ČESKÉ VYSOKÉ UČENÍ TECHNICKÉ V PRAZE

Fakulta jaderná a fyzikálně inženýrská

Katedra fyziky
Obor: Matematické inženýrství
Zaměření: Matematická fyzika

Komplexní čtyř a šestirozměrné Drinfeldovy superdoubly

Complex four and six-dimensional Drinfeld superdoubles

VÝZKUMNÝ ÚKOL

Autor práce: **Jan Vysoký**
Vedoucí práce: **prof. RNDr. Ladislav Hlavatý, DrSc.**
Akademický rok: **2009/2010**

Prohlášení

Prohlašuji, že jsem svůj výzkumný úkol vypracoval samostatně a použil jsem pouze literaturu a publikace uvedené v přiloženém seznamu.

Nemám závažný důvod proti užití tohoto školního díla ve smyslu §60 Zákona č.121/1200Sb., o právu autorském, o právech souvisejících s právem autorským a o změně některých zákonů (autorský zákon).

V Praze dne ....

Poděkování

Tímto bych chtěl poděkovat prof. RNDr. Ladislavu Hlavatému, DrSc. za čas a úsilí, které věnoval vedení této práce.

Veliký dík patří mým nejbližším a skvělé rodině za jejich podporu a lásku.

Název práce: **Komplexní čtyř a šestirozměrné Drinfeldovy superdoubly**
Autor: Jan Vysoký

Obor: Matematické inženýrství
Druh práce: Výzkumný úkol

Vedoucí práce: prof. RNDr. Ladislav Hlavatý, DrSc.
Katedra fyziky, Fakulta jaderná a fyzikálně inženýrská,
České vysoké učení technické v Praze.

Abstrakt:

Drinfeldův superdouble je přirozeným rozšířením algebraické části Drinfeldova doublu na reálnou lieovskou superalgebru. Definice může být snadno rozšířena na těleso komplexních čísel. Obsahem této práce je klasifikace speciálního případu, komplexních B-F ortogonálních Drinfeldových superdoublů dimenze čtyři a šest.

Klíčová slova: Drinfeldův superdouble, Maninova supertrojice, těleso komplexních čísel, klasifikace

Title: **Complex four and six-dimensional Drinfeld superdoubles**
Author: Jan Vysoký

Abstract:

Drinfeld superdouble is a natural extension of the algebraic part of the Drinfeld double to the real Lie superalgebra. Its definition can be easily extended to the field of complex numbers. The purpose of this work is to classify a special case, the complex B-F orthogonal Drinfeld superdoubles in the dimension of four and six.

Keywords: Drinfeld superdouble, Manin supertriple, field of complex numbers, classification

1 Úvod

Drinfeldův superdouble je nejjednodušším zobecněním matematického objektu nazývaného Drinfeldův double zahrnující strukturu lieovské superalgebry. Definicí a souvisejícími problémy se podrobně zabývá práce [1]. Podrobná klasifikace je zatím technicky možná pouze pro dvě speciální třídy Drinfeldových superdoublů, tzv. B-F a B-B ortogonální. Vzhledem k tomu, že i přes silná omezení jsou obě třídy poměrně široké, zabývá se [2] klasifikací pouze jedné z nich. Podrobně jsou klasifikovány reálné B-F ortogonální Drinfeldovy superdoubly do dimenze 6 s netriviální lichou částí.

Drinfeldův superdouble je v [1] definován jako reálná lieovská superalgebra.[1] Tato práce se zabývá rozšířením definice Drinfeldova superdoublu na komplexní těleso a jejich klasifikací v nízkých dimenzích.

Po zavedení základních pojmů rozšíříme klasifikaci reálných třírozměrných superalgeber [3] na komplexní těleso. V další části pak zcela klasifikujeme komplexní B-F ortogonální Drinfeldovy superdoubly superdimenze $(2,2)$, $(2,4)$ a $(4,2)$.

2 Základní pojmy

Definice 2.1. Vektorový prostor V nad tělesem $\mathbb{T}$ nazýváme **supervektorovým prostorem** nad tělesem $\mathbb{T}$ ($\mathbb{Z}_2$-gradovaným vektorovým prostorem), existují-li ve V dva podprostory V_0 a V_1, že

$$V = V_0 \dot{+} V_1. \tag{1}$$

Vektory $x \in V_0 \cup V_1$ nazýváme homogenní. Definujeme **paritu** nenulového homogenního vektoru jako

$$|x| = \begin{cases} 0 & x \in V_0 \\ 1 & x \in V_1. \end{cases} \tag{2}$$

V_0, resp. V_1 nazýváme sudou, resp. lichou částí V. Řekneme, že supervektorový prostor má superdimenzi (m,n), je-li $dim V_0 = m$ a $dim V_1 = n$.

Definice 2.2. Lieovskou superalgebrou nad tělesem $\mathbb{T}$ nazýváme supervektorový prostor $V = V_0 \dot{+} V_1$ nad tělesem $\mathbb{T}$ vybavený bilineární operací násobení $[\cdot,\cdot] : V \times V \to V$, splňující:

$$(\forall x, y \in V_0 \cup V_1)\ ([x,y] = -(-1)^{|x||y|}[y,x])\ \textit{(superantikomutativita)}, \tag{3}$$

$$[V_i, V_j] \subseteq V_{i+j} \quad \textit{($\mathbb{Z}_2$-aditivita)}, \tag{4}$$

$$(\forall x, y, z \in V_0 \cup V_1)\ ((-1)^{|x||z|}[x,[y,z]] + cyclic\{x,y,z\} = 0). \tag{5}$$

(super-Jacobiho identita)

Operaci násobení $[\cdot,\cdot]$ nazýváme lieovská superzávorka, případně superkomutátor.

Vzhledem k linearitě a $\mathbb{Z}_2$-aditivitě budeme vždy pracovat pouze s homogenními vektory.

Superdimenzí lieovské superalgebry se myslí superdimenze V.

Je-li $\mathbb{T} = \mathbb{R}$, resp. $\mathbb{T} = \mathbb{C}$, hovoříme o reálné, resp. komplexní lieovské superalgebře.

---

[1] Tato struktura bývá někdy nazývána gradovanou lieovskou algebrou.

Definice 2.3. Lieovská superalgebra $(V, [\cdot,\cdot])$ se nazývá **abelovská**, pokud

$$(\forall x, y \in V)\ ([x, y] = 0). \tag{6}$$

Definice 2.4. Nechť $V = V_0 \dotplus V_1$ je supervektorový prostor superdimenze (m, n). Potom bázi $(e_i)_{i=1}^{m+n}$ prostoru V nazýváme **homogenní**, pokud

$$(\forall i \in \{1, \dots, m\})\ (|e_i| = 0), \tag{7}$$

$$(\forall i \in \{1, \dots, n\})\ (|e_{i+m}| = 1). \tag{8}$$

Bude-li třeba odlišit sudé a liché vektory, budeme zapisovat homogenní bázi jako $(b_i, f_\alpha)_{i,\alpha=1}^{m,n}$, kde

$$(\forall i \in \{1, \dots, m\})\ (|b_i| = 0), \tag{9}$$

$$(\forall \alpha \in \{1, \dots, n\})\ (|f_\alpha| = 1). \tag{10}$$

Definice 2.5. Nechť $\mathcal{S} = (V, [\cdot,\cdot])$ je lieovská superalgebra superdimenze (m, n) nad tělesem $\mathbb{T}$. Nechť $(e_i)_{i=1}^{m+n}$ je libovolná báze V. Potom ${c_{ij}}^k \in \mathbb{T}$, definované jako

$$[e_i, e_j] = {c_{ij}}^k e_k, \tag{11}$$

nazýváme **strukturní koeficienty** lieovské superalgebry $\mathcal{S}$ v bázi $(e_i)_{i=1}^{m+n}$.

Definice 2.6. Nechť $\mathcal{S}_1$, $\mathcal{S}_2$ jsou dvě libovolné lieovské superalgebry definované na prostorech $V^{(1)} = V_0^{(1)} \dotplus V_1^{(1)}$ a $V^{(2)} = V_0^{(2)} \dotplus V_1^{(2)}$. Nechť $[\cdot,\cdot]_1$ a $[\cdot,\cdot]_2$ jsou jejich lieovské superzávorky. Řekneme, že superalgebry $\mathcal{S}_1$ a $\mathcal{S}_2$ jsou **izomorfní**, když existuje lineární bijekce $\mathbf{P} : V^{(1)} \to V^{(2)}$ taková, že

$$(\forall x, y \in V^{(1)})\ (\mathbf{P}[x, y]_1 = [\mathbf{P}x, \mathbf{P}y]_2) \tag{12}$$

$$\mathbf{P}(V_i^{(1)}) = V_i^{(2)} \tag{13}$$

Zobrazení $\mathbf{P}$ nazýváme izomorfismus lieovských superalgeber.

Tvrzení 2.7. *Nechť $\mathcal{S}_1$, $\mathcal{S}_2$ jsou dvě libovolné lieovské superalgebry definované na prostorech $V^{(1)} = V_0^{(1)} \dotplus V_1^{(1)}$ a $V^{(2)} = V_0^{(2)} \dotplus V_1^{(2)}$. Nechť $[\cdot,\cdot]_1$ a $[\cdot,\cdot]_2$ jsou jejich lieovské superzávorky. Pak*

$\mathcal{S}_1$ a $\mathcal{S}_2$ jsou izomorfní

$$\Longleftrightarrow$$

$\mathcal{S}_1$ a $\mathcal{S}_2$ mají stejnou superdimenzi a ke každé homogenní bázi $(e_i)_{i=1}^{m+n}$ prostoru $V^{(1)}$ takové, že $[e_i, e_j]_1 = c_{ij}^k e_k$, existuje homogenní báze $(\widetilde{e}_i)_{i=1}^{m+n}$ prostoru $V^{(2)}$, splňující $[\widetilde{e}_i, \widetilde{e}_j]_2 = c_{ij}^k \widetilde{e}_k$.

Důkaz. 1. $\Rightarrow$: Označme $\mathbf{P}$ izomorfismus $\mathcal{S}_1$ a $\mathcal{S}_2$. Rovnost superdimenzí plyne okamžitě z (13). Nechť $(e_i)_{i=1}^{m+n}$ je libovolná homogenní báze $V^{(1)}$ a $[e_i, e_j]_1 = c_{ij}^k e_k$. Přiřazením $\widetilde{e}_i := \mathbf{P}e_i$ definujeme díky (13) homogenní bázi $V^{(2)}$ a

$$[\widetilde{e}_i, \widetilde{e}_j]_2 = [\mathbf{P}e_i, \mathbf{P}e_j]_2 \overset{(12)}{=} \mathbf{P}[e_i, e_j]_1 = \mathbf{P}(c_{ij}^k e_k) = c_{ij}^k \mathbf{P}e_k = c_{ij}^k \widetilde{e}_k.$$

2. $\Leftarrow$: Nechť $\mathcal{S}_1$ a $\mathcal{S}_2$ mají stejnou superdimenzi. Vybereme si $(e_i)_{i=1}^{m+n}$ libovolnou homogenní bázi $V^{(1)}$ a $[e_i, e_j]_1 = c_{ij}^k e_k$. K ní najdeme bázi $(\widetilde{e}_i)_{i=1}^{m+n}$ prostoru $V^{(2)}$ z tvrzení pravé strany ekvivalence. Lineárním rozšířením předpisu $\mathbf{P}e_i = \widetilde{e}_i$ definujeme lineární bijekci $\mathbf{P} : V^{(1)} \to V^{(2)}$. Podmínka (13) plyne z homogenity obou bází a rovnosti superdimenzí. Podmínku (12) stačí ověřit na vektorech báze:

$$\mathbf{P}[e_i, e_j]_1 = \mathbf{P}(c_{ij}^k e_k) = c_{ij}^k \mathbf{P} e_k = c_{ij}^k \widetilde{e}_k = [\widetilde{e}_i, \widetilde{e}_j]_2 = [\mathbf{P}e_i, \mathbf{P}e_j]_2.$$

   $\mathbf{P}$ je tedy izomorfismus $\mathcal{S}_1$ a $\mathcal{S}_2$.

□

Poznámka 2.8. Z důkazu tvrzení 2.7 je vidět, že předpoklady implikace zprava doleva lze oslabit. Nemusíme ověřovat, že báze $(\widetilde{e}_i)_{i=1}^{m+n}$ existuje pro každou homogenní bázi $(e_i)_{i=1}^{m+n}$, ale stačí nalézt jednu konkrétní dvojici homogenních bází $(e_i)_{i=1}^{m+n}$ a $(\widetilde{e}_i)_{i=1}^{m+n}$, splňující tvrzení pravé strany. Implikace zleva doprava nám nicméně říká, že se bázi $(\widetilde{e}_i)_{i=1}^{m+n}$ podaří nalézt pro libovolnou volbu $(e_i)_{i=1}^{m+n}$.

Definice 2.9. Nechť V je vektorový prostor vybavený bilineární formou $\langle \cdot, \cdot \rangle : V \times V \to V$. $A \Subset V$ podprostor. Řekneme, že A je **izotropní** vzhledem k $\langle \cdot, \cdot \rangle$, když $\langle A, A \rangle = 0$. Řekneme, že A je **maximálně izotropní** vzhledem k $\langle \cdot, \cdot \rangle$, je-li maximálním prvkem inkluzí uspořádané množiny všech izotropních podprostorů.

Definice 2.10. Nechť $\mathcal{S}$ je konečněrozměrná lieovská superalgebra nad tělesem $\mathbb{T}$ vybavená nedegenerovanou bilineární formou $\langle \cdot, \cdot \rangle : \mathcal{S} \times \mathcal{S} \to \mathcal{S}$, splňující

$$(\forall x, y \in \mathcal{S})\ (\langle x, y \rangle = (-1)^{|x||y|} \langle y, x \rangle)\ \textit{(supersymetrie)}, \tag{14}$$

$$(\forall x, y, z \in \mathcal{S})\ (\langle [z, x], y \rangle + (-1)^{|z||x|} \langle x, [z, y] \rangle = 0)\ \textit{(super-ad-invariance)}. \tag{15}$$

Potom $\mathcal{S}$ nazveme **Drinfeldův superdouble**, existuje-li dvojice podsuperalgeber $\mathcal{G}$, $\widetilde{\mathcal{G}}$ taková, že $\mathcal{S} = \mathcal{G} \dotplus \widetilde{\mathcal{G}}$ a jako podprostory jsou $\mathcal{G}$, $\widetilde{\mathcal{G}}$ maximálně izotropní vzhledem k $\langle \cdot, \cdot \rangle$.

Uspořádanou trojici $(\mathcal{S}, \mathcal{G}, \widetilde{\mathcal{G}})$ nazýváme **Maninova supertrojice**.

Poznámka 2.11. Z vlastností formy okamžitě plyne rovnost dimenzí obou podsuperalgeber, tj.

$$dim \mathcal{G} = dim \widetilde{\mathcal{G}}. \tag{16}$$

Definice 2.12. Nechť $\mathcal{S}_1$, $\mathcal{S}_2$ jsou Drinfeldovy superdoubly a $\langle \cdot, \cdot \rangle_1$, $\langle \cdot, \cdot \rangle_2$ jejich bilineární formy. Řekneme, že $\mathcal{S}_1$, $\mathcal{S}_2$ jsou **izomorfní Drinfeldovy superdoubly**, jestliže existuje zobrazení $\mathbf{P}$: $\mathcal{S}_1 \to \mathcal{S}_2$ takové, že

1. $\mathbf{P}$ je izomorfismus lieovských superalgeber $\mathcal{S}_1$ a $\mathcal{S}_2$ (ve smyslu definice 2.6),

2. $$(\forall x, y \in \mathcal{S}_1)\ (\langle x, y \rangle_1 = \langle \mathbf{P}x, \mathbf{P}y \rangle_2). \tag{17}$$

Zobrazení $\mathbf{P}$ nazýváme izomorfismus Drinfeldových superdoublů.

Poznámka 2.13. V definici izomorfismu Drinfeldových superdoublů explicitně nevystupují podsuperalgebry $\mathcal{G}$ a $\widetilde{\mathcal{G}}$. Proto, jak se později ukáže, existují izomorfní Drinfeldovy superdoubly připouštějící rozklad na různé podsuperalgebry $\mathcal{G}$ a $\widetilde{\mathcal{G}}$.

Tvrzení 2.14. *Nechť $\mathcal{S}_1$, $\mathcal{S}_2$ jsou dva Drinfeldovy superdoubly definované na prostorech $V^{(1)} = V_0^{(1)} \dot{+} V_1^{(1)}$ a $V^{(2)} = V_0^{(2)} \dot{+} V_1^{(2)}$. Nechť $[\cdot,\cdot]_1$ a $[\cdot,\cdot]_2$ jsou jejich lieovské superzávorky a $\langle\cdot,\cdot\rangle_1$, $\langle\cdot,\cdot\rangle_2$ jejich bilineární formy. Pak*

$\mathcal{S}_1$ a $\mathcal{S}_2$ jsou izomorfní Drinfeldovy superdoubly

$$\Longleftrightarrow$$

$\mathcal{S}_1$ a $\mathcal{S}_2$ mají stejnou superdimenzi a k libovolné pevně zvolené homogenní bázi $(e_i)_{i=1}^{m+n}$ prostoru $V^{(1)}$ takové, že $[e_i, e_j]_1 = c_{ij}^k e_k$, existuje homogenní báze $(\widetilde{e}_i)_{i=1}^{m+n}$ prostoru $V^{(2)}$ splňující $[\widetilde{e}_i, \widetilde{e}_j]_2 = c_{ij}^k \widetilde{e}_k$ taková, že platí

$$\langle e_i, e_j\rangle_1 = \langle \widetilde{e}_i, \widetilde{e}_j\rangle_2. \tag{18}$$

Důkaz. 1. $\Rightarrow$: Označme $\mathbf{P}$ izomorfismus Drinfeldových superdoublů $\mathcal{S}_1$ a $\mathcal{S}_2$. Nechť $(e_i)_{i=1}^{m+n}$ je libovolná pevně zvolená homogenní báze $V^{(1)}$ a $[e_i, e_j]_1 = c_{ij}^k e_k$. Definujeme $\widetilde{e}_i := \mathbf{P}e_i$. První část tvrzení plyne okamžitě z důkazu 2.7. Zbývá ověřit, že takto definovaná báze $V^{(2)}$ splňuje podmínku (18):

$$\langle \widetilde{e}_i, \widetilde{e}_j\rangle_2 = \langle \mathbf{P}e_i, \mathbf{P}e_j\rangle_2 = \langle e_i, e_j\rangle_1.$$

2. $\Leftarrow$: Nechť $\mathcal{S}_1$ a $\mathcal{S}_2$ mají stejnou superdimenzi. Vybereme si $(e_i)_{i=1}^{m+n}$ libovolnou homogenní bázi $V^{(1)}$ a $[e_i, e_j]_1 = c_{ij}^k e_k$. K ní najdeme bázi $(\widetilde{e}_i)_{i=1}^{m+n}$ prostoru $V^{(2)}$ z tvrzení pravé strany ekvivalence. Lineárním rozšířením předpisu $\mathbf{P}e_i = \widetilde{e}_i$ definujeme lineární bijekci $\mathbf{P} : V^{(1)} \to V^{(2)}$. Opět z důkazu 2.7 plyne, že jde o izomorfismus lieovských superalgeber. Platnost (17) ověříme opět pouze na vektorech báze:

$$\langle \mathbf{P}e_i, \mathbf{P}e_j\rangle_2 = \langle \widetilde{e}_i, \widetilde{e}_j\rangle_2 \overset{(18)}{=} \langle e_i, e_j\rangle_1.$$

$\mathbf{P}$ je tedy izomorfismus Drinfeldových superdoublů $\mathcal{S}_1$ a $\mathcal{S}_2$.

□

Poznámka 2.15. O tvrzení 2.14 lze říci totéž, co v poznámce 2.8.

Definice 2.16. Řekneme, že $(\mathcal{S}_1, \mathcal{G}_1, \widetilde{\mathcal{G}}_1)$, $(\mathcal{S}_2, \mathcal{G}_2, \widetilde{\mathcal{G}}_2)$ jsou **izomorfní Maninovy supertrojice**, existuje-li izomorfismus $\mathbf{P}$ jejich Drinfeldových superdoublů ve smyslu definice 2.12, který navíc splňuje

$$\mathbf{P}(\mathcal{G}_1) = \mathcal{G}_2,\ \mathbf{P}(\widetilde{\mathcal{G}}_1) = \widetilde{\mathcal{G}}_2. \tag{19}$$

Poznámka 2.17. Pro izomorfii Maninových supertrojic platí podmínka obdobná 2.14, je však nutno zesílit pravou stranu tvrzení.

$\mathcal{G}_1$ a $\mathcal{G}_2$, resp. $\widetilde{\mathcal{G}}_1$ a $\widetilde{\mathcal{G}}_2$ mají stejnou superdimenzi a pro libovolnou pevně zvolenou homogenní bázi (e_i) ve tvaru $(b_i, \widetilde{b}^i, f_i, \widetilde{f}^i)$, kde (b_i, f_i) je homogenní báze $\mathcal{G}_1$ a $(\widetilde{b}^i, \widetilde{f}^i)$ homogenní báze $\widetilde{\mathcal{G}}_1$, musí existovat báze (e'_i) stejných vlastností, jako v 2.14, ale ve tvaru $(b'_i, \widetilde{b}'^i, f'_i, \widetilde{f}'^i)$, kde (b'_i, f'_i) je homogenní báze $\mathcal{G}_2$ a $(\widetilde{b}'^i, \widetilde{f}'^i)$ homogenní báze $\widetilde{\mathcal{G}}_2$.

Definice 2.18. Řekneme, že Drinfeldův superdouble, resp. Maninova supertrojice je **B-F ortogonální**, jestliže platí

$$\langle \mathcal{G}, \widetilde{\mathcal{G}} \rangle = \langle \widetilde{\mathcal{G}}, \mathcal{G} \rangle = 0. \tag{20}$$

Poznámka 2.19. Dá se snadno ukázat, že B-F ortogonalita je vlastnost Drinfeldova superdoublu, která je přenášena izomorfismem.

3 Klasifikace komplexních lieovských superalgeber

V tabulkách 1, 2 a 3 přehledně vypíšeme všechny třídy neizomorfních lieovských superalgeber superdimenze $(1,1)$, $(2,1)$ a $(1,2)$. Klasifikací superalgeber s triviální lichou částí se zabývá klasická literatura, triviální sudá část připouští díky podmínce (4) pouze nezajímavý případ antikomutující superalgebry (abelovské).

Podrobný postup klasifikace je uveden v [1]. Použijeme značení ve shodě s [2]. Superalgebry, v nichž vystupuje parametr p, jsou neizomorfní pro jeho hodnoty $p_1 \neq p_2$, není-li uvedeno jinak.

Tabulka 1: Přehled komplexních Lieovských superalgeber superdimenze $(1,1)$

Jméno	Nenulové superkomutátory	Grupa automorfismů
A_{11}		$\begin{pmatrix} a & 0 \\ 0 & b \end{pmatrix}$
N_{11}	$[f_1, f_1] = b_1$	$\begin{pmatrix} a^2 & 0 \\ 0 & a \end{pmatrix}$
S_{11}	$[b_1, f_1] = f_1$	$\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & a \end{pmatrix}$

Matice ve třetím sloupci vystupují na pozici matice $\mathbf{P}$ v automorfním zobrazení $(b_1', f_1') = (b_1, f_1)\mathbf{P}$. Parametry libovolné komplexní tak, aby $\det \mathbf{P} \neq 0$.

4 Klasifikace komplexních Drinfeldových superdoublů

4.1 Kanonický tvar formy

Od tohoto místa dál budeme mluvit pouze o komplexních a B-F ortogonálních Drinfeldových superdoublech. Ukazuje se, že z podmínky B-F ortogonality (20) plyne rovnost superdimenzí podsuperalgeber $\mathcal{G}$ a $\widetilde{\mathcal{G}}$. Tj. pokud $\mathcal{G}$ má superdimenzi (m,n) a $\widetilde{\mathcal{G}}$ superdimenzi $(\widetilde{m}, \widetilde{n})$, pak platí $m = \widetilde{m}$ a $n = \widetilde{n}$.

Uvažujme nyní libovolnou Maninovu supertrojici $(\mathcal{S}, \mathcal{G}, \widetilde{\mathcal{G}})$. Pro libovolně zvolenou homogenní bázi $(X_I)_{I=1}^{m+n} \equiv (b_i, f_\alpha)_{i=1,\alpha=1}^{m,n}$ podsuperalgebry $\mathcal{G}$ umíme nalézt homogenní bázi $(\widetilde{X}^J)_{J=1}^{m+n} \equiv (\widetilde{b}^j, \widetilde{f}^\beta)_{j=1,\beta=1}^{m,n}$ podsuperalgebry $\widetilde{\mathcal{G}}$ takovou, že platí

$$\langle b_i, \widetilde{b}^j \rangle = \langle \widetilde{b}^j, b_i \rangle = \delta_i^j, \ \langle f_\alpha, \widetilde{f}^\beta \rangle = -\langle \widetilde{f}^\beta, f_\alpha \rangle = \delta_\alpha^\beta. \tag{21}$$

Tabulka 2: Přehled komplexních Lieovských superalgeber superdimenze $(2,1)$

Jméno	Nenulové superkomutátory	Grupa automorfismů
A_{21}		$\begin{pmatrix} a & b & 0 \\ c & d & 0 \\ 0 & 0 & k \end{pmatrix}$
N_{21}	$[f_1, f_1] = b_1$	$\begin{pmatrix} d^2 & b & 0 \\ 0 & a & 0 \\ 0 & 0 & d \end{pmatrix}$
S_{21}	$[b_1, f_1] = f_1$	$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ b & c & 0 \\ 0 & 0 & d \end{pmatrix}$
C_p^1	$[b_1, b_2] = b_2, [b_1, f_1] = pf_1$	$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ b & c & 0 \\ 0 & 0 & d \end{pmatrix}$
F	$[b_1, b_2] = b_2, [b_1, f_1] = \frac{1}{2} f_1, [f_1, f_1] = b_2$	$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ b & d^2 & 0 \\ 0 & 0 & d \end{pmatrix}$

Matice ve třetím sloupci vystupují na pozici matice $\mathbf{P}$ v automorfním zobrazení $(b'_1, b'_2, f'_1) = (b_1, b_2, f_1)\mathbf{P}$. Parametry libovolné komplexní tak, aby $\det \mathbf{P} \neq 0$.

Hodnoty formy pro ostatní kombinace bazických vektorů jsou díky izotropii a B-F ortogonalitě nulové.

Definice 4.1. Bázi superalgebry $\mathcal{S}$ ve tvaru $(X_I, \widetilde{X}^J)_{I,J=1}^{m+n,m+n} \equiv (b_i, f_\alpha, \widetilde{b}^j, \widetilde{f}^\beta)_{i,\alpha,j,\beta=1}^{m,n,m,n}$ splňující podmínku (21), kde $(X_I)_{I=1}^{m+n} \equiv (b_i, f_\alpha)_{i=1,\alpha=1}^{m,n}$ je homogenní báze podsuperalgebry $\mathcal{G}$ a $(\widetilde{X}^J)_{J=1}^{m+n} \equiv (\widetilde{b}^j, \widetilde{f}^\beta)_{j=1,\beta=1}^{m,n}$ homogenní báze podsuperalgebry $\widetilde{\mathcal{G}}$, nazýváme **duální homogenní bází $\mathcal{S}$**.

Říkáme, že forma $\langle \cdot, \cdot \rangle$ v duální homogenní bázi je v **kanonickém tvaru**.

Poznámka 4.2. Duální homogenní báze tedy není homogenní bází ve smyslu definice 2.4. Od homogenní báze se ale liší pouze pořadím vektorů. Je proto zřejmé, že v tvrzení 2.7 a 2.14 můžeme místo o homogenních bázích mluvit o duálních homogenních bázích.

V duální homogenní bázi $(X_I, \widetilde{X}^J)_{I,J=1}^{m+n,m+n}$ jsou všechny strukturní koeficienty superalgebry $\mathcal{S}$ určeny strukturními koeficienty podsuperalgeber $\mathcal{G}$ a $\widetilde{\mathcal{G}}$. Označíme-li

$$[X_I, X_J] = f_{IJ}{}^K X_K, \tag{22}$$

$$[\widetilde{X}^I, \widetilde{X}^J] = \widetilde{f}^{IJ}{}_K \widetilde{X}^K, \tag{23}$$

dostaneme pomocí super-ad-invariance, izotropie, (20) a (21)

$$[X_I, \widetilde{X}^J] = \widetilde{f}^{JK}{}_I X_K + f_{KI}{}^J \widetilde{X}^K. \tag{24}$$

Tabulka 3: Přehled komplexních Lieovských superalgeber superdimenze $(1,2)$

Jméno	Nenulové superkomutátory	Grupa automorfismů
A_{12}		$\begin{pmatrix} k & 0 & 0 \\ 0 & a & b \\ 0 & c & d \end{pmatrix}$
N_{12}^0	$[f_1, f_1] = b_1$	$\begin{pmatrix} a^2 & 0 & 0 \\ 0 & a & 0 \\ 0 & b & d \end{pmatrix}$
N_{12}^1	$[f_1, f_1] = b_1, [f_2, f_2] = b_1$	$\begin{pmatrix} d^2 + c^2 & 0 & 0 \\ 0 & \mp d & \pm c \\ 0 & c & d \end{pmatrix}$
C_{-1}^2	$[b_1, f_1] = f_1, [b_1, f_2] = -f_2$	$\begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & b \\ 0 & c & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & c & 0 \\ 0 & 0 & d \end{pmatrix}$
C_p^2 $p \neq \pm 1, \lvert p \rvert \leq 1$	$[b_1, f_1] = f_1, [b_1, f_2] = pf_2$	$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & c & 0 \\ 0 & 0 & d \end{pmatrix}$
C_1^2	$[b_1, f_1] = f_1, [b_1, f_2] = f_2$	$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & a & b \\ 0 & c & d \end{pmatrix}$
C^3	$[b_1, f_2] = f_1$	$\begin{pmatrix} a & 0 & 0 \\ 0 & ad & c \\ 0 & 0 & d \end{pmatrix}$
C^4	$[b_1, f_1] = f_1, [b_1, f_2] = f_1 + f_2$	$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & a & c \\ 0 & 0 & a \end{pmatrix}$

Pro $|p| = 1$ jsou C_p^2 a C_{p*}^2 izomorfní.
Matice ve třetím sloupci vystupují na pozici matice $\mathbf{P}$ v automorfním zobrazení $(b_1', f_1', f_2') = (b_1, f_1, f_2)\mathbf{P}$. Parametry libovolné komplexní tak, aby $\det \mathbf{P} \neq 0$.

4.2 Metoda klasifikace Maninových supertrojic

Prvním krokem v klasifikaci Drinfeldových superdoublů je nalezení kanonických reprezentantů neizomorfních tříd Maninových supertrojic dané superdimenze podle izomorfismu 2.16.

Mějme daný komplexní konečněrozměrný supervektorový prostor $\mathcal{S}$ superdimenze $(2m, 2n)$, vybavený nedegenerovanou, bilineární, supersymetrickou formou $\langle\cdot,\cdot\rangle : \mathcal{S}\times\mathcal{S} \to \mathbb{C}$. Dále mějme dva podprostory $\mathcal{G}$, $\widetilde{\mathcal{G}}$ superdimenze (m, n) maximálně izotropní vzhledem k $\langle\cdot,\cdot\rangle$ takové, že $\mathcal{S} = \mathcal{G} \dot{+} \widetilde{\mathcal{G}}$.

Dále předpokládejme, že máme danou lieovskou superalgebru $\mathcal{G}$ superdimenze (m, n) zadanou v nějaké homogenní bázi $(X_I)_{I=1}^{m+n}$ takové, aby strukturní koeficienty $\mathcal{G}$ odpovídaly tabulkám 1, 2 a 3.

K takto zvolené homogenní bázi nalezneme homogenní bázi $(\widetilde{X}^J)_{J=1}^{m+n}$ podprostoru $\widetilde{\mathcal{G}}$ tak, aby $(X_I, \widetilde{X}^J)_{I,J=1}^{m+n,m+n}$ byla duální homogenní bázi $\mathcal{S}$.

Použijeme-li pro strukturní koeficienty označení (22) a (23), hledáme nyní pro strukturní koeficienty ${f_{IJ}}^K$ superalgebry $\mathcal{G}$ přípustné strukturní koeficienty ${\widetilde{f}^{IJ}}_K$ superalgebry $\widetilde{\mathcal{G}}$. Předpokládáme, že forma je super-ad-invariantní. Tento fakt nijak neomezí možnosti volby strukturních koeficientů v $\mathcal{G}$ a $\widetilde{\mathcal{G}}$, viz. [1]. Podmínky přípustnosti získáme vyřešením super-Jacobiho identit pro superalgebru $\mathcal{S}$, přičemž předpokládáme, že super-Jacobiho identity

$$(-1)^{|X_I||X_K|}[X_I, [X_J, X_K]] + cyclic\{I, J, K\} = 0 \tag{25}$$

jsou již splněny.

Nalezením přípustných strukturních koeficientů ${\widetilde{f}^{IJ}}_K$ získáme množinu všech Maninových supertrojic pro lieovskou superalgebru $\mathcal{G}$, zadanou v nějaké homogenní bázi pomocí (22). V této množině je třeba nalézt kanonické reprezentanty tříd podle izomorfismu 2.16.

Mějme nyní dvě Maninovy supertrojice z této množiny, $(\mathcal{S}, \mathcal{G}, \widetilde{\mathcal{G}})$ a $(\mathcal{T}, \mathcal{H}, \widetilde{\mathcal{H}})$. Nechť $(X_I, \widetilde{X}^J)_{I,J=1}^{m+n,m+n}$, resp. $(Y_I, \widetilde{Y}^J)_{I,J=1}^{m+n,m+n}$ jsou duální homogenní báze $\mathcal{S}$, resp. $\mathcal{T}$.

Víme, že platí $[X_I, X_J] = {f_{IJ}}^K X_K$ a $[Y_I, Y_J] = {f_{IJ}}^K Y_K$. Dále nechť $[\widetilde{X}^I, \widetilde{X}^J] = {\widetilde{f}^{IJ}}_K \widetilde{X}^K$. Chceme-li ukázat, že $(\mathcal{S}, \mathcal{G}, \widetilde{\mathcal{G}})$ a $(\mathcal{T}, \mathcal{H}, \widetilde{\mathcal{H}})$ jsou izomorfní, stačí podle 2.14 a 2.17 nalézt duální homogenní bázi $(Y'_I, \widetilde{Y}'^J)_{I,J=1}^{m+n,m+n}$ superalgebry $\mathcal{T}$ splňující

$$[Y'_I, Y'_J] = {f_{IJ}}^K Y'_K, \tag{26}$$

$$[\widetilde{Y}'^I, \widetilde{Y}'^J] = {\widetilde{f}^{IJ}}_K \widetilde{Y}'^K \tag{27}$$

a

$$(Y'_I, \widetilde{Y}'^J) = (Y_I, \widetilde{Y}^J) \begin{pmatrix} \mathbf{A} & 0 \\ 0 & \mathbf{A}^{-\mathbf{T}} \end{pmatrix}, \tag{28}$$

kde $\mathbf{A}$ je matice $(m + n) \times (m + n)$ z grupy automorfismů superalgebry $\mathcal{G}$ z tabulek 1, 2 a 3.

Naopak, pokud taková báze neexistuje, Maninovy supertrojice izomorfní nejsou.

Protože vždy budeme zapisovat Maninovu supertrojici $(\mathcal{S}, \mathcal{G}, \widetilde{\mathcal{G}})$ v nějaké duální homogenní bázi, kde je celá lieovská superalgebra $\mathcal{S}$ určena strukturními koeficienty v podsuperalgebrách $\mathcal{G}$ a $\widetilde{\mathcal{G}}$, budeme zkráceně psát pouze $(\mathcal{G}|\widetilde{\mathcal{G}})$.

2

4.3 Metoda klasifikace Drinfeldových superdoublů

Předpokládáme nyní, že pro danou superdimenzi máme úplný seznam reprezentantů tříd neizomorfních Maninových supertrojic. Zbývá zjistit, které z nich jsou izomorfními Drinfeldovými superdoubly ve smyslu definice 2.12.

Mějme nyní dvě libovolné Maninovy supertrojice. $(\mathcal{S}, \mathcal{G}, \widetilde{\mathcal{G}})$ a $(\mathcal{T}, \mathcal{H}, \widetilde{\mathcal{H}})$. Nechť $(X_I, \widetilde{X}^J)_{I,J=1}^{m+n,m+n}$, resp. $(Y_I, \widetilde{Y}^J)_{I,J=1}^{m+n,m+n}$ jsou duální homogenní báze $\mathcal{S}$, respektive $\mathcal{T}$.

Předpokládejme, že $[X_I, X_J] = f_{IJ}{}^K X_K$ a $[\widetilde{X}^I, \widetilde{X}^J] = \widetilde{f}^{IJ}{}_K \widetilde{X}^K$. Chceme-li ukázat, že $(\mathcal{S}, \mathcal{G}, \widetilde{\mathcal{G}})$ a $(\mathcal{T}, \mathcal{H}, \widetilde{\mathcal{H}})$ jsou izomorfní Drinfeldovy doubly, stačí podle 2.14 nalézt duální homogenní bázi $(Y'_I, \widetilde{Y}'^J)_{I,J=1}^{m+n,m+n}$ superalgebry $\mathcal{T}$ splňující

$$[Y'_I, Y'_J] = f_{IJ}{}^K Y'_K, \tag{29}$$

$$[\widetilde{Y}'^I, \widetilde{Y}'^J] = \widetilde{f}^{IJ}{}_K \widetilde{Y}'^K \tag{30}$$

a

$$(Y'_I, \widetilde{Y}'^J) = (Y_I, \widetilde{Y}^J)\mathbf{C}, \tag{31}$$

kde $\mathbf{C}$ je komplexní regulární matice $2(m+n) \times 2(m+n)$ v blokovém tvaru

$$\mathbf{C} = \begin{pmatrix} \mathbf{P} & \mathbf{Q} \\ \mathbf{R} & \mathbf{U} \end{pmatrix}, \tag{32}$$

$\mathbf{P}, \mathbf{Q}, \mathbf{R}, \mathbf{U}$ jsou komplexní blokově diagonální matice $(m+n) \times (m+n)$.

Duální homogenní báze $(X_I, \widetilde{X}^J)_{I,J=1}^{m+n,m+n}$ první supertrojice a $(Y_I, \widetilde{Y}^J)_{I,J=1}^{m+n,m+n}$ druhé supertrojice volíme tak, aby odpovídaly duálním homogenním bázím v tabulkách 4, 5 a 6.

Celý problém hledání izomorfismů Drinfeldových superdoublů se tedy následně zúží na nalezení matice $\mathbf{C}$ v rovnicích (29), (30) a (31). Matice $\mathbf{C}$ pro konkrétní případy jsou podrobně vypsány v dodatku A.

Speciální případ izomorfismu Drinfeldových superdoublů je tzv. *T-dualita*. Je-li $(b_i, f_\alpha, \widetilde{b}^j, \widetilde{f}^\beta)$ duální homogenní bází Maninovy supertrojice $(\mathcal{G}, \widetilde{\mathcal{G}})$, pak transformací

$$T : b_i \to \widetilde{b}^i, f_\alpha \to \widetilde{f}^\alpha, \widetilde{b}^j \to b_j, \widetilde{f}^\beta \to -f_\beta \tag{33}$$

dostaneme Maninovu supertrojici $(\widetilde{\mathcal{G}}|\mathcal{G})$. Maninovu supertrojici $(\widetilde{\mathcal{G}}|\mathcal{G})$ budeme nazývat **duální** k $(\mathcal{G}|\widetilde{\mathcal{G}})$. T obecně není izomorfismem Maninových supertrojic 2.16, nutnou podmínkou existence izomorfismu mezi supertrojicemi $(\mathcal{G}|\widetilde{\mathcal{G}})$ a $(\mathcal{H}|\widetilde{\mathcal{H}})$ je existence izomorfismu mezi superalgebrami $\mathcal{G}$ a $\mathcal{H}$, resp. $\widetilde{\mathcal{G}}$ a $\widetilde{\mathcal{H}}$.

Pro klasifikaci využijeme tzv. invariantů lieovských superalgeber, vlastností přenášených izomorfismem, k rozdělení reprezentantů tříd Maninových supertrojic do skupin, mezi kterými izomorfismus nemůže existovat. V rámci těchto skupin ukážeme existenci (bude-li to možné) izomorfismů mezi jednotlivými Maninovými supertrojicemi.

Významným invariantem jsou superdimenze ideálů derivované série lieovské superalgebry (ozn. $\mathcal{S}$), posloupnosti superalgeber definované jako

$$\mathcal{S}^{(1)} := span([\mathcal{S}, \mathcal{S}]),\ \mathcal{S}^{(2)} := span([\mathcal{S}^{(1)}, \mathcal{S}^{(1)}]), \ldots \tag{34}$$

4.4 Klasifikace Maninových supertrojic

Ze části 4.1 víme, že Drinfeldův superdouble je lieovská superalgebra superdimenze $(2m, 2n)$. Případy $n = 0$ a $m \leq 3$ jsou klasifikovány v [4] a [5]. Volba $m = 0$ zahrnuje pro libovolné n díky vlastnosti (4) jen abelovskou superalgebru, nebudeme se jí proto zabývat. Zajímají nás tedy pouze případy $m + n \leq 3$ pro $m, n > 0$.

V následujících tabulkách budou podrobně vypsáni reprezentanti tříd ekvivalence podle izomorfismu 2.16. K libovolné Maninově supertrojici existuje duální supertrojice, nebudeme ji proto do tabulek explicitně vypisovat.

Maninovy supertrojice, ve kterých vystupuje parametr, jsou pro různé hodnoty tohoto parametru neizomorfní (není-li uvedeno jinak).

Vypíšeme pouze superkomutátory v podsuperalgebře $\widetilde{\mathcal{G}}$. Ty v $\mathcal{G}$ volíme při klasifikaci podle tabulek 1, 2 a 3. Vždy pracujeme v duálních homogenních bázích a smíšené superkomutační relace jsou tak jednoznačně určeny vztahem (24).

V tabulce 6 zjednodušíme zápis superkomutačních relací superalgebry $\widetilde{\mathcal{G}}$.

Ukazuje se totiž, že v této superdimenzi existují pouze rozklady ve tvaru $(C|N_{12}^{\alpha,\beta,\gamma})$, kde $C \in \{C_p^2, C^3, C^4\}$ a nenulové superkomutační relace superalgebry $N_{12}^{\alpha,\beta,\gamma}$ mají tvar

$$[\widetilde{f}^1, \widetilde{f}^1] = \alpha\widetilde{b}^1, [\widetilde{f}^1, \widetilde{f}^2] = \beta\widetilde{b}^1, [\widetilde{f}^2, \widetilde{f}^2] = \gamma\widetilde{b}^1. \tag{35}$$

Superalgebra $N_{12}^{\alpha,\beta,\gamma}$ je pro $|\alpha| + |\beta| + |\gamma| > 0$ izomorfní buď N_{12}^0, nebo N_{12}^1. Pro $\alpha = \beta = \gamma = 0$ je $N_{12}^{\alpha,\beta,\gamma} \equiv A_{12}$. Nebudeme proto explicitně vypisovat nenulové superkomutační relace.

Tabulka 4: Přehled tříd Maninových supertrojic superdimenze $(2, 2)$

	$(\mathcal{G}\|\widetilde{\mathcal{G}})$	Nenulové superkomutátory v $\widetilde{\mathcal{G}}$
1	$(A_{11}\|A_{11})$	
2	$(N_{11}\|A_{11})$	
3	$(S_{11}\|A_{11})$	
4	$(S_{11}\|N_{11})$	$[\widetilde{f}^1, \widetilde{f}^1] = \widetilde{b}^1$

4.5 Klasifikace Drinfeldových superdoublů

V předchozí části jsme nalezli všechny třídy neizomorfních Maninových supertrojic. Nyní je potřeba vyřešit otázku, které z nich jsou izomorfní jako Drinfeldovy superdoubly. Opět nebudeme zmiňovat duální Maninovy supertrojice. Drinfeldův superdouble duální Maninovy supertrojice je vždy izomorfní svému protějšku, viz. (33).

4.5.1 Superdimenze $(2, 2)$

Spočítáme superdimenze prvních dvou členů derivované série (34).

superdimenze $\mathcal{S}^{(1)}$, $\mathcal{S}^{(2)}$	$(\mathcal{G}\|\widetilde{\mathcal{G}})$
(0,0), (0,0)	$(A_{11}\|A_{11})$
(1,1), (0,0)	$(N_{11}\|A_{11})$
(1,2), (1,0)	$(S_{11}\|A_{11}), (S_{11}\|N_{11})$

Tabulka 5: Přehled tříd Maninových supertrojic superdimenze $(4,2)$

	$\mathcal{G}$	$\widetilde{\mathcal{G}}$	Nenulové superkomutátory v $\widetilde{\mathcal{G}}$	Poznámka
1	A_{21}	A_{21}		
2	N_{21}	A_{21}		
	S_{21}			
3		A_{21}		
4		N_{21}	$[\widetilde{f}^1,\widetilde{f}^1]=\widetilde{b}^1$	
5		S_{21}	$[\widetilde{b}^2,\widetilde{f}^1]=\widetilde{f}^1$	
	C_p^1			
6		A_{21}		
7		N_{21}	$[\widetilde{f}^1,\widetilde{f}^1]=\widetilde{b}^1$	
8		C_{-p}^1	$[\widetilde{b}^2,\widetilde{f}^1]=p\widetilde{f}^1, [\widetilde{b}^1,\widetilde{b}^2]=\widetilde{b}^1$	
9		$\widetilde{N}_{21}$	$[\widetilde{f}^1,\widetilde{f}^1]=\widetilde{b}^2$	$p=\frac{1}{2}$
10		C_0^1,κ	$[\widetilde{b}^1,\widetilde{b}^2]=\kappa\widetilde{b}^2$	$p=0,\kappa\neq 0$
	F			
11		A_{21}		
12		$C_{-\frac{1}{2}}^1$	$[\widetilde{b}^1,\widetilde{b}^2]=\widetilde{b}^1, [\widetilde{b}^2,\widetilde{f}^1]=\frac{1}{2}\widetilde{f}^1$	
13		$F.i$	$[\widetilde{b}^1,\widetilde{b}^2]=\widetilde{b}^1, [\widetilde{b}^2,\widetilde{f}^1]=-\frac{1}{2}\widetilde{f}^1, [\widetilde{f}^1,\widetilde{f}^1]=\widetilde{b}^1$	
14		$F.ii,\kappa$	$[\widetilde{b}^1,\widetilde{b}^2]=\kappa\widetilde{b}^2, [\widetilde{b}^1,\widetilde{f}^1]=\frac{1}{2}\kappa\widetilde{f}^1, [\widetilde{f}^1,\widetilde{f}^1]=\kappa\widetilde{b}^2$	$\kappa\neq 0$

Tabulka 6: Přehled tříd Maninových supertrojic superdimenze $(2,4)$

	$\mathcal{G}$	$\widetilde{\mathcal{G}}$	Poznámka
1	A_{12}	A_{12}	
2	N_{12}^0	A_{12}	
3	N_{12}^1	A_{12}	
4 - 7	C_{-1}^2	$A_{12}, N_{12}^{1,\kappa,1}, N_{12}^{1,\delta,0}, N_{12}^{0,1,0}$	$\kappa\in\mathbb{C}$
8 - 12	C_p^2	$A_{12}, N_{12}^{1,\kappa,1}, N_{12}^{1,\delta,0}, N_{12}^{0,\delta,1}, N_{12}^{0,1,0}$	$p\neq\pm 1, \lvert p\rvert\leq 1, \kappa\in\mathbb{C}$
13 - 15	C_1^2	$A_{12}, N_{12}^{1,0,1}, N_{12}^{0,0,1}$	
16 - 19	C^3	$A_{12}, N_{12}^{1,0,\delta}, N_{12}^{0,1,0}, N_{12}^{0,0,1}$	
20 - 23	C^4	$A_{12}, N_{12}^{\kappa,0,1}, N_{12}^{1,0,0}, N_{12}^{0,1,0}$	$\kappa\in\mathbb{C}$

Parametr $\delta\in\{0,1\}$. Protože pro $|p|=1$ $C_p^2\cong C_{p*}^2$, uvažujeme pro Maninovy supertrojice 8 - 12 a $|p|=1$ pouze $\Im p>0$.

Zbývá ověřit, zda jsou $(S_{11}|A_{11})$ a $(S_{11}|N_{11})$ izomorfní jako Drinfeldovy superdoubly (ve smyslu definice 2.12). Jestli ano, budeme říkat, že jsou různými rozklady jednoho Drinfeldova superdoublu na Maninovy supertrojice.

Při použití značení z části 4.3 a volbě $(\mathcal{G}|\widetilde{\mathcal{G}}) \equiv (S_{11}|A_{11})$, $(\mathcal{H}|\widetilde{\mathcal{H}}) \equiv (S_{11}|N_{11})$ umíme nalézt matici $\mathbf{C}$

$$\mathbf{C} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & \frac{1}{2} \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix},$$

a Maninovy supertrojice $(S_{11}|A_{11})$ a $(S_{11}|N_{11})$ jsou tedy jako Drinfeldovy superdoubly izomorfní. Přehled neizomorfních tříd Drinfeldových superdoublů superdimenze $(2,2)$ a jim příslušejících reprezentantů tříd Maninových supertrojic se nalézá v tabulce 7.

Tabulka 7: Přehled tříd Drinfeldových superdoublů superdimenze $(2,2)$

	Příslušející Maninovy supertrojice
$DD_{(2,2)}I$	$(A_{11}\|A_{11})$
$DD_{(2,2)}II$	$(N_{11}\|A_{11})$
$DD_{(2,2)}III$	$(S_{11}\|A_{11}), (S_{11}\|N_{11})$

4.5.2 Superdimenze $(4,2)$

Spočítáme superdimenze prvních tří členů derivované série (34), výsledek se nachází v tabulce 8. Supertojice se nám opět roztřídí do vzájemně neizomorfních skupin. V rámci těchto skupin se nám podaří nalézt izomorfismy mezi jednotlivými supertrojicemi.

Jediným problémem je ukázat, že Drinfeldovy superdoubly, v nichž vystupuje nějaký parametr (p, κ), nejsou pro různé hodnoty těchto parametrů izomorfní. Jako lieovské superalgebry mají totiž podobné vlastnosti a žádný invariant k jejich rozlišení neposlouží. Soustavy rovnic pro hledání izomorfismů jsou natolik komplikované, že jediný způsob, jak ukázat neexistenci řešení, je počítač.

Tabulka 8: Invarianty Maninových supertrojic superdimenze $(4,2)$

Superdimenze $\mathcal{S}^{(1)}$, $\mathcal{S}^{(2)}$	$(\mathcal{G}\|\widetilde{\mathcal{G}})$
(0,0), (0,0)	$(A_{21}\|A_{21})$
(1,1), (0,0)	$(N_{21}\|A_{21})$
(1,2), (1,0)	$(S_{21}\|A_{21}), (S_{21}\|N_{21}), (S_{21}\|S_{21})$
(3,0), (1,0)	$(C_0^1\|A_{21}), (C_0^1\|C_0^1)$
(3,0), (3,0)	$(C_0^1\|C_{0,\kappa}^1)$
(3,1), (1,0)	$(C_0^1\|N_{21})$
(3,2), (1,0)	$(C_p^1\|A_{21}), (C_p^1\|N_{21}), (C_p^1\|C_{-p}^1), p \neq 0$
(3,2), (2,1)	$(F\|A_{21}), (C_{\frac{1}{2}}^1\|\widetilde{N}_{21}), (F\|C_{-\frac{1}{2}}^1), (F\|F.i)$
(3,2), (3,2)	$(F\|F.ii, \kappa)$

Výsledek klasifikace Drinfeldových superdoublů superdimenze $(4,2)$ se nachází v tabulce 9, podrobný seznam izomorfismů se nachází v dodatku A.

Tabulka 9: Přehled tříd Drinfeldových superdoublů superdimenze $(4,2)$

	Příslušející Maninovy supertrojice	Poznámka
$DD_{(4,2)}I$	$(A_{21}\|A_{21})$	
$DD_{(4,2)}II$	$(N_{21}\|A_{21})$	
$DD_{(4,2)}III$	$(S_{21}\|A_{21}),(S_{21}\|N_{21}),(S_{21}\|S_{21})$	
$DD_{(4,2)}IV_0$	$(C_0^1\|A_{21}),(C_0^1\|C_0^1)$	
$DD_{(4,2)}IV_\kappa$	$(C_0^1\|C_0^1,\kappa)$	$\kappa\neq 0$
$DD_{(4,2)}V$	$(C_0^1\|N_{21})$	
$DD_{(4,2)}VI_p$	$(C_{\pm p}^1\|A_{21}),(C_{\pm p}^1\|N_{21}),(C_p^1\|C_{-p}^1)$	$\arg p\in\langle 0,2\pi),p\neq 0$
$DD_{(4,2)}VII$	$(F\|A_{21}),(C_{\frac{1}{2}}^1\|\widetilde{N}_{21}),(F\|C_{-\frac{1}{2}}^1),(F\|F.i)$	
$DD_{(4,2)}VIII_\kappa$	$(F\|F.ii,\kappa)$	$\kappa\neq 0$

4.5.3 Superdimenze $(2,4)$

Situace je v tomto případě ještě o něco složitější. Spočítání superdimenze prvních tří členů derivované série umožní rozlišit pouze několik málo tříd Drinfeldových superdoublů. Nalezené superdimenze a jim odpovídající Drinfeldovy superdoubly jsou zaneseny v tabulce 10.

Výpočet jiných invariantů, jako například dolní centrální série Lieovské superalgebry, neumožňuje nijak rozlišit Drinfeldovy superdoubly v rámci skupin tabulky 10. Že izomorfismus mezi těmito reprezentanty tříd Drinfeldových superdoublů neexistuje, jsme tak ověřili pouze za pomocí počítače.

Výsledný seznam reprezentantů tříd Drinfeldových superdoublů je k nalezení v tabulce 11.

Tabulka 10: Invarianty Drinfeldových superdoublů superdimenze $(2,4)$

Superdimenze $\mathcal{S}^{(1)}$, $\mathcal{S}^{(2)}$	Drinfeldův superdouble
(0,0), (0,0)	$DD_{(2,4)}I$
(1,1), (0,0)	$DD_{(2,4)}VII$
(1,2), (0,0)	$DD_{(2,4)}III$
(1,2), (1,0)	$DD_{(2,4)}II_0$
(1,3), (1,0)	$DD_{(2,4)}V, DD_{(2,4)}VI$
(1,4), (1,0)	$DD_{(2,4)}II_p, DD_{(2,4)}II_1, DD_{(2,4)}IV$

5 Závěr

5.1 Komplexní versus reálný případ

Původním účelem klasifikace nad komplexními čísly bylo zjednodušení a vyjasnění některých problémů při klasifikaci reálných Drinfeldových superdoublů. Ty však nastaly především v superdimenzi

Tabulka 11: Přehled tříd Drinfeldových superdoublů superdimenze $(2,4)$

	Příslušející Maninovy supertrojice	Poznámka
$DD_{(2,4)}I$	$(A_{12}\|A_{12})$	
$DD_{(2,4)}II_p$	$(C^2_{\pm p}\|N^{\alpha,\beta\gamma}_{12})$	$\arg p \in (-\pi,\pi\rangle \setminus \{1\}, 0 < \|p\| \leq 1$
$DD_{(2,4)}II_1$	$(C^2_1\|N^{\alpha,\beta,\gamma}_{12}), (C^2_{-1}\|N^{\alpha,0,\gamma}_{12})$	
$DD_{(2,4)}II_0$	$(C^2_0\|N^{\alpha,\beta,0}_{12})$	
$DD_{(2,4)}III$	$(N^1_{12}\|A_{12}), (C^3\|N^{\alpha,\beta,0}_{12})$	
$DD_{(2,4)}IV$	$(C^4\|N^{\alpha,\beta,\gamma}_{12}), (C^2_{-1}\|N^{\alpha,\beta,\gamma}_{12})$	$\beta \neq 0$
$DD_{(2,4)}V$	$(C^2_0\|N^{\alpha,\beta,\gamma}_{12})$	$\gamma \neq 0$
$DD_{(2,4)}VI$	$(C^3\|N^{\alpha,\beta,\gamma}_{12})$	$\gamma \neq 0$
$DD_{(2,4)}VII$	$(N^0_{12}\|A_{12})$	

Komplexní čísla α, β, γ můžeme volit libovolně tak, aby odpovídala reprezentantům Maninových supertrojic v tabulce 6.
Protože pro $|p| = 1$ platí $C^2_p \cong C^2_{p*}$, uvažujeme pro $|p| = 1$ a $DD_{(2,4)}II_p$ pouze $\Im p > 0$.

$(2,4)$ a případech, kde vystupovala lieovská superalgebra C^5_p, viz. [2]. Nad komplexními čísly však tato superalgebra nepatří do samostatné třídy ekvivalence podle izomorfismu a díky postupu při klasifikaci Maninových supertrojic nikde nefiguruje.

Největší problém klasifikace reálných Drinfeldových superdoublů, matematický důkaz neexistence některých izomorfismů, se až na výjimky vyřešit nepodařilo. Stále se tak musíme spoléhat na výsledky, které poskytnul počítač.

Zejména mezi jednoparametrickými třídami Drinfeldových superdoublů se pak objevilo několik nových izomorfismů, například pro komplexně sdružené hodnoty parametru. Možnost odmocnit záporné číslo zpřehlednila situaci na poli Maninových supertrojic, lišících se ve strukturních koeficientech pouze o znaménka.

5.2 Seskvilinearita

Drinfeldův superdouble jsme na komplexní těleso rozšířili nejjednodušším možným způsobem, tj. definicí nad komplexním supervektorovým prostorem. Především jsme tedy zachovali vlastnosti klíčové části Drinfeldova superdoublu, bilineární formy.

Mohli bychom například chtít, aby byla forma superhermitovská, tzn. aditivní v obou argumentech a navíc

$$(\forall x, y \in \mathcal{S})(\forall \alpha, \beta \in \mathbb{C})\ (\langle \alpha x, \beta y\rangle = \alpha^* \beta \langle x, y\rangle)\ \textit{(seskvilinearita)}, \tag{36}$$

$$(\forall x, y \in \mathcal{S})\ (\langle x, y\rangle = (-1)^{|x||y|}\langle y, x\rangle^*). \tag{37}$$

Bohužel se ale ukazuje, že tyto vlastnosti způsobí problémy v podmínce (15). Ta by totiž byla kombinací seskvilineární formy a bilineární lieovské superzávorky a tedy nelineární alespoň v jednom z vstupujících vektorů. Tato nelinearita zapříčiní, že superalgebra $\mathcal{S}$ musí být abelovská.

5.3 Budoucnost Drinfeldova superdoublu

Drinfeldův superdouble jako $\mathbb{Z}_2$-gradovaný vektorový prostor vybavený lieovskou superzávorkou zatím postrádá jakékoliv napojení na geometrii. To však není případ tzv. gradovaných modulů, supervektorových prostorů vybavených násobením nikoliv z tělesa, ale z nekonečněrozměrné Grassmanovy algebry. Ty mohou být vybaveny analogií lieovské superzávorky, nazývány poté gradovaným lieovským modulem nebo superlieovskou algebrou. Tato algebraická struktura má přímý vztah s geometrickými objekty, tzv. super Lieovými grupami, resp. supervarietami. Více v článcích Alice Rogers [6] a [7].

Drinfeldův superdouble by tak jednoho dne opět mohl být super Lieovou grupou se speciálními algebraickými vlastnostmi, týkajícími se zejména bilineární, supersymetrické a super-ad-invariantní formy.

A Izomorfismy Drinfeldových superdoublů

Podle části 4.3 stačí nalézt a vypsat matice $\mathbf{C}$, které jsou řešením rovnic (29), (30) a (31). Izomorfismy označíme jako $(\mathcal{G}|\widetilde{\mathcal{G}}) \to (\mathcal{H}|\widetilde{\mathcal{H}})$, kde $\mathcal{G}, \widetilde{\mathcal{G}}, \mathcal{H}, \widetilde{\mathcal{H}}$ jsou superalgebry odpovídající značení z části 4.3.

Protože je relace izomorfismu tranzitivní, nemusíme explicitně vypisovat matice pro všechny izomorfismy.

A.1 Superdimenze $(2, 2)$

$\mathbf{DD_{(2,2)}III}$:

$$(S_{11}|A_{11}) \to (S_{11}|N_{11}) : \ \mathbf{C} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & \frac{1}{2} \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

A.2 Superdimenze $(4, 2)$

$\mathbf{DD_{(4,2)}III}$:

$$(S_{21}|A_{21}) \to (S_{21}|N_{21}) : \ \mathbf{C} = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -1 \\ 1 & 1 & 0 & -1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & \frac{1}{2} \end{pmatrix}.$$

$$(S_{21}|A_{21}) \to (S_{21}|S_{21}) : \ \mathbf{C} = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ -1 & 1 & 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & -1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

$\mathbf{DD_{(4,2)}IV_0}$:

$$(C_0^1|A_{21}) \to (C_0^1|C_0^1): \ \mathbf{C} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & -1 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

$\mathbf{DD_{(4,2)}VI_p}$:

$$(C_p^1|A_{21}) \to (C_{-p}^1|A_{21}): \ \mathbf{C} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -1 \\ -1 & -1 & 0 & 1 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

$$(C_p^1|A_{21}) \to (C_p^1|N_{21}): \ \mathbf{C} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & \frac{1}{2p} \\ -1 & -1 & 0 & 1 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

$$(C_p^1|A_{21}) \to (C_p^1|C_{-p}^1): \ \mathbf{C} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

$\mathbf{DD_{(4,2)}VII}$:

$$(F|A_{21}) \to (C_{\frac{1}{2}}^1|\widetilde{N}_{21}): \ \mathbf{C} = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 & -1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

$$(F|A_{21}) \to (F|C_{-\frac{1}{2}}^1): \ \mathbf{C} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & -1 & 0 \\ -1 & 1 & 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

$$(F|A_{21}) \to (F|F.i): \ \mathbf{C} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & -1 & 0 \\ -1 & 1 & 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

A.3 Superdimenze $(2,4)$

$\mathbf{DD_{(2,4)}II_p}$:

$$(C_p^2|A_{12}) \to (C_p^2|N_{12}^{1,\kappa,1}): \ \mathbf{C} = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & \frac{1}{2} & \frac{\kappa}{p+1} \\ 0 & 0 & -1 & 0 & -\frac{\kappa}{p+1} & -\frac{1}{2p} \end{pmatrix}.$$

$$(C_p^2|A_{12}) \to (C_p^2|N_{12}^{1,\delta,0}): \ \mathbf{C} = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 & -\frac{1}{2} & -\frac{\delta}{p+1} \\ 0 & 0 & -1 & 0 & -\frac{\delta}{p+1} & 0 \end{pmatrix}.$$

$$(C_p^2|A_{12}) \to (C_p^2|N_{12}^{0,\delta,1}): \ \mathbf{C} = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 & 0 & -\frac{\delta}{p+1} \\ 0 & 0 & -1 & 0 & -\frac{\delta}{p+1} & -\frac{1}{2p} \end{pmatrix}.$$

$$(C_p^2|A_{12}) \to (C_p^2|N_{12}^{0,1,0}): \ \mathbf{C} = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -\frac{1}{p+1} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -\frac{1}{p+1} \\ 0 & 0 & 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & p+1 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & p+1 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}.$$

$$(C_p^2|A_{12}) \to (C_{-p}^2|A_{12}): \ \mathbf{C} = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

$\mathbf{DD_{(2,4)}II_1}$:

$$(C_1^2|A_{12}) \to (C_1^2|N_{12}^{1,0,1}): \ \mathbf{C} = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & \frac{1}{2} & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 & 0 & -\frac{1}{2} \end{pmatrix}.$$

$$(C_1^2|A_{12}) \to (C_1^2|N_{12}^{0,0,1}): \ \mathbf{C} = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 & 0 & -\frac{1}{2} \end{pmatrix}.$$

$$(C_{-1}^2|A_{12}) \to (C_{-1}^2|N_{12}^{1,0,0}): \ \mathbf{C} = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{1}{2} & 0 \end{pmatrix}.$$

$$(C_{-1}^2|A_{12}) \to (C_{-1}^2|N_{12}^{0,0,1}): \ \mathbf{C} = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{1}{2} \\ 0 & 0 & 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -2 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

$$(C_{-1}^2|A_{12}) \to (C_{-1}^2|N_{12}^{1,0,1}): \ \mathbf{C} = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & -\frac{1}{2} \\ 0 & 2 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{1}{2} & 0 \end{pmatrix}.$$

$$(C_{-1}^2|A_{12}) \to (C_1^2|A_{12}): \ \mathbf{C} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

$\mathbf{DD_{(2,4)}II_0}$:

$$(C_0^2|A_{12}) \to (C_0^2|N_{12}^{0,1,0}): \ \mathbf{C} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

$$(C_0^2|A_{12}) \to (C_0^2|N_{12}^{1,\delta,0}): \ \mathbf{C} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & \frac{1}{2} & \delta \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & \delta & 0 \end{pmatrix}.$$

$\mathbf{DD_{(2,4)}III}$:

$$(N_{12}^1|A_{12}) \to (C^3|A_{12}): \ \mathbf{C} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -\frac{i}{2} & 0 & i & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1}{2} & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{i}{2} & 0 & 0 & 0 & i \\ 0 & -\frac{1}{2} & 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

$$(C^3|A_{12}) \to (C^3|N_{12}^{1,0,0}): \ \mathbf{C} = \begin{pmatrix} \frac{1}{2} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & \frac{1}{2} \\ 0 & 0 & 2 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{1}{2} \end{pmatrix}.$$

$$(C^3|A_{12}) \to (C^3|N_{12}^{0,1,0}): \ \mathbf{C} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

$\mathbf{DD_{(2,4)}IV}$:

$$(C^4|A_{12}) \to (C^4|N_{12}^{\kappa,0,1}): \ \mathbf{C} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & \frac{1+2k}{4} & -\frac{1}{4} \\ 0 & 0 & 1 & 0 & -\frac{1}{4} & \frac{1}{2} \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

$$(C^4|A_{12}) \to (C^4|N_{12}^{1,0,0}): \ \mathbf{C} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & \frac{1}{2} & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

$$(C^4|A_{12}) \to (C^4|N_{12}^{0,1,0}): \ \mathbf{C} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & -\frac{1}{2} & \frac{1}{2} \\ 0 & 0 & 1 & 0 & \frac{1}{2} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

$$(C^2_{-1}|N^{1,\kappa,1}_{12}) \to (C^2_{-1}|N^{1,1,0}_{12}):\ \mathbf{C} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \kappa & 0 & 0 & \frac{\kappa^2-1}{2\kappa} & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & \frac{1}{2} \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{1}{\kappa} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

$$(C^2_{-1}|N^{1,1,0}_{12}) \to (C^4|A_{12}):\ \mathbf{C} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & -\frac{1}{2} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

$\mathbf{DD_{(2,4)}V}$:

$$(C^2_0|N^{0,0,1}_{12}) \to (C^2_0|N^{0,1,1}_{12}):\ \mathbf{C} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

$$(C^2_0|N^{0,0,1}_{12}) \to (C^2_0|N^{1,\kappa,1}_{12}):\ \mathbf{C} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & \frac{1}{2} & \kappa \\ 0 & 0 & 1 & 0 & \kappa & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

$\mathbf{DD_{(2,4)}VI}$:

$$(C^3|N^{1,0,1}_{12}) \to (C^3|N^{0,0,1}_{12}):\ \mathbf{C} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & -\frac{1}{2} \\ 0 & 0 & 1 & 0 & -\frac{1}{2} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Reference

[1] J. Vysoký, *Supersymetrie, Lieovské superalgebry, Maninovy supertrojice.* Bakalářská práce ČVUT Praha (2009).

[2] L. Hlavatý, J. Vysoký, *Manin supertriples and Drinfeld's superdoubles in low dimensions.* arXiv:0908.0997 [math-ph].

[3] N. Backhouse, *Classification of four-dimensional Lie Superalgebras.* J. Math. Phys. 19, 2400 (1978).

[4] L. Hlavatý, L. Šnobl: *Classification of 6-dimensional real Manin triples*, e-print math.QA/0202209

[5] L. Šnobl, L. Hlavatý: *Classification of 6-dimensional real Drinfeld doubles*, Int.J.Mod.Phys. A17, 4043 (2002) , math.QA/0202210.

[6] A. Rogers: *A global theory of supermanifolds*, J. Math. Phys. 21, 1352 (1980).

[7] A. Rogers: *Super Lie groups: global topology and local structure*, J. Math. Phys. 22, 939 (1981).