

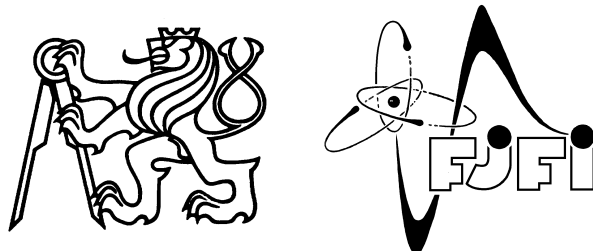
ČESKÉ VYSOKÉ UČENÍ TECHNICKÉ V PRAZE

Fakulta jaderná a fyzikálně inženýrská

Katedra fyziky

Obor: Matematické inženýrství

Zaměření: Matematická fyzika



Porovnání dvoudimenzionálních transformací Fourierova typu

Comparison of two-dimensional Fourier-like transforms

VÝZKUMNÝ ÚKOL

Autor práce: **Bc. Jan Fuksa**
Vedoucí úkolu: **doc. Ing. Severin Pošta, Ph.D.**
Datum: **30.6.2011**

Prohlašuji, že jsem předloženou práci vypracoval samostatně a že jsem uvedl veškerou použitou literaturu.

Nemám závažný důvod proti užití tohoto školního díla ve smyslu §60 Zákona č.121/2000 Sb., o právu autorském, o právech souvisejících s právem autorským a o změně některých zákonů (autorský zákon).

V Praze, dne 30.6.2011

Poděkování

Děkuji doc. Severinu Poštovi za velmi ochotný a trpělivý přístup, za nesčetné konzultace a poskytnutí mnoha hodnotných studijních materiálů, za podnětné návrhy týkající se zvláště poslední kapitoly. Děkuji také prof. Jiřímu Tolarovi za motivaci k této práci a za doporučení řady publikací zabývajících se DFT.

Název práce: **Porovnání dvoudimenzionálních transformací Fourierova typu**

Autor: Bc. Jan Fuksa

Obor: Matematické inženýrství

Druh práce: Výzkumný úkol

Vedoucí práce: doc. Ing. Severin Pošta, Ph.D.

Abstrakt:

Tato práce shrnuje základy problematiky funkcí na orbitách a jejich využití v transformacích Fourierova typu. Práce se zabývá diskretizací zmíněných funkcí a transformací a jejich spojitým rozšířením. Následně jsou diskrétní transformace použity na konkrétních funkcích. V závěru je studována konvergence spojitých rozšíření.

Klíčová slova: funkce na orbitách, transformace Fourierova typu,
diskrétní transformace Fourierova typu, konvergence

Title: **Comparison of two-dimensional Fourier-like transforms**

Author: Bc. Jan Fuksa

Abstract:

This thesis summarizes basics of orbit functions and their use in Fourier-like transforms. The thesis deals with discretization of mentioned functions and transforms and their continuous extensions. We consequently use the discrete transforms on specific functions. Convergence of the continuous extensions is studied in the end.

Keywords: orbit functions, Fourier-like transforms,
discrete Fourier-like transforms, convergence

Obsah

1	Poloprosté Lieovy algebry, kořenové systémy, Weylovy grupy	7
1.1	Kořenové systémy	7
1.2	Weylova grupa	9
1.3	Cartanovy matice a Coxeter-Dynkinovy diagramy	9
1.4	Kořenová mříž, kokořeny	10
1.5	Váhy	12
1.6	Nejdelší kořeny	13
1.7	Afinní Weylova grupa	14
1.8	Fundamentální oblast afinní Weylovy grupy	16
2	Funkce na orbitách	18
2.1	Orbity Weylovy grupy	18
2.2	Orbity Weylových grup pro Lieovy algebry o hodnoti 2	19
2.3	C-funkce	20
2.4	Vlastnosti C-funkcí	21
2.5	C-funkce Lieových algeber hodnoti 2	23
2.5.1	Funkce na orbitách pro $A_1 \times A_1$	23
2.5.2	Funkce na orbitách pro C_2	24
2.5.3	Funkce na orbitách pro A_2	25
2.5.4	Funkce na orbitách pro G_2	26
2.6	S-funkce	27
2.7	Vlastnosti S-funkcí	27
2.8	S-funkce Lieových algeber hodnoti 2	29
2.8.1	Antisymetrické funkce na orbitách pro $A_1 \times A_1$	29
2.8.2	Antisymetrické funkce na orbitách pro C_2	29
2.8.3	Antisymetrické funkce na orbitách pro A_2	30
2.8.4	Antisymetrické funkce na orbitách pro G_2	31

3	Symetrické a antisymetrické transformace a rozvoje Fourierova typu	32
3.1	Rozvoj do řady C-funkcí	32
3.2	Zobecnění kosinové transformace	34
3.3	Rozvoj do řady S-funkcí	35
3.4	Zobecnění sinové transformace	36
4	Diskrétní symetrické a antisymetrické rozvoje Fourierova typu	37
4.1	Diskretizace dvoudimenzionálních rozvojų do C-funkcí	38
4.1.1	Diskretizace $A_1 \times A_1$	39
4.1.2	Diskretizace C_2	40
4.1.3	Diskretizace A_2	41
4.1.4	Diskretizace G_2	42
4.2	Diskretizace dvoudimenzionálních rozvojų do S-funkcí	43
4.2.1	Diskretizace $A_1 \times A_1$	44
4.2.2	Diskretizace C_2	44
4.2.3	Diskretizace A_2	45
4.2.4	Diskretizace G_2	45
5	Použití diskrétních rozvojų Fourierova typu	46
6	Konvergence spojitého rozšíření diskrétních rozvojų	58

Kapitola 1

Poloprosté Lieovy algebry, kořenové systémy, Weylovy grupy

Ústředními pojmy celé teorie poloprostých a prostých Lieových algeber jsou kořeny a kořenové systémy. Pomocí kořenových systémů se provádí klasifikace poloprostých a prostých Lieových algeber. Každá poloprostá Lieova algebra je direktním součtem prostých Lieových algeber. Každá prostá Lieova algebra náleží do jedné ze čtyř sérií $A_n (n \geq 1)$, $B_n (n \geq 3)$, $C_n (n \geq 2)$, $D_n (n \geq 4)$ s pěti výjimkami označovanými jako E_6 , E_7 , E_8 , F_4 a G_2 . Tím jsou prosté a konečně i poloprosté Lieovy algebry úplně klasifikovány.

1.1 Kořenové systémy

Zavedeme pojem kořenového systému obecně pro libovolný reálný euklidovský prostor E vybavený skalárním součinem $\langle \cdot | \cdot \rangle$.

Pro daný nenulový vektor $v \in E$, nechť r_v je zrcadlení podle nadplochy kolmé k tomuto vektoru. Čili r_v zobrazuje v na $-v$ a všechny vektory x z nadplochy, tj. $\langle x | v \rangle = 0$, zobrazuje na sebe. Explicitně

$$r_v(x) = x - \frac{2\langle x | v \rangle}{\langle v | v \rangle} v \quad \forall x \in E. \quad (1.1)$$

Poznamenejme, že r_v zachovává skalární součin.

Definice 1.1.1. Množinu $R \subset E$ nazveme *kořenový systém*, jestliže jsou splněny následující axiomy:

- (i) R je konečná, neobsahuje 0 a její lineární obal je celý E ,
- (ii) Jestliže $\alpha \in R$, potom jediné skalární násobky α , které náleží do R , jsou α a $-\alpha$,

(iii) Jestliže $\alpha \in R$, potom zrcadlení r_α permutuje prvky R ,

(iv) $\alpha, \beta \in R$, potom $\frac{2\langle\beta|\alpha\rangle}{\langle\alpha|\alpha\rangle} \in \mathbb{Z}$.

Prvky R nazveme *kořeny*.

Poznámka 1.1.2. Necht' $\mathfrak{g}$ je poloprostá Lieova algebra, potom kořenový systém určený Cartanovou podalgebrou $\mathfrak{h}$ splňuje všechny axiomy předchozí definice.

Lemma 1.1.3. Necht' R je kořenový systém. Necht' $\alpha, \beta \in R$, $\beta \neq \pm\alpha$. Potom

$$\frac{2\langle\alpha|\beta\rangle}{\langle\beta|\beta\rangle} \frac{2\langle\beta|\alpha\rangle}{\langle\alpha|\alpha\rangle} \in \{0, 1, 2, 3\}.$$

Nyní už známe všechny možné úhly, které mohou svírat dva kořeny, a všechny možné poměry délek kořenů.

Lemma 1.1.4. Necht' $\alpha, \beta \in R$.

- (i) Jestliže úhel svíraný kořeny α a β leží v intervalu $(\pi/2, \pi)$, potom $\alpha + \beta \in R$.
- (ii) Jestliže úhel svíraný kořeny α a β leží v intervalu $(0, \pi/2)$ a $\langle\beta|\beta\rangle \geq \langle\alpha|\alpha\rangle$, potom $\alpha - \beta \in R$.

Definice 1.1.5. Podmnožinu $B \subset R$ nazveme *bází kořenového systému* R , jestliže

- (i) B je báze vektorového prostoru E ,
- (ii) každé $\beta \in R$ lze napsat ve tvaru $\beta = \sum_{\alpha \in B} k_\alpha \alpha$, kde $k_\alpha \in \mathbb{Z}$. Navíc všechny nenulové koeficienty k_α mají stejné signum.

Prvky B nazveme *prosté kořeny*.

Řekneme, že kořen $\beta \in R$ je *pozitivní vzhledem k bázi* B , jestliže koeficienty dané (ii) jsou kladné. Podobně řekneme, že je *negativní vzhledem k bázi* B , jestliže koeficienty dané (ii) jsou záporné.

Množinu kladných kořenů budeme značit R^+ , množinu záporných kořenů R^- .

Poznámka 1.1.6. Bázi kořenového systému budeme též někdy nazývat *množinou prostých kořenů*.

Věta 1.1.7. Každý kořenový systém má bázi.

Z této věty společně s lemmatem 1.1.4 plyne, že úhly svírané dvěma prostými kořeny jsou tupé. Konkrétně mohou nastat případy $\pi/2$, $2\pi/3$, $3\pi/4$ a $5\pi/6$. Lemma 1.1.3 také jasně stanovuje poměry délek prostých kořenů. Navíc mohou nastat pouze dva případy:

- i) buď jsou všechny kořeny stejně dlouhé,
- ii) nebo kořeny nabývají pouze dvou různých délek.

V Lieově teorii často používaná konvence stanovuje pro delší kořeny $\langle \alpha | \alpha \rangle = 2$.

Poznámka 1.1.8. V této práci budeme používat následující normalizaci:

$$\begin{aligned} \frac{2}{\langle \alpha | \alpha \rangle} &= 1 && \text{pro kořeny z } A_n, \\ \frac{2}{\langle \alpha | \alpha \rangle} &= 1 && \text{pro dlouhé kořeny z } C_2, G_2, \\ \frac{2}{\langle \alpha | \alpha \rangle} &= 2 && \text{pro krátké kořeny z } C_2, \\ \frac{2}{\langle \alpha | \alpha \rangle} &= 3 && \text{pro krátké kořeny z } G_2. \end{aligned}$$

1.2 Weylova grupa

Definice 1.2.1. Necht' E je reálný euklidovský prostor, necht' R je kořenový systém. Potom množinu

$$W(R) = \{r_\alpha | \alpha \in R\},$$

kde r_α je zobrazení (1.1), nazveme *Weylova grupa*.

Poznámka 1.2.2.

- i) Weylova grupa je konečná. Řády Weylových grup pro prosté Lieovy algebry jsou velice dobře známy.
- ii) Množina generátorů je tvořena reflexemi odpovídajícími prostým kořenům.

Zobrazení r_α pro $\alpha \in R$ je reflexe podle nadplochy v E kolmé k α . Tyto nadplochy rozdělují E na $|W|$ souvislých množin, kde $|W|$ je řád Weylovy grupy. Tyto množiny nazýváme *Weylovy komory*. Systém Weylových komor je permutován Weylovou grupou. Množinu

$$D^+ = \{x \in E \mid \langle x | \alpha \rangle \geq 0, \alpha \in B\}$$

nazveme *dominantní Weylova komora*.

1.3 Cartanovy matice a Coxeter-Dynkinovy diagramy

Na začátek poznamenejme, že kořenový systém může mít více bází. Všechny tyto báze jsou však ekvivalentní ve smyslu následující věty.

Věta 1.3.1. Necht' R je kořenový systém, necht' B a B' jsou báze R . Potom existuje $g \in W(R)$ takový, že $B' = \{g(\alpha) | \alpha \in R\}$.

Nyní můžeme s klidným svědomím zavést tzv. Cartanovu matici pro daný kořenový systém.

Definice 1.3.2. Necht' $B = \{\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n\}$ je báze kořenového systému R . Potom matici $C \in \mathbb{Z}^{n,n}$, kde

$$C_{ij} = \frac{2\langle \alpha_i | \alpha_j \rangle}{\langle \alpha_j | \alpha_j \rangle},$$

nazveme *Cartanova matice*.

Jiný, avšak Cartanově matici ekvivalentní způsob popisu kořenových systémů je tzv. *Coxeter-Dynkinův diagram*. Je to graf, jehož vrcholy jsou tvořeny množinou prostých kořenů $B = \{\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n\}$ a které jsou spolu po dvou spojeny d_{ij} čarami, kde

$$d_{ij} = \frac{2\langle \alpha_i | \alpha_j \rangle}{\langle \alpha_j | \alpha_j \rangle} \frac{2\langle \alpha_j | \alpha_i \rangle}{\langle \alpha_i | \alpha_i \rangle} \in \{0, 1, 2, 3\}.$$

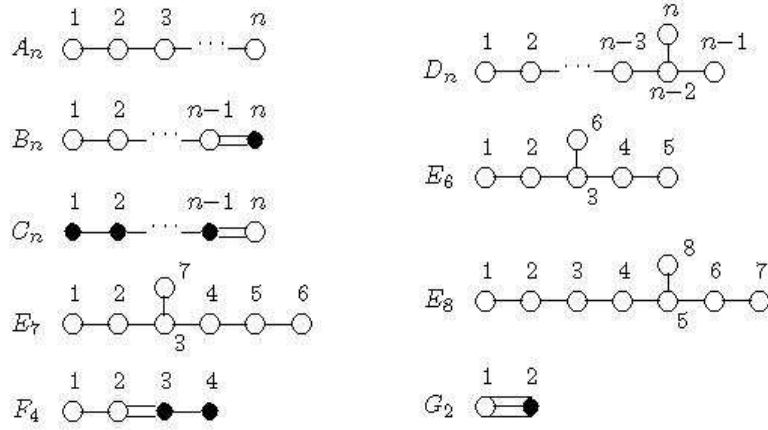
Jestliže $d_{ij} > 1$, tj. α_i a α_j mají různou délku, potom se od sebe nějakým označením odliší delší a kratší kořeny. (Často se rozdílná délka značí šipkou směřující od delšího kořene ke kratšímu. V této práci však budeme značit kratší kořeny černě a delší kořeny bíle.)

Protože kořenové systémy jsou úplně popsány pomocí svých Coxeter-Dynkinových diagramů a protože pomocí kořenových systémů jsou prosté Lieovy algebry úplně klasifikovány, lze říci, že prosté Lieovy algebry jsou úplně klasifikovány pomocí přípustných Coxeter-Dynkinových diagramů. Jak už jsme napsali na počátku této kapitoly, každá prostá Lieova algebra náleží do jedné ze čtyř sérií $A_n (n \geq 1)$, $B_n (n \geq 3)$, $C_n (n \geq 2)$, $D_n (n \geq 4)$, nebo mezi pěti mimořádných algeber označovaných jako E_6 , E_7 , E_8 , F_4 a G_2 . Coxeter-Dynkinovy diagramy všech prostých Lieových algeber jsou uvedeny na obrázku 1.1.

1.4 Kořenová mříž, kokořeny

Kořeny kořenového systému jsou lineárními kombinacemi prostých kořenů s celočíselnými koeficienty. Navíc platí, že neexistuje kořen, který by měl současně jak kladné tak záporné koeficienty.

Jako užitečný nástroj pro další práci se zavádí tzv. kořenová mříž.



Obrázek 1.1: Coxeter-Dynkinovy diagramy prostých Lieových algeber.

Definice 1.4.1. Množinu

$$Q = \left\{ \sum_{i=1}^n a_i \alpha_i \mid a_i \in \mathbb{Z}, \alpha_i \in B \right\}$$

nazveme *kořenová mříž*. Podmnožinu $Q^+ \subset Q$, kde

$$Q^+ = \left\{ \sum_{i=1}^n a_i \alpha_i \mid a_i \in \mathbb{Z}^{\geq 0}, \alpha_i \in B \right\},$$

nazveme *kladná kořenová mříž*.

Poznámka 1.4.2. Množinou $\mathbb{Z}^{\geq 0}$ je myšlena množina všech přirozených čísel a nuly, tj. $\mathbb{Z}^{\geq 0} = \{0, 1, 2, 3, \dots\}$. Toto značení bude dále používáno v průběhu celé práce.

Poznámka 1.4.3. Systém kořenů R je potom podmnožinou kořenové mříže Q . R^+ je podmnožinou Q^+ .

Poznámka 1.4.4. Ke každému kořenu $\alpha \in R$ zavádíme tzv. *kokořen* $\hat{\alpha}$ vztahem

$$\hat{\alpha} = \frac{2\alpha}{\langle \alpha | \alpha \rangle}.$$

Platí, že $\hat{\hat{\alpha}} = \alpha$. Podobně jako pro kořeny zavedeme *kokořenovou mříž*

$$\hat{Q} = \left\{ \sum_{i=1}^n a_i \hat{\alpha}_i \mid a_i \in \mathbb{Z}, \alpha_i \in B \right\}$$

a kladnou kokořenovou mříž

$$\hat{Q}^+ = \left\{ \sum_{i=1}^n a_i \hat{\alpha}_i \mid a_i \in \mathbb{Z}^{\geq 0}, \alpha_i \in B \right\}.$$

1.5 Váhy

Ústředním pojmem teorie reprezentací poloprostých Lieových algeber jsou váhy.

Definice 1.5.1. Bud' $\mathfrak{g}$ poloprostá Lieova algebra, bud' $\mathfrak{h}$ její Cartanova podalgebra, bud' V reprezentace $\mathfrak{g}$, potom lineární funkcionál $\lambda \in \mathfrak{h}^\#$, pro který existuje nenulový podprostor $V_\lambda \subset V$, kde

$$V_\lambda = \{v \in V \mid \forall h \in \mathfrak{h}, h \cdot v = \lambda(h)v\},$$

nazveme *váha reprezentace* V . Množinu všech vah budeme značit Ψ .

Poznámka 1.5.2.

- i) Kořen je nenulová váha reprezentace ad .
- ii) Bud' λ váha reprezentace V , α kořen, potom platí, že

$$\frac{2\langle \lambda | \alpha \rangle}{\langle \alpha | \alpha \rangle} \in \mathbb{Z}.$$

- iii) Množina všech vah Ψ je invariantní vzhledem k akci Weylovy grupy.

Definice 1.5.3. Váha ω reprezentace V je nejdelší, jestliže pro všechna $\alpha_i \in B$ platí, že $\omega + \alpha_i$ není vahou.

Poznámka 1.5.4. Množina všech vah obsahuje jednoznačnou nejdelší váhu ω . Všechny další váhy jsou tvaru

$$\lambda = \omega - \sum_i a_i \alpha_i, \quad a_i \in \mathbb{Z}^{\geq 0}.$$

Definice 1.5.5. Bud' $\mathfrak{g}$ poloprostá Lieova algebra, bud' $B = \{\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n\}$ báze kořenového systému $\mathfrak{g}$, potom lineární funkcionály $\omega_1, \omega_2, \dots, \omega_n$ nazveme *fundamentální váhy*, jestliže platí

$$\frac{2\langle \omega_i | \alpha_j \rangle}{\langle \alpha_j | \alpha_j \rangle} = \delta_{ij} \quad \forall i, j = 1, 2, \dots, n.$$

Poznámka 1.5.6.

- i) Množina $\Pi = \{\omega_1, \omega_2, \dots, \omega_n\}$ tvoří obecně neortogonální bázi $\mathfrak{h}^\#$.
- ii) Podobně jako pro kořeny zavedeme *váhovou mříž*

$$P = \left\{ \sum_{i=1}^n a_i \omega_i \mid a_i \in \mathbb{Z}, \omega_i \in \Pi \right\}$$

a *kladnou váhovou mříž*

$$P^+ = \left\{ \sum_{i=1}^n a_i \omega_i \mid a_i \in \mathbb{Z}^{\geq 0}, \omega_i \in \Pi \right\}.$$

- iii) Platí, že $Q \subset P$.

Mezi α -bází a ω -bází existují transformační vztahy určené Cartanovou maticí

$$\alpha_j = \sum_{k=1}^n C_{jk} \omega_k, \quad \omega_j = \sum_{k=1}^n (C^{-1})_{jk} \alpha_k.$$

Poznamenejme ještě vztah pro výpočet skalárního součinu dvou vektorů pomocí jejich složek v ω -bázi.

$$\langle x | y \rangle = \frac{1}{2} \sum_{j,k=1}^n x_j y_k (C^{-1})_{jk} \langle \alpha_k | \alpha_k \rangle = x C^{-1} D y^T = x S y^T,$$

kde $D = \text{diag}(\frac{1}{2}\langle \alpha_1 | \alpha_1 \rangle, \frac{1}{2}\langle \alpha_2 | \alpha_2 \rangle, \dots, \frac{1}{2}\langle \alpha_n | \alpha_n \rangle)$ a $S = C^{-1} D$.

1.6 Nejdelší kořeny

Protože kořeny jsou váhy reprezentace ad , existuje jednoznačný nejdelší kořen ξ . Pro naše potřeby stačí uvést nejdelší kořeny jenom pro některé algebry.

$$\begin{aligned} A_n &: \xi = \alpha_1 + \alpha_2 + \dots + \alpha_n, \\ C_n &: \xi = 2\alpha_1 + 2\alpha_2 + \dots + 2\alpha_{n-1} + \alpha_n, \\ G_2 &: \xi = 2\alpha_1 + 3\alpha_2. \end{aligned}$$

Poznámka 1.6.1. Pro nejdelší kořeny platí, že $\hat{\xi} = \xi$.

1.7 Afinní Weylova grupa

Protože se v této práci chceme dopracovat k funkcím na orbitách, je vhodné rozšířit Weylovu grupu, která je grupou symetrií těchto funkcí, nicméně nepopisuje všechny jejich symetrie. Proto zavedeme tzv. afinní Weylovu grupu, která popisuje všechny symetrie funkcí na orbitách.

Weylova grupa je generována reflexemi r_{α_i} , kde $\alpha_i, i = 1, \dots, n$ jsou prosté kořeny kořenového systému R v n -dimenzionálním euklidovském prostoru E . Pro rozšíření Weylové grupy na afinní Weylovu grupu využijeme nejdelších kořenů uvedených v minulé podkapitole.

Necht' ξ je nejdelší kořen kořenového systému R , potom symbolem r_ξ označíme zrcadlení podle nadroviny $X \subset E$ kolmé ke ξ , tj.

$$r_\xi x = x - \frac{2\langle x|\xi\rangle}{\langle \xi|\xi\rangle} \xi.$$

Symbolem R_ξ označíme zrcadlení podle nadplochy $X + \xi/2$, rovnoběžné s X a posunuté do bodu $\xi/2$, tj.

$$R_\xi x = r_\xi x + \xi.$$

Poznámka 1.7.1.

- i) $R_\xi 0 = \xi$.
- ii) Zobrazení R_ξ nepatří do Weylové grupy kvůli bodu i).
- iii) $(R_\xi r_\xi)^{-1} x = x - \xi$.
- iv) Protože pro nejdelší kořen platí $\xi = \hat{\xi}$, můžeme ve všech uvedených vztazích nahradit ξ za $\hat{\xi}$. V následujícím tak budeme podle potřeby činit.

Definice 1.7.2. Grupu generovanou zobrazeními $R_\xi, r_{\alpha_1}, r_{\alpha_2}, \dots, r_{\alpha_n}$ nazveme *afinní Weylova grupa*. Budeme ji označovat W^{aff} .

Lemma 1.7.3. $(R_\xi r_\xi)^k x = x + k\xi$ pro $k \in \mathbb{Z}$.

Důkaz. Důkaz provedeme indukcí. Platí, že

$$R_\xi r_\xi x = \xi + r_\xi r_\xi x = x + \xi.$$

Pro indukční krok předpokládejme, že pro $k > 0$ platí

$$(R_\xi r_\xi)^k x = x + k\xi.$$

Potom

$$(R_\xi r_\xi)^{k+1}x = (R_\xi r_\xi)(R_\xi r_\xi)^k x = (R_\xi r_\xi)(x + k\xi) = (x + k\xi) + \xi = x + (k+1)\xi.$$

Podle poznámky 1.7.1iii) víme, že platí

$$(R_\xi r_\xi)^{-1}x = x - \xi.$$

Opět pro indukční krok předpokládejme, že pro nějaké $k > 0$ platí

$$(R_\xi r_\xi)^{-k}x = x - k\xi.$$

Potom

$$\begin{aligned} (R_\xi r_\xi)^{-(k+1)}x &= (R_\xi r_\xi)^{-1}(R_\xi r_\xi)^{-k}x = (R_\xi r_\xi)^{-1}(x - k\xi) = \\ &= (x - k\xi) - \xi = x - (k+1)\xi. \end{aligned}$$

□

Důsledek 1.7.4. Afinní Weylova grupa je nekonečná.

Můžeme zavést zobrazení $R_{N\xi}$ vztahem

$$R_{N\xi}x = N\xi + r_\xi x. \quad (1.2)$$

Víme, že $R_\xi 0 = \xi$. Dále, protože prvky Weylovy grupy $w \in W$ zachovávají skalární součin a permutují množinu kořenů, platí pro

$$\xi_w \equiv w\xi = wR_\xi 0,$$

že má stejnou délku jako ξ . Čili Weylova grupa permutuje vždy zvlášť dlouhé a zvlášť krátké kořeny. Potom wR_ξ je reflexe vzhledem k nadploše kolmé k vektoru ξ_w a posunuté do bodu $\xi_w/2$. Opět platí

$$((wR_\xi)r_\xi)^k x = x + k\xi_w \quad \text{pro } k \in \mathbb{Z}.$$

Z uvedeného plyne, že množina $W^{\text{aff}} \cdot 0$ odpovídá podmnožině $\hat{Q}_l \subset \hat{Q}$ generované všemi dlouhými kořeny. Navíc platí, že $\hat{\alpha}$, kde α je krátký kořen, je kombinací dlouhých kořenů s celočíselnými koeficienty. Tj. $\hat{Q} = \hat{Q}_l$. To ale neznamená nic jiného než, že $W^{\text{aff}} \cdot 0 = \hat{Q}$.

1.8 Fundamentální oblast afinní Weylovy grupy

Definice 1.8.1. Bud' E n -dimenzionální euklidovský prostor. Souvislou a jednoduše souvislou množinu $F \subset E$ nazveme *fundamentální oblast afinní Weylovy grupy*, jestliže neobsahuje ekvivalentní od sebe různé body vzhledem k akci W^{aff} a její uzávěr obsahuje alespoň jeden bod z každé orbity W^{aff} .

Poznámka 1.8.2.

i) Vnitřek dominantní Weylovy komory je fundamentální oblastí Weylovy grupy W .

ii) Dominantní Weylovou komorou D^+ rozumíme množinu

$$\left\{ x = \sum_{i=1}^n a_i \omega_i \mid a_i \geq 0, \omega_i \in \Pi \right\},$$

kde Π je množina fundamentálních vah.

Protože W je podgrupou W^{aff} , bude fundamentální oblast afinní Weylovy grupy F podmnožinou fundamentální oblasti Weylovy grupy. Čili F bude obsahovat body $x = a_1 \omega_1 + \dots + a_n \omega_n$, kde

$$a_i = \langle x | \hat{\alpha}_i \rangle > 0 \quad \forall i = 1, 2, \dots, n.$$

Dalším omezením na body F bude nadplocha určená reflexí $R_\xi \in W^{\text{aff}}$, tj. nadplocha $X + \xi/2$, viz podkapitola 1.7. Tato nadplocha je určena vztahem $R_\xi x = x$. Tj.

$$x - \frac{2\langle x | \xi \rangle}{\langle \xi | \xi \rangle} \xi + \xi = x,$$

kde $\langle \xi | \xi \rangle = 2$. Po úpravě získáme rovnici nadplochy

$$1 = \langle x | \xi \rangle = \sum_{k=1}^n a_k q_k, \tag{1.3}$$

kde

$$x = \sum_{k=1}^n a_k \omega_k, \quad \xi = \sum_{k=1}^n q_k \hat{\alpha}_k.$$

Fundamentální oblast je potom taková podmnožina dominantní Weylovy komory pro jejíž body x platí $\langle x | \xi \rangle < 1$. Rovnice (1.3) ukazuje, že nadplocha $X + \xi/2$ protíná přímky určené vahami ω_k v bodech ω_k/q_k .

Věta 1.8.3. Fundamentální oblast afinní Weylovy grupy je vnitřek simplexu, který je vymezen vrcholy

$$0, \frac{\omega_1}{q_1}, \dots, \frac{\omega_n}{q_n}.$$

Poznámka 1.8.4. Pro dvoudimenzionální prosté Lieovy algebry jsou fundamentální oblasti jejich afinních Weylových grup vymezeny následovně:

$$\begin{aligned} A_2 & : \{0, \omega_1, \omega_2\}, \\ C_2 & : \{0, \omega_1, \omega_2\}, \\ G_2 & : \{0, \frac{\omega_1}{2}, \omega_2\}. \end{aligned}$$

Kapitola 2

Funkce na orbitách

Funkce na orbitách jsou zavedeny pomocí orbit příslušných Weylových grup podle nichž také nesou své jméno. Nás budou zajímat funkce na orbitách pouze pro dvojrozměrné Lieovy algebry, tj. pro $A_1 \times A_1, A_2, B_2, G_2$.

2.1 Orbity Weylovy grupy

Jak už jsme viděli v podkapitole 1.2, akce Weylovy grupy na n -dimenzionálním euklidovském prostoru E permutuje Weylovy komory, což jsou souvislé a jednoduše souvislé množiny takové, že neobsahují dva od sebe různé ekvivalentní body vzhledem k akci Weylovy grupy na E .

Poznámka 2.1.1.

- i) Každému bodu $y \in E$ lze přiřadit orbitu Weylovy grupy $O(y)$, kde

$$O(y) = \{x \in E \mid \exists w \in W, x = w \cdot y\}.$$

Základní vlastností orbity nějaké grupy je, že orbita je plně určena jedním bodem který obsahuje. Tj. jestliže existuje $w \in W$ takové, že pro nějaké $x, y \in E$ platí $x = w \cdot y$, potom $O(x) = O(y)$.

- ii) Řád orbity je určen řádem dané grupy a platí, že řád orbity dělí řád grupy. Dva extrémní případy, které tedy pro orbity Weylovy grupy mohou nastat, jsou

$$|O(0)| = 1, \quad |O(y)| = |W|,$$

kde y je vnitřním bodem nějaké Weylovy komory.

- iii) Jestliže W_y označuje stabilizátor bodu $y \in W$ vzhledem k akci Weylovy grupy

W , potom platí, že

$$|O(y)| = \frac{|W|}{|W_y|}.$$

Každá Weylova komora obsahuje pouze jeden bod z dané orbity. Užitečnou konvencí, kterou budeme v této práci používat, bude, že orbity Weylovy grupy budeme značit pomocí prvku orbity, který leží v dominantní Weylově komoře D^+ . Tj. pro $O(y)$ platí, že $y \in D^+$.

2.2 Orbity Weylových grup pro Lieovy algebry o hodnotě 2

Obecně pro každou Weylovu grupu a pro každý euklidovský prostor platí, že $O(0) = \{0\}$. V dalším budeme tedy uvádět orbity pouze pro nenulové body z E , tj. pro takové body pro jejichž souřadnice (a, b) v ω -bázi platí $a \neq 0$ nebo $b \neq 0$.

$$A_1 : O(a) = \{ (a), (-a) \}.$$

$$A_1 \times A_1 : O(a, 0) = \{ (a, 0), (-a, 0) \},$$

$$O(0, b) = \{ (0, b), (0, -b) \},$$

$$O(a, b) = \{ (a, b), (-a, b), (a, -b), (-a, -b) \}.$$

$$A_2 : O(a, 0) = \{ (a, 0), (-a, a), (0, -a) \},$$

$$O(0, b) = \{ (0, b), (b, -b), (-b, 0) \},$$

$$O(a, b) = \{ (a, b), (-a, a+b), (a+b, -b), (-b, -a), (-a-b, a), (b, -a-b) \}.$$

Algebry C_2 a G_2 mají různé dlouhé kořeny. První souřadnice bude proto v případě C_2 odpovídat kratšímu kořenu a v případě G_2 delšímu.

$$C_2 : O(a, 0) = \{ \pm(a, 0), \pm(-a, a) \},$$

$$O(0, b) = \{ \pm(0, b), \pm(2b, -b) \},$$

$$O(a, b) = \{ \pm(a, b), \pm(-a, a+b), \pm(a+2b, -b), \pm(a+2b, -a-b) \}.$$

$$G_2 : O(a, 0) = \{ \pm(a, 0), \pm(-a, 3a), \pm(2a, -3a) \},$$

$$O(0, b) = \{ \pm(0, b), \pm(b, -b), \pm(-b, 2b) \},$$

$$O(a, b) = \{ \pm(a, b), \pm(-a, 3a+b), \pm(a+b, -b), \pm(2a+b, -3a-b), \pm(-a-b, 3a+2b), \pm(-2a-b, 3a+2b) \}.$$

Protože budeme zavádět také antisymetrické funkce na orbitách, které budou antisymetrické vzhledem k akci Weylové grupy, je vhodné zavést následující pomocnou

konstrukci. Pro striktně dominantní prvek $y \in D^+$ obsahuje orbita $O(y)$ body $w \cdot y$, kde $w \in W$, potom každému takovému prvku orbity přiřadíme číslo $\det w$, které samozřejmě nabývá pouze dvou hodnot a to ± 1 . Takto vybavenou orbitu nazveme *signovaná orbita Weylovy grupy* a budeme ji značit $O^\pm(y)$. Její prvky potom budeme značit $(w \cdot y)^{\det w}$.

Poznamenejme ještě, že pro striktně dominantní prvek $y \in D^+$ je počet prvků v orbitě roven řádu Weylovy grupy. Pro dominantní nikoli však striktně dominantní prvek $x \in D^+$, tj. takový, který leží na stěně dominantní Weylovy komory, není možné signovanou orbitu zavést. Určitě totiž existuje nějaké $w \in W$ takové, že $w \cdot x = x$ a současně $\det w = -1$, navíc ale platí $1 \cdot x = x$, kde 1 je jednotkový prvek W a jeho determinant je tedy 1 . Z uvedeného plyne, že takovému prvku $x \in D^+$ bychom současně museli přiřadit $+1$ i -1 .

Uvádíme signované orbity Weylovy grupy pro dvojrozměrné Lieovy algebry:

$$\begin{aligned}
A_1 & : O^\pm(a) = \{ (a)^+, (-a)^- \}. \\
A_1 \times A_1 & : O^\pm(a, b) = \{ (a, b)^+, (-a, b)^-, (a, -b)^-, (-a, -b)^+ \}. \\
A_2 & : O^\pm(a, b) = \{ (a, b)^+, (-a, a+b)^-, (a+b, -b)^-, \\
& \quad (-b, -a)^-, (-a-b, a)^+, (b, -a-b)^+ \}. \\
C_2 & : O^\pm(a, b) = \{ \pm(a, b)^+, \pm(-a, a+b)^-, \pm(a+2b, -b)^-, \\
& \quad \pm(a+2b, -a-b)^+ \}. \\
G_2 & : O^\pm(a, b) = \{ \pm(a, b)^+, \pm(-a, 3a+b)^-, \pm(a+b, -b)^-, \\
& \quad \pm(2a+b, -3a-b)^+, \pm(-a-b, 3a+2b)^+, \\
& \quad \pm(-2a-b, 3a+2b)^- \}.
\end{aligned}$$

2.3 C-funkce

Definice 2.3.1. Necht' $\lambda \in E$ je prvek dominantní Weylovy komory. Potom komplexní funkci na E

$$C_\lambda(x) = \sum_{\mu \in O(\lambda)} e^{2\pi i \langle \mu | x \rangle}, \quad x \in E, \quad (2.1)$$

kde $O(\lambda)$ je W -orbitou prvku λ , nazveme *funkce na orbitě* nebo též *C-funkce*.

Poznámka 2.3.2.

- i) Počet prvků v sumě (2.1) je $|O(\lambda)| = \frac{|W|}{|W_\lambda|}$, kde W_λ je stabilizátor λ vzhledem k akci Weylovy grupy W .

ii) Funkce na orbitách lze z důvodu normalizace zavést také způsobem

$$\Phi_\lambda(x) = |W_\lambda| \cdot \sum_{\mu \in O(\lambda)} e^{2\pi i \langle \mu | x \rangle}.$$

iii) Takto normalizované *C-funkce* splňují pro dominantní λ, λ' vztah

$$\Phi_\lambda(0) = \Phi_{\lambda'}(0) = |W|.$$

Poznámka 2.3.3. V této práci nás nebudou zajímat obecně všechny C-funkce, nýbrž jenom ty, pro které platí, že $\lambda \in P^+$, protože takovéto funkce budou určovat symetrizovanou resp. antisymetrizovanou Fourierovu transformaci, o kterou se v dalším budeme zajímat.

2.4 Vlastnosti C-funkcí

C-funkce splňují několik důležitých symetrií.

i) Symetrie vůči Weylově grupě, tj.

$$C_\lambda(x) = C_\lambda(wx), \quad w \in W, x \in E.$$

ii) Symetrie vůči generátoru afinní Weylové grupy R_ξ , tj.

$$C_\lambda(x) = C_\lambda(R_\xi x) \quad \text{pro } \lambda \in P^+.$$

iii) Pro $\lambda \in P^+$ jsou C-funkce symetrické vůči akci afinní Weylové grupy.

Poznámka 2.4.1. Díky symetrii C-funkcí C_λ , $\lambda \in P^+$, vůči afinní Weylově grupě W^{aff} stačí uvažovat C-funkce pouze na fundamentální oblasti $F(W^{\text{aff}})$. Hodnoty v ostatních bodech E lze snadno najít ze symetrií, případně limitním přechodem.

Další důležitou vlastností C-funkcí je jejich hladkost, která plyne přímo z definice.

Avšak nejdůležitější vlastností, kterou C-funkce splňují, je relace ortogonalit na fundamentální oblasti.

Věta 2.4.2. Necht' $\lambda, \lambda' \in P^+$, potom platí

$$\frac{1}{|F|} \int_F C_\lambda \overline{C_{\lambda'}} dF = |O(\lambda)| \delta_{\lambda\lambda'},$$

kde $|F|$ značí míru fundamentální oblasti F a $|O(\lambda)|$ značí počet prvků orbity bodu λ .

Věta plyne z ortogonalit y exponenciálních funkcí a z faktu, že nemůže nastat situace, že by dvě od sebe různé C-funkce obsahovaly stejnou váhu.

Poznamenejme, že tato vlastnost C-funkcí nám umožňuje zavést symetrizovanou Fourierovu transformaci.

Příklad 2.4.3. C-funkce pro A_1 .

V případě A_1 existuje pouze jeden prostý kořen α , pro který platí $\langle \alpha | \alpha \rangle = 2$. Dále platí $\langle \alpha | \omega \rangle = 1$, tj. $\omega = \alpha/2$. $P = \{m\omega | m \in \mathbb{Z}\}$. Weylova grupa obsahuje pouze 1 a r_α . Pro daný prvek $\lambda = m\omega \in P$ orbita Weylov y grupy obsahuje

$$O(\lambda) \equiv O(m) = \begin{cases} \{0\}, & \text{jestliže } m = 0, \\ \{m\omega, -m\omega\}, & \text{jestliže } 0 \neq m \in \mathbb{Z}. \end{cases}$$

Jestliže položíme $z = \theta\omega$, $z \in E = \mathbb{R}$, potom C-funkce jsou definovány jako

$$C_m(\theta) \stackrel{\text{def}}{=} \sum_{\mu \in O(m)} e^{2\pi i \langle \mu | z \rangle} = \begin{cases} 1, & \text{jestliže } m = 0, \\ 2 \cos \pi m \theta, & \text{jestliže } 0 \neq m \in \mathbb{Z}. \end{cases}$$

Podle poznámky 2.3.2 lze samozřejmě zavést C-funkce způsobem

$$\Phi_m(\theta) = 2 \cos \pi m \theta.$$

Fundamentální oblast pro A_1 je vnitřek simplexu ohraničeného body $\{0, \omega\}$. Odtud platí, že $x \in F(A_1)$ právě, když $0 < \theta < 1$.

Podle věty 2.4.2 platí, že

$$\int_0^1 C_m(\theta) C_{m'}(\theta) d\theta = \begin{cases} 0, & \text{jestliže } m \neq m', \\ 1, & \text{jestliže } m = m' = 0, \\ 2, & \text{jestliže } m = m' > 0. \end{cases}$$

Jako jednoduchý důsledek ortogonalit y platí, že

$$\int_0^1 C_m(\theta) d\theta = 0.$$

2.5 C-funkce Lieových algeber hodnosti 2

2.5.1 Funkce na orbitách pro $A_1 \times A_1$

Pro kořeny α_1 a α_2 platí následující vztah $\langle \alpha_i | \alpha_j \rangle = 2\delta_{ij}$. Tj. Cartanova matice má tvar

$$C = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}.$$

Váhy jsou tedy ke kořenům ve vztahu $\alpha_i = 2\omega_i$.

Jestliže položíme $\lambda = a\omega_1 + b\omega_2$ a $z = x\omega_1 + y\omega_2$, $z \in E = \mathbb{R}^2$, dostaneme pro C-funkce na $A_1 \times A_1$, že jsou jednoduše součinem dvou C-funkcí na A_1 , viz příklad 2.4.3, tj.

$$C_{(a,b)}(x, y) = C_a(x)C_b(y).$$

Konkrétně tedy

$$\begin{aligned} C_{(0,0)}(x, y) &= 1, \\ C_{(a,0)}(x, y) &= 2 \cos(\pi ax), \\ C_{(0,b)}(x, y) &= 2 \cos(\pi by), \\ C_{(a,b)}(x, y) &= 4 \cos(\pi ax) \cos(\pi by). \end{aligned}$$

Podle poznámky 2.3.2 můžeme zavést C-funkce kompaktnějším způsobem

$$\Phi_{(a,b)}(x, y) = 4 \cos(\pi ax) \cos(\pi by).$$

Fundamentální oblast je

$$F(A_1 \times A_1) = \{x\omega_1 + y\omega_2 | 0 < x, y < 1\}.$$

Potom podle věty o ortogonalitě C-funkcí platí

$$\begin{aligned} \int_F C_{(a,b)}(x, y) C_{(c,d)}(x, y) dF &= \int_0^1 dx \int_0^1 dy C_{(a,b)}(x, y) C_{(c,d)}(x, y) = \\ &= \begin{cases} 0, & \text{jestliže } a \neq c \text{ nebo } b \neq d, \\ 1, & \text{jestliže } a = b = c = d = 0, \\ 2, & \text{jestliže } a = c > 0 \text{ a } b = d = 0, \\ & \text{nebo } a = c = 0 \text{ a } b = d > 0, \\ 4, & \text{jestliže } a = c > 0 \text{ a } b = d > 0. \end{cases} \end{aligned}$$

2.5.2 Funkce na orbitách pro C_2

Pro prosté kořeny C_2 platí

$$\langle \alpha_1 | \alpha_2 \rangle = -1, \quad \langle \alpha_1 | \alpha_1 \rangle = 1, \quad \langle \alpha_2 | \alpha_2 \rangle = 2.$$

Cartanova a inverzní Cartanova matice nabývají

$$C = \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ -2 & 2 \end{pmatrix}, \quad C^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & \frac{1}{2} \\ 1 & 1 \end{pmatrix}.$$

Vztahy mezi kořeny a vahami jsou určeny Cartanovou maticí.

$$\alpha_1 = 2\omega_1 - \omega_2, \quad \omega_1 = \alpha_1 + \frac{1}{2}\alpha_2, \quad \hat{\alpha}_1 = 2\alpha_1, \quad \hat{\omega}_1 = \hat{\alpha}_1 + \hat{\alpha}_2.$$

$$\alpha_2 = -2\omega_1 + 2\omega_2, \quad \omega_2 = \alpha_1 + \alpha_2, \quad \hat{\alpha}_2 = \alpha_2, \quad \hat{\omega}_2 = \frac{1}{2}\hat{\alpha}_1 + \hat{\alpha}_2.$$

Orbity Weylovky grupy jsou vypsány v podkapitole 2.2. Necht' $\lambda \in P^+$, $\lambda = a\omega_1 + b\omega_2$, $z \in E = \mathbb{R}^2$, $z = x\hat{\omega}_1 + y\hat{\omega}_2$, potom C-funkce nabývají

$$\begin{aligned} C_{(0,0)}(x, y) &= 1, \\ C_{(a,0)}(x, y) &= 2 \cos(\pi a y) + 2 \cos(\pi a (2x + y)), \\ C_{(0,b)}(x, y) &= 2 \cos(2\pi b x) + 2 \cos(2\pi b (x + y)), \\ C_{(a,b)}(x, y) &= 2 \cos(\pi(2bx + (a + 2b)y)) + 2 \cos(\pi((2a + 2b)x + (a + 2b)y)) + \\ &\quad + 2 \cos(\pi(ay + (2a + 2b)x)) + 2 \cos(\pi(2bx - ay)). \end{aligned}$$

Nebo v kompaktnějším tvaru

$$\begin{aligned} \Phi_{(a,b)}(x, y) &= 2 \cos(\pi(2bx + (a + 2b)y)) + 2 \cos(\pi((2a + 2b)x + (a + 2b)y)) + \\ &\quad + 2 \cos(\pi(ay + (2a + 2b)x)) + 2 \cos(\pi(2bx - ay)). \end{aligned}$$

Fundamentální oblast je

$$F(C_2) = \{x\hat{\omega}_1 + y\hat{\omega}_2 | x, y > 0, 2x + y < 1\}.$$

Relace ortogonalitý nabývá podoby

$$\begin{aligned} \int_F C_{(a,b)}(x,y) C_{(c,d)}(x,y) dF &= \int_0^{\frac{1}{2}} dx \int_0^{1-2x} dy C_{(a,b)}(x,y) C_{(c,d)}(x,y) = \\ &= \begin{cases} 0, & \text{jestliže } a \neq c \text{ nebo } b \neq d, \\ \frac{1}{4}, & \text{jestliže } a = b = c = d = 0, \\ 1, & \text{jestliže } a = c > 0 \text{ a } b = d = 0, \\ & \text{nebo } a = c = 0 \text{ a } b = d > 0, \\ 2 & \text{jestliže } a = c > 0 \text{ a } b = d > 0. \end{cases} \end{aligned}$$

Speciálně platí

$$\int_F C_{(a,b)}(x,y) dF = 0 \quad \text{pro } (a,b) \neq (0,0).$$

2.5.3 Funkce na orbitách pro A_2

Cartanova a inverzní Cartanova matice splňují

$$C = \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ -1 & 2 \end{pmatrix}, \quad C^{-1} = \frac{1}{3} \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}.$$

Necht' $\lambda \in P^+$, $\lambda = a\omega_1 + b\omega_2$, $z \in E = \mathbb{R}^2$, $z = x\omega_1 + y\omega_2$. Pro A_2 jsou C-funkce obecně komplexní:

$$\begin{aligned} C_{(0,0)}(x,y) &= 1, \\ C_{(a,0)}(x,y) &= e^{(2\pi i/3)(2x+y)a} + e^{(2\pi i/3)(y-x)a} + e^{-(2\pi i/3)(x+2y)a}, \\ C_{(0,b)}(x,y) &= e^{-(2\pi i/3)(2x+y)b} + e^{(2\pi i/3)(x-y)b} + e^{(2\pi i/3)(x+2y)b}, \\ C_{(a,b)}(x,y) &= e^{(2\pi i/3)((2a+b)x+(a+2b)y)} + e^{(2\pi i/3)((b-a)x+(a+2b)y)} + \\ &+ e^{(2\pi i/3)((2a+b)x+(a-b)y)} + e^{-(2\pi i/3)((a-b)x+(2a+b)y)} + \\ &+ e^{-(2\pi i/3)((a+2b)x+(b-a)y)} + e^{-(2\pi i/3)((a+2b)x+(2a+b)y)}. \end{aligned}$$

V kompaktnějším tvaru pro libovolné $a, b \in \mathbb{Z}^+$

$$\begin{aligned} \Phi_{(a,b)}(x,y) &= e^{(2\pi i/3)((2a+b)x+(a+2b)y)} + e^{(2\pi i/3)((b-a)x+(a+2b)y)} + \\ &+ e^{(2\pi i/3)((2a+b)x+(a-b)y)} + e^{-(2\pi i/3)((a-b)x+(2a+b)y)} + \\ &+ e^{-(2\pi i/3)((a+2b)x+(b-a)y)} + e^{-(2\pi i/3)((a+2b)x+(2a+b)y)}. \end{aligned}$$

Fundamentální oblast je

$$F(A_2) = \{x\omega_1 + y\omega_2 | x, y > 0, x + y < 1\}.$$

Relace ortogonalitý nabývá podoby

$$\begin{aligned} \int_F C_{(a,b)}(x,y) \overline{C_{(c,d)}(x,y)} dF &= \int_0^1 dx \int_0^{1-x} dy C_{(a,b)}(x,y) C_{(d,c)}(x,y) = \\ &= \begin{cases} 0, & \text{jestliže } a \neq c \text{ nebo } b \neq d, \\ \frac{1}{2}, & \text{jestliže } a = b = c = d = 0, \\ \frac{3}{2}, & \text{jestliže } a = c > 0 \text{ a } b = d = 0, \\ & \text{nebo } a = c = 0 \text{ a } b = d > 0, \\ 3 & \text{jestliže } a = c > 0 \text{ a } b = d > 0. \end{cases} \end{aligned}$$

Využili jsme vztahu $C_{(c,d)}(x,y) = \overline{C_{(d,c)}(x,y)}$. Speciálně platí

$$\int_F C_{(a,b)}(x,y) dF = 0 \quad \text{pro } (a,b) \neq (0,0).$$

2.5.4 Funkce na orbitách pro G_2

Cartanova a inverzní Cartanova matice splňují

$$C = \begin{pmatrix} 2 & -3 \\ -1 & 2 \end{pmatrix}, \quad C^{-1} = \begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}.$$

Necht' $\lambda \in P^+$, $\lambda = a\omega_1 + b\omega_2$, $z \in E = \mathbb{R}^2$, $z = x\hat{\omega}_1 + y\hat{\omega}_2$. Pro A_2 C-funkce nabývají

$$\begin{aligned} C_{(0,0)}(x,y) &= 1, \\ C_{(a,0)}(x,y) &= 2 \cos(2\pi a(2x+3y)) + 2 \cos(2\pi ax) + 2 \cos(2\pi a(x+3y)), \\ C_{(0,b)}(x,y) &= 2 \cos(2\pi b(x+y)) + 2 \cos(2\pi by) + 2 \cos(2\pi b(x+2y)), \\ C_{(a,b)}(x,y) &= 2 \cos(2\pi((a+b)x+by)) + 2 \cos(2\pi(ax+(3a+b)y)) + \\ &+ 2 \cos(2\pi((2a+b)x+(3a+b)y)) + \\ &+ 2 \cos(2\pi((2a+b)x+(3a+2b)y)) + \\ &+ 2 \cos(2\pi(ax-by)) + 2 \cos(2\pi((a+b)x+(3a+2b)y)). \end{aligned}$$

Nebo v kompaktnějším tvaru pro libovolné $a, b \in \mathbb{Z}^+$

$$\begin{aligned} \Phi_{(a,b)}(x,y) &= 2 \cos(2\pi((a+b)x+by)) + 2 \cos(2\pi(ax+(3a+b)y)) + \\ &+ 2 \cos(2\pi((2a+b)x+(3a+b)y)) + \\ &+ 2 \cos(2\pi((2a+b)x+(3a+2b)y)) + \\ &+ 2 \cos(2\pi(ax-by)) + 2 \cos(2\pi((a+b)x+(3a+2b)y)). \end{aligned}$$

Fundamentální oblast je

$$F(G_2) = \{x\hat{\omega}_1 + y\hat{\omega}_2 | x, y > 0, 2x + 3y < 1\}.$$

Relace ortogonalitý nabývá podoby

$$\begin{aligned} \int_F C_{(a,b)}(x, y) C_{(c,d)}(x, y) dF &= \sqrt{3} \int_0^{\frac{1}{2}} dx \int_0^{\frac{1}{3} - \frac{2}{3}x} dy C_{(a,b)}(x, y) C_{(c,d)}(x, y) = \\ &= \begin{cases} 0, & \text{jestliže } a \neq c \text{ nebo } b \neq d, \\ \frac{1}{12}, & \text{jestliže } a = b = c = d = 0, \\ \frac{1}{2}, & \text{jestliže } a = c > 0 \text{ a } b = d = 0, \\ & \text{nebo } a = c = 0 \text{ a } b = d > 0, \\ 1 & \text{jestliže } a = c > 0 \text{ a } b = d > 0. \end{cases} \end{aligned}$$

Speciálně platí

$$\int_F C_{(a,b)}(x, y) dF = 0 \quad \text{pro } (a, b) \neq (0, 0).$$

2.6 S-funkce

Definice 2.6.1. Necht' $\lambda \in E$ je striktně dominantní prvek, tj. prvek dominantní Weylovovy komory pro který platí, že $\langle \lambda | \alpha_i \rangle > 0$, pro každý prostý kořen α_i . Potom komplexní funkci

$$S_\lambda(x) = \sum_{\mu \in O(\lambda)} \det(\mu) e^{2\pi i \langle \mu | x \rangle}, \quad x \in E,$$

nazveme *antisymetrická funkce na orbitě* nebo též *S-funkce*.

Poznámka 2.6.2.

- i) Pro striktně dominantní prvek λ platí, že $|O(\lambda)| = |W|$.
- ii) Z tohoto důvodu není třeba zavádět pro S-funkce renormalizaci, na rozdíl od C-funkcí.

2.7 Vlastnosti S-funkcí

S-funkce splňují několik antisymetrií.

- i) Antisymetrie vůči Weylově grupě

$$S_\lambda(wx) = \det(w) S_\lambda(x), \quad w \in W, x \in E.$$

ii) Antisymetrie vůči generátoru afinní Weylové grupy R_ξ

$$S_\lambda(R_\xi x) = -S_\lambda(x), \quad \lambda \in P^{++},$$

kde P^{++} značí podmnožinu striktně dominantních vah váhové mříže.

iii) Pro $\lambda \in P^{++}$ jsou tedy S-funkce antisymetrické vůči afinní Weylově grupě.

Poznámka 2.7.1. Opět díky antisymetrii vůči afinní Weylově grupě stačí uvažovat S-funkce pouze na fundamentální oblasti $F(W^{\text{aff}})$. Hodnoty na zbytku vektorového prostoru E získáme z antisymetrií a případných limitních přechodů.

S-funkce jsou hladké. Na hranici fundamentální oblasti jsou S-funkce nulové. Opět platí relace ortogonality.

Věta 2.7.2. Necht' $\lambda, \lambda' \in P^{++}$, potom platí

$$\frac{1}{|F|} \int_F S_\lambda \overline{S_{\lambda'}} dF = |W| \delta_{\lambda\lambda'},$$

kde $|F|$ značí míru fundamentální oblasti F a $|W|$ značí řád Weylové grupy.

Příklad 2.7.3. S-funkce pro A_1 .

V případě A_1 existuje pouze jeden prostý kořen α , pro který platí $\langle \alpha | \alpha \rangle = 2$. Dále platí $\langle \alpha | \omega \rangle = 1$, tj. $\omega = \alpha/2$. $P = \{m\omega | m \in \mathbb{Z}\}$. Weylova grupa obsahuje pouze 1 a r_α . Pro daný prvek $\lambda = m\omega \in P^{++}$, $m \neq 0$, orbita Weylové grupy obsahuje

$$O(\lambda) \equiv O(m) = \{m\omega, -m\omega\}.$$

Jestliže položíme $z = \theta\omega$, $z \in E = \mathbb{R}$, potom S-funkce jsou definovány jako

$$S_m(\theta) \stackrel{\text{def}}{=} \sum_{\mu \in O(m)} (\det \mu) e^{2\pi i \langle \mu | z \rangle} = 2i \sin \pi m \theta.$$

Fundamentální oblast pro A_1 je vnitřek simplexu ohraničeného body $\{0, \omega\}$. Odtud platí, že $x \in F(A_1)$ právě, když $0 < \theta < 1$.

Podle věty 2.7.2 platí, že

$$\int_0^1 S_m(\theta) \overline{S_{m'}(\theta)} d\theta = 2\delta_{mm'}.$$

2.8 S-funkce Lieových algeber hodnosti 2

2.8.1 Antisymetrické funkce na orbitách pro $A_1 \times A_1$

Pro kořeny α_1 a α_2 platí následující vztah $\langle \alpha_i | \alpha_j \rangle = 2\delta_{ij}$. Tj. Cartanova matice má tvar

$$C = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}.$$

Váhy jsou tedy ke kořenům ve vztahu $\alpha_i = 2\omega_i$.

Pro $\lambda = a\omega_1 + b\omega_2 \in P^{++}$, tj. $a, b \in \mathbb{N}$, je signovaná orbita Weylovky grupy

$$O^\pm(a, b) = \{ (a, b)^+, (-a, b)^-, (a, -b)^-, (-a, -b)^+ \}.$$

Jestliže dále $z = x\omega_1 + y\omega_2$, $z \in E = \mathbb{R}^2$, dostaneme pro S-funkce na $A_1 \times A_1$, že jsou jednoduše součinem dvou S-funkcí na A_1 , viz příklad 2.7.3, tj.

$$S_{(a,b)}(x, y) = S_a(x)S_b(y).$$

Konkrétně tedy

$$S_{(a,b)}(x, y) = -4 \sin(\pi ax) \sin(\pi by).$$

Vidíme tedy, že tyto S-funkce jsou reálné.

Fundamentální oblast je

$$F(A_1 \times A_1) = \{x\omega_1 + y\omega_2 | 0 < x, y < 1\}.$$

Potom podle věty o ortogonalitě S-funkcí platí

$$\int_F S_{(a,b)}(x, y) S_{(c,d)}(x, y) dF = \int_0^1 dx \int_0^1 dy S_{(a,b)}(x, y) S_{(c,d)}(x, y) = 4\delta_{ac}\delta_{bd}.$$

2.8.2 Antisymetrické funkce na orbitách pro C_2

Pro C_2 Cartanova a inverzní Cartanova matice nabývají

$$C = \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ -2 & 2 \end{pmatrix}, \quad C^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & \frac{1}{2} \\ 1 & 1 \end{pmatrix}.$$

Pro $\lambda = a\omega_1 + b\omega_2 \in P^{++}$ obsahuje signovaná orbita Weylovky grupy

$$O^\pm(a, b) = \{ \pm(a, b)^+, \pm(-a, a+b)^-, \pm(a+2b, -b)^-, \pm(a+2b, -a-b)^+ \}.$$

Necht' $z \in E = \mathbb{R}^2$, $z = x\hat{\omega}_1 + y\hat{\omega}_2$, potom S-funkce nabývají

$$\begin{aligned} S_{(a,b)}(x, y) = & 2 \cos(\pi(2(a+b)x + (a+2b)y)) - 2 \cos(\pi(2(a+b)x + ay)) + \\ & -2 \cos(\pi(2bx + (a+2b)y)) + 2 \cos(\pi(-2bx + ay)). \end{aligned}$$

Fundamentální oblast je

$$F(C_2) = \{x\hat{\omega}_1 + y\hat{\omega}_2 | x, y > 0, 2x + y < 1\}.$$

Relace ortogonalit nabývá podoby

$$\int_F S_{(a,b)}(x, y) S_{(c,d)}(x, y) dF = \int_0^{\frac{1}{2}} dx \int_0^{1-2x} dy S_{(a,b)}(x, y) S_{(c,d)}(x, y) = 2\delta_{ac}\delta_{bd}.$$

2.8.3 Antisymetrické funkce na orbitách pro A_2

Cartanova a inverzní Cartanova matice splňují

$$C = \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ -1 & 2 \end{pmatrix}, \quad C^{-1} = \frac{1}{3} \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}.$$

Necht' $\lambda = a\omega_1 + b\omega_2 \in P^{++}$, potom signovaná orbita Weylovy grupy obsahuje

$$\begin{aligned} O^\pm(a, b) = & \{ (a, b)^+, (-a, a+b)^-, (a+b, -b)^-, \\ & (-b, -a)^-, (-a-b, a)^+, (b, -a-b)^+ \}. \end{aligned}$$

Necht' $z \in E = \mathbb{R}^2$, $z = x\omega_1 + y\omega_2$. Pro A_2 jsou S-funkce obecně komplexní:

$$\begin{aligned} S_{(a,b)}(x, y) = & e^{(2\pi i/3)((2a+b)x+(a+2b)y)} - e^{(2\pi i/3)((b-a)x+(a+2b)y)} + \\ & - e^{(2\pi i/3)((2a+b)x+(a-b)y)} + e^{-(2\pi i/3)((a-b)x+(2a+b)y)} + \\ & + e^{-(2\pi i/3)((a+2b)x+(b-a)y)} - e^{-(2\pi i/3)((a+2b)x+(2a+b)y)}. \end{aligned}$$

Fundamentální oblast je

$$F(A_2) = \{x\omega_1 + y\omega_2 | x, y > 0, x + y < 1\}.$$

Relace ortogonalit nabývá podoby

$$\int_F S_{(a,b)}(x, y) \overline{S_{(c,d)}(x, y)} dF = \int_0^1 dx \int_0^{1-x} dy S_{(a,b)}(x, y) \overline{S_{(d,c)}(x, y)} = 3\delta_{ac}\delta_{bd}.$$

2.8.4 Antisymetrické funkce na orbitách pro G_2

Cartanova a inverzní Cartanova matice splňují

$$C = \begin{pmatrix} 2 & -3 \\ -1 & 2 \end{pmatrix}, \quad C^{-1} = \begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}.$$

Necht' $\lambda = a\omega_1 + b\omega_2 \in P^{++}$, potom signovaná orbita obsahuje

$$O^\pm(a, b) = \{ \pm(a, b)^+, \pm(-a, 3a + b)^-, \pm(-2a - b, 3a + 2b)^-, \\ \pm(2a + b, -3a - b)^+, \pm(-a - b, 3a + 2b)^+, \pm(a + b, -b)^- \}.$$

Necht' $z \in E = \mathbb{R}^2$, $z = x\hat{\omega}_1 + y\hat{\omega}_2$. Pro A_2 S-funkce nabývají

$$S_{(a,b)}(x, y) = 2 \cos(2\pi((a + b)x + by)) + 2 \cos(2\pi(ax + (3a + b)y)) + \\ - 2 \cos(2\pi((2a + b)x + (3a + b)y)) + \\ + 2 \cos(2\pi((2a + b)x + (3a + 2b)y)) + \\ - 2 \cos(2\pi(ax - by)) - 2 \cos(2\pi((a + b)x + (3a + 2b)y)).$$

Fundamentální oblast je

$$F(G_2) = \{x\hat{\omega}_1 + y\hat{\omega}_2 | x, y > 0, 2x + 3y < 1\}.$$

Relace ortogonality nabývá podoby

$$\int_F S_{(a,b)}(x, y) S_{(c,d)}(x, y) dF = \int_0^{\frac{1}{2}} dx \int_0^{\frac{1}{3} - \frac{2}{3}x} dy S_{(a,b)}(x, y) S_{(c,d)}(x, y) = \delta_{ac} \delta_{bd}.$$

Kapitola 3

Symetrické a antisymetrické transformace a rozvoje Fourierova typu

Poznamenejme, že symetrická transformace pro A_1 je již dlouho známa jako kosinová transformace. V dalším textu se pokusíme osvětlit, jak vypadají zobecnění kosinové transformace pro jiné Lieovy grupy.

Celá teorie symetrických resp. antisymetrických Fourierových transformací spočívá v blízkém vztahu mezi charaktery ireducibilních reprezentací Lieových grup a funkcí na orbitách. Tím je také nastíněno, jak budeme v dalším postupovat.

3.1 Rozvoj do řady C-funkcí

V této podkapitole použijeme odvození i výsledky uvedené v článku [1], ve kterém je tento rozvoj popsán.

Definice 3.1.1. Necht' f je funkce na grupě G . Řekneme, že f je *třídová funkce*, jestliže splňuje

$$f(hgh^{-1}) = f(g), \quad \forall g, h \in G.$$

Pro souvislé kompaktní Lieovy grupy platí, že Cartanova podgrupa je maximální souvislá abelovská podgrupa. Zvolme tedy pevně Lieovu grupu G , její Cartanovu podgrupu označme H . H je n -dimenzionální varieta, kde n je hodnost Lieovy grupy G . Dále poznamenejme, že H lze zapsat jako exponenciálu Cartanovy podalgebry $\mathfrak{h}$, tj. $H = \exp(i\mathfrak{h})$. Poznamenejme, že Cartanova podalgebra je n -dimenzionální, stejně jako Cartanova podgrupa. Každý prvek G je konjugovaný nějakému prvku H , tj. třídobé funkce na G jsou zcela určeny hodnotami na H .

Necht' λ je nejvyšší váha nějaké ireducibilní reprezentace T_λ . Reprezentace jsou

popsány pomocí svých charakterů

$$\chi_\lambda(g) = \text{Tr} T_\lambda(g), \quad g \in G.$$

Charakter je třídivá funkce, neboť $\text{Tr} T_\lambda(g'gg'^{-1}) = \text{Tr} T_\lambda(g)$.

Dále všechny operátory $T_\lambda(h)$, $h \in H$, jsou diagonální a na diagonále jsou čísla $e^{2\pi i \langle \mu | x \rangle}$, kde $\mu \in P$ jsou váhy reprezentace T_λ a $x = (x_1, x_2, \dots, x_n)$ jsou souřadnice prvku Cartanovy algebry $x \in \mathfrak{h}$. Potom pro charaktery platí

$$\chi_\lambda(h) = \sum_{\mu \in D(\lambda)} c_\lambda^\mu e^{2\pi i \langle \mu | x \rangle}, \quad h \in H.$$

$D(\lambda)$ je množina všech vah ireducibilní reprezentace T_λ a c_λ^μ je násobnost dané váhy v reprezentaci. Navíc množina vah $D(\lambda)$ je invariantní vzhledem k akci Weylovovy grupy, čili s každým prvkem obsahuje i celou jeho orbitu. Platí také, že $c_\lambda^\mu = c_\lambda^{w\mu}$ pro $w \in W$, tj. prvky stejné orbity mají stejné koeficienty v rozvoji. Potom charakter lze přepsat jako sumu funkcí na orbitách

$$\chi_\lambda(h) = \sum_{\mu \in D^+(\lambda)} c_\lambda^\mu C_\mu(x), \quad h \in H. \quad (3.1)$$

Množina $D^+(\lambda)$ je množina dominantních vah $D(\lambda)$. Poznamenejme, že h je funkcí x . Čili i charakter χ_λ je obecně komplexní funkcí v proměnných $x = (x_1, x_2, \dots, x_n)$.

Charakter je funkcí invariantní vzhledem k akci afinní Weylovovy grupy W^{aff} , neboť je sumou invariantních funkcí na orbitách. Je tedy postačující znát charakter pouze na fundamentální oblasti dané grupy. Dále je vhodné zavést fundamentální oblast $\tilde{F}$ v podgrupě H , která odpovídá množině F .

Necht' f je hladká třídivá funkce, potom ji lze rozložit do charakterů ireducibilních reprezentací na G

$$f(h) = \sum_{\lambda \in P^+} a_\lambda \chi_\lambda(h).$$

Dále platí, že opět stačí znát funkci f pouze na $\tilde{F} \subset H$. Speciálně tedy pro funkci na orbitě C_μ platí

$$C_\mu(x) = \sum_{\lambda \in P^+} a_\mu^\lambda \chi_\lambda(x).$$

Vztah (3.1) můžeme přepsat do podoby

$$\chi_\lambda(x) = \sum_{0 \leq \mu \leq \lambda} c_\lambda^\mu C_\mu(x), \quad c_\lambda^\lambda \neq 0.$$

Zde je použita následující konvence, $\mu \leq \lambda$ právě, když $\lambda - \mu \in Q^+$ nebo $\lambda = \mu$, a $\mu \geq 0$ znamená, že μ je dominantní. Lze dokázat, že lineární obaly množin po dvou ortogonálních funkcí $\{\chi_\mu | 0 \leq \mu \leq \lambda\}$ a $\{C_\mu | 0 \leq \mu \leq \lambda\}$ jsou totožné konečnědimenzionální prostory funkcí. Závěr zformulujeme do věty.

Věta 3.1.2. Každou hladkou funkci f na $\overline{F}$ lze rozvinout do řady funkcí na orbitách C_λ , $\lambda \in P^+$, tj.

$$f(x) = \sum_{\lambda \in P^+} c_\lambda C_\lambda(x). \quad (3.2)$$

Díky větě o ortogonalitě 2.4.2 lze velice snadno vyjádřit koeficienty c_λ .

$$c_\lambda = |O(\lambda)|^{-1} |F|^{-1} \int_F f(x) \overline{C_\lambda(x)} dF. \quad (3.3)$$

Tímto je zaveden rozvoj do funkcí na orbitách. Platí Parsevalova rovnost

$$\sum_{\lambda \in P^+} |O(\lambda)| |c_\lambda|^2 = |F|^{-1} \int_F |f(x)|^2 dF.$$

Poznamenejme, že uvedené vztahy platí nejen v množině hladkých funkcí, ale vše, co bylo uvedeno, může být rozšířeno i na množinu kvadraticky integrabilních funkcí $\mathcal{L}^2(F)$, neboť množina hladkých funkcí je v této hustá. Z toho plyne, že množina funkcí na orbitách je ortogonální bází $\mathcal{L}^2(F)$. To není překvapivý výsledek vzhledem ke známému tvrzení teorie reprezentací, které říká, že množina charakterů ireducibilních reprezentací je ortogonální bází $\mathcal{L}^2(F)$.

3.2 Zobecnění kosinové transformace

Fourierova transformace a inverzní Fourierova transformace na $\mathbb{R}^n$ je zavedena následovně

$$\tilde{f}(\lambda) = \int_{\mathbb{R}^n} f(x) e^{2\pi i \langle \lambda | x \rangle} dx, \quad (3.4)$$

$$f(x) = \int_{\mathbb{R}^n} \tilde{f}(\lambda) e^{-2\pi i \langle \lambda | x \rangle} d\lambda. \quad (3.5)$$

Symetrizace této transformace vzhledem k Weylově grupě $W(A_1)$ je dlouho známa jako kosinová transformace. Popíšeme zde proces symetrizace vzhledem k Weylovým grupám jiných Lieových algeber.

Poznamenejme, že jenom C-funkce pro $\lambda \in P^+$ jsou symetrické vůči afinní Weylově grupě, ostatní C-funkce jsou symetrické pouze vůči Weylově grupě.

Necht' f je funkce invariantní vůči Weylově grupě, potom i $\tilde{f}$ je vůči ní invariantní.

Necht' tedy f je funkce invariantní vůči Weylově grupě, jestliže ve vztahu (3.4) nahradíme λ za $w\lambda$, $w \in W$, a vysčítáme přes W získáme

$$\tilde{f}(\lambda) = \int_{D^+} f(x) \Phi_\lambda(x) dx. \quad (3.6)$$

Podobně pro inverzní formuli

$$f(x) = \int_{D^+} \tilde{f}(\lambda) \overline{\Phi_\lambda(x)} d\lambda. \quad (3.7)$$

Těmito vztahy je určena symetrizovaná Fourierova transformace. Platí Plancherelova formule

$$\int_{D^+} |f(x)|^2 dx = \int_{D^+} |\tilde{f}(\lambda)|^2 d\lambda.$$

3.3 Rozvoj do řady S-funkcí

Stejně jako v předminulé podkapitole začneme s hladkou třídovou funkcí $\tilde{f}$ na G . O ní už víme, že ji lze zapsat jako sumu charakterů

$$\tilde{f}(x) = \sum_{\lambda \in P^+} c_\lambda \chi_\lambda(x), \quad x \in E,$$

a, že je symetrická vůči afinní Weylově grupě W^{aff} . Nyní využijeme Weylovu formuli pro charaktery ireducibilních reprezentací, která zní

$$\chi_\lambda(x) = \frac{S_{\lambda+\rho}(x)}{S_\rho(x)},$$

kde $\rho = \frac{1}{2} \sum_{\alpha > 0} \alpha$ je poloviční suma všech kladných kořenů odpovídající Lieovy algebry. Poznamenejme, že pro $\lambda \in P^+$ je $\lambda + \rho$ striktně dominantní. Platí, že každý striktně dominantní prvek P^{++} lze zapsat jako součet nějakého dominantního prvku P^+ a zmíněného ρ . Tím získáme pro f vztah

$$S_\rho(x) \tilde{f}(x) = \sum_{\lambda \in P^+} c_\lambda S_{\lambda+\rho}.$$

Platí, že každou hladkou funkci na F antisymetrickou vůči afinní Weylově grupě, která je nulová na ∂F , lze zapsat jako součin $S_\rho(x)$ a hladké funkce $\tilde{f}(x)$ symetrické vůči afinní Weylově grupě. Tudíž platí, že každou antisymetrickou hladkou funkci na F lze

rozvinout do řady v S-funkcích

$$f(x) = \sum_{\lambda \in P^{++}} c_\lambda S_\lambda(x). \quad (3.8)$$

Díky větě o ortogonalitě 2.7.2 lze snadno vyjádřit koeficienty rozvoje

$$c_\lambda = |F|^{-1} |W|^{-1} \int_F f(x) \overline{S_\lambda(x)} dx. \quad (3.9)$$

Opět platí Parsevalova rovnost

$$\sum_{\lambda \in P^{++}} |c_\lambda|^2 = |F|^{-1} |W|^{-1} \int_F |f(x)|^2 dx.$$

Necht' $\mathcal{L}_0^2(F)$ je množina kvadraticky integrabilních funkcí na F , které jsou nulové na ∂F , se skalárním součinem

$$\langle f_1 | f_2 \rangle = \int_F f_1(x) \overline{f_2(x)} dx.$$

Množina hladkých funkcí na F , které jsou nulové na ∂F , je v této množině hustá. Tudiž množina S-funkcí S_λ , $\lambda \in P^{++}$, je ortogonální bází $\mathcal{L}_0^2(F)$.

3.4 Zobecnění sinové transformace

Necht' f je antiinvariantní funkce vzhledem k Weylově grupě. Stejně jako v podkapitole 3.2 vyjdeme z rovnice (3.4) určující Fourierovu transformaci. Nahradíme λ za $w\lambda$, vynásobíme $\det(w)$ a vysčítáme přes W . Dodejme, že nestačí, aby $\lambda \in D^+$, ale požadujeme, aby bylo navíc striktně dominantní, tj. z D^{++} . Potom získáme

$$\tilde{f}(\lambda) = \int_{D^+} f(x) S_\lambda(x) dx, \quad \lambda \in D^{++}. \quad (3.10)$$

Podobně pro inverzní formuli

$$f(x) = \int_{D^+} \tilde{f}(\lambda) \overline{S_\lambda(x)} d\lambda. \quad (3.11)$$

Těmito vztahy je určena antisymetrická Fourierova transformace, která je zobecněním dlouho známé sinové transformace. Opět platí Plancherelova formule

$$\int_{D^+} |f(x)|^2 dx = \int_{D^+} |\tilde{f}(\lambda)|^2 d\lambda.$$

Kapitola 4

Diskrétní symetrické a antisymetrické rozvoje Fourierova typu

Konečná Fourierova transformace v n -dimenzionálním případě se zavádí na jisté diskrétní podmnožině euklidovského prostoru E . Touto množinou je diskrétní mřížka určená libovolným přirozeným číslem M

$$\{(m_1/M, m_2/M, \dots, m_n/M) \mid m_i = 1, 2, \dots, M, \forall i = 1, 2, \dots, n\}.$$

Poznámka 4.0.1. V této kapitole jenom stručně zavedeme potřebné pojmy pro další práci s diskrétními zobecněnými Fourierovými transformacemi. Více je zmíněno v článcích [1, 2, 6].

Jestliže budeme chtít zavést nějakou podobnou mřížku pro funkce na orbitách a jimi určenou transformaci, bude vhodné, aby tato splňovala stejné symetrie jako funkce na orbitách. Protože platí, že $W^{\text{aff}}F = E$, kde F je fundamentální oblast afinní Weylovovy grupy, je jasné, že hledaná množina bude podmnožinou $\overline{F}$. V článcích [1] a [2] je takováto množina popsána. Je jí množina F_M , která je tvořena body s popsanými $n + 1$ -ticemi nezáporných celých čísel $[s_0, s_1, s_2, \dots, s_n]$. Pro přirozené M je F_M tvořena

$$F_M = \left\{ s = \sum_{i=1}^n \frac{s_i}{M} \hat{\omega}_i \mid M = s_0 + \sum_{i=1}^n q_i s_i > 0, s_0, s_1, s_2, \dots, s_n \in \mathbb{Z}^+ \right\}.$$

Poznamenejme, že n -tice čísel $(q_1, q_2, \dots, q_n)$ jsou souřadnice nejdelšího kořene $\xi = \sum_{i=1}^n q_i \alpha_i$.

Pro antisymetrické funkce na orbitách je důležitá podmnožina $F_M^- \subset F_M$ tvořená

těmi body F_M , které neleží na některé ze stěn F . Tj.

$$F_M^- = \left\{ s = \sum_{i=1}^n \frac{s_i}{M} \hat{\omega}_i \mid M = s_0 + \sum_{i=1}^n q_i s_i > 0, s_0, s_1, s_2, \dots, s_M \in \mathbb{N} \right\}.$$

Příklad 4.0.2. Mřížka pro A_1 .

Množina $F_M(A_1)$ je tvořena body:

$$F_M(A_1) = \{0, \frac{1}{M}, \frac{2}{M}, \dots, \frac{M-1}{M}, 1\}.$$

Na množině funkcí definovaných na mřížce F_M zavedeme skalární součin vztahem

$$\langle f|h \rangle_{F_M} \equiv \sum_{s \in F_M} c_s f(s) \overline{h(s)},$$

kde c_s jsou koeficienty určené konkrétní grupou. Koeficienty c_s jsou rovny velikosti orbity Weylovy grupy odpovídající bodu s modulo množinou $\hat{Q}$. Tj. body orbity $O(s)$, které se od sebe liší o prvky kokořenové mříže, jsou ztotožňovány a nezapočítávají se do koeficientu c_s .

4.1 Diskretizace dvoudimenzionálních rozvoju do C-funkcí

Nechť f je funkce na mřížce F_M . Chceme se dopracovat k vyjádření této funkce jako sumy funkcí na orbitách, tj.

$$f(s) = \sum_{(a,b) \in \Omega} d_{(a,b)} \Phi_{(a,b)}(s),$$

kde Ω je nějaká indexová množina určující, které funkce na orbitách budou v daném rozvoji vystupovat.

Prvním cílem je tedy určit, jaké funkce pro konkrétní mřížku F_M obsahuje indexová množina Ω . Nechť $|F_M|$ je mohutnost množiny F_M , potom je jasné, že stačí $|F_M|$ lineárně nezávislých funkcí $\Phi_{(a,b)}$ k nakombinování funkce f . Takovou množinou lineárně nezávislých funkcí je

$$S_M \equiv \left\{ \Phi_{(a,b)} \mid \left(\frac{b}{M}, \frac{a}{M} \right) = r \left(\frac{s_1}{M}, \frac{s_2}{M} \right), \left(\frac{s_1}{M}, \frac{s_2}{M} \right) \in F_M, r \in W^{\text{aff}} \right\}.$$

Funkce z S_M jsou na mřížce F_M ortogonální

$$\langle \Phi_{(a,b)} | \Phi_{(a',b')} \rangle_{F_M} = \sum_{s \in F_M} c_s \Phi_{(a,b)}(s) \overline{\Phi_{(a',b')}(s)} = \delta_{aa'} \delta_{bb'} \langle \Phi_{(a,b)} | \Phi_{(a,b)} \rangle.$$

Poznámka 4.1.1. i) Z definice S_M je vidět, že platí $|S_M| = |F_M|$.

ii) Velice snadno určíme prvky S_M , jestliže zvolíme $r = 1$. Potom platí

$$aq_2 + bq_1 \leq M \Rightarrow \Phi_{(a,b)} \in S_M.$$

Díky vlastnostem množiny S_M už snadno určíme rozklad funkce f do funkcí na orbitách.

$$f(s) = \sum_{(a,b) \in S_M} d_{(a,b)} \Phi_{(a,b)}(s), \quad s \in F_M, \quad (4.1)$$

kde

$$d_{(a,b)} = \frac{\langle f | \Phi_{(a,b)} \rangle_{F_M}}{\langle \Phi_{(a,b)} | \Phi_{(a,b)} \rangle_{F_M}}.$$

Ve vztahu (4.1) lze nahradit diskrétní proměnnou s za spojitě proměnné x, y :

$$f_{\text{cont}}(x, y) = \sum_{(a,b) \in S_M} d_{(a,b)} \Phi_{(a,b)}(x, y), \quad x, y \in F.$$

Spojitě rozšíření f_{cont} je v bodech $s \in F_M$ totožné s diskrétní verzí. Protože funkce $\Phi_{(a,b)}$ jsou hladké, je i f_{cont} hladká.

4.1.1 Diskretizace $A_1 \times A_1$

Mřížka F_M je kartézským součinem dvou mřížek $F_M(A_1)$. Tj.

$$F_M(A_1 \times A_1) = \left\{ \left(\frac{s_1}{M}, \frac{s_2}{M} \right) \mid s_1, s_2 \in \mathbb{Z}^{\geq 0}, s_1, s_2 \leq M \right\}.$$

Koeficienty c_s jsou

$$c_s \equiv c_{(\frac{s_1}{M}, \frac{s_2}{M})} = \begin{cases} 1, & \text{jestliže } s_1 = s_2 = 0, \\ & \text{nebo } s_1 = s_2 = M, \\ & \text{nebo } s_1 = 0 \text{ a } s_2 = M, \\ & \text{nebo } s_1 = M \text{ a } s_2 = 0, \\ 2, & \text{jestliže } s_1 = 0 \text{ a } 0 < s_2 < M, \\ & \text{nebo } s_2 = 0 \text{ a } 0 < s_1 < M, \\ & \text{nebo } s_1 = M \text{ a } 0 < s_2 < M, \\ & \text{nebo } s_2 = M \text{ a } 0 < s_1 < M, \\ 4, & \text{jestliže } 0 < s_1, s_2 < M. \end{cases}$$

C-funkce splňují relaci ortogonality

$$\langle \Phi_{(a,b)} | \Phi_{(a',b')} \rangle_{F_M} = 0, \quad \text{jestliže } a \neq a' \text{ nebo } b \neq b'.$$

Normalizovány jsou následovně

$$\langle \Phi_{(a,b)} | \Phi_{(a,b)} \rangle_{F_M} = 16M^2 \times \begin{cases} 1, & \text{jestliže } 0 < a, b < M, \\ 2, & \text{jestliže } a = 0 \text{ a } 0 < b < M, \\ & \text{nebo } b = 0 \text{ a } 0 < a < M, \\ & \text{nebo } a = M \text{ a } 0 < b < M, \\ & \text{nebo } b = M \text{ a } 0 < a < M, \\ 4, & \text{jestliže } a = b = 0, \\ & \text{nebo } a = b = M, \\ & \text{nebo } a = 0 \text{ a } b = M, \\ & \text{nebo } a = M \text{ a } b = 0. \end{cases}$$

4.1.2 Diskretizace C_2

Nejdelší kořen je $2\alpha_1 + \alpha_2$. Mřížka F_M je potom

$$F_M(C_2) = \left\{ \left(\frac{s_1}{M}, \frac{s_2}{M} \right) \mid s_0, s_1, s_2 \in \mathbb{Z}^{\geq 0}, s_0 + 2s_1 + s_2 = M \right\}.$$

Koeficienty c_s jsou

$$c_s \equiv c_{(\frac{s_1}{M}, \frac{s_2}{M})} = \begin{cases} 1, & \text{jestliže } s_1 = s_2 = 0, \\ & \text{nebo } s_1 = 0 \text{ a } s_2 = M, \\ 2, & \text{jestliže } s_2 = 0 \text{ a } s_1 = \frac{M}{2}, \\ 4, & \text{jestliže } s_1 = 0 \text{ a } 0 < s_2 < M, \\ & \text{nebo } s_2 = 0 \text{ a } 0 < s_1 < M, \\ & \text{nebo } s_1, s_2 > 0 \text{ a } 2s_1 + s_2 = M, \\ 8, & \text{jestliže } s_1, s_2 > 0 \text{ a } 2s_1 + s_2 < M. \end{cases}$$

C-funkce splňují relaci ortogonality

$$\langle \Phi_{(a,b)} | \Phi_{(a',b')} \rangle_{F_M} = 0, \quad \text{jestliže } a \neq a' \text{ nebo } b \neq b'.$$

Normalizovány jsou následovně

$$\langle \Phi_{(a,b)} | \Phi_{(a,b)} \rangle_{F_M} = 16M^2 \times \begin{cases} 1, & \text{jestliže } a, b > 0 \text{ a } a + 2b < M, \\ 2, & \text{jestliže } b = 0 \text{ a } 0 < a < M, \\ & \text{nebo } a = 0 \text{ a } 0 < 2b < M, \\ & \text{nebo } a, b > 0 \text{ a } a + 2b = M, \\ 4, & \text{jestliže } a = 0 \text{ a } 2b = M, \\ 8, & \text{jestliže } a = b = 0, \\ & \text{nebo } a = M \text{ a } b = 0. \end{cases}$$

4.1.3 Diskretizace A_2

Nejdelší kořen je $2\alpha_1 + 3\alpha_2$. Mřížka F_M je potom

$$F_M(A_2) = \left\{ \left(\frac{s_1}{M}, \frac{s_2}{M} \right) \mid s_0, s_1, s_2 \in \mathbb{Z}^{\geq 0}, s_0 + 2s_1 + 3s_2 = M \right\}.$$

Koeficienty c_s jsou

$$c_s \equiv c_{(\frac{s_1}{M}, \frac{s_2}{M})} = \begin{cases} 1, & \text{jestliže } s_1 = s_2 = 0, \\ & \text{nebo } s_1 = 0 \text{ a } s_2 = M, \\ & \text{nebo } s_1 = M \text{ a } s_2 = 0, \\ 3, & \text{jestliže } s_1 = 0 \text{ a } 0 < s_2 < M, \\ & \text{nebo } s_2 = 0 \text{ a } 0 < s_1 < M, \\ & \text{nebo } s_1, s_2 > 0 \text{ a } s_1 + s_2 = M, \\ 6, & \text{jestliže } s_1, s_2 > 0, s_1 + s_2 < M. \end{cases}$$

C-funkce splňují relaci ortogonalit

$$\langle \Phi_{(a,b)} | \Phi_{(a',b')} \rangle_{F_M} = 0, \quad \text{jestliže } a \neq a' \text{ nebo } b \neq b'.$$

Normalizovány jsou následovně

$$\langle \Phi_{(a,b)} | \Phi_{(a,b)} \rangle_{F_M} = 18M^2 \times \begin{cases} 1, & \text{jestliže } a, b > 0, a + b < M, \\ 2, & \text{jestliže } a = 0 \text{ a } 0 < b < M, \\ & \text{nebo } b = 0 \text{ a } 0 < a < M, \\ & \text{nebo } a, b > 0 \text{ a } a + b = M, \\ 6, & \text{jestliže } a = b = 0, \\ & \text{nebo } a = 0 \text{ a } b = M, \\ & \text{nebo } a = M \text{ a } b = 0. \end{cases}$$

4.1.4 Diskretizace G_2

Nejdelší kořen je $\alpha_1 + \alpha_2$. Mřížka F_M je potom

$$F_M(G_2) = \left\{ \left(\frac{s_1}{M}, \frac{s_2}{M} \right) \mid s_0, s_1, s_2 \in \mathbb{Z}^{\geq 0}, s_0 + s_1 + s_2 = M \right\}.$$

Koeficienty c_s jsou

$$c_s \equiv c_{(\frac{s_1}{M}, \frac{s_2}{M})} = \begin{cases} 1, & \text{jestliže } s_1 = s_2 = 0, \\ 2, & \text{jestliže } s_1 = 0 \text{ a } s_2 = \frac{M}{3}, \\ 3, & \text{jestliže } s_1 = \frac{M}{2} \text{ a } s_2 = 0, \\ 6, & \text{jestliže } s_1 = 0 \text{ a } 0 < s_2 < \frac{M}{3}, \\ & \text{nebo } s_2 = 0 \text{ a } 0 < s_1 < \frac{M}{2}, \\ & \text{nebo } s_1, s_2 > 0 \text{ a } 2s_1 + 3s_2 = M, \\ 12, & \text{jestliže } s_1, s_2 > 0, 2s_1 + 3s_2 < M. \end{cases}$$

C-funkce splňují relaci ortogonalit

$$\langle \Phi_{(a,b)} | \Phi_{(a',b')} \rangle_{F_M} = 0, \quad \text{jestliže } a \neq a' \text{ nebo } b \neq b'.$$

Normalizovány jsou následovně

$$\langle \Phi_{(a,b)} | \Phi_{(a,b)} \rangle_{F_M} = 12M^2 \times \begin{cases} 1, & \text{jestliže } a, b > 0, 3a + 2b < M, \\ 2, & \text{jestliže } a = 0 \text{ a } 0 < b < \frac{M}{2}, \\ & \text{nebo } b = 0 \text{ a } 0 < a < \frac{M}{3}, \\ & \text{nebo } a, b > 0 \text{ a } 3a + 2b = M, \\ 4, & \text{jestliže } a = 0 \text{ a } b = \frac{M}{2}, \\ 6, & \text{jestliže } a = \frac{M}{3} \text{ a } b = 0, \\ 12, & \text{jestliže } a = b = 0. \end{cases}$$

4.2 Diskretizace dvoudimenzionálních rozvoju do S-funkcí

Celý postup bude stejný jako v minulé podkapitole, nicméně kvůli nulovosti S-funkcí na hranici fundamentální oblasti ∂F nebudeme za diskrétní mřížku brát celou množinu F_M , ale jen její podmnožinu F_M^- .

Pro skalární součin funkcí na mřížce F_M platí

$$\langle f | h \rangle_{F_M} = \sum_{s \in F_M^-} c f(s) \overline{h(s)},$$

kde koeficient c závisí na konkrétní algebře a je pro všechny body z F_M^- stejný, rovný řádu Weylovy grupy $|W|$. Navíc, protože uvažujeme pouze funkce antisymetrické vzhledem k afinní Weylově grupě, příspěvky skalárního součinu budou nenulové pouze pro $s \in F_M^-$.

Ekvivalentem množiny S_M bude množina

$$S_M^- \equiv \left\{ S_{(a,b)} \mid \left(\frac{b}{M}, \frac{a}{M} \right) = r \left(\frac{s_1}{M}, \frac{s_2}{M} \right), \left(\frac{s_1}{M}, \frac{s_2}{M} \right) \in F_M^-, r \in W^{\text{aff}} \right\}.$$

Funkce z S_M^- jsou na mřížce F_M ortogonální

$$\langle S_{(a,b)} | S_{(a',b')} \rangle_{F_M} = \sum_{s \in F_M^-} c S_{(a,b)}(s) \overline{S_{(a',b')}(s)} = \delta_{aa'} \delta_{bb'} \langle S_{(a,b)} | S_{(a,b)} \rangle_{F_M}.$$

Poznámka 4.2.1.

- i) Z definice S_M^- je opět vidět, že platí $|S_M^-| = |F_M^-|$.
- ii) Velice snadno určíme prvky S_M^- , jestliže zvolíme $r = 1$. Potom platí

$$a, b \in \mathbb{N}, \quad aq_2 + bq_1 < M \Rightarrow S_{(a,b)} \in S_M^-.$$

Potom pro funkci f na F_M^- platí

$$f(s) = \sum_{(a,b) \in S_M^-} d_{(a,b)} S_{(a,b)}(s), \quad s \in F_M^-, \quad (4.2)$$

kde

$$d_{(a,b)} = \frac{\langle f | S_{(a,b)} \rangle_{F_M}}{\langle S_{(a,b)} | S_{(a,b)} \rangle_{F_M}}.$$

Opět můžeme spojitě rozšířit vztah (4.2). Necht' f je nulová na ∂F , potom nahradíme diskrétní proměnnou s za spojitě proměnné x, y :

$$f_{\text{cont}}(x, y) = \sum_{(a,b) \in S_M^-} d_{(a,b)} S_{(a,b)}(x, y), \quad x, y \in F.$$

Spojitě rozšíření f_{cont} je v bodech $s \in F_M$ totožné s diskrétní verzí. Protože funkce $S_{(a,b)}$ jsou hladké, je i f_{cont} hladká.

4.2.1 Diskretizace $A_1 \times A_1$

Mřížka F_M^- je kartézským součinem dvou mřížek $F_M^-(A_1)$. Tj.

$$F_M(A_1 \times A_1)^- = \left\{ \left(\frac{s_1}{M}, \frac{s_2}{M} \right) \mid 0 < s_1, s_2 < M \right\}.$$

Pro koeficient c platí $c = 4$.

S-funkce splňují relaci ortogonality

$$\begin{aligned} \langle S_{(a,b)} | S_{(a',b')} \rangle_{F_M} &= 4 \sum_{s \in F_M^-} S_{(a,b)}(s) S_{(a',b')}(s) = \\ &= \begin{cases} 0, & \text{jestliže } a \neq a' \text{ nebo } b \neq b', \\ 16M^2, & \text{jinak.} \end{cases} \end{aligned}$$

4.2.2 Diskretizace C_2

Nejdelší kořen je $2\alpha_1 + \alpha_2$. Mřížka F_M je potom

$$F_M(C_2)^- = \left\{ \left(\frac{s_1}{M}, \frac{s_2}{M} \right) \mid s_0, s_1, s_2 \in \mathbb{N}, s_0 + 2s_1 + s_2 = M \right\}.$$

Koeficient $c = 8$.

S-funkce splňují relaci ortogonalitu

$$\begin{aligned}\langle S_{(a,b)} | S_{(a',b')} \rangle_{F_M} &= 8 \sum_{s \in F_M^-} S_{(a,b)}(s) S_{(a',b')}(s) = \\ &= \begin{cases} 0, & \text{jestliže } a \neq a' \text{ nebo } b \neq b', \\ 16M^2, & \text{jinak.} \end{cases}\end{aligned}$$

4.2.3 Diskretizace A_2

Nejdelší kořen je $\alpha_1 + \alpha_2$. Mřížka F_M^- je potom

$$F_M(A_2)^- = \left\{ \left(\frac{s_1}{M}, \frac{s_2}{M} \right) \mid s_0, s_1, s_2 \in \mathbb{N}, s_0 + s_1 + s_2 = M \right\}.$$

Koeficient $c = 6$.

S-funkce splňují relaci ortogonalitu

$$\begin{aligned}\langle S_{(a,b)} | S_{(a',b')} \rangle_{F_M} &= 6 \sum_{s \in F_M^-} S_{(a,b)}(s) S_{(a',b')}(s) = \\ &= \begin{cases} 0, & \text{jestliže } a \neq a' \text{ nebo } b \neq b', \\ 18M^2, & \text{jinak.} \end{cases}\end{aligned}$$

4.2.4 Diskretizace G_2

Nejdelší kořen je $2\alpha_1 + 3\alpha_2$. Mřížka F_M^- je potom

$$F_M(G_2)^- = \left\{ \left(\frac{s_1}{M}, \frac{s_2}{M} \right) \mid s_0, s_1, s_2 \in \mathbb{N}, s_0 + 2s_1 + 3s_2 = M \right\}.$$

Koeficient $c = 12$.

S-funkce splňují relaci ortogonalitu

$$\begin{aligned}\langle S_{(a,b)} | S_{(a',b')} \rangle_{F_M} &= 12 \sum_{s \in F_M^-} S_{(a,b)}(s) S_{(a',b')}(s) = \\ &= \begin{cases} 0, & \text{jestliže } a \neq a' \text{ nebo } b \neq b', \\ 12M^2, & \text{jinak.} \end{cases}\end{aligned}$$

Kapitola 5

Použití diskretních rozvojů Fourierova typu

Cílem této práce bylo použít zobecněné Fourierovy transformace na konkrétní funkce. V článcích [3, 4, 5] autoři Patera a Zaratsyan použili diskretní rozvoj do funkcí na orbitách na charakteristické funkce. Nejdříve použili diskretní rozvoj na digitální data určená body charakteristické funkce na diskretní 2D mřížce F_M . Poté na výsledná data použili spojitě rozšíření. My jsme se v této práci pokusili jejich výsledky zopakovat.

Postup je následující:

- i) Nejdříve zavedeme funkci $\tilde{f}$ na mřížce F_M tím způsobem, že budeme uvažovat původní funkci f pouze v bodech mřížky F_M .
- ii) Funkci $\tilde{f}$ rozvineme do řady funkcí na orbitách, at' už symetrických či antisymetrických vůči afinní Weylově grupě.
- iii) Výsledek potom spojitě rozšíříme na celou fundamentální oblast. Tím získáme aproximaci f_{cont} původní funkce f .

Začneme od transformací na $A_1 \times A_1$ a C_2 . Fundamentální oblasti jsou vnitřky simplexů. Zvolme souřadnice jejich vrcholů vzhledem k ortonormální bázi následovně:

$$F(A_1 \times A_1) = \left\{ (0, 0), \left(\frac{1}{2}, 0 \right), \left(0, \frac{1}{2} \right), \left(\frac{1}{2}, \frac{1}{2} \right) \right\},$$
$$F(C_2) = \left\{ (0, 0), \left(\frac{1}{2}, 0 \right), \left(0, \frac{1}{2} \right) \right\}.$$

Charakteristickou funkci zvolíme následovně:

$$f_{\text{sq}}(x, y) = \begin{cases} 1 & \text{pro } 0,3 < x < 0,45 \text{ a } 0,05 < y < 0,2, \\ 0 & \text{jinde v } F. \end{cases} \quad (5.1)$$

$A_1 \times A_1$	Rozvoj do C-funkcí		Rozvoj do S-funkcí	
M	Kvadr. Odchylka	Čas[s]	Kvadr. Odchylka	Čas[s]
8	0,0083	0,7	0,0110	0,5
16	0,0021	6,2	0,0025	3,8
32	0,0019	82,5	0,0018	59,2
64	0,0006	1260,8	0,0006	1039,5
C_2	Rozvoj do C-funkcí		Rozvoj do S-funkcí	
M	Kvadr. Odchylka	Čas[s]	Kvadr. Odchylka	Čas[s]
8	0,0111	0,4	0,0160	0,3
16	0,0030	1,1	0,0039	0,4
32	0,0017	8,7	0,0018	5,3
64	0,0006	112,2	0,0006	89,5

Tabulka 5.1: Rozvoj charakteristické funkce f_{sq} do C-funkcí a S-funkcí na diskretní mřížce řádu M umístěné ve fundamentální oblasti $F(A_1 \times A_1)$ a $F(C_2)$ a následné spojitě rozšíření. Druhý a čtvrtý sloupec obsahují informace o kvadratické odchylce spojitěho rozšíření diskretního rozvoje od původní funkce f_{sq} . Třetí a pátý sloupec obsahují informace o době výpočtu rozvoje.

Volba f_{sq} není náhodná. Takto zvolená funkce leží celá ve vnitřku fundamentálních oblastí $F(A_1 \times A_1)$ a $F(C_2)$. To je dobré z toho důvodu, že do S-funkcí lze rozvíjet jen funkce nulové na hranici fundamentální oblasti. Výsledné rozvoje funkce f_{sq} do C-funkcí i S-funkcí jsou pro mřížky řádů $M = 8, 16, 32, 64$ zobrazeny na obrázcích 5.1, 5.2 pro $A_1 \times A_1$ a 5.3, 5.4 pro C_2 . Vlastnosti této aproximace jako kvadratická odchylka od původní funkce f_{sq} a doba jejího výpočtu v programu MATLAB jsou uvedeny v tabulce 5.1.

V článcích [4, 5] autoři aplikovali spojitě rozšíření diskretních rozvojeů na charakteristickou funkci s trojúhelníkovitým nosičem. My se pokusíme o totéž, nicméně nepoužijeme stejný trojúhelník. Použijeme trojúhelník podobný, ale o něco zmenšený. A to z důvodu, aby se celý vešel jak do fundamentální oblasti $F(A_2)$ tak do fundamentální oblasti $F(G_2)$.

Ve zmíněných článcích autoři zvolili fundamentální oblasti jako simplex s vrcholy:

$$F(A_2) = \left\{ (0, 0), (1, 0), \left(\frac{1}{2}, \frac{\sqrt{3}}{2} \right) \right\},$$

$$F(G_2) = \left\{ \left(-\frac{1}{4}, \frac{\sqrt{3}}{4} \right), \left(\frac{3}{4}, \frac{\sqrt{3}}{4} \right), \left(\frac{3}{4}, \frac{\sqrt{3}-2}{4} \right) \right\}.$$

Charakteristickou funkci zvolili následovně:

$$f_{\text{tr}}(x, y) = \begin{cases} 1 & \text{pro } (x, y) \in \left\{ \left(\frac{1}{4}, \frac{\sqrt{3}}{4} \right), \left(\frac{3}{4}, \frac{\sqrt{3}}{4} \right), \left(\frac{1}{2}, 0 \right) \right\}, \\ 0 & \text{jinde v } F. \end{cases} \quad (5.2)$$

Jak už jsme napsali, my zvolíme charakteristickou funkci podobnou, nicméně o něco zmenšenou a umístěnou uvnitř fundamentální oblasti. Pro $F(A_2)$ bude nosič charakteristické funkce uvnitř útvaru omezeného přímkami:

$$y \leq \frac{\sqrt{3}}{4} - 0,05, \quad y \geq -\sqrt{3}x + \frac{\sqrt{3}}{2} + 0,05, \quad y \geq \sqrt{3}x - \frac{\sqrt{3}}{2} + 0,05. \quad (5.3)$$

Takto definovanou funkci označme f_{tr}^1 .

Dále zvolíme jinak i souřadnice vrcholů fundamentální oblasti $F(G_2)$ vzhledem k ortonormální bázi a to následovně:

$$F(G_2) = \left\{ (0, 0), (0, 1), \left(\frac{1}{2}, 1 \right) \right\}.$$

Do takto zvolené fundamentální oblasti umístíme nosič charakteristické funkce mezi přímkami:

$$0,01 \leq x, \quad x \leq \sqrt{3}y - \frac{\sqrt{3}}{2} - 0,09, \quad x \leq -\sqrt{3}y + \frac{\sqrt{3}}{2} - 0,09. \quad (5.4)$$

Tuto funkci označme f_{tr}^2 . Takto zvolený trojúhelník je stejný jako v případě (5.3) nicméně otočený a posunutý.

Výsledné rozvoje funkce f_{tr}^1 resp. f_{tr}^2 do C-funkcí i S-funkcí jsou pro mřížky řádů $M = 16, 32, 64$ zobrazeny na obrázcích 5.5, 5.6 pro A_2 resp. 5.7, 5.8 pro G_2 . Vlastnosti těchto aproximací jako kvadratická odchylka od původní funkce f_{tr}^1 resp. f_{tr}^2 a doby výpočtu v programu MATLAB jsou uvedeny v tabulce 5.2.

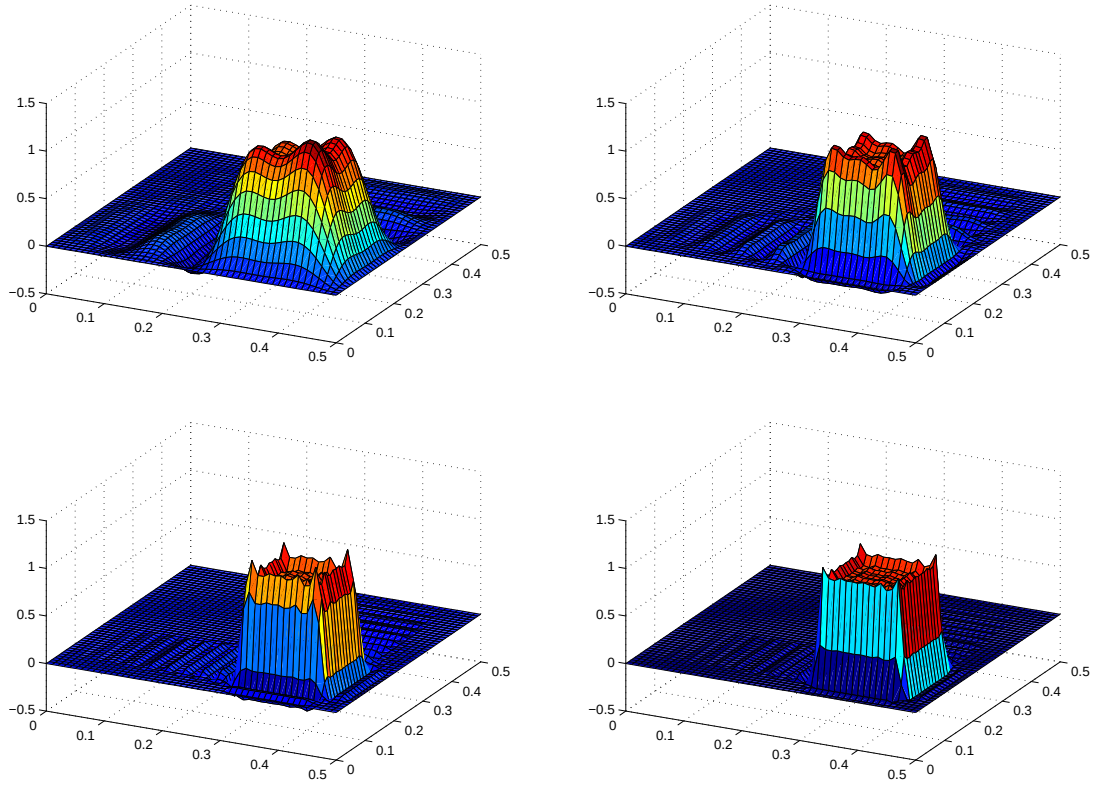
Poznámka 5.0.2. Z uvedených výsledků plyne několik závěrů:

- i) Pro rostoucí řád mřížky M spojitá rozšíření diskrétní transformace f_{cont} stále lépe aproximují původní funkci f .
- ii) Kvalita aproximace je v případě $A_1 \times A_1$ a C_2 přibližně stejná pro shodný řád mřížky M .
- iii) V případě A_2 a G_2 je kvalita srovnatelná pro mřížky $F_M(A_2)$ a $F_{2M}(G_2)$. Tj. G_2 vyžaduje vyšší řád mřížky než A_2 pro srovnatelné výsledky.

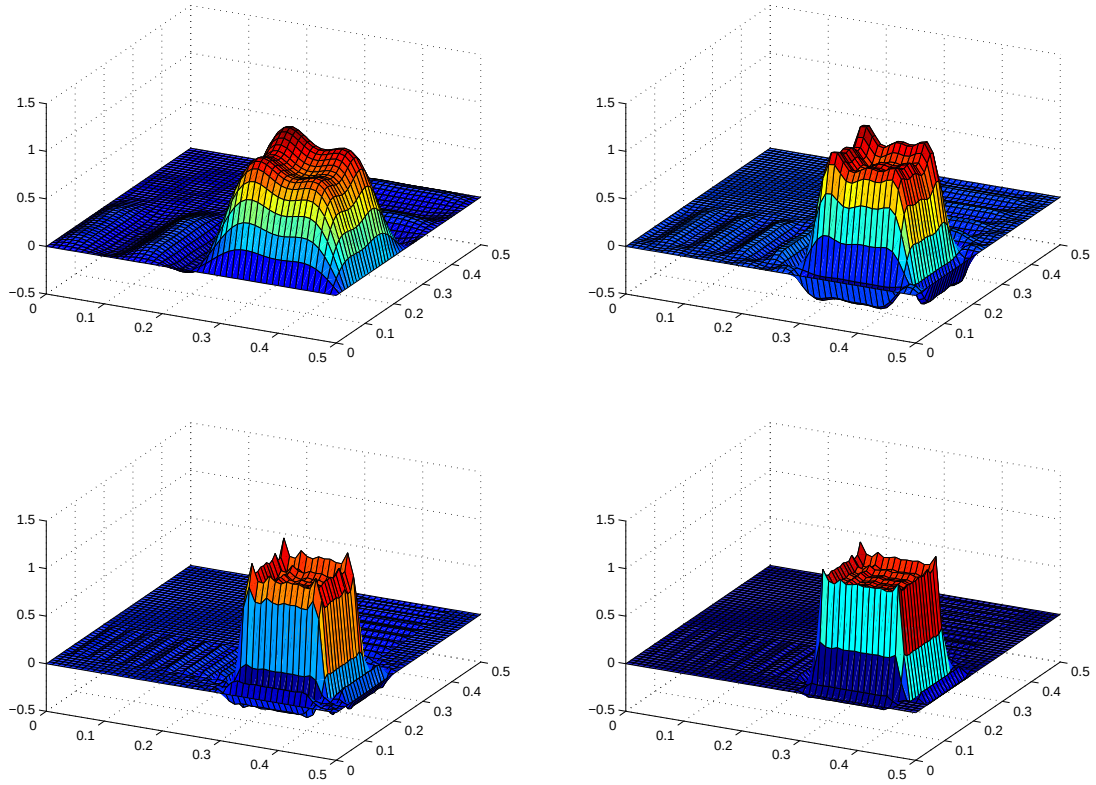
A_2	Rozvoj do C-funkcí		Rozvoj do S-funkcí	
M	Kvadr. Odchylka	Čas[s]	Kvadr. Odchylka	Čas[s]
8	0,0200	0,5	0,0210	0,1
16	0,0106	2,7	0,0111	1,6
32	0,0094	32,5	0,0095	23,3
64	0,0034	485,0	0,0034	357,3
G_2	Rozvoj do C-funkcí		Rozvoj do S-funkcí	
M	Kvadr. Odchylka	Čas[s]	Kvadr. Odchylka	Čas[s]
8	0,0637	0,2	0,0637	0,2
16	0,0259	0,6	0,0204	0,3
32	0,0099	3,2	0,0071	2,2
64	0,0055	25,3	0,0050	16,3

Tabulka 5.2: Rozvoj charakteristické funkce f_{tr}^1 resp. f_{tr}^2 do C-funkcí a S-funkcí na diskretní mřížce řádu M umístěné ve fundamentální oblasti $F(A_2)$ resp. $F(G_2)$ a následné spojitě rozšíření. Druhý a čtvrtý sloupec obsahují informace o kvadratické odchylce spojitěho rozšíření diskretního rozvoje od původní funkce f_{tr}^1 resp. f_{tr}^2 . Třetí a pátý sloupec obsahují informace o době výpočtu rozvoje.

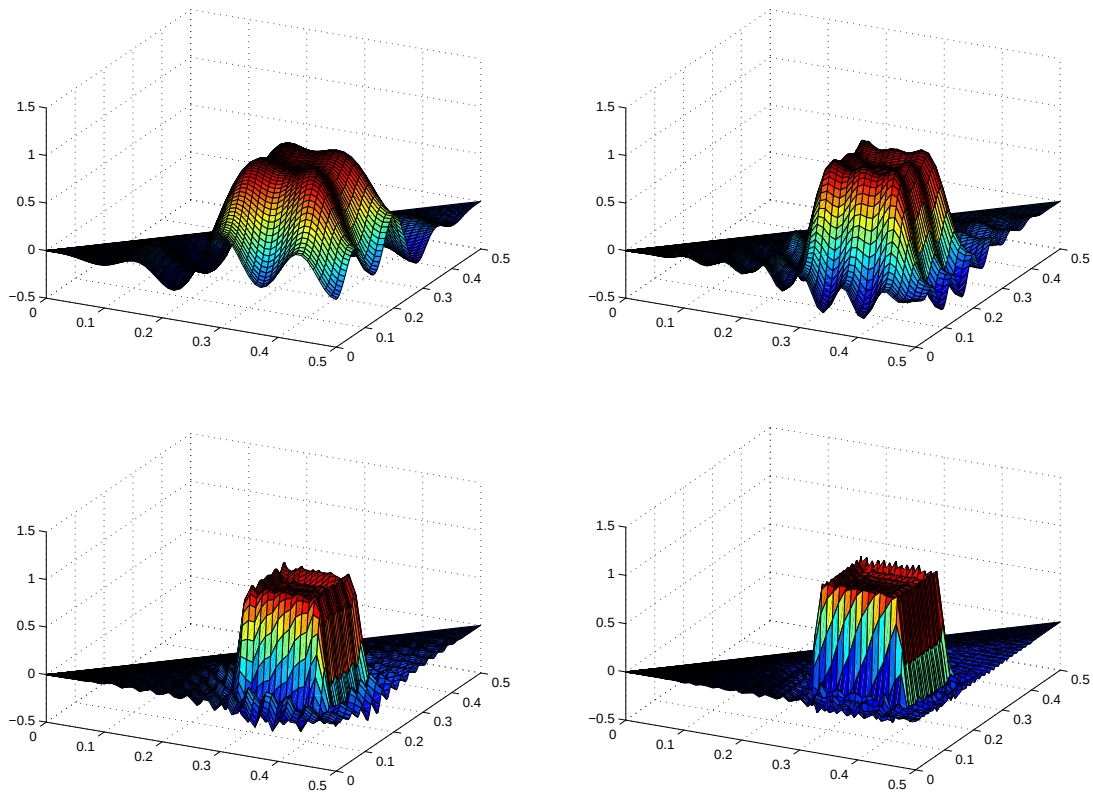
- iv) Doba výpočtu rozvoje pro $A_1 \times A_1$ trvá mnohem déle než pro C_2 . To je způsobeno větším množstvím bodů v $F_M(A_1 \times A_1)$ než v $F_M(C_2)$.
- v) Doba výpočtu rozvoje pro A_2 trvá mnohem déle než pro G_2 . To je způsobeno větším množstvím bodů v $F_M(A_2)$ než v $F_M(G_2)$ a navíc tím, že funkce na orbitách pro A_2 jsou obecně komplexní.
- vi) $A_1 \times A_1$, C_2 a G_2 jsou vhodnější pro aproximaci reálných funkcí zatímco A_2 je vhodnější pro aproximaci komplexních funkcí.



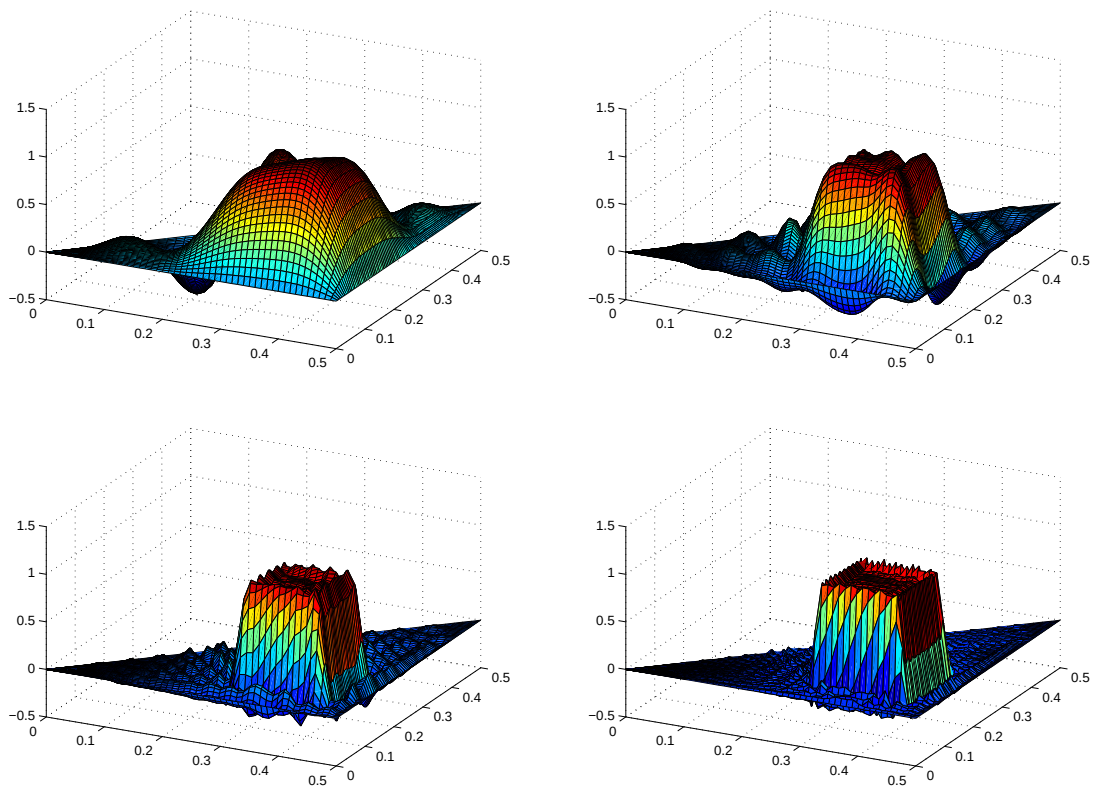
Obrázek 5.1: Rozvoj charakteristické funkce f_{sq} do C-funkcí na mřížce řádu $M = 8, 16, 32, 64$ umístěné ve fundamentální oblasti $F(A_1 \times A_1)$ a následné spojitě rozšíření.



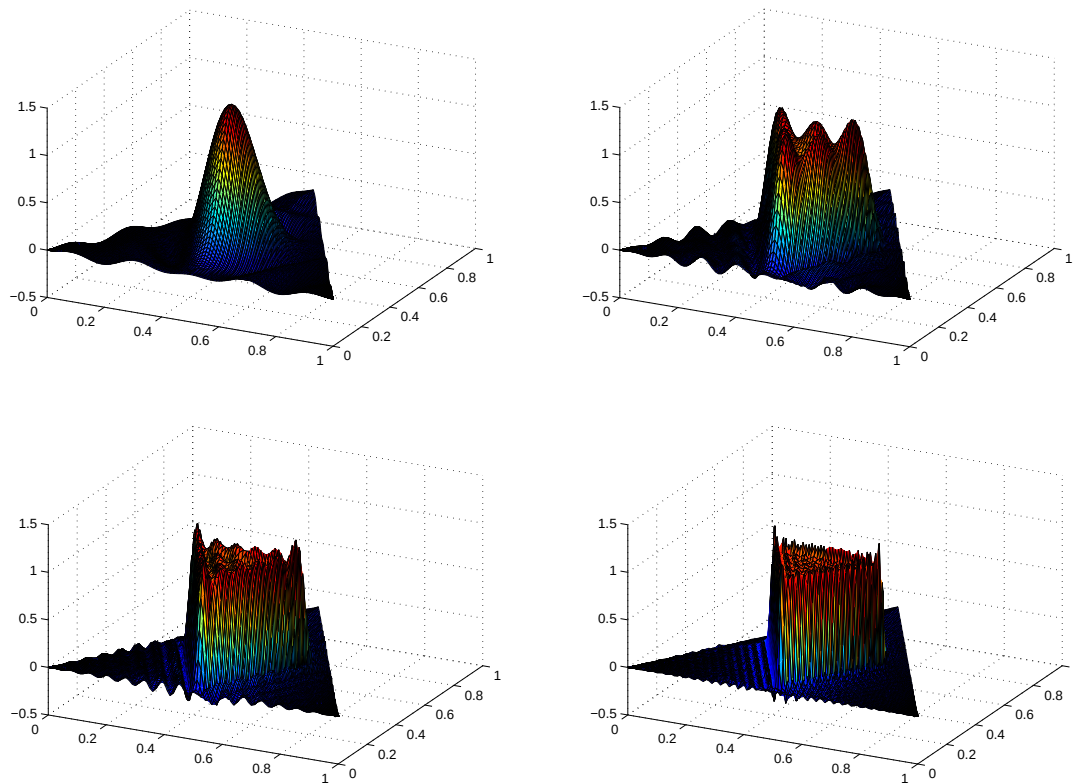
Obrázek 5.2: Rozvoj charakteristické funkce f_{sq} do S-funkcí na mřížce řádu $M = 8, 16, 32, 64$ umístěné ve fundamentální oblasti $F(A_1 \times A_1)$ a následné spojitě rozšíření.



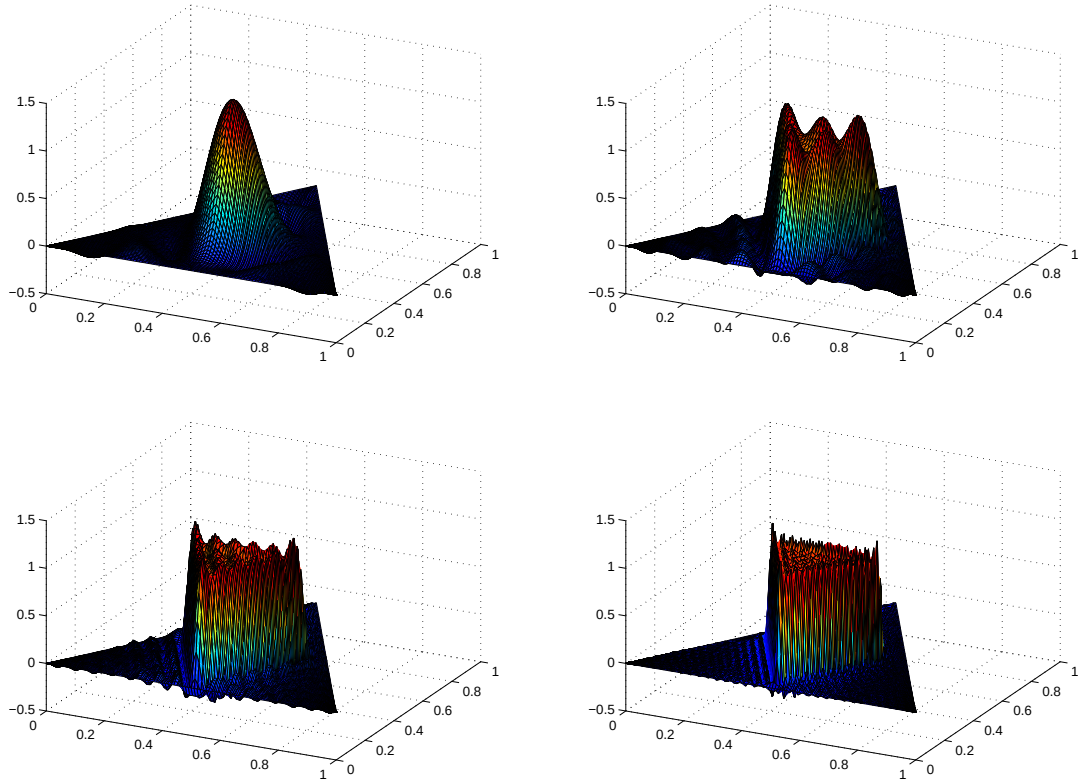
Obrázek 5.3: Rozvoj charakteristické funkce f_{sq} do C-funkcí na mřížce řádu $M = 8, 16, 32, 64$ umístěné ve fundamentální oblasti $F(C_2)$ a následné spojité rozšíření.



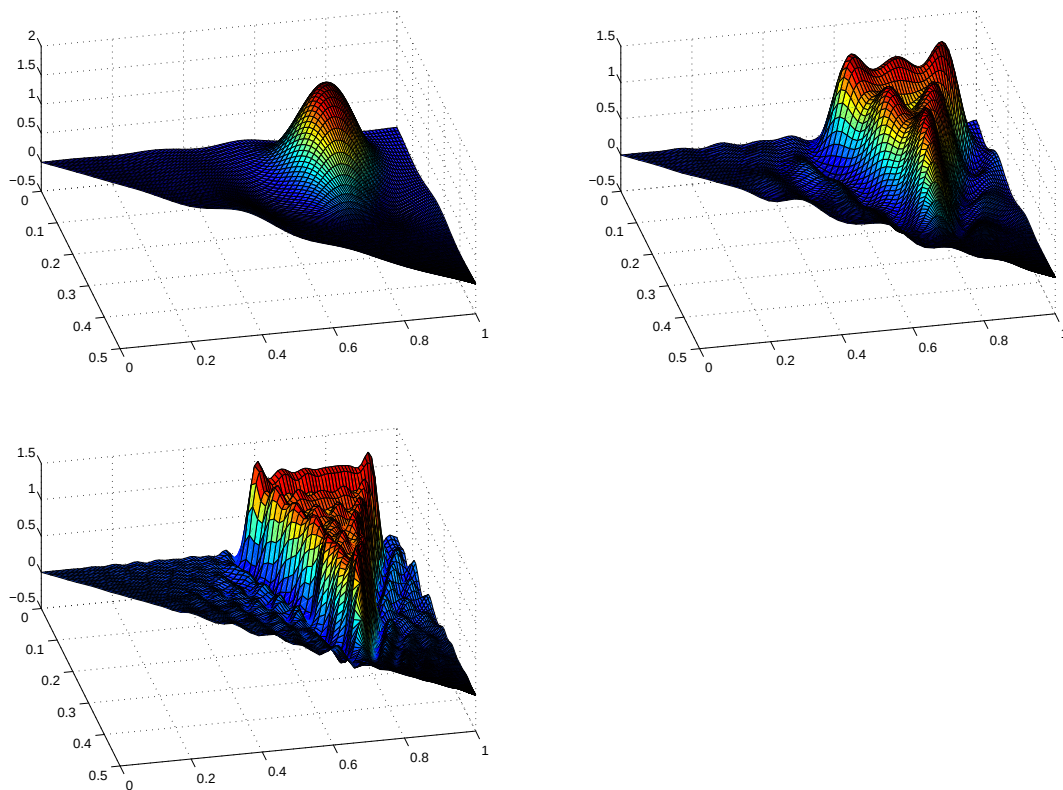
Obrázek 5.4: Rozvoj charakteristické funkce f_{sq} do S-funkcí na mřížce řádu $M = 8, 16, 32, 64$ umístěné ve fundamentální oblasti $F(C_2)$ a následné spojitě rozšíření.



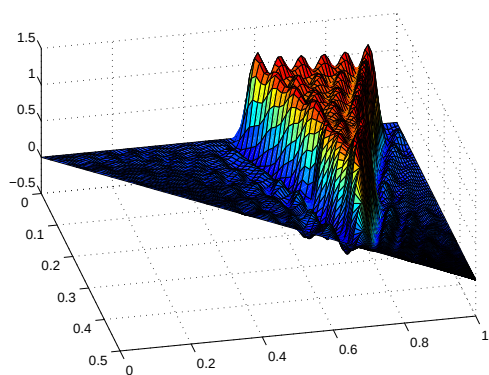
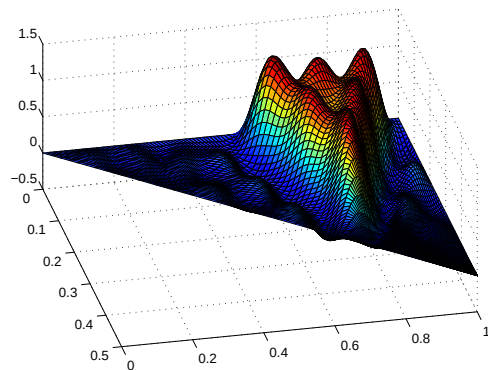
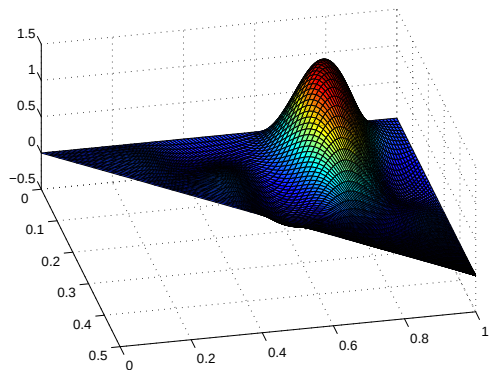
Obrázek 5.5: Rozvoj charakteristické funkce f_{tr}^1 do C-funkcí na mřížce řádu $M = 8, 16, 32, 64$ umístěné ve fundamentální oblasti $F(A_2)$ a následné spojitě rozšíření.



Obrázek 5.6: Rozvoj charakteristické funkce f_{tr}^1 do S-funkcí na mřížce řádu $M = 8, 16, 32, 64$ umístěné ve fundamentální oblasti $F(A_2)$ a následné spojitě rozšíření.



Obrázek 5.7: Rozvoj charakteristické funkce f_{tr}^2 do C-funkcí na mřížce řádu $M = 16, 32, 64$ umístěné ve fundamentální oblasti $F(G_2)$ a následné spojitě rozšíření.



Obrázek 5.8: Rozvoj charakteristické funkce f_{tr}^2 do S-funkcí na mřížce řádu $M = 16, 32, 64$ umístěné ve fundamentální oblasti $F(G_2)$ a následné spojité rozšíření.

Kapitola 6

Konvergence spojitého rozšíření diskretních rozvoju

Funkci f symetrickou vůči afinní Weylově grupě lze rozložit do řady funkcí na orbitách

$$f(x) = \sum_{\lambda \in P^+} c_\lambda \Phi_\lambda(x), \quad (6.1)$$

kde

$$c_\lambda = |W|^{-1} |F|^{-1} \int_F f(x) \overline{\Phi_\lambda(x)} dF. \quad (6.2)$$

Poznámka 6.0.3. Na funkci f je třeba naklást ještě více předpokladů než jen symetrii vůči afinní Weylově grupě. Pro jednoduchost předpokládejme, že f splňuje všechny předpoklady, aby platil vztah (6.1).

Z funkce f na F snadno vyrobíme funkci na mřížce F_M jednoduše omezením $\tilde{f}_M \equiv f|_{F_M}$. $\tilde{f}_M$ umíme napsat jako sumu funkcí na orbitách zúžených na mřížku F_M , konkrétně

$$\tilde{f}_M(s) = \sum_{(a,b) \in S_M} c_{(a,b)}^M \Phi_{(a,b)}(s), \quad s \in F_M, \quad (6.3)$$

kde

$$c_{(a,b)}^M = \frac{\langle f | \Phi_{(a,b)} \rangle_{F_M}}{\langle \Phi_{(a,b)} | \Phi_{(a,b)} \rangle_{F_M}}. \quad (6.4)$$

Ve vztahu (6.3) můžeme diskretní proměnnou s nahradit spojitými proměnnými x, y , potom toto spojité rozšíření funkce $\tilde{f}_M$ označme jako Ψ_M . Ψ_M je funkce hladká na fundamentální oblasti F , navíc v bodech F_M nabývá stejných hodnot jako funkce f .

Je očividné, že funkce Ψ_M aproximuje funkci f na fundamentální oblasti F . Otázkou zůstává, nakolik přesnou tato aproximace je a jestli pro rostoucí M se tato aproximace zpřesňuje. Na první pohled se zdá, že tomu tak skutečně je. Nicméně je nutné

určit třídu funkcí pro které lze tuto konvergenci dokázat. Cílem této kapitoly je najít alespoň základní třídu takovýchto funkcí.

Bud' L Lieova algebra o hodnotě 2. (Poznamenejme znovu, že pracujeme s algebry $A_1 \times A_1$, A_2 , C_2 , G_2 .) Bud' f funkce symetrická vůči afinní Weylově grupě $W^{\text{aff}}(L)$ pro kterou platí (6.1). Bud' $\{\Psi_M(x)\}_{M=1}^\infty$ posloupnost funkcí definovaných výše.

Odhadujeme pro pevně zvolené M následující rozdíl:

$$\begin{aligned}
|f(x) - \Psi_M(x)| &= \left| \sum_{\lambda \in P^+} c_\lambda \Phi_\lambda(x) - \sum_{\lambda \in S_M} c_\lambda^M \Phi_\lambda(x) \right| \leq \\
&\leq \sum_{\lambda \in S_M} |c_\lambda \Phi_\lambda(x) - c_\lambda^M \Phi_\lambda(x)| + \sum_{\substack{\lambda \in P^+ \\ \lambda \notin S_M}} |c_\lambda \Phi_\lambda(x)| \leq \\
&\leq |W| \cdot \sum_{\lambda \in S_M} |c_\lambda - c_\lambda^M| + |W| \cdot \sum_{\substack{\lambda \in P^+ \\ \lambda \notin S_M}} |c_\lambda|. \tag{6.5}
\end{aligned}$$

Zde jsme využili trojúhelníkové nerovnosti a vlastnosti C-funkcí $|\Phi_\lambda(x)| \leq |W|$.

Odhadněme rozdíl $|c_\lambda - c_\lambda^M|$ pro $\lambda \in S_M$. Po využití definitorních vztahů získáme rovnost

$$\begin{aligned}
|c_\lambda - c_\lambda^M| &= \left| c_\lambda - \frac{1}{\langle \Phi_\lambda | \Phi_\lambda \rangle_{F_M}} \langle f | \Phi_\lambda \rangle_{F_M} \right| = \\
&= \left| c_\lambda - \frac{1}{\langle \Phi_\lambda | \Phi_\lambda \rangle_{F_M}} \sum_{s \in F_M} c_s f(s) \overline{\Phi_\lambda}(s) \right| = \\
&= \left| c_\lambda - \frac{1}{\langle \Phi_\lambda | \Phi_\lambda \rangle_{F_M}} \sum_{s \in F_M} c_s \sum_{\mu \in P^+} c_\mu \Phi_\mu(s) \overline{\Phi_\lambda}(s) \right| = \\
&= \left| c_\lambda - \frac{1}{\langle \Phi_\lambda | \Phi_\lambda \rangle_{F_M}} \sum_{\mu \in P^+} c_\mu \sum_{s \in F_M} c_s \Phi_\mu(s) \overline{\Phi_\lambda}(s) \right|. \tag{6.6}
\end{aligned}$$

Nyní přejdeme do konkrétních souřadnic na P^+ . Platí $P^+ = \{a\omega_1 + b\omega_2 \mid a, b \in \mathbb{Z}^+\}$.

Vztah (6.6) tedy přepíšeme do souřadnic

$$\begin{aligned}
|c_{a,b} - c_{a,b}^M| &= \left| c_{a,b} - \frac{1}{\langle \Phi_{a,b} | \Phi_{a,b} \rangle_{F_M}} \sum_{c,d=0}^\infty c_{c,d} \sum_{s \in F_M} c_s \Phi_{c,d}(s) \overline{\Phi_{a,b}}(s) \right| = \\
&= \left| c_{a,b} - \frac{1}{\langle \Phi_{a,b} | \Phi_{a,b} \rangle_{F_M}} \sum_{c,d=0}^\infty c_{c,d} \langle \Phi_{a,b} | \Phi_{a,b} \rangle_{F_M} \delta_{a,c(\text{mod } M)} \delta_{b,d(\text{mod } M)} \right| =
\end{aligned}$$

$$= \left| c_{a,b} - \sum_{c,d=0}^{\infty} c_{c,d} \delta_{a,c(\bmod M)} \delta_{b,d(\bmod M)} \right| = \left| \sum_{\substack{m,n=0 \\ m+n>0}}^{\infty} c_{a+mM,b+nM} \right|. \quad (6.7)$$

Zde jsme využili ortogonalitu C-funkcí na mřížce F_M a toho, že C-funkce mimo S_M jsou pouhým opakováním funkcí z S_M .

Poznámka 6.0.4. V dalším budeme potřebovat následující odhady:

- i) $|c_{k,l}| \leq K_1 |c_{k,l}^F|$, kde $c_{k,l}^F$ je klasický fourierovský koeficient odpovídající funkci $\exp i\pi(kx + ly)$ a K_1 je kladná konstanta dostatečně velká, aby tento odhad platil pro všechny čtyři případy $A_1 \times A_1$, A_2 , C_2 a G_2 .
- ii) Pro fourierovské koeficienty $c_{k,l}^F$ platí odhady $|c_{k,l}^F| \leq \frac{1}{k^r l^{n-r}}$ pro funkci $f \in \mathcal{C}^{(n)}$ a $r = 0, 1, \dots, n$.

Za předpokladu, že $f \in \mathcal{C}^{(4)}$, získáme:

$$\begin{aligned} |c_{a,b} - c_{a,b}^M| &\leq \sum_{\substack{m,n=0 \\ m+n>0}}^{\infty} |c_{a+mM,b+nM}| \leq K_1 \sum_{\substack{m,n=0 \\ m+n>0}}^{\infty} |c_{a+mM,b+nM}^F| = \\ &= K_1 \left\{ \sum_{m,n=1}^{\infty} |c_{a+mM,b+nM}^F| + \sum_{m=1}^{\infty} |c_{a+mM,b}^F| + \sum_{n=1}^{\infty} |c_{a,b+nM}^F| \right\} \leq \\ &\leq K_1 \left\{ \sum_{m,n=1}^{\infty} \frac{1}{(a+mM)^2(b+nM)^2} + \sum_{m=1}^{\infty} \frac{1}{(a+mM)^4} + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{(b+nM)^4} \right\} \leq \\ &\leq K_1 \left\{ \sum_{m,n=1}^{\infty} \frac{1}{(mM)^2(nM)^2} + \sum_{m=1}^{\infty} \frac{1}{(mM)^4} + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{(nM)^4} \right\} = \\ &= \frac{K_1}{M^4} \left\{ \sum_{m,n=1}^{\infty} \frac{1}{(m)^2(n)^2} + \sum_{m=1}^{\infty} \frac{1}{(m)^4} + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{(n)^4} \right\} = \frac{K_2}{M^4}. \end{aligned} \quad (6.8)$$

Další, co potřebujeme odhadnout, je suma $\sum_{\substack{\lambda \in P^+ \\ \lambda \notin S_M}} |c_\lambda|$. Zopakujme, jak vypadá množina S_M :

$$S_M = \{ \Phi_{(a,b)} \mid aq_2 + bq_1 \leq M \}.$$

Poznámka 6.0.5. Bud' $x \in \mathbb{R}$, potom $\lfloor x \rfloor$ značí dolní celou část čísla x .

Za předpokladu, že $f \in \mathcal{C}^{(6)}$, získáme:

$$\sum_{\substack{\lambda \in P^+ \\ \lambda \notin S_M}} |c_\lambda| = \sum_{j=M+1}^{\infty} \sum_{\substack{k=0 \\ \frac{j-q_2k}{q_1} \in \mathbb{Z}}}^{\lfloor \frac{j}{q_2} \rfloor} \left| c_{k, \frac{j-q_2k}{q_1}} \right| =$$

$$\begin{aligned}
&= \sum_{j=M+1}^{\infty} \sum_{\substack{k=1 \\ \frac{j}{q_2} \notin \mathbb{Z}}}^{\lfloor \frac{j}{q_2} \rfloor} \left| c_{k, \frac{j-q_2 k}{q_1}} \right| + \sum_{j=M+1}^{\infty} \sum_{\substack{\frac{j}{q_1} \in \mathbb{Z}}} \left| c_{0, \frac{j}{q_1}} \right| + \sum_{j=M+1}^{\infty} \sum_{\substack{\frac{j}{q_2} \in \mathbb{Z}}} \left| c_{\frac{j}{q_2}, 0} \right| \leq \\
&\leq \sum_{j=M+1}^{\infty} \sum_{\substack{k=1 \\ \frac{j}{q_2} \notin \mathbb{Z}}}^{\lfloor \frac{j}{q_2} \rfloor} \frac{q_1^3}{k^3(j-q_2 k)^3} + \sum_{j=M+1}^{\infty} \sum_{\substack{\frac{j}{q_1} \in \mathbb{Z}}} \frac{q_1^6}{j^6} + \sum_{j=M+1}^{\infty} \sum_{\substack{\frac{j}{q_2} \in \mathbb{Z}}} \frac{q_2^6}{j^6} \leq \\
&\leq \sum_{j=M+1}^{\infty} \sum_{\substack{k=1 \\ \frac{j}{q_2} \notin \mathbb{Z}}}^{\lfloor \frac{j}{q_2} \rfloor} \frac{q_1^3}{(j-1)^3} + \sum_{j=M+1}^{\infty} \sum_{\substack{\frac{j}{q_1} \in \mathbb{Z}}} \frac{q_1^2}{(j-1)^2} + \sum_{j=M+1}^{\infty} \sum_{\substack{\frac{j}{q_2} \in \mathbb{Z}}} \frac{q_2^2}{(j-1)^2} \leq \\
&\leq \sum_{j=M+1}^{\infty} \frac{q_1^3}{(j-1)^2} + \sum_{j=M+1}^{\infty} \frac{q_1^2}{(j-1)^2} + \sum_{j=M+1}^{\infty} \frac{q_2^2}{(j-1)^2} \leq \\
&\leq \{q_1^3 + q_1^2 + q_2^2\} \sum_{j=M}^{\infty} \frac{1}{j(j-1)} = \{q_1^3 + q_1^2 + q_2^2\} \frac{1}{M-1}. \tag{6.9}
\end{aligned}$$

Pro funkci z $\mathcal{C}^{(6)}$ dostáváme:

$$\begin{aligned}
|f(x) - \Psi_M(x)| &\leq |W| \cdot \sum_{\lambda \in S_M} |c_\lambda - c_\lambda^M| + |W| \cdot \sum_{\substack{\lambda \in P^+ \\ \lambda \notin S_M}} |c_\lambda| \leq \\
&\leq |W| \cdot \sum_{\lambda \in S_M} \frac{K_2}{M^4} + |W| \cdot \{q_1^3 + q_1^2 + q_2^2\} \frac{1}{M-1} \leq \\
&\leq |W| \cdot \frac{K_2}{M^2} + |W| \cdot \{q_1^3 + q_1^2 + q_2^2\} \frac{1}{M-1} \leq \frac{K_3}{M-1}. \tag{6.10}
\end{aligned}$$

Využili jsme skutečnosti, že S_M obsahuje nejvýše M^2 prvků.

Výsledek formulujme do věty.

Věta 6.0.6. Bud' $f \in \mathcal{C}^{(6)}$ funkce symetrická vůči afinní Weylově grupě, potom funkční posloupnost Ψ_M konverguje na fundamentální oblasti F stejnoměrně k f .

Poznámka 6.0.7. Podobně bychom mohli postupovat i pro antisymetrické funkce na orbitách.

Literatura

- [1] A. Klimyk, J. Patera, *Orbit Functions*, Symmetry, Integrability and Geometry: Methods and Applications, V.2, Paper 006 (2006).
- [2] A. Klimyk, J. Patera, *Antisymmetric Orbit Functions*, Symmetry, Integrability and Geometry: Methods and Applications, V.3, Paper 023 (2007).
- [3] J. Patera, A. Zaratsyan, *Discrete and continuous cosine transform generalized to Lie groups $SU(2) \times SU(2)$ and $O(5)$* , J. Math. Phys. **46**, 053514 (2006).
- [4] J. Patera, A. Zaratsyan, *Discrete and continuous cosine transform generalized to Lie groups $SU(3)$ and $G(2)$* , J. Math. Phys. **46**, 113506 (2005).
- [5] J. Patera, A. Zaratsyan, *Discrete and continuous sine transform generalized to semisimple Lie groups of rank two*, J. Math. Phys. **47**, 043512 (2006).
- [6] R. V. Moody, J. Patera, *Computation of Character Decompositions of Class Functions on Compact Semisimple Lie Groups*, Mathematics of Computation, **48**, 799 (1987).
- [7] K. Erdmann, M. J. Wildon, *Introduction to Lie Algebras*, Springer-Verlag, London (2006).
- [8] L. Vrána, *Matematická analýza III: Funkční posloupnosti a řady*, Ediční středisko ČVUT, Praha (1986).