \\ (-a, a + b) & (0, a + 2b) \\ (a, -a - b) & (2a, -a) \\ (a + 2b, -b) & (2a + 2b, 0) \\ (-a - 2b, b) & (-2b, 2b) \\ (-a - 2b, a + b) & (2a + 2b, -a) \\ (+a + 2b, -a - b) & (-2b, a + 2b) \end{array}$$

$$\begin{array}{l} (2a, -a) \implies \begin{array}{l} (a, a) \implies (0, a) \\ \uparrow r_\beta \\ (a, -a) \implies (2a, -a) \\ \downarrow r_\alpha \\ (-a, a) \implies (-2a, a) \\ \downarrow r_\beta \\ (-a, -a) \implies (0, -a) \end{array} \\ \\ (2a + 2b, -a) \implies \begin{array}{l} (a, -a - 2b) \implies (2a + 2b, -a - 2b) \\ \uparrow r_\beta \\ (a, a + 2b) \implies (-2b, a + 2b) \\ \uparrow r_\alpha \\ (a + 2b, a) \implies (2b, a) \\ \uparrow r_\beta \\ (a + 2b, -a) \\ \downarrow r_\alpha \\ (-a, a + 2b) \implies (-2a - 2b, a + 2b) \\ \downarrow r_\beta \\ (-a, -a - 2b) \implies (-2b, -a - 2b) \\ \downarrow r_\alpha \\ (-a - 2b, -a) \implies (-2b, -a) \\ \downarrow r_\beta \\ (-a - 2b, a) \implies (-2a - 2b, a) \end{array} \end{array}$$

Podobně bychom pokračovali pro $(-2b, 2b)$ a $(-2b, a + 2b)$. Výsledný součin je potom:

$$(95) \quad O(a, b) \otimes O(a, b) = (2a, 2b) \cup 4(0, 0) \cup (0, a + 2b) \cup (2a + 2b, 0) \cup (0, a) \cup (2b, 0) \cup (2b, a).$$

Dále jsou 2 příklady dekompozice součinu orbit pro algebru A_2

$$O(a, 0) \otimes O(b, 0) = ?$$

$$\text{Z (54) máme } O(a, 0) = \{(a, 0), (-a, a), (0, -a)\}$$

$$(96) \quad \begin{array}{cc} w\lambda & w\lambda + \mu \\ (a, 0) & (a + b, 0) \\ (-a, a) & (-a + b, a) \\ (0, -a) & (b, -a) \end{array}$$

$$\begin{aligned}
& \left(-\frac{b}{3} + \frac{-a}{3}, -\frac{b}{3} - \frac{2(-a)}{3}, \frac{2b}{3} + \frac{-a}{3}\right) \implies (-a, -b-a) \\
& \quad \uparrow r_{\alpha_2} \\
& \left(-\frac{b}{3} + \frac{-a}{3}, \frac{2b}{3} + \frac{-a}{3}, -\frac{b}{3} - \frac{2(-a)}{3}\right) \implies (-b, b-a) \\
& \quad \uparrow r_{\alpha_1} \\
(b, -a) \implies & \left(\frac{2b}{3} + \frac{-a}{3}, -\frac{b}{3} + \frac{-a}{3}, -\frac{b}{3} - \frac{2(-a)}{3}\right) \\
& \quad \downarrow r_{\alpha_2} \\
& \left(\frac{2b}{3} + \frac{-a}{3}, -\frac{b}{3} - \frac{2(-a)}{3}, -\frac{b}{3} + \frac{-a}{3}\right) \implies (b-a, a) \\
& \quad \downarrow r_{\alpha_1} \\
& \left(-\frac{b}{3} - \frac{2(-a)}{3}, \frac{2b}{3} + \frac{-a}{3}, -\frac{b}{3} + \frac{-a}{3}\right) \implies (-b+a, b)
\end{aligned}$$

Výsledek je tedy

$$(97) \quad O(a, 0) \otimes O(b, 0) = O(a+b, 0) \cup O(b-a, a) \quad \text{pro } a < b$$

Příklad 17. $O(a, 0) \otimes O(a, 0) = ?$

$$(98) \quad \begin{array}{cc} w\lambda & w\lambda + \mu \\ (a, 0) & (2a, 0) \\ (-a, a) & (0, a) \\ (0, -a) & (a, -a) \end{array}$$

$$\begin{aligned}
& \left(-\frac{a}{3} + \frac{-a}{3}, -\frac{a}{3} - \frac{2(-a)}{3}, \frac{2a}{3} + \frac{-a}{3}\right) \implies (-a, 0) \\
& \quad \uparrow r_{\alpha_2} \\
& \left(-\frac{a}{3} + \frac{-a}{3}, \frac{2a}{3} + \frac{-a}{3}, -\frac{a}{3} - \frac{2(-a)}{3}\right) \implies (-a, 0) \\
& \quad \uparrow r_{\alpha_1} \\
(a, -a) \implies & \left(\frac{2a}{3} + \frac{-a}{3}, -\frac{a}{3} + \frac{-a}{3}, -\frac{a}{3} - \frac{2(-a)}{3}\right) \\
& \quad \downarrow r_{\alpha_2} \\
& \left(\frac{2a}{3} + \frac{-a}{3}, -\frac{a}{3} - \frac{2(-a)}{3}, -\frac{a}{3} + \frac{-a}{3}\right) \implies (0, a) \\
& \quad \downarrow r_{\alpha_1} \\
& \left(-\frac{a}{3} - \frac{2(-a)}{3}, \frac{2a}{3} + \frac{-a}{3}, -\frac{a}{3} + \frac{-a}{3}\right) \implies (0, a)
\end{aligned}$$

$$(99) \quad O(a, 0) \otimes O(a, 0) = O(2a, 0) \cup 2O(0, a).$$

$O(a, a) \otimes O(a, a) = ?$

$$O(a, a) = \{(a, a), (-a, 2a), (2a, -a), (-2a, a), (a, -2a), (-a, -a)\}$$

$$(100) \quad \begin{array}{cc} w\lambda & w\lambda + \mu \\ (a, a) & (2a, 2a) \\ (-a, 2a) & (0, 3a) \\ (2a, -a) & (3a, 0) \\ (-2a, a) & (-a, 2a) \\ (a, -2a) & (2a, -a) \\ (-a, -a) & (0, 0) \end{array}$$

$$\begin{aligned}
(-a, 2a) & \implies \left(-\frac{2a}{3} + \frac{2a}{3}, \frac{a}{3} + \frac{2a}{3}, \frac{a}{3} - \frac{4a}{3}\right) \implies (0, a, -a) \implies (a, 0, -a) \implies (a, a) \\
(2a, -a) & \implies \left(\frac{4a}{3} + \frac{-a}{3}, \frac{-2a}{3} + \frac{-a}{3}, -\frac{2a}{3} + \frac{2a}{3}\right) \implies (a, -a, 0) \implies (a, 0, -a) \implies (a, a) \\
(0, 3a) & \implies \dots - \dots \implies (a, a, -2a) \implies (a, a, -2a) \implies (0, 3a) \\
(3a, 0) & \implies \dots - \dots \implies (2a, -a, -a) \implies (2a, -a, -a) \implies (3a, 0)
\end{aligned}$$

$$(101) \quad O(a, a) \otimes O(a, a) = O(2a, 2a) \cup O(a, a) \cup 2O(0, 3a) \cup 2O(3a, 0) \cup 6O(0, 0).$$

6. POUŽITÍ DEKOMPOZIČNÍCH MATIC

Oproti kapitole 6 existují mnohem složitější případy vnoření $W' \subset W$ (a tedy i vnoření odpovídajících Lieových algeber $L' \subset L$). V těchto vnoření není soubor vektorů $\omega'_1, \omega'_2, \dots, \omega'_m$ (tedy takových pro které platí $\frac{2(\omega'_i, \alpha'_j)}{(\alpha'_j, \alpha'_j)} = \delta_{ij}$ pro simple kořeny $\alpha'_1, \alpha'_2, \dots, \alpha'_m$ odpovídající Weylově grupě W') podmnožinou vektorů $\omega_1, \omega_2, \dots, \omega_m$ (pro které $\frac{2(\omega_i, \alpha_j)}{(\alpha_j, \alpha_j)} = \delta_{ij}$ kde prosté kořeny $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_m$ odpovídají Weylově grupě W).

V těchto případech lze konstruovat tzv. dekompoziční matice pro $W' \subset W$ a pro zobrazované váhy $\lambda = (\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_m)$ v ω -bázi do vah $\lambda' = (\lambda'_1, \lambda'_2, \dots, \lambda'_n)$ v ω' -bázi.

Rozměr matice je dán jako $m \times n$, kde m je rank podalgebry a n je rank algebry. Dekompoziční matice je matice zúžení lineárního zobrazení příslušného duálního homomorfismu k homomorfismu, který popisuje vnoření algeber. Matici lze zkonstruovat tak, že zrealizujeme požadovanou algebru jako algebru matic, v ní najdeme danou podalgebru, sestrojíme explicitně vnořující homomorfismus a jeho duál a zúžení tohoto duálu na prostor kořenů algebry pak zobrazuje do prostoru kořenů dané určené podalgebry. K tomu tedy musíme explicitně znát vnoření.

Tvar matice lze do jisté míry (rozumně rozdílných a rozumně velkých ranků algeber) uhodnout postupným vkládáním do sloupců matice vyšší a vyšší dominantní váhy.

Příklad 18. $A_3 \subset C_2$. Hledáme matici 2×3 . Rozměr fundamentální orbity $O(1, 0, 0)$ v A_3 je 4, protože $O(1, 0, 0) = \{(1, 0, 0), (-1, 1, 0), (0, 0, -1), (0, -1, 1)\}$ (viz. 59). Rozměry orbit v C_2 jsou (viz 78):

$$(102) \quad |O(a, b)| = 8, \quad |O(1, 0)| = 4, \quad |O(0, 1)| = 4.$$

V prvním sloupci dekompoziční matice tak musí být alespoň jedna 0. Rozměry dalších fundamentálních orbit v A_3 jsou

$$(103) \quad |O(0, 1, 0)| = 6, \quad |O(0, 0, 1)| = 4.$$

(103) a (102) dávají omezení na každý sloupec, kde musí být alespoň jedna nula. Celkem máme 8 přípustných variant dekompoziční matice.

$$\begin{array}{ccccccc}
 \text{1.sloupec} & & \text{2.sloupec} & & \text{3.sloupec} & & \text{1.sloupec} & & \text{2.sloupec} & & \text{3.sloupec} \\
 & & \begin{pmatrix} 0 \\ b \end{pmatrix} & \xrightarrow{\Phi} & \begin{pmatrix} 0 \\ c \end{pmatrix} & & \begin{pmatrix} 0 \\ b \end{pmatrix} & & \begin{pmatrix} 0 \\ c \end{pmatrix} & & \begin{pmatrix} 0 \\ c \end{pmatrix} \\
 & \nearrow \Phi & & & & & \nearrow \Psi & & & & \searrow \Psi \\
 \begin{pmatrix} a \\ 0 \end{pmatrix} & & & & & & \begin{pmatrix} 0 \\ a \end{pmatrix} & & & & \\
 & & \begin{pmatrix} b \\ 0 \end{pmatrix} & & \begin{pmatrix} c \\ 0 \end{pmatrix} & & & & \begin{pmatrix} b \\ 0 \end{pmatrix} & & \begin{pmatrix} c \\ 0 \end{pmatrix}
 \end{array}$$

Místo písmen budeme vpisovat co nejmenší nezáporná celá čísla (tzn. nejmenší váhy do sloupců) a kontrolujeme podmínku dekompoziční matice tj. pro každou celočíselnou váhu (α, β, γ) z A_3 počítáme součin dekomp. matice se všemi prvky orbity $O(\alpha, \beta, \gamma)$. Z výsledků vybereme dominantní váhy, z C_2 a sečteme rozměry jejich orbit. Součet by měl být stejný jako rozměr $O(\alpha, \beta, \gamma)$.

První pokus (ve směru šipek Φ nahradit písmena jedničkami) nám dá $\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}$. Dále

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix} O(1,0,0) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix} \left(\begin{array}{c|c|c|c} 1 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & -1 & 1 \end{array} \right) = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -1 & 0 \end{pmatrix} \Rightarrow$$

$$|O(1,0)| + |O(0,0)| = 4 + 1 = 5 \neq 4 = |O(1,0,0)|.$$

Po chvíli zkoušení vytvoříme matici (ve směru šipek Ψ náhradou písmen jedničkami) $\begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$. Zkontrolujeme:

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} O(1,0,0) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} \left(\begin{array}{c|c|c|c} 1 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & -1 & 1 \end{array} \right) = \begin{pmatrix} 1 & -1 & -1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & -1 \end{pmatrix} \Rightarrow$$

$$(104) \quad |O(1,0)| = 4 = |O(1,0,0)|.$$

Příklad 19. $B_3 \subset A_3$

Podle (příkladu 10) je

$$O(1,0,0) = \{(1,0,0), (-1,0,0), (1,-1,0), (-1,1,0), (0,1,-2), (0,-1,2)\},$$

z toho tedy velikosti orbity z B_3 jsou $|O(1,0,0)| = 6$, dále $|O(0,1,0)| = 12$, $|O(0,0,1)| = 8$.

Velikosti orbit v A_3 jsou obecně $|O(a,b,c)| = 24$, $|O(a,b,0)| = 12$, stejně jako $|O(a,0,c)|$ a $|O(0,b,c)|$.

Dále $|O(a,0,0)| = |O(0,0,c)| = 4$ a $|O(0,b,0)| = 6$.

To tedy klade na první sloupec požadavek alespoň dvou nul a na druhý sloupec alespoň jednu nulu a na třetí sloupec alespoň dvě nuly.

Možnosti jsou následující:

$$\begin{array}{cccccc} \text{1.sloupec} & \text{2.sloupec} & & \text{3.sloupec} & \text{1.sloupec} & \text{2.sloupec} & \text{3.sloupec} \\ & \begin{pmatrix} 0 \\ b \\ c \end{pmatrix} & \xrightarrow{\Phi} & \begin{pmatrix} d \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} & & \begin{pmatrix} 0 \\ b \\ c \end{pmatrix} & \begin{pmatrix} d \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \\ & \nearrow \Phi & & & & \nearrow \Psi & \\ \begin{pmatrix} a \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} & \begin{pmatrix} b \\ 0 \\ c \end{pmatrix} & & \begin{pmatrix} 0 \\ d \\ 0 \end{pmatrix} & \begin{pmatrix} 0 \\ a \\ 0 \end{pmatrix} & \begin{pmatrix} b \\ 0 \\ c \end{pmatrix} & \begin{pmatrix} 0 \\ d \\ 0 \end{pmatrix} \\ & \begin{pmatrix} b \\ c \\ 0 \end{pmatrix} & & \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ d \end{pmatrix} & & \begin{pmatrix} b \\ c \\ 0 \end{pmatrix} & \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ d \end{pmatrix} \end{array}$$

$$\begin{array}{ccc}
1.\textit{slopec} & 2.\textit{slopec} & 3.\textit{slopec} \\
& \begin{pmatrix} 0 \\ b \\ c \end{pmatrix} & \begin{pmatrix} d \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \\
\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ a \end{pmatrix} & \begin{pmatrix} b \\ 0 \\ c \end{pmatrix} & \begin{pmatrix} 0 \\ d \\ 0 \end{pmatrix} \\
& \begin{pmatrix} b \\ c \\ 0 \end{pmatrix} & \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ d \end{pmatrix}
\end{array}$$

Celkem tedy máme 27 možných matic. Teď budeme vpisovat místo písmen co nejmenší nezáporná čísla a kontrolovat podmínku dekompoziční matice pro dominantní váhu z B_3 , např. $(\alpha, \beta, \gamma) = (1, 0, 0)$:

Do matice vznikající ve směru šipek Φ dosadíme místo písmen jedničky a dostáváme $\begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$.

Z příkladu 9, $O(1, 0, 0) = \{(1, 0, 0), (-1, 0, 0), (1, -1, 0), (-1, 1, 0), (0, 1, -2), (0, -1, 2)\}$, na každý bod orbity z B_3 aplikujeme naši možnou dekompoziční matici:

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & | & -1 & | & 1 & | & -1 & | & 0 & | & 0 \\ 0 & | & 0 & | & -1 & | & 1 & | & 1 & | & -1 \\ 0 & | & 0 & | & 0 & | & 0 & | & -2 & | & 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & | & -1 & | & 1 & | & -1 & | & -2 & | & 2 \\ 0 & | & 0 & | & -1 & | & 1 & | & 1 & | & -1 \\ 0 & | & 0 & | & -1 & | & 1 & | & 1 & | & -1 \end{pmatrix}.$$

Jediná dominantní váha je $(1, 0, 0) (\in A_3) \implies |O(1, 0, 0)| = 4 \neq 6 = |O(1, 0, 0) \in B_3|$. Nerovnítko naznačuje, že jsme tentokrát neuspěli a je třeba zkusit jinou možnou matici. Po mnoha pokusech získáme matici s jedničkami místo písmen (ve směru šipek Ψ) ve tvaru

$$(105) \quad \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}.$$

Ověříme podmínku dekompoziční matice

$$\begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & | & -1 & | & 1 & | & -1 & | & 0 & | & 0 \\ 0 & | & 0 & | & -1 & | & 1 & | & 1 & | & -1 \\ 0 & | & 0 & | & 0 & | & 0 & | & -2 & | & 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & | & 0 & | & -1 & | & 1 & | & -1 & | & 1 \\ 1 & | & -1 & | & 1 & | & -1 & | & 0 & | & 0 \\ 0 & | & 0 & | & -1 & | & 1 & | & 1 & | & -1 \end{pmatrix}.$$

jedinou dominantní vahou patřící do A_3 je $(0, 1, 0)$, pro kterou

$$(106) \quad |O(0, 1, 0)_{\in A_3}| = 6 = |O(1, 0, 0)_{\in B_3}|.$$

Tím jsme dostali dekompoziční matici pro $B_3 \subset A_3$.

7. GENERUJÍCÍ FUNKCE

Pomocí tzv. generujících funkcí lze určovat násobnosti orbit v rozkladech součinu orbit a násobnosti pro restrikce W -orbity na W' -orbity. Řada generujících funkcí je sepsána v práci [6]. Násobnosti orbit $O(\mu_1, \dots, \mu_n)$ v orbitě $O(\lambda_1, \dots, \lambda_m)$ jsou koeficienty v rozvoji generujících funkcí do mocninných řad u členů $A_1^{\lambda_1} \dots A_n^{\lambda_n} B_1^{\mu_1} \dots B_n^{\mu_n}$.

Příklad 20. Např. pro restrikci $G_2 \rightarrow \mathbb{C} A_2$ vypadá generující funkce takto

$$(107) \quad \frac{1}{1 - a_1} \left(\frac{1}{1 - b_2} + \frac{b_2^*}{1 - b_2^*} \right),$$

kde $a_1 = A_1 B_1 B_2$, $b_2 = A_2 B_1$, $b_2^* = A_2 B_2$ jsou tzv. elementární orbity.
Po dosazení dostaneme

$$(108) \quad (1 - A_1 B_1 B_2) \left(\frac{A_2 B_2}{1 - A_2 B_2} + \frac{1}{1 - A_2 B_1} \right).$$

Po rozvinutí do mocninné řady do prvních 5 členů pro každou proměnnou dostáváme

$$(109) \quad 1 + A_2 B_2 + A_2^2 B_2^2 + A_2^3 B_2^3 + A_2^4 B_2^4 + A_2^5 B_2^5 + A_2 B_1 - A_1 B_2 B_1 - A_1 A_2 B_2^2 B_1 - A_1 A_2^2 B_1 B_2^3 - A_1 A_2^3 B_2^4 B_1 + \dots$$

$$-A_2^4 A_1 B_2^5 B_1 + A_2^2 B_1^2 - A_2 A_1 B_2 B_1^2 + A_2^3 B_1^3 - A_2^2 A_1 B_2 B_1^3 + A_2^4 B_1^4 - A_2^3 A_1 B_2 B_1^4 + A_2^5 B_1^5 - A_2^4 A_1 B_2 B_1^5$$

Příklad 21. Generující funkce pro restrikci $B_3 \rightarrow \mathbb{C} A_3$ vypadá následovně:

$$(110) \quad \frac{1}{(1 - a_1)(1 - b_2)} \left(\frac{1}{1 - c_3} + \frac{c_3^*}{1 - c_3^*} \right),$$

kde $a_1 = A_1 B_2$, $b_2 = A_2 B_1 B_3$, $c_3^* = A_3 B_3$, $c_3 = A_3 B_1$ po dosazení a úpravě dostaneme

$$(111) \quad \frac{(1 - A_1 B_2) \left(\frac{A_3 B_3}{1 - A_3 B_3} + \frac{1}{1 - A_3 B_1} \right)}{(1 - A_2 B_1 B_3)},$$

rozvoj do mocninné řady do prvních dvou členů v každé proměnné vypadá následovně:

$$(112) \quad 1 + A_3 B_1 + A_3^2 B_1^2 - A_1 B_2 - A_1 A_3 B_1 B_2 - A_1 A_3^2 B_1^2 B_2 + A_3 B_3 + A_2 B_1 B_3 + A_2 A_3 B_1^2 B_3 - A_1 A_3 B_2 B_3 - A_1 A_2 B_1 B_2 B_3 + \dots$$

$$-A_1 A_2 A_3 B_1^2 B_2 B_3 + A_3^2 B_3^2 + A_2 A_3 B_1 B_3^2 + A_2^2 B_1^2 B_3^2 - A_1 A_3^2 B_2 B_3^2 - A_1 A_2 A_3 B_1 B_2 B_3^2 - A_1 A_2^2 B_1^2 B_2 B_3^2$$

Mnoho dalších generujících funkcí je uvedeno v práci [5].

8. FUNKCE NA ORBITECH WEYLOVY GRUPY

Funkce na orbitě jsou symetrické (vůči Weylově grupě), obdoby exponenciálních funkcí $e^{2\pi i(m,x)}$, umožňujících provádět Fourierovu transformaci na E_n . Funkce na orbitě jsou definovány takto:

Definice 15. Nechť W je Weylova grupa transformací Eukleidova prostoru E_n . Každému prvku $\lambda \in E_n$ z dominantní Weylovy komory (včetně hranic) odpovídá funkce na orbitě

$$(113) \quad \phi_\lambda(x) = \sum_{\mu \in O(\lambda)} e^{2\pi i(\lambda, x)} \quad x \in E_n$$

kde $O(\lambda)$ je W - orbita prvku λ . (Někdy je funkce na orbitě definovaná jako $\hat{\phi}_\lambda(x) = |W_\lambda| \phi_\lambda(x)$, kdy je $\hat{\phi}_\lambda(0) = |W|$.

Počet sčítanců v (113) odpovídá velikosti $|O(\lambda)|$, která se shoduje s $|W| / |W_\lambda|$.

Příklad 22. Funkce na orbitě pro A_1 . V tomto případě existuje pouze 1 (prostý) kořen α . Protože $(\alpha, \alpha) = 2$, je $2(\omega, \alpha) / (\alpha, \alpha) = 1$, to znamená $(\omega, \alpha) = 1$, je $i\omega = \alpha/2$ a $(\omega, \omega) = 1/2$. Prvky z P_+ lze zapsat jako $\lambda = m\omega$, kde $m \in \mathbb{Z}_+$ a $x \in E_1$ jako $x = \theta\omega$. Spočítáme r_α :

$$(114) \quad r_\alpha x = x - \frac{2(\theta\omega, \alpha)}{(\alpha, \alpha)} \alpha = x - \theta\alpha = x - 2x = -x,$$

funkce na orbitě $\phi_\lambda(x)$ je tedy

$$(115) \quad \phi_\lambda(x) = e^{2\pi i(m\omega, \theta\omega)} + e^{2\pi i(m\omega, -\theta\omega)} = e^{\pi i m \theta} + e^{-\pi i m \theta} = 2\cos(\pi m \theta),$$

kde $m \neq 0$. Pokud $m = 0$ potom $\phi_\lambda(x) = 1$.

Příklad 23. Funkce na orbitě $\phi_\lambda(x)$ pro A_2 .

Budeme uvažovat λ v ω -bázi tedy $(\lambda)_\omega = (a, b)$, kde $a > b > 0$. Podle (53) dostaneme

$$(116) \quad \begin{aligned} \phi_\lambda(x) = \phi_{(a,b)}(x) = & e^{2\pi i((a,b),x)} + e^{2\pi i((-a,a+b),x)} + e^{2\pi i((a+b,-b),x)} + e^{2\pi i((b,-a-b),x)} + \\ & + e^{2\pi i((-a-b,a),x)} + e^{2\pi i((-b,-a),x)} \end{aligned}$$

Pro skalární součin vektorů v ω -bázi platí

$$(117) \quad (x, y) = \frac{1}{2} \sum_{j,k=1}^n x_j y_k (M^{-1})_{jk} (\alpha_k, \alpha_k) = x M^{-1} D y^T,$$

kde $D = \text{diag} \left(\frac{1}{2} (\alpha_1, \alpha_1), \dots, (\alpha_n, \alpha_n) \right)$.

Vezmeme-li tedy $x = \theta_1\omega + \theta_2\omega$ a $(\lambda)_\omega = (a, b)$, pomocí (35) a (117) dostaneme

$$(118) \quad \begin{aligned} \phi_{(a,b)}(x) = & e^{\frac{2\pi i}{3}((2a+b)\theta_1, (a+2b)\theta_2)} + e^{\frac{2\pi i}{3}((-a+b)\theta_1, (a+2b)\theta_2)} + e^{\frac{2\pi i}{3}((2a+b)\theta_1, (a-b)\theta_2)} + \\ & + e^{\frac{-2\pi i}{3}((a-b)\theta_1, (2a+b)\theta_2)} + e^{\frac{-2\pi i}{3}((a+2b)\theta_1, (-a+b)\theta_2)} + e^{\frac{-2\pi i}{3}((a+2b)\theta_1, (2a+b)\theta_2)}. \end{aligned}$$

Shrneme několik důležitých vlastností funkcí na orbitě:

- Invariance vůči W : Jednou z vlastností funkcí na orbitě je jejich invariance vůči Weylově grupě W a dále pokud bereme $\lambda \in P$ ($P = \mathbb{Z}\omega_1 + \dots + \mathbb{Z}\omega_2$), jsou funkce na orbitech invariantní vůči tzv. afinní Weylově grupě.

Protože skalární součin (\cdot, \cdot) je invariantní na E_n vůči W tzn.

$$(\omega x, \omega y) = (x, y),$$

platí $\phi_\lambda(\omega x) = \phi_\lambda(x)$, což plyne z

$$\phi_\lambda(\omega x) = \sum_{\mu \in O(\lambda)} e^{2\pi i(\mu, \omega x)} = \sum_{\mu \in O(\lambda)} e^{2\pi i(\omega^{-1}\mu, x)} = \sum_{\mu \in O(\lambda)} e^{2\pi i(\mu, x)} = \phi_\lambda(x).$$

- Spojitost: Protože funkce ϕ_λ jsou konečné sumy exponenciálních funkcí, jsou spojité a mají spojité derivace všech řádů.
- Platí $\phi_{c\lambda}(x) = \phi_\lambda(cx)$: Protože platí $\omega(c\lambda) = c\omega(\lambda)$ pro každé $c \in \mathbb{R}$ a pro $\omega \in W$, $O(c\lambda)$ je orbita obsahující $c\omega\lambda$. Tedy

$$(119) \quad \phi_{c\lambda}(x) = \sum_{c\mu \in O(c\lambda)} e^{2\pi i(c\mu, \omega x)} = \sum_{\mu \in O(\lambda)} e^{2\pi i(\mu, cx)} = \phi_\lambda(cx).$$

- Dualita: Vezmeme-li $\hat{\phi}_\lambda(x)$ z definice 14 můžeme psát

$$(120) \quad \hat{\phi}_\lambda(x) = \sum_{\omega \in W} e^{2\pi i(\omega\lambda, x)},$$

a protože skalární součin (\cdot, \cdot) je invariantní na E_n vůči W tzn.

$$(\omega\mu, \omega y) = (\mu, y),$$

dostáváme

$$(121) \quad \hat{\phi}_\lambda(x) = \sum_{\omega \in W} e^{2\pi i(\lambda, \omega^{-1}x)} = \sum_{\omega \in W} e^{2\pi i(\lambda, \omega x)} = \hat{\phi}_x(\lambda).$$

Příklad 24. Jako příklad použití funkcí na orbitách budeme pomocí nich aproximovat charakteristickou funkci jistého kruhu v \mathbb{R}^2 . Vezměme algebru $C_2 = \text{sp}(4, \mathbb{C})$. Tato algebra má v kořenovém systému tyto kořeny (v bázi H^*):

$$\Phi = \{(-2, 0), (-1, -1), (-1, 1), (0, -2), (0, 2), (1, -1), (1, 1), (2, 0)\}.$$

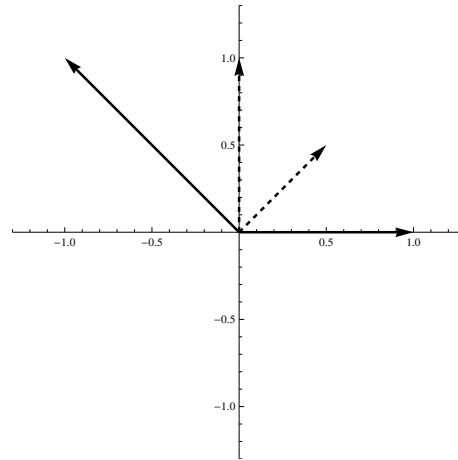
Prosté kořeny jsou $\alpha_1 = (1, -1)$ a $\alpha_2 = (0, 2)$, první kořen je kratší, kvadrát délky volíme roven 1, druhý kořen delší, má kvadrát délky roven 2. Fundamentální váhy $\langle \omega_i, \alpha_j \rangle = \delta_{ij}$ jsou $\omega_1 = (1, 0)$ a $\omega_2 = (1, 1)$. Dále platí $\alpha_1^\vee = \frac{2\alpha_1}{\langle \alpha_1, \alpha_1 \rangle} = (2, -2)$, $\alpha_2^\vee = (0, 2)$, $\omega_1^\vee = \frac{2\omega_1}{\langle \alpha_1, \alpha_1 \rangle} = (2, 0)$, $\omega_2^\vee = (1, 1)$. Pak $(\omega_i, \alpha_j^\vee) = \delta_{ij}$. Použijeme též označení $Q^\vee = \mathbb{Z}\alpha_1^\vee + \mathbb{Z}\alpha_2^\vee$.

Orbity C_2 jsme již vypočetli v příkladu 8.

Buď nyní $M \in \mathbb{N}$. Fundamentální oblast algebry C_2 má tvar

$$F = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid 0 \leq x \leq \frac{1}{2} \text{ a } y \geq x \text{ a } y \leq 1 - x\}.$$

Definujme nyní funkci $f(x, y)$, která nabývá hodnoty 1 na množině

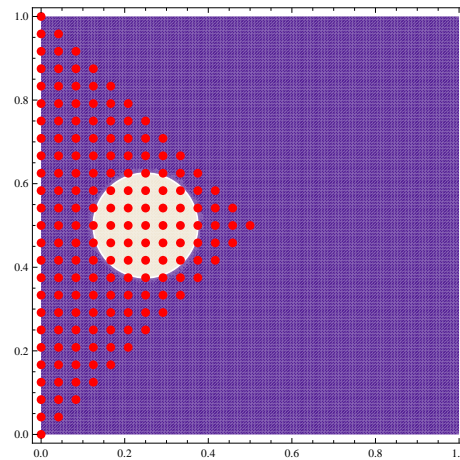
OBRÁZEK 7. Kořeny (plně) a váhy (čárkovaně) C_2

$$\left\{ (x, y) \mid \left(x - \frac{1}{4}\right)^2 + \left(y - \frac{1}{2}\right)^2 < \left(\frac{1}{8}\right)^2 \right\},$$

a je nulová jinde. Množina bodů mřížky ve fundamentální oblasti F , na kterých budeme srovnávat původní funkci s aproximovanou, je definována vztahem

$$F_M = \left\{ \frac{s_1}{M} \omega_1^\vee + \frac{s_2}{M} \omega_2^\vee \mid s_{0,1,2} \in \mathbb{Z}, s_{0,1,2} \geq 0, s_0 + 2s_1 + s_2 = M \right\}.$$

Pro hodnotu M jsou body mřížky znázorněny na obrázku. Je zde také vyznačena kruhová oblast, na které nabývá funkce f hodnoty 1.

OBRÁZEK 8. Body mřížky F_M pro $M = 24$ a oblast, kde je f rovna 1

Funkci f aproximujeme ve fundamentální oblasti pomocí lineární kombinace funkcí na orbitě s váhami z množiny

$$\Lambda_M = \{t_1\omega_1 + t_2\omega_2 \mid t_{0,1,2} \in \mathbb{Z}, t_{0,1,2} \geq 0, t_0 + t_1 + 2t_2 = M\}.$$

Aproximační funkce má tvar

$$f_M = \sum_{\lambda \in \Lambda_M} c_\lambda \phi_\lambda,$$

kde koeficienty c_λ jsou dány vztahem

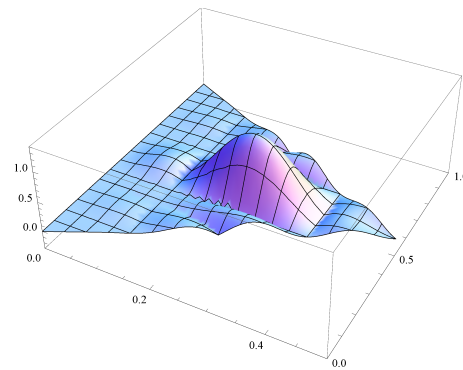
$$c_\lambda = \frac{\langle f, \phi_\lambda \rangle}{\langle \phi_\lambda, \phi_\lambda \rangle},$$

kde pro skalární součin platí

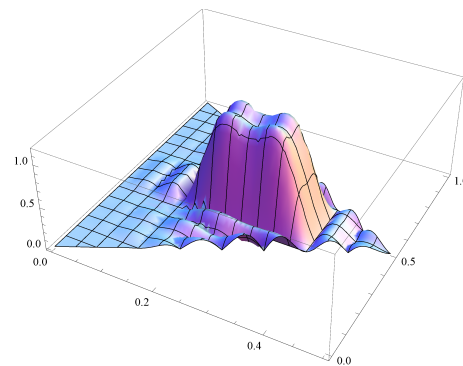
$$\langle f, g \rangle = \sum_{x \in F_M} \varepsilon(x) f(x) \overline{g(x)},$$

kde $\varepsilon(x)$ je počet prvků v množině $\{wx \in \mathbb{R}^n / Q^V \mid w \in W\}$.

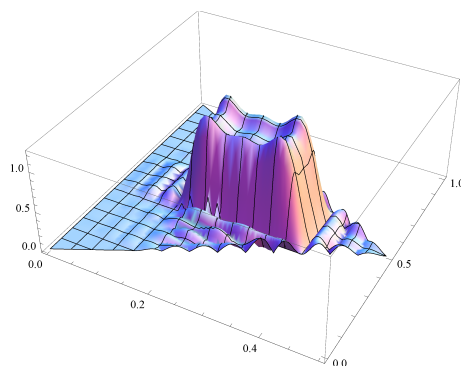
Pro funkci f vypočteme příklady aproximací pro hodnoty $M = 8$, $M = 16$ a $M = 24$. Jsou znázorněny na obrázcích. Je vidět, že pro vyšší hustotu mřížky M aproximační funkce f_M čím dál lépe aproximuje původní funkci f .



OBRÁZEK 9. Aproximace pro $M = 8$



OBRÁZEK 10. Aproximace pro $M = 8$



OBRÁZEK 11. Aproximace pro $M = 8$

REFERENCE

- [1] A. U. Klimyk, J. Patera: Orbit functions. arXiv:math-ph/0601037v1 19 Jan 2006, Symmetry Integrability Geom. Methods Appl. 2 (2006), Paper 006, 60 str
- [2] A. U. Klimyk, J. Patera: Antisymmetric orbit functions. arXiv:math-ph/0702040 2007 Symmetry Integrability Geom. Methods Appl. 3 (2007), Paper 023, 83 str.
- [3] A. U. Klimyk, J. Patera: E-orbit functions, arXiv:math-ph/ 2008 Symmetry Integrability Geom. Methods Appl. 4 (2008), Paper 002, 57 str.
- [4] K. Erdmann, M. J. Wildon: Introduction to Lie Algebras, Springer-Verlag, London 2006
- [5] W. McKay, J. Patera and D. Sankoff: The computation of branching rules for representations of semisimple Lie algebras Univ. Motreal Press, 1973, str. 243-261
- [6] F. Gingras, J. Patera: Orbit-orbit branching rules between simple low-rank algebras and equal-rank subalgebras. J.Math Phys. 33(5)May 1992
- [7] A. Klimyk, J. Patera: (Anti)symmetric multivariate exponential functions and corresponding Fourier transforms. J. Phys. A:Math. Theor. 40 (2007) 10473-10489