České vysoké učení technické v Praze
Fakulta jaderná a fyzikálně inženýrská

DIPLOMOVÁ PRÁCE

2010 Michal Záruba

České vysoké učení technické v Praze
Fakulta jaderná a fyzikálně inženýrská

DIPLOMOVÁ PRÁCE

Teorie a aplikace vlnovodných struktur pro dolně-hybridní ohřev a generaci proudu v termojaderném plazmatu

Autor: Michal Záruba

Vedoucí práce: Ing. Josef Preinhaelter, DrSc.

Praha, 2010

Poděkování

Tímto děkuji mému školiteli, Dr. Josefu Preinhaelterovi, za jeho přátelský přístup a rovněž za poskytnutí hodnotných studijních materiálů. Dále děkuji Dr. Jakubu Urbanovi za přínosné rady a diskuze o programovaní v jazyce Fortran.

Především však děkuji mé rodině, která mi byla vždy nenahraditelnou oporou a zázemím.

Název práce: **Teorie a aplikace vlnovodných struktur pro dolně-hybridní ohřev a generaci proudu v termojaderném plazmatu**

Autor: Michal Záruba

Obor: Matematické inženýrství

Druh práce: Diplomová práce

Vedoucí práce: Ing. Josef Preinhaelter, DrSc. , Ústav fyziky plazmatu AV ČR

Abstrakt: Tato práce se věnuje studiu LH grillu, zpomalovací struktuře složené z řady obdélníkových vlnovodů, napájených z generátoru EM vln s frekvencí v tzv. dolně-hybridním pásmu. Byla určena prostorová spektrální hustota výkonu vyzařovaného grillem do plazmatu. Za tímto účelem byl vytvořen program `ps2d`. Byl použit vrstvový 1D model studeného nehomogenního plazmatu v nehomogenním magnetickém poli spolu s rovinnou geometrií vlnovodů a stěn vakuové nádoby. Pro určení matice odrazu bylo použito adaptivní metody konečných prvků k řešení vlnových rovnic umožňujících započíst vazbu mezi pomalou a rychlou vlnou selfkonzistentně.

Klíčová slova: LH grill, plazma, prostorové spektrum výkonu.

Title: **Theory and application of waveguide structures for the lower hybrid heating and current generation in a thermonuclear plasma**

Author: Michal Záruba

Document: Master thesis

Supervisor: Ing. Josef Preinhaelter, DrSc. , Institute of Plasma Physics AS CR

Abstract: This work is a study of an LH grill, a wave-slowing structure composed of a row of parallel plate waveguides supplied by an EM wave generator operating at a frequency in the so-called lower hybrid band. A spatial spectral density of radiated power by the LH grill into a plasma is obtained. A code called `ps2d` was developped for its evaluation. A 1D slab model of the cold inhomogeneous plasma in an inhomogeneous magnetic field together with the plane geometry of the waveguides and walls of a vacuum vessel is considered. An adaptive FEM tuned to solve wave equations capable to take a coupling between a slow and a fast wave selfconsistently into an account is used to determine reflection matrix components.

Key words: LH grill, plasma, spatial power spectrum.

Obsah

Úvod

Existuje několik způsobů, jak lze dodatečně ohřívat plazma v tokamaku, nebo jak v tomto plazmatu dodatečně vybudit toroidální proud. Jeden z přístupů je radiofrekvenční ohřev (nebo generace proudu), který využívá mikrovln, tedy elektromagnetických vln v pásmu přibližně $(0,1-100)GHz$. Do tohoto pásma spadají i tzv. dolně-hybridní vlny, jejichž frekvence u moderních tokamaků bývá zhruba v rozmezí $(0,8-5)GHz$. Pomocí vln na těchto frekvencích je možné předávat hybnost a energii jak *elektronové*, tak *iontové* složce plazmatu. Avšak v tomto frekvenčím pásmu nelze plazma EM vlnami ozařovat přímo, neboť vakuové vlny se šíří pouze v řídkém plazmatu a plně se odrážejí v oblasti plazmové rezonance (prakticky na povrchu plazmatu). Abychom mohli účinně předávat hybnost a energii nabitým složkám plazmatu, musíme používat zpomalené vlny, které se šíří v plazmatu s hustotou větší, než odpovídá plazmové rezonanci. K vybuzení zpomalených vln (tj. vln s vlnovou délkou větší, než je vakuová vlnová délka příslušná stejné frekvenci) lze použít soustavu vlnovodů nazvanou LH grill.

Na úlohu o vyzařování grillu do plazmatu lze nahlížet jako na zobecněnou difrakční úlohu v rámci klasické teorie EM pole (viz např. [7]). V této úloze jsou výchozím pojmem dopadající (nebo též vybuzené, excitované) vlny v jednotlivých vlnovodech, které následně interagují s plazmatem a část z nich se odráží zpět do vlnovodů. Pokud neuvažujeme nelineární jevy v plazmatu, lze tuto úlohu formulovat pomocí operátoru rozptylu. Tedy lze najít lineární závislost amplitud odražených vln ve vlnovodech na amplitudách vln vlnovody excitovaných.

V první kapitole blíže charakterizujeme námi uvažovaný dolně-hybridní grill a pomocí rozvoje v řadu vlastních modů vlnovodů popisujeme EM pole, které lze tímto grillem vybudit.

Druhá kapitola je věnována výpočtu matice operátoru rozptylu, přičemž je v ní zaveden a využíván formalismus operátoru odrazu (odrazu dopadajících vln od povrchu plazmatu), ovšem výpočtu komponent matice odrazu je věnována následující samostatná kapitola.

Ve třetí kapitole uvádíme, jakým způsobem úlohu o odrazu řešíme. Formulujeme okrajovou úlohu pro jistou soustavu diferenciálních rovnic druhého řádu, která je následně řešena pomocí numerických rutin založených na adaptivní metodě konečných prvků. V přiblížení vrstvového modelu plazmatu tato metoda umožňuje studovat vliv nehomogenity hustoty plazmatu a nehomogenity intenzity magnetického pole (včetně tzv. střihu magnetického pole, který současná verze programu `ps2d` nezahrnuje) na šíření pomalé a rychlé vlny. Rovněž umožňuje konzistentně uvážit vliv dostupnosti (accessibility) vln a vliv tvorby prostorových rezonancí na vyzařované spektrum. Dostupností zde míníme fakt, že pro malé zpomalení ($1 < N_z < N_{acc}$) dochází ke konverzi pomalé vlny na rychlou, která se vrací zpět k okraji plazmatu. Prostorové rezonance vznikají pro speciální hodnoty vlnových vektorů dopadajících vln, kdy se na smyčku pomalá-rychlá vlna vejde celistvý počet čtvrtvln.

Čtvrtá kapitola se věnuje výpočtu prostorové spektrální hustoty přeneseného výkonu LH grillem, který vyzařuje do plazmatu. Jelikož následně odvozená spektrální hustota závisí jak na komponentách matice odrazu, tak na amplitudách odražených vln ve vlnovodech, je nutné ji vyhodnocovat numericky. Za tímto účelem byl vyvinut program `ps2d`, který mimo svých vlastních rutin využívá již zmíněné rutiny na bázi adaptivních konečných prvků. Samotný kód byl realizován v jazyce Fortran, ve standardu F90 a vyšším (viz např. [11]), přičemž je užito numerických knihoven IMSL od Visual Numerics [13] (zejména k řešení soustav lineárních algebraických rovnic a k výpočtu uzlů a vah pro Gaussovu integrační metodu).

V celé této práci využíváme soustavu jednotek SI. Maxwellovy rovnice pro EM pole ve vakuu mají tedy podobu

$$\nabla \cdot \vec{E} = 0 \qquad \nabla \cdot \vec{H} = 0$$

$$\nabla \times \vec{E} = -\mu_0 \frac{\partial \vec{H}}{\partial t} \qquad \nabla \times \vec{H} = \varepsilon_0 \frac{\partial \vec{E}}{\partial t}$$

a v případě EM polí v plazmatu používáme

$$\nabla \cdot \vec{E} = \frac{1}{\varepsilon_0}\rho \qquad \nabla \cdot \vec{H} = 0$$

$$\nabla \times \vec{E} = -\mu_0 \frac{\partial \vec{H}}{\partial t} \qquad \nabla \times \vec{H} = \vec{j} + \varepsilon_0 \frac{\partial \vec{E}}{\partial t} \equiv \varepsilon_0 \frac{\partial \vec{D}}{\partial t},\ \vec{D} = \epsilon \vec{E}.$$

Kapitola 1

EM pole ve vlnovodech

1.1 LH grill

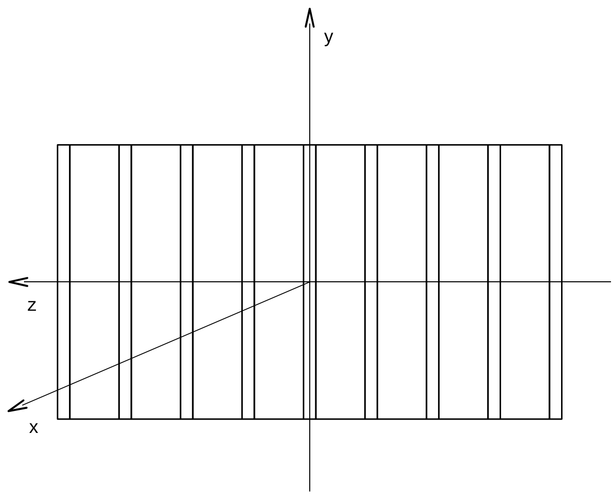
Zde uvažovaný LH grill se skládá z N paralelních vlnovodů s obdélníkovými příčnými průřezy o společné výšce h. r-tý vlnovod má šířku w_r a jeho dutina je mj. vymezena dvojicí svislých přepážek o tloušťkách d_r a d_{r+1}. Ústí jednotlivých vlnovodů leží v jedné rovině, v tzv. rovině ústí grillu, která je kolmá na podélné hrany vlnovodů. Tato soustava vlnovodů, tedy námi uvažovaný grill, vytíná jako celek rovněž obdélníkový útvar v rovině svého ústí. Na Obrázku 1.1 je schématicky zobrazen nárys takového grillu s osmi stejnými vlnovody.[1] Na zmíněném obrázku je také načrtnut uvažovaný souřadný systém, který je popsán níže.

1.1.1 Souřadný systém

Souřadný systém je zvolen kartézský, jehož počátek je umístěn do průsečíku tří následujících rovin. První z nich je rovina ústí grillu, druhá z nich je vodorovná rovina symetrie grillu a třetí je svislá rovina symetrie.[2] Souřadnicové osy x, y, z definujeme následovně. Osa x je průsečnice zmíněných dvou rovin symetrie grillu a směřuje vstříc povrchu plazmatu, tj. do středu tokamaku. Osa y je průsečnice roviny ústí grillu se svislou rovinou symetrie a směřuje vzhůru. Osa z je průsečnice roviny ústí grillu s vodorovnou rovinou symetrie a je orientovaná tak, aby náš souřadný systém byl pravotočivý, tedy například

[1] Tedy se stejným počtem, jaký má grill tokamaku Compass. Když už jsme zmínili pojem tokamak, dodejme, že ustí grillu bývá obvykle vsazeno do stěny vakuové nádoby tokamaku.

[2] Přesněji, námi uvažovaný grill obecně nemusí mít svislou rovinu symetrie. Pro tento případ ona svislá rovina bude rovinou symetrie prostřední přepážky, resp. prostředního vlnovodu, v závislosti na tom, zda bude počet vlnovodů N číslem sudým, resp. lichým.



Obrázek 1.1: Schéma grillu

při pohledu skrz grill do středu tokamaku osa z směřuje doprava. V takto definovaném souřadném systému lze ztotožnit rovinu ústí grillu s rovinou $x = 0$, rovinu vodorovné symetrie s rovinou $y = 0$ a rovinu svislé symetrie grillu s rovinou $z = 0$.

1.2 Rozvoj polí uvnitř vlnovodů

1.2.1 Celkové pole

Nyní rozvineme elektromagnetické pole uvnitř vlnovodů v řadu vlastních modů. V následujícím budeme zapisovat symboly

$$\sum_{(m,\,p)\,\in\,\mathbb{N}_0\times\mathbb{N}_0\,\setminus\,\{(0,\,0)\}} \quad \text{a} \quad \sum_{r=1}^{N} \quad \text{zkráceně, tedy jako} \quad \sum_{(m,\,p)} \quad \text{a} \quad \sum_{r} \; .$$

Začněme elektrickým polem, které lze po složkách zapsat takto (viz [8])

$$E^x = -\sum_r \sum_{(m,\,p)} \left\{ \left(A_{mpr} e^{i\lambda_{mp} x} + B_{mpr} e^{-i\lambda_{mp} x} \right) \frac{2}{\sqrt{w_r h}} \right.$$
$$\left. \times\, \chi_r\, e^{i(\varphi_r - \omega t)} \sin\left[\frac{m\pi}{h} \left(y - y_r \right) \right] \sin\left[\frac{p\pi}{w_r} \left(z - z_r \right) \right] \right\} \tag{1.1}$$

$$E^y = -\sum_r \sum_{(m,\,p)} \Bigg\{ \Bigg[\frac{i\lambda_{mp}}{\nu_{mp}^2} \Big(A_{mpr} e^{i\lambda_{mp}x} - B_{mpr} e^{-i\lambda_{mp}x} \Big) \frac{m\pi}{h} \frac{2}{\sqrt{w_r h}} + \frac{i\omega\mu_0}{\mu_{mp}^2} \Big(C_{mpr} e^{i\varkappa_{mp}x} + D_{mpr} e^{-i\varkappa_{mp}x} \Big) \frac{p\pi}{w_r} \sqrt{\frac{\zeta_p\zeta_m}{w_r h}} \Bigg] \times \chi_r\, e^{i(\varphi_r-\omega t)} \cos\Big[\frac{m\pi}{h}\,(y-y_r)\Big]\, \sin\Big[\frac{p\pi}{w_r}\,(z-z_r)\Big] \Bigg\} \tag{1.2}$$

$$E^z = -\sum_r \sum_{(m,\,p)} \Bigg\{ \Bigg[\frac{i\lambda_{mp}}{\nu_{mp}^2} \Big(A_{mpr} e^{i\lambda_{mp}x} - B_{mpr} e^{-i\lambda_{mp}x} \Big) \frac{p\pi}{w_r} \frac{2}{\sqrt{w_r h}} - \frac{i\omega\mu_0}{\mu_{mp}^2} \Big(C_{mpr} e^{i\varkappa_{mp}x} + D_{mpr} e^{-i\varkappa_{mp}x} \Big) \frac{m\pi}{h} \sqrt{\frac{\zeta_p\zeta_m}{w_r h}} \Bigg] \times \chi_r\, e^{i(\varphi_r-\omega t)} \sin\Big[\frac{m\pi}{h}\,(y-y_r)\Big]\, \cos\Big[\frac{p\pi}{w_r}\,(z-z_r)\Big] \Bigg\}. \tag{1.3}$$

Příslušné magnetické pole lze po složkách zapsat následovně (opět viz [8])

$$H^x = \sum_r \sum_{(m,\,p)} \Bigg\{ \Big(C_{mpr} e^{i\varkappa_{mp}x} + D_{mpr} e^{-i\varkappa_{mp}x} \Big) \sqrt{\frac{\zeta_p\zeta_m}{w_r h}} \times \chi_r\, e^{i(\varphi_r-\omega t)} \cos\Big[\frac{m\pi}{h}\,(y-y_r)\Big]\, \cos\Big[\frac{p\pi}{w_r}\,(z-z_r)\Big] \Bigg\} \tag{1.4}$$

$$H^y = \sum_r \sum_{(m,\,p)} \Bigg\{ \Bigg[\frac{i\omega\varepsilon_0}{\nu_{mp}^2} \Big(A_{mpr} e^{i\lambda_{mp}x} + B_{mpr} e^{-i\lambda_{mp}x} \Big) \frac{p\pi}{w_r} \frac{2}{\sqrt{w_r h}} - \frac{i\varkappa_{mp}}{\mu_{mp}^2} \Big(C_{mpr} e^{i\varkappa_{mp}x} - D_{mpr} e^{-i\varkappa_{mp}x} \Big) \frac{m\pi}{h} \sqrt{\frac{\zeta_p\zeta_m}{w_r h}} \Bigg] \times \chi_r\, e^{i(\varphi_r-\omega t)} \sin\Big[\frac{m\pi}{h}\,(y-y_r)\Big]\, \cos\Big[\frac{p\pi}{w_r}\,(z-z_r)\Big] \Bigg\} \tag{1.5}$$

$$
\begin{aligned}
H^z = -\sum_r \sum_{(m,\,p)} \Bigg\{ \Bigg[& \frac{i\omega\varepsilon_0}{\nu_{mp}^2} \Big(A_{mpr} e^{i\lambda_{mp}x} + B_{mpr} e^{-i\lambda_{mp}x} \Big) \frac{m\pi}{h} \frac{2}{\sqrt{w_r h}} \\
& + \frac{i\varkappa_{mp}}{\mu_{mp}^2} \Big(C_{mpr} e^{i\varkappa_{mp}x} - D_{mpr} e^{-i\varkappa_{mp}x} \Big) \frac{p\pi}{w_r} \sqrt{\frac{\zeta_p\zeta_m}{w_r h}} \Bigg] \\
& \times \chi_r \, e^{i(\varphi_r - \omega t)} \cos\Big[\frac{m\pi}{h} (y - y_r) \Big] \sin\Big[\frac{p\pi}{w_r} (z - z_r) \Big] \Bigg\},
\end{aligned}
\tag{1.6}
$$

přičemž y_r značí souřadnici dna r-tého vlnovodu, tedy

$$
y_r = -\frac{h}{2} \quad , \quad \forall r \in \hat{N}, \tag{1.7}
$$

z_r značí souřadnici pravé[3] stěny r-tého[4] vlnovodu, pro niž platí

$$
\begin{aligned}
z_r = & \sum_{k=1}^{r-1} w_k + \sum_{k=1}^{r-1} d_{k+1} + \frac{1}{4} \left[1 + (-1)^N \right] d_{[N/2]_F+1} \\
& - \frac{1}{4} \left[1 + (-1)^{N+1} \right] w_{[N/2]_F+1} - \sum_{k=1}^{[N/2]_F} d_{k+1} - \sum_{k=1}^{[N/2]_F} w_k \ ,
\end{aligned}
\tag{1.8}
$$

kde symbol $[\,.\,]_F$ značí zobrazení, které svému obecně reálnému argumentu přiřazuje jeho celou část, tj. je definováno takto

$$
[x]_F \equiv \max_{a \in I_x} a, I_x = \{ b \in \mathbb{Z} \mid b \leq x \}, \tag{1.9}
$$

χ_r značí charakteristickou funkci množiny bodů tvořících dutinu r-tého vlnovodu, která lze vyjádřit pomocí Heavisideovy θ-funkce jako[5]

$$
\chi_r(y,z) = [\theta(y - y_r) - \theta(y - y_r - h)][\theta(z - z_r) - \theta(z - z_r - w_r)] \ , \tag{1.10}
$$

ζ_p značí následující funkci

$$
\zeta_p \equiv \begin{cases} 1, & \text{pro } p = 0 \\ 2, & \text{pro } p \neq 0, \end{cases} \tag{1.11}
$$

[3]Vzhledem k situaci na Obrázku 1.1.

[4]Pořadí je dáno podmínkou $z_1 < z_2 < z_3 < ... < z_N$.

[5]$\theta(x) = 1$ pro $x > 0, \theta(x) = 0$ pro $x < 0$.

$\varkappa_{mp} (= \lambda_{mp})$ značí[6]

$$\varkappa_{mp} = \begin{cases} \sqrt{k_0^2 - \mu_{mp}^2} & , \text{pro } k_0^2 \geq \mu_{mp}^2 \\ i\sqrt{\mu_{mp}^2 - k_0^2} & , \text{pro } k_0^2 < \mu_{mp}^2 \end{cases} , \tag{1.12}$$

$\mu_{mp} (= \nu_{mp})$ značí

$$\mu_{mp} = \sqrt{\left(\frac{p\pi}{w_r}\right)^2 + \left(\frac{m\pi}{h}\right)^2} , \tag{1.13}$$

a konečně φ_r je fázový posuv r-tého vlnovodu.

1.2.2 TE a TM mody blíže

Lze se snadno přesvědčit, že uvažovaná konfigurace vlnovodů nepřipouští TEM mody, tedy mody transversálně elektro-magnetické. Tento fakt je ostatně zřejmý z výše uvedených rozvojů EM polí uvnitř vlnovodů.

Prvním přípustným modem vůbec je TE (transversálně elektrický) mod při[7] $m = 1, p = 0$, tedy TE_{10}, následován TE_{01}, TE_{11}, atd. Z TM (transversálně magnetických) modů je prvním přípustným TM_{11}.

Obvykle jsou příčné rozměry vlnovodů voleny tak, aby právě základní (nebo též fundamentální) mod TE_{10} byl šířícím se modem a všechny vyšší mody, ať už TE či TM, byly evanescentní. Přirozený požadavek na omezenost polí potom v případě evanescentních vln vede k eliminaci amplitud jejich dopředných složek, tj. C_{mpr} u TE a A_{mpr} u TM modů. Zohledníme-li tuto volbu, potom pro TE mody explicitně dostáváme ($E^x_{TE} = 0$)

[6] $k_0 = \frac{\omega}{c} = \omega\sqrt{\varepsilon_0 \mu_0}$ je tzv. vakuové vlnové číslo pro kruhovou frekvenci zdroje ω, kde ε_0 a μ_0 jsou po řadě permitivita a permeabilita vakua.

[7] Předpokládáme, že $w_r < h, \forall r \in \hat{N}$.

$$
\begin{aligned}
E_{TE}^{y} = -\sum_{r\in\hat{N}} \Bigg\{ \Bigg[& \sum_{(m,\,p)\in\{0\}\times\mathbb{N}} D_{0pr}\, e^{\left(\sqrt{\left(\frac{p\pi}{w_r}\right)^2 - k_0^2}x\right)} \frac{i\omega\mu_0}{p\pi}\sqrt{\frac{2w_r}{h}} \\
& \qquad \times \sin\left[\frac{p\pi}{w_r}\left(z - z_r\right)\right] \\
& + \sum_{(m,\,p)\in\mathbb{N}\times\mathbb{N}} D_{mpr}\, e^{\left(\sqrt{\mu_{mp}^2 - k_0^2}x\right)} \frac{2p\pi i\omega\mu_0}{\mu_{mp}^2 w_r\sqrt{w_r h}} \\
& \qquad \times \cos\left[\frac{m\pi}{h}\left(y - y_r\right)\right]\, \sin\left[\frac{p\pi}{w_r}\left(z - z_r\right)\right]\Bigg] \\
& \qquad \times \chi_r\, e^{i(\varphi_r - \omega t)} \Bigg\}
\end{aligned}
\tag{1.14}
$$

$$
\begin{aligned}
E_{TE}^{z} = \sum_{r\in\hat{N}} \Bigg\{ \Bigg[& \left(C_{10r} e^{i\sqrt{k_0^2 - \left(\frac{\pi}{h}\right)^2}x} + D_{10r} e^{-i\sqrt{k_0^2 - \left(\frac{\pi}{h}\right)^2}x}\right) \frac{i\omega\mu_0}{\pi}\sqrt{\frac{2h}{w_r}} \\
& \qquad \times \sin\left[\frac{\pi}{h}\left(y - y_r\right)\right] \\
& + \sum_{(m,\,p)\in\{\mathbb{N}\setminus\{1\}\}\times\{0\}} D_{m0r}\, e^{\left(\sqrt{\left(\frac{m\pi}{h}\right)^2 - k_0^2}x\right)} \frac{i\omega\mu_0}{m\pi}\sqrt{\frac{2h}{w_r}} \\
& \qquad \times \sin\left[\frac{m\pi}{h}\left(y - y_r\right)\right] \\
& + \sum_{(m,\,p)\in\mathbb{N}\times\mathbb{N}} D_{mpr}\, e^{\left(\sqrt{\mu_{mp}^2 - k_0^2}x\right)} \frac{2m\pi i\omega\mu_0}{\mu_{mp}^2 h\sqrt{w_r h}} \\
& \qquad \times \sin\left[\frac{m\pi}{h}\left(y - y_r\right)\right]\, \cos\left[\frac{p\pi}{w_r}\left(z - z_r\right)\right]\Bigg] \\
& \qquad \times \chi_r\, e^{i(\varphi_r - \omega t)} \Bigg\}
\end{aligned}
\tag{1.15}
$$

$$
\begin{aligned}
H_{TE}^{x} = \sum_{r\in\hat{N}} \Bigg\{ \Bigg[& \left(C_{10r} e^{i\sqrt{k_0^2 - \left(\frac{\pi}{h}\right)^2} x} + D_{10r} e^{-i\sqrt{k_0^2 - \left(\frac{\pi}{h}\right)^2} x} \right) \sqrt{\tfrac{2}{w_r h}} \cos\left[\tfrac{\pi}{h}(y-y_r)\right] \\
& + \sum_{(m,\,p)\in\{\mathbb{N}\smallsetminus\{1\}\}\times\{0\}} D_{m0r}\, e^{\left(\sqrt{\left(\frac{m\pi}{h}\right)^2 - k_0^2} x\right)} \sqrt{\tfrac{2}{w_r h}} \cos\left[\tfrac{m\pi}{h}(y-y_r)\right] \\
& + \sum_{(m,\,p)\in\{0\}\times\mathbb{N}} D_{0pr}\, e^{\left(\sqrt{\left(\frac{p\pi}{w_r}\right)^2 - k_0^2} x\right)} \sqrt{\tfrac{2}{w_r h}} \cos\left[\tfrac{p\pi}{w_r}(z-z_r)\right] \\
& + \sum_{(m,\,p)\in\mathbb{N}\times\mathbb{N}} D_{mpr}\, e^{\left(\sqrt{\mu_{mp}^2 - k_0^2} x\right)} \frac{2}{\sqrt{w_r h}} \\
& \times \cos\left[\frac{m\pi}{h}(y-y_r)\right] \cos\left[\frac{p\pi}{w_r}(z-z_r)\right] \Bigg] \\
& \times \chi_r\, e^{i(\varphi_r - \omega t)} \Bigg\}
\end{aligned} \tag{1.16}
$$

$$
\begin{aligned}
H_{TE}^{y} = -\sum_{r\in\hat{N}} \Bigg\{ \Bigg[& \left(C_{10r} e^{i\sqrt{k_0^2 - \left(\frac{\pi}{h}\right)^2} x} - D_{10r} e^{-i\sqrt{k_0^2 - \left(\frac{\pi}{h}\right)^2} x} \right) \sqrt{\tfrac{2h}{w_r} \left[k_0^2 - \left(\tfrac{\pi}{h}\right)^2\right]} \\
& \times \frac{i}{\pi} \sin\left[\frac{\pi}{h}(y-y_r)\right] \\
& + \sum_{(m,\,p)\in\{\mathbb{N}\smallsetminus\{1\}\}\times\{0\}} D_{m0r} e^{\left(\sqrt{\left(\frac{m\pi}{h}\right)^2 - k_0^2} x\right)} \sqrt{\tfrac{2h}{w_r} \left[\left(\tfrac{m\pi}{h}\right)^2 - k_0^2\right]} \\
& \times \frac{1}{m\pi} \sin\left[\frac{m\pi}{h}(y-y_r)\right] \\
& + \sum_{(m,\,p)\in\mathbb{N}\times\mathbb{N}} D_{mpr} e^{\left(\sqrt{\mu_{mp}^2 - k_0^2} x\right)} \sqrt{\tfrac{1}{w_r h} \left[\mu_{mp}^2 - k_0^2\right]} \\
& \times \frac{2m\pi}{\mu_{mp}^2 h} \sin\left[\frac{m\pi}{h}(y-y_r)\right] \cos\left[\frac{p\pi}{w_r}(z-z_r)\right] \Bigg] \\
& \times \chi_r\, e^{i(\varphi_r - \omega t)} \Bigg\}
\end{aligned} \tag{1.17}
$$

$$H^z_{TE} = -\sum_{r\in\hat{N}} \Bigg\{ \Bigg[\sum_{(m,\,p)\in\{0\}\times\mathbb{N}} D_{0pr} e^{\left(\sqrt{\left(\frac{p\pi}{w_r}\right)^2 - k_0^2}x\right)} \sqrt{\frac{2w_r}{h}\left[\left(\frac{p\pi}{w_r}\right)^2 - k_0^2\right]}$$

$$\times \frac{1}{p\pi} \sin\left[\frac{p\pi}{w_r}(z - z_r)\right]$$

$$+ \sum_{(m,\,p)\in\mathbb{N}\times\mathbb{N}} D_{mpr} e^{\left(\sqrt{\mu^2_{mp} - k_0^2}x\right)} \sqrt{\frac{1}{w_r h}\left[\mu^2_{mp} - k_0^2\right]}$$

$$\times \frac{2p\pi}{\mu^2_{mp} w_r} \cos\left[\frac{m\pi}{h}(y - y_r)\right] \sin\left[\frac{p\pi}{w_r}(z - z_r)\right]\Bigg]$$

$$\times \chi_r\, e^{i(\varphi_r - \omega t)} \Bigg\} \tag{1.18}$$

a podobně pro TM mody dostáváme explicitně ($H^x_{TM} = 0$)

$$H^y_{TM} = \sum_{r\in\hat{N}} \chi_r e^{i(\varphi_r - \omega t)} \sum_{(m,\,p)\in\mathbb{N}\times\mathbb{N}} \Bigg\{ B_{mpr} e^{\left(\sqrt{\nu^2_{mp} - k_0^2}x\right)} \frac{2p\pi i\omega\varepsilon_0}{\nu^2_{mp} w_r \sqrt{w_r h}}$$

$$\times \sin\left[\frac{m\pi}{h}(y - y_r)\right] \cos\left[\frac{p\pi}{w_r}(z - z_r)\right] \Bigg\} \tag{1.19}$$

$$H^z_{TM} = -\sum_{r\in\hat{N}} \chi_r e^{i(\varphi_r - \omega t)} \sum_{(m,\,p)\in\mathbb{N}\times\mathbb{N}} \Bigg\{ B_{mpr} e^{\left(\sqrt{\nu^2_{mp} - k_0^2}x\right)} \frac{2m\pi i\omega\varepsilon_0}{\nu^2_{mp} h \sqrt{w_r h}}$$

$$\times \cos\left[\frac{m\pi}{h}(y - y_r)\right] \sin\left[\frac{p\pi}{w_r}(z - z_r)\right] \Bigg\} \tag{1.20}$$

$$E^x_{TM} = -\sum_{r\in\hat{N}} \chi_r e^{i(\varphi_r - \omega t)} \sum_{(m,\,p)\in\mathbb{N}\times\mathbb{N}} \Bigg\{ B_{mpr} e^{\left(\sqrt{\nu^2_{mp} - k_0^2}x\right)} \frac{2}{\sqrt{w_r h}}$$

$$\times \sin\left[\frac{m\pi}{h}(y - y_r)\right] \sin\left[\frac{p\pi}{w_r}(z - z_r)\right] \Bigg\} \tag{1.21}$$

$$E_{TM}^{y} = -\sum_{r\in\hat{N}} \chi_r e^{i(\varphi_r-\omega t)} \sum_{(m,\, p)\in\mathbb{N}\times\mathbb{N}} \Bigg\{ B_{mpr} e^{\left(\sqrt{\nu_{mp}^2-k_0^2}x\right)} \frac{2m\pi}{\nu_{mp}^2 h} \sqrt{\frac{\nu_{mp}^2-k_0^2}{w_r h}} \times \cos\left[\frac{m\pi}{h}(y-y_r)\right] \sin\left[\frac{p\pi}{w_r}(z-z_r)\right] \Bigg\} \quad (1.22)$$

$$E_{TM}^{z} = -\sum_{r\in\hat{N}} \chi_r e^{i(\varphi_r-\omega t)} \sum_{(m,\, p)\in\mathbb{N}\times\mathbb{N}} \Bigg\{ B_{mpr} e^{\left(\sqrt{\nu_{mp}^2-k_0^2}x\right)} \frac{2p\pi}{\nu_{mp}^2 w_r} \sqrt{\frac{\nu_{mp}^2-k_0^2}{w_r h}} \times \sin\left[\frac{m\pi}{h}(y-y_r)\right] \cos\left[\frac{p\pi}{w_r}(z-z_r)\right] \Bigg\} \quad (1.23)$$

Kapitola 2

Matice rozptylu

V této kapitole sestavíme matici operátoru rozptylu[1] pro soustavu grill - vakuum - plazma. Pomocí matice rozptylu je možné, a to na základě znalosti amplitud dopadajících (excitovaných) vln v jednotlivých vlnovodech, vypočítat amplitudy odražených vln uvnitř vlnovodů.

Tato kapitola rovněž zavádí a často využívá formalismu operátoru odrazu, ovšem samotnému (numerickému) výpočtu jeho matice je věnována samostatná kapitola s číslem 3. Dalšími klíčovými pojmy, se kterými se zde čtenář může setkat, jsou tenzory vazebných admitancí naší soustavy vlnovodů vyzařující do plazmatu. Složky těchto tenzorů jsme schopni vyjádřit jen formou jistých integrálů, což následně klade obtíže při jejich výpočtu, neboť vzhledem k jejich závislosti na složkách matice odrazu je třeba numerických metod. Užitými numerickými metodami se zde ovšem nezabýváme.

2.1 Odvození soustavy rovnic určující matici rozptylu

2.1.1 EM pole ve vakuové mezeře

Nyní pomocí Fourierova integrálu vyjádříme elektromagnetické pole v modelové vakuové mezeře oddělující grill a plazma. Tedy

$$\vec{E} = \iint_{\mathbb{R}^2} \mathrm{d}k_y \mathrm{d}k_z \, e^{i(k_y y + k_z z - \omega t)} \left(\vec{S} e^{ik_x x} + \vec{T} e^{-ik_x x} \right) \tag{2.1}$$

$$\vec{H} = \iint_{\mathbb{R}^2} \mathrm{d}k_y \mathrm{d}k_z \, e^{i(k_y y + k_z z - \omega t)} \left(\vec{U} e^{ik_x x} + \vec{V} e^{-ik_x x} \right), \tag{2.2}$$

[1] Samozřejmě, zde se pohybujeme výhradně v rámci klasické teorie EM pole. V žádném případě nemáme na mysli operátor rozptylu z teorie kvantové.

kde

$$k_x = \begin{cases} \sqrt{k_0^2 - k_y^2 - k_z^2}\,, & \text{pro } k_0^2 \geq k_y^2 + k_z^2 \\ i\sqrt{k_y^2 + k_z^2 - k_0^2}\,, & \text{pro } k_0^2 < k_y^2 + k_z^2, \end{cases} \tag{2.3}$$

dále $\vec{S} = \vec{S}(k_y, k_z) = (S^x, S^y, S^z)^T$ atp. Avšak zdaleka ne všechny komponenty vektorových funkcí $\vec{S}, \vec{T}, \vec{U}$ a $\vec{V}$ jsou nezávislé, neboť pole (2.1) a (2.2) musí splňovat vlnovou rovnici spolu s rovnicemi Maxwellovými, stejně jako tomu bylo v části 1.2. Jednoduchými výpočty zjistíme, že

$$S^x = -\frac{S^y k_y + S^z k_z}{k_x} \qquad T^x = \frac{T^y k_y + T^z k_z}{k_x} \tag{2.4}$$

$$U^x = \frac{S^z k_y - S^y k_z}{\omega\mu_0} \qquad V^x = \frac{T^z k_y - T^y k_z}{\omega\mu_0} \tag{2.5}$$

$$U^y = \frac{-1}{\omega\mu_0 k_x}\left[k_y k_z S^y + \left(k_0^2 - k_y^2\right) S^z\right] \qquad V^y = \frac{1}{\omega\mu_0 k_x}\left[k_y k_z T^y + \left(k_0^2 - k_y^2\right) T^z\right] \tag{2.6}$$

$$U^z = \frac{1}{\omega\mu_0 k_x}\left[k_y k_z S^z + \left(k_0^2 - k_z^2\right) S^y\right] \qquad V^z = \frac{-1}{\omega\mu_0 k_x}\left[k_y k_z T^z + \left(k_0^2 - k_z^2\right) T^y\right] \tag{2.7}$$

Zavedeme-li operátor odrazu $\mathcal{R}$ pomocí jeho matice[2] vztahem[3]

$$\begin{pmatrix} T^y \\ T^z \end{pmatrix} = e^{ik_x 2x_p} \left(\mathcal{R}\right) \begin{pmatrix} S^y \\ S^z \end{pmatrix}, \text{ kde } \left(\mathcal{R}\right) = \begin{pmatrix} \mathcal{R}^y{}_y & \mathcal{R}^y{}_z \\ \mathcal{R}^z{}_y & \mathcal{R}^z{}_z \end{pmatrix}, \tag{2.8}$$

potom přímo pro složky T^y a T^z dostaneme

$$T^y = e^{ik_x 2x_p}\left(\mathcal{R}^y{}_y S^y + \mathcal{R}^y{}_z S^z\right) \qquad T^z = e^{ik_x 2x_p}\left(\mathcal{R}^z{}_y S^y + \mathcal{R}^z{}_z S^z\right).$$

Označíme-li $\left(\mathcal{R}'\right) \equiv e^{ik_x 2x_p}\left(\mathcal{R}\right)$, potom můžeme psát

$$\begin{aligned} T^x &= \frac{1}{k_x}\left[\left(k_y \mathcal{R}'^y{}_y + k_z \mathcal{R}'^z{}_y\right) S^y + \left(k_y \mathcal{R}'^y{}_z + k_z \mathcal{R}'^z{}_z\right) S^z\right] \\ &= \frac{1}{k_x}\begin{pmatrix} k_y \\ k_z \end{pmatrix}^T \left(\mathcal{R}'\right) \begin{pmatrix} S^y \\ S^z \end{pmatrix} \\ V^x &= \frac{-1}{\omega\mu_0}\left[\left(k_z \mathcal{R}'^y{}_y - k_y \mathcal{R}'^z{}_y\right) S^y + \left(k_z \mathcal{R}'^y{}_z - k_y \mathcal{R}'^z{}_z\right) S^z\right] \\ &= \frac{1}{\omega\mu_0}\begin{pmatrix} -k_z \\ +k_y \end{pmatrix}^T \left(\mathcal{R}'\right) \begin{pmatrix} S^y \\ S^z \end{pmatrix} \end{aligned}$$

[2] V námi uvažované bázi. Dále zdůrazněme, že $\mathcal{R} = \mathcal{R}(k_y, k_z)$. Rovněž podtrhněme, že $\mathcal{R}$ tímto definujeme přímo na rozhraní vakuum-plazma, tedy pro $x = x_p$.

[3] Symbol x_p značí souřadnici povrchové vrstvy plazmatu, tedy v našem souřadném systému je to také vzdálenost roviny ústí grillu od povrchu plazmatu.

$$V^y = \frac{1}{\omega\mu_0 k_x}\Big\{\big[k_y k_z \mathcal{R}'^y{}_y + \big(k_0^2 - k_y^2\big)\mathcal{R}'^z{}_y\big]S^y + \big[k_y k_z \mathcal{R}'^y{}_z + \big(k_0^2 - k_y^2\big)\mathcal{R}'^z{}_z\big]S^z\Big\}$$
$$= \frac{1}{\omega\mu_0 k_x}\begin{pmatrix} k_y k_z \\ k_0^2 - k_y^2 \end{pmatrix}^T (\mathcal{R}') \begin{pmatrix} S^y \\ S^z \end{pmatrix}$$
$$V^z = \frac{-1}{\omega\mu_0 k_x}\Big\{\big[\big(k_0^2 - k_z^2\big)\mathcal{R}'^y{}_y + k_y k_z \mathcal{R}'^z{}_y\big]S^y + \big[\big(k_0^2 - k_z^2\big)\mathcal{R}'^y{}_z + k_y k_z \mathcal{R}'^z{}_z\big]S^z\Big\}$$
$$= \frac{1}{\omega\mu_0 k_x}\begin{pmatrix} k_z^2 - k_0^2 \\ -k_y k_z \end{pmatrix}^T (\mathcal{R}') \begin{pmatrix} S^y \\ S^z \end{pmatrix}.$$

Po složkách tedy můžeme pole (2.1) a (2.2) zapsat takto[4]

$$E^x = \iint\limits_{\mathbb{R}^2} \mathrm{d}k_y \mathrm{d}k_z\, e^{i(k_y y + k_z z - \omega t)} \frac{1}{k_x}\begin{pmatrix} k_y \\ k_z \end{pmatrix}^T \big(e^{-ik_x x}\mathcal{R}' - e^{ik_x x}\mathcal{I}\big)\begin{pmatrix} S^y \\ S^z \end{pmatrix} \tag{2.9}$$

$$E^y = \iint\limits_{\mathbb{R}^2} \mathrm{d}k_y \mathrm{d}k_z\, e^{i(k_y y + k_z z - \omega t)} \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}^T \big(e^{-ik_x x}\mathcal{R}' + e^{ik_x x}\mathcal{I}\big)\begin{pmatrix} S^y \\ S^z \end{pmatrix} \tag{2.10}$$

$$E^z = \iint\limits_{\mathbb{R}^2} \mathrm{d}k_y \mathrm{d}k_z\, e^{i(k_y y + k_z z - \omega t)} \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}^T \big(e^{-ik_x x}\mathcal{R}' + e^{ik_x x}\mathcal{I}\big)\begin{pmatrix} S^y \\ S^z \end{pmatrix} \tag{2.11}$$

$$H^x = \iint\limits_{\mathbb{R}^2} \mathrm{d}k_y \mathrm{d}k_z\, e^{i(k_y y + k_z z - \omega t)} \frac{1}{\omega\mu_0}\begin{pmatrix} -k_z \\ +k_y \end{pmatrix}^T \big(e^{-ik_x x}\mathcal{R}' + e^{ik_x x}\mathcal{I}\big)\begin{pmatrix} S^y \\ S^z \end{pmatrix} \tag{2.12}$$

$$H^y = \iint\limits_{\mathbb{R}^2} \mathrm{d}k_y \mathrm{d}k_z\, e^{i(k_y y + k_z z - \omega t)} \frac{1}{\omega\mu_0 k_x}\begin{pmatrix} k_y k_z \\ k_0^2 - k_y^2 \end{pmatrix}^T \big(e^{-ik_x x}\mathcal{R}' - e^{ik_x x}\mathcal{I}\big)\begin{pmatrix} S^y \\ S^z \end{pmatrix} \tag{2.13}$$

$$H^z = \iint\limits_{\mathbb{R}^2} \mathrm{d}k_y \mathrm{d}k_z\, e^{i(k_y y + k_z z - \omega t)} \frac{1}{\omega\mu_0 k_x}\begin{pmatrix} k_z^2 - k_0^2 \\ -k_y k_z \end{pmatrix}^T \big(e^{-ik_x x}\mathcal{R}' - e^{ik_x x}\mathcal{I}\big)\begin{pmatrix} S^y \\ S^z \end{pmatrix} \tag{2.14}$$

2.1.2 Spojité navázání tečných složek polí

Nyní využijeme podmínek spojitosti tečných složek polí na rozhraní grill - vakuum, tj. v rovině $x = 0$, k sestavení rovnic, ze kterých získáme amplitudy odražených vln ve vlnovodech, tj. B_{mpr} a D_{mpr}, při zadaných excitovaných amplitudách A_{mpr} a C_{mpr}. Budeme postupovat následovně. Nejprve

[4]Symbol $\mathcal{I}$ označuje operátor identity, tedy jeho matice je maticí jednotkovou.

nalezneme explicitní výrazy pro amplitudy S^y a S^z, k čemuž nám poslouží Fourierova transformace podmínky spojitosti[5] pro tečné složky elektrického pole, tj. pro E^y a E^z. Poté dosadíme získané amplitudy S^y a S^z do výrazů (2.13) a (2.14) pro tečné složky magnetického pole, tj. do H^y a H^z, a opět použitím Fourierovy transformace na podmínky spojitosti[6], ovšem tentokrát pro H^y a H^z, získáme kýžené rovnice pro amplitudy B_{mpr} a D_{mpr}.

Začněme podmínkou pro E^y, kterou rovnou fourierovsky ztransformujme. Položme tedy v rovnost výraz (1.2) spolu s výrazem (2.10), oba vyhodnocené v $x = 0$, a integrujme

$$E^y_{grill}\Big|_{x=0} = E^y_{vakuum}\Big|_{x=0} \qquad \Bigg| \iint_{\mathbb{R}^2} \mathrm{d}y\,\mathrm{d}z\; e^{-i\left(k'_y y + k'_z z\right)}. \tag{2.15}$$

Označme pro zjednodušení

$$L^y_E \equiv \iint\limits_{\mathbb{R}^2} \mathrm{d}y\,\mathrm{d}z \left\{ e^{-i\left(k'_y y + k'_z z\right)} E^y_{grill}\Big|_{x=0} \right\}$$

$$P^y_E \equiv \iint\limits_{\mathbb{R}^2} \mathrm{d}y\,\mathrm{d}z \left\{ e^{-i\left(k'_y y + k'_z z\right)} E^y_{vakuum}\Big|_{x=0} \right\}$$

a rozepišme jednotlivé strany rovnosti (2.15). Po několika úpravách[7] dostáváme

$$\begin{aligned} L^y_E = -\sum_r \sum_{(m,\,p)} \Bigg\{ e^{i(\varphi_r - \omega t)} \Bigg[&\frac{i\lambda_{mp}}{\nu^2_{mp}} \big(A_{mpr} - B_{mpr}\big) \frac{2}{\sqrt{w_r h}} \frac{m\pi}{h} \\ &+ \frac{i\omega\mu_0}{\mu^2_{mp}} \big(C_{mpr} + D_{mpr}\big) \sqrt{\frac{\zeta_p \zeta_m}{w_r h}} \frac{p\pi}{w_r} \Bigg] \\ &\times 4\pi^2\, I^C_{mr}(k'_y)\; I^S_{pr}(k'_z) \Bigg\} \end{aligned} \tag{2.16}$$

[5]Spojitosti v celé rovině $x = 0$, která zde (mimo samotné ústí grillu) představuje kovovou stěnu nádoby, do které je ústí grillu vsazeno.

[6]Naopak zde spojitost předpokládáme pouze v ústí grilu, nikoli v celé rovině $x = 0$.

[7]Při úpravách, pro jednoduchost zápisu, zde například můžeme využít symbolické "identity" $\int_{\mathbb{R}} \mathrm{d}y\, e^{i\left(k_y - k'_y\right)y} = 2\pi\,\delta\big(k_y - k'_y\big)$ a $\int_{\mathbb{R}} \mathrm{d}k_y\, f(k_y)\,\delta\big(k_y - k'_y\big) = f(k'_y)$, které obrazně vystihují některé z vlastností Diracovy δ-distribuce, leč při použitém zápisu nedávají smysl, neboť δ-distribuce není tzv. regulární distribuce, tedy nemá integrální reprezentaci.

$$P_E^y = 4\pi^2 \left[\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}^T (\mathcal{R}' + \mathcal{I}) \begin{pmatrix} S^y \\ S^z \end{pmatrix} \right] \Bigg|_{(k'_y, k'_z)} \quad \text{, kde} \tag{2.17}$$

$$\begin{aligned} I^C_{mr}(k'_y) &\equiv \frac{1}{2\pi} \int\limits_{y_r}^{y_r+h} \mathrm{d}y \; e^{-ik'_y y} \cos\left[\frac{m\pi}{h} (y - y_r) \right] \\ &= \frac{ik'_y \, e^{-ik'_y y_r} \left[(-1)^m e^{-ik'_y h} - 1 \right]}{2\pi \left[{k'_y}^2 - \left(\frac{m\pi}{h} \right)^2 \right]} \end{aligned} \tag{2.18}$$

$$\begin{aligned} I^S_{pr}(k'_z) &\equiv \frac{1}{2\pi} \int\limits_{z_r}^{z_r+w_r} \mathrm{d}z \; e^{-ik'_z z} \sin\left[\frac{p\pi}{w_r} (z - z_r) \right] \\ &= \frac{\frac{p\pi}{w_r} \, e^{-ik'_z z_r} \left[(-1)^p e^{-ik'_z w_r} - 1 \right]}{2\pi \left[{k'_z}^2 - \left(\frac{p\pi}{w_r} \right)^2 \right]} . \end{aligned} \tag{2.19}$$

Zopakujeme-li právě provedený postup, tentokráte však pro E^z, dostáváme

$$\begin{aligned} L_E^z = -\sum_r \sum_{(m,\,p)} \Bigg\{ e^{i(\varphi_r - \omega t)} \Bigg[& \frac{i\lambda_{mp}}{\nu_{mp}^2} (A_{mpr} - B_{mpr}) \frac{2}{\sqrt{w_r h}} \frac{p\pi}{w_r} \\ & - \frac{i\omega\mu_0}{\mu_{mp}^2} (C_{mpr} + D_{mpr}) \sqrt{\frac{\zeta_p \zeta_m}{w_r h}} \frac{m\pi}{h} \Bigg] \\ & \times 4\pi^2 \, I^S_{mr}(k'_y) \; I^C_{pr}(k'_z) \Bigg\} \end{aligned} \tag{2.20}$$

$$P_E^z = 4\pi^2 \left[\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}^T (\mathcal{R}' + \mathcal{I}) \begin{pmatrix} S^y \\ S^z \end{pmatrix} \right] \Bigg|_{(k'_y, k'_z)} \quad \text{, kde} \tag{2.21}$$

$$\begin{aligned} I^S_{mr}(k'_y) &= \frac{1}{2\pi} \int\limits_{y_r}^{y_r+h} \mathrm{d}y \; e^{-ik'_y y} \sin\left[\frac{m\pi}{h} (y - y_r) \right] \\ &= \frac{\frac{m\pi}{h} \, e^{-ik'_y y_r} \left[(-1)^m e^{-ik'_y h} - 1 \right]}{2\pi \left[{k'_y}^2 - \left(\frac{m\pi}{h} \right)^2 \right]} \end{aligned} \tag{2.22}$$

$$
\begin{aligned}
I_{pr}^{C}(k_z') &= \frac{1}{2\pi} \int\limits_{z_r}^{z_r+w_r} \mathrm{d}z \; e^{-ik_z' z} \cos\left[\frac{p\pi}{w_r}(z-z_r)\right] \\
&= \frac{ik_z' \, e^{-ik_z' z_r}\left[(-1)^p e^{-ik_z' w_r} - 1\right]}{2\pi\left[{k_z'}^2 - \left(\frac{p\pi}{w_r}\right)^2\right]}.
\end{aligned} \tag{2.23}
$$

Všimněme si nyní, že na základě předchozího platí následující

$$
4\pi^2 \left(\mathcal{R}' + \mathcal{I}\right) \begin{pmatrix} S^y \\ S^z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} P_E^y \\ P_E^z \end{pmatrix}, \text{ tedy} \tag{2.24}
$$

$$
\begin{pmatrix} S^y \\ S^z \end{pmatrix} = \frac{1}{4\pi^2} \left(\mathcal{R}' + \mathcal{I}\right)^{-1} \begin{pmatrix} P_E^y \\ P_E^z \end{pmatrix}, \tag{2.25}
$$

a protože $L_E^y = P_E^y$ současně s $L_E^z = P_E^z$, platí

$$
\begin{pmatrix} S^y \\ S^z \end{pmatrix} = \frac{1}{4\pi^2} \left(\mathcal{R}' + \mathcal{I}\right)^{-1} \begin{pmatrix} L_E^y \\ L_E^z \end{pmatrix}. \tag{2.26}
$$

Dosaďme právě získané vyjádření (2.26) do výrazu (2.13) pro H^y. Takto upravený výraz pro H^y položme v rovnost s odpovídajícím výrazem (1.5) pro H^y uvnitř vlnovodů, oba vyhodnocené v $x = 0$, a proveďme tyto dvě následující úpravy

$$
\begin{aligned}
H_{grill}^y\Big|_{x=0} = H_{vakuum}^y\Big|_{x=0} \qquad & \Bigg| \times \chi_s \sin\left[\frac{l\pi}{h}(y-y_s)\right] \cos\left[\frac{q\pi}{w_s}(z-z_s)\right] \\
& \Bigg| \iint_{\mathbb{R}^2} \mathrm{d}y \, \mathrm{d}z.
\end{aligned} \tag{2.27}
$$

Označme pro zjednodušení

$$
\begin{aligned}
L_H^y &\equiv \iint\limits_{\mathbb{R}^2} \mathrm{d}y \, \mathrm{d}z \left\{ \chi_s \sin\left[\frac{l\pi}{h}(y-y_s)\right] \cos\left[\frac{q\pi}{w_s}(z-z_s)\right] H_{grill}^y\Big|_{x=0} \right\} \\
P_H^y &\equiv \iint\limits_{\mathbb{R}^2} \mathrm{d}y \, \mathrm{d}z \left\{ \chi_s \sin\left[\frac{l\pi}{h}(y-y_s)\right] \cos\left[\frac{q\pi}{w_s}(z-z_s)\right] H_{vakuum}^y\Big|_{x=0} \right\}.
\end{aligned}
$$

Po několika dalších úpravách získáváme

$$L_H^y = \sum_r \sum_{(m,\,p)} \left\{ \left[\frac{i\omega\varepsilon_0}{\nu_{mp}^2}(A_{mpr} + B_{mpr}) \frac{p\pi}{w_r} \frac{2}{\sqrt{w_r h}} \right. \right.$$
$$\left. - \frac{i\varkappa_{mp}}{\mu_{mp}^2}(C_{mpr} - D_{mpr}) \frac{m\pi}{h} \sqrt{\frac{\zeta_p \zeta_m}{w_r h}} \right] \tag{2.28}$$
$$\left. \times e^{i(\varphi_r - \omega t)}\, \delta_{rs}\, I_{ml}^{SS}(h)\, I_{pq}^{CC}(w_r) \right\}$$

$$P_H^y = \frac{1}{\omega\mu_0} \iint\limits_{\mathbb{R}^2} \mathrm{d}k_y \mathrm{d}k_z \left\{ \left[I_{ls}^S(k_y)\; I_{qs}^C(k_z) \right]^* \right.$$
$$\left. \times \frac{1}{k_x} \begin{pmatrix} k_y k_z \\ k_0^2 - k_y^2 \end{pmatrix}^T (\mathcal{R}' - \mathcal{I}) \left(\mathcal{R}' + \mathcal{I} \right)^{-1} \begin{pmatrix} L_E^y \\ L_E^z \end{pmatrix} \right\}, \tag{2.29}$$

kde

$$I_{ml}^{SS}(h) \equiv \int\limits_{y_r}^{y_r+h} \mathrm{d}y \, \sin\!\left[\frac{m\pi}{h}(y - y_r)\right] \sin\!\left[\frac{l\pi}{h}(y - y_r)\right] = \frac{h}{2}(\zeta_m - 1)\delta_{ml} \tag{2.30}$$

$$I_{pq}^{CC}(w_r) \equiv \int\limits_{z_r}^{z_r+w_r} \mathrm{d}z \, \cos\!\left[\frac{p\pi}{w_r}(z - z_r)\right] \cos\!\left[\frac{q\pi}{w_r}(z - z_r)\right] = \frac{w_r}{2}(3 - \zeta_p)\delta_{pq}. \tag{2.31}$$

Naprosto analogicky k předchozímu, dosadíme-li vyjádření (2.26) do výrazu (2.14) pro H^z a položíme-li takto získané H^z v rovnost s odpovídajícím výrazem (1.6) pro H^z uvnitř vlnovodů, obojí vyhodnocené v $x = 0$, provedeme-li následující dvě úpravy

$$H^z_{grill}\Big|_{x=0} = H^z_{vakuum}\Big|_{x=0} \qquad \Big| \times \chi_s \cos\!\left[\frac{l\pi}{h}(y - y_s)\right] \sin\!\left[\frac{q\pi}{w_s}(z - z_s)\right]$$
$$\Big| \iint_{\mathbb{R}^2} \mathrm{d}y \, \mathrm{d}z, \tag{2.32}$$

a označíme-li

$$L_H^z \equiv \iint\limits_{\mathbb{R}^2} \mathrm{d}y\,\mathrm{d}z \left\{ \chi_s \cos\left[\frac{l\pi}{h}\,(y-y_s)\right] \sin\left[\frac{q\pi}{w_s}\,(z-z_s)\right] H_{grill}^z\Big|_{x=0} \right\}$$
$$P_H^z \equiv \iint\limits_{\mathbb{R}^2} \mathrm{d}y\,\mathrm{d}z \left\{ \chi_s \cos\left[\frac{l\pi}{h}\,(y-y_s)\right] \sin\left[\frac{q\pi}{w_s}\,(z-z_s)\right] H_{vakuum}^z\Big|_{x=0} \right\},$$

potom získáme

$$\begin{aligned} L_H^z = -\sum_r \sum_{(m,\,p)} \Bigg\{ \Bigg[& \frac{i\omega\varepsilon_0}{\nu_{mp}^2}\big(A_{mpr}+B_{mpr}\big)\frac{m\pi}{h}\frac{2}{\sqrt{w_r h}} \\ & + \frac{i\varkappa_{mp}}{\mu_{mp}^2}\big(C_{mpr}-D_{mpr}\big)\frac{p\pi}{w_r}\sqrt{\frac{\zeta_p\zeta_m}{w_r h}}\Bigg] \\ & \times e^{i(\varphi_r-\omega t)}\,\delta_{rs}\,I_{ml}^{CC}(h)\,I_{pq}^{SS}(w_r)\Bigg\} \end{aligned} \tag{2.33}$$

$$\begin{aligned} P_H^z = \frac{-1}{\omega\mu_0}\iint\limits_{\mathbb{R}^2} \mathrm{d}k_y\mathrm{d}k_z \Bigg\{ & \big[I_{ls}^C(k_y)\; I_{qs}^S(k_z)\big]^* \\ & \times \frac{1}{k_x}\begin{pmatrix} k_0^2-k_z^2 \\ k_yk_z \end{pmatrix}^T \big(\mathcal{R}'-\mathcal{I}\big)\,\big(\mathcal{R}'+\mathcal{I}\big)^{-1}\begin{pmatrix} L_E^y \\ L_E^z \end{pmatrix}\Bigg\}, \end{aligned} \tag{2.34}$$

kde

$$\begin{aligned} I_{ml}^{CC}(h) &= \int\limits_{y_r}^{y_r+h} \mathrm{d}y\;\cos\Big[\frac{m\pi}{h}\,(y-y_r)\Big]\;\cos\Big[\frac{l\pi}{h}\,(y-y_r)\Big] \\ &= \frac{h}{2}(3-\zeta_m)\delta_{ml} \end{aligned} \tag{2.35}$$

$$\begin{aligned} I_{pq}^{SS}(w_r) &= \int\limits_{z_r}^{z_r+w_r} \mathrm{d}z\;\sin\Big[\frac{p\pi}{w_r}\,(z-z_r)\Big]\;\sin\Big[\frac{q\pi}{w_r}\,(z-z_r)\Big] \\ &= \frac{w_r}{2}(\zeta_p-1)\delta_{pq}. \end{aligned} \tag{2.36}$$

Definujme kovektory Γ a Ξ jako

$$\left(\Gamma_y\,,\,\Gamma_z\right) \equiv \frac{1}{k_x}\begin{pmatrix} k_y k_z \\ k_0^2 - k_y^2 \end{pmatrix}^T \left(\mathcal{R}' - \mathcal{I}\right)\left(\mathcal{R}' + \mathcal{I}\right)^{-1} \tag{2.37}$$

$$\left(\Xi_y\,,\,\Xi_z\right) \equiv \frac{1}{k_x}\begin{pmatrix} k_0^2 - k_z^2 \\ k_y k_z \end{pmatrix}^T \left(\mathcal{R}' - \mathcal{I}\right)\left(\mathcal{R}' + \mathcal{I}\right)^{-1}. \tag{2.38}$$

Uvědomíme-li si, že

$$\left(\mathcal{R}' + \mathcal{I}\right)^{-1} = \frac{1}{\det\left(\mathcal{R}' + \mathcal{I}\right)}\begin{pmatrix} \mathcal{R}'^z{}_z + 1 & -\mathcal{R}'^y{}_z \\ -\mathcal{R}'^z{}_y & \mathcal{R}'^y{}_y + 1 \end{pmatrix},$$

přičemž

$$\begin{aligned} |\mathcal{R}' + \mathcal{I}| &\equiv \det\left(\mathcal{R}' + \mathcal{I}\right) \\ &= \left(\mathcal{R}'^y{}_y + 1\right)\left(\mathcal{R}'^z{}_z + 1\right) - \mathcal{R}'^y{}_z \mathcal{R}'^z{}_y, \end{aligned}$$

potom již snadno získáme explicitní vyjádření pro Γ a Ξ, tedy

$$\begin{aligned} \Gamma_y &= \frac{1}{|\mathcal{R}' + \mathcal{I}|}\left\{\frac{k_y k_z}{k_x}\left[\left(\mathcal{R}'^y{}_y - 1\right)\left(\mathcal{R}'^z{}_z + 1\right) - \mathcal{R}'^y{}_z\mathcal{R}'^z{}_y\right] + \frac{k_0^2 - k_y^2}{k_x} 2\mathcal{R}'^z{}_y\right\} \\ \Gamma_z &= \frac{1}{|\mathcal{R}' + \mathcal{I}|}\left\{\frac{k_0^2 - k_y^2}{k_x}\left[\left(\mathcal{R}'^y{}_y + 1\right)\left(\mathcal{R}'^z{}_z - 1\right) - \mathcal{R}'^y{}_z\mathcal{R}'^z{}_y\right] + \frac{k_y k_z}{k_x} 2\mathcal{R}'^y{}_z\right\} \end{aligned} \tag{2.39}$$

$$\begin{aligned} \Xi_y &= \frac{1}{|\mathcal{R}' + \mathcal{I}|}\left\{\frac{k_0^2 - k_z^2}{k_x}\left[\left(\mathcal{R}'^y{}_y - 1\right)\left(\mathcal{R}'^z{}_z + 1\right) - \mathcal{R}'^y{}_z\mathcal{R}'^z{}_y\right] + \frac{k_y k_z}{k_x} 2\mathcal{R}'^z{}_y\right\} \\ \Xi_z &= \frac{1}{|\mathcal{R}' + \mathcal{I}|}\left\{\frac{k_y k_z}{k_x}\left[\left(\mathcal{R}'^y{}_y + 1\right)\left(\mathcal{R}'^z{}_z - 1\right) - \mathcal{R}'^y{}_z\mathcal{R}'^z{}_y\right] + \frac{k_0^2 - k_z^2}{k_x} 2\mathcal{R}'^y{}_z\right\} \end{aligned} \tag{2.40}$$

Za pomoci Γ, resp. Ξ, ve tvaru (2.39), resp. (2.40), nyní vyjádříme výrazy (2.29) a (2.34). Začněme s (2.29), pro které po několika úpravách dostáváme

$$
\begin{aligned}
P_H^y = -\sum_r \sum_{(m,\,p)} \Bigg\{ & \frac{4\pi^2 e^{i(\varphi_r-\omega t)}}{\omega\mu_0} \Bigg[\frac{i\lambda_{mp}}{\nu_{mp}^2} \big(A_{mpr} - B_{mpr}\big) \frac{2}{\sqrt{w_r h}} \frac{m\pi}{h} \\
& \qquad + \frac{i\omega\mu_0}{\mu_{mp}^2} \big(C_{mpr} + D_{mpr}\big) \sqrt{\frac{\zeta_p\zeta_m}{w_r h}} \frac{p\pi}{w_r} \Bigg] \\
& \times \iint_{\mathbb{R}^2} \mathrm{d}k_y \mathrm{d}k_z\, \Gamma_y(k_y, k_z) I_{mr}^C(k_y)\; I_{pr}^S(k_z) \left[I_{ls}^S(k_y)\; I_{qs}^C(k_z)\right]^* \\
& + \frac{4\pi^2 e^{i(\varphi_r-\omega t)}}{\omega\mu_0} \Bigg[\frac{i\lambda_{mp}}{\nu_{mp}^2} \big(A_{mpr} - B_{mpr}\big) \frac{2}{\sqrt{w_r h}} \frac{p\pi}{w_r} \\
& \qquad - \frac{i\omega\mu_0}{\mu_{mp}^2} \big(C_{mpr} + D_{mpr}\big) \sqrt{\frac{\zeta_p\zeta_m}{w_r h}} \frac{m\pi}{h} \Bigg] \\
& \times \iint_{\mathbb{R}^2} \mathrm{d}k_y \mathrm{d}k_z\, \Gamma_z(k_y, k_z) I_{mr}^S(k_y)\; I_{pr}^C(k_z) \left[I_{ls}^S(k_y)\; I_{qs}^C(k_z)\right]^* \Bigg\}
\end{aligned}
\tag{2.41}
$$

$$
\begin{aligned}
P_H^z = \sum_r \sum_{(m,\,p)} \Bigg\{ & \frac{4\pi^2 e^{i(\varphi_r-\omega t)}}{\omega\mu_0} \Bigg[\frac{i\lambda_{mp}}{\nu_{mp}^2} \big(A_{mpr} - B_{mpr}\big) \frac{2}{\sqrt{w_r h}} \frac{m\pi}{h} \\
& \qquad + \frac{i\omega\mu_0}{\mu_{mp}^2} \big(C_{mpr} + D_{mpr}\big) \sqrt{\frac{\zeta_p\zeta_m}{w_r h}} \frac{p\pi}{w_r} \Bigg] \\
& \times \iint_{\mathbb{R}^2} \mathrm{d}k_y \mathrm{d}k_z\, \Xi_y(k_y, k_z) I_{mr}^C(k_y)\; I_{pr}^S(k_z) \left[I_{ls}^C(k_y)\; I_{qs}^S(k_z)\right]^* \\
& + \frac{4\pi^2 e^{i(\varphi_r-\omega t)}}{\omega\mu_0} \Bigg[\frac{i\lambda_{mp}}{\nu_{mp}^2} \big(A_{mpr} - B_{mpr}\big) \frac{2}{\sqrt{w_r h}} \frac{p\pi}{w_r} \\
& \qquad - \frac{i\omega\mu_0}{\mu_{mp}^2} \big(C_{mpr} + D_{mpr}\big) \sqrt{\frac{\zeta_p\zeta_m}{w_r h}} \frac{m\pi}{h} \Bigg] \\
& \times \iint_{\mathbb{R}^2} \mathrm{d}k_y \mathrm{d}k_z\, \Xi_z(k_y, k_z) I_{mr}^S(k_y)\; I_{pr}^C(k_z) \left[I_{ls}^C(k_y)\; I_{qs}^S(k_z)\right]^* \Bigg\}.
\end{aligned}
\tag{2.42}
$$

Definujme nyní následující čtveřici tenzorů vazebných admitancí, resp.

jejich složek

$$K^{YY}_{mprlqs} \equiv \frac{4\pi^2}{\omega\mu_0} \iint\limits_{\mathbb{R}^2} \mathrm{d}k_y \mathrm{d}k_z\, \Gamma_y(k_y, k_z) I^C_{mr}(k_y)\; I^S_{pr}(k_z) \left[I^S_{ls}(k_y)\; I^C_{qs}(k_z)\right]^* \tag{2.43}$$

$$K^{ZY}_{mprlqs} \equiv \frac{4\pi^2}{\omega\mu_0} \iint\limits_{\mathbb{R}^2} \mathrm{d}k_y \mathrm{d}k_z\, \Gamma_z(k_y, k_z) I^S_{mr}(k_y)\; I^C_{pr}(k_z) \left[I^S_{ls}(k_y)\; I^C_{qs}(k_z)\right]^* \tag{2.44}$$

$$K^{YZ}_{mprlqs} \equiv \frac{4\pi^2}{\omega\mu_0} \iint\limits_{\mathbb{R}^2} \mathrm{d}k_y \mathrm{d}k_z\, \Xi_y(k_y, k_z) I^C_{mr}(k_y)\; I^S_{pr}(k_z) \left[I^C_{ls}(k_y)\; I^S_{qs}(k_z)\right]^* \tag{2.45}$$

$$K^{ZZ}_{mprlqs} \equiv \frac{4\pi^2}{\omega\mu_0} \iint\limits_{\mathbb{R}^2} \mathrm{d}k_y \mathrm{d}k_z\, \Xi_z(k_y, k_z) I^S_{mr}(k_y)\; I^C_{pr}(k_z) \left[I^C_{ls}(k_y)\; I^S_{qs}(k_z)\right]^* . \tag{2.46}$$

Potom lze psát

$$\begin{aligned} P^y_H = -\sum_r \sum_{(m,\,p)} \Bigg\{ \Bigg[& \frac{2\lambda_{mp}}{\nu^2_{mp}} (A_{mpr} - B_{mpr}) \left(\frac{m}{h} K^{YY}_{mprlqs} + \frac{p}{w_r} K^{ZY}_{mprlqs} \right) \\ & + \frac{\omega\mu_0 \sqrt{\zeta_p \zeta_m}}{\mu^2_{mp}} (C_{mpr} + D_{mpr}) \left(\frac{p}{w_r} K^{YY}_{mprlqs} - \frac{m}{h} K^{ZY}_{mprlqs} \right) \Bigg] \\ & \times \frac{\pi i}{\sqrt{w_r h}}\, e^{i(\varphi_r - \omega t)} \Bigg\} \end{aligned} \tag{2.47}$$

$$\begin{aligned} P^z_H = \sum_r \sum_{(m,\,p)} \Bigg\{ \Bigg[& \frac{2\lambda_{mp}}{\nu^2_{mp}} (A_{mpr} - B_{mpr}) \left(\frac{m}{h} K^{YZ}_{mprlqs} + \frac{p}{w_r} K^{ZZ}_{mprlqs} \right) \\ & + \frac{\omega\mu_0 \sqrt{\zeta_p \zeta_m}}{\mu^2_{mp}} (C_{mpr} + D_{mpr}) \left(\frac{p}{w_r} K^{YZ}_{mprlqs} - \frac{m}{h} K^{ZZ}_{mprlqs} \right) \Bigg] \\ & \times \frac{\pi i}{\sqrt{w_r h}} e^{i(\varphi_r - \omega t)} \Bigg\}. \end{aligned} \tag{2.48}$$

Věnujme také pozornost výrazům (2.28) a (2.33) a zapišme skutečnost, že platí vztahy

$$\begin{aligned} P^y_H &= L^y_H \\ P^z_H &= L^z_H. \end{aligned}$$

Rozepsáním prvního z těchto vztahů získáváme rovnici

$$
\begin{aligned}
-\sum_r \sum_{(m,\,p)} \Bigg\{ \Bigg[& \frac{2\lambda_{mp}}{\nu_{mp}^2}\big(A_{mpr} - B_{mpr}\big)\bigg(\frac{m}{h} K^{YY}_{mprlqs} + \frac{p}{w_r} K^{ZY}_{mprlqs}\bigg) \\
& + \frac{\omega\mu_0\sqrt{\zeta_p\zeta_m}}{\mu_{mp}^2}\big(C_{mpr} + D_{mpr}\big)\bigg(\frac{p}{w_r} K^{YY}_{mprlqs} - \frac{m}{h} K^{ZY}_{mprlqs}\bigg) \Bigg] \\
& \times \frac{\pi i}{\sqrt{w_r h}}\, e^{i(\varphi_r - \omega t)} \Bigg\} \\
= \sum_r \sum_{(m,\,p)} \Bigg\{ \Bigg[& \frac{2\omega\varepsilon_0}{\nu_{mp}^2}\big(A_{mpr} + B_{mpr}\big)\frac{p}{w_r} \\
& - \frac{\varkappa_{mp}\sqrt{\zeta_p\zeta_m}}{\mu_{mp}^2}\big(C_{mpr} - D_{mpr}\big)\frac{m}{h} \Bigg] \\
& \times \frac{\pi i}{\sqrt{w_r h}} e^{i(\varphi_r - \omega t)}\, \delta_{rs}\, \frac{h}{2}(\zeta_m - 1)\delta_{ml}\, \frac{w_r}{2}(3 - \zeta_p)\delta_{pq} \Bigg\}
\end{aligned}
\tag{2.49}
$$

a rozepsáním druhého z nich získáváme rovnici následující

$$
\begin{aligned}
\sum_r \sum_{(m,\,p)} \Bigg\{ \Bigg[& \frac{2\lambda_{mp}}{\nu_{mp}^2}\big(A_{mpr} - B_{mpr}\big)\bigg(\frac{m}{h} K^{YZ}_{mprlqs} + \frac{p}{w_r} K^{ZZ}_{mprlqs}\bigg) \\
& + \frac{\omega\mu_0\sqrt{\zeta_p\zeta_m}}{\mu_{mp}^2}\big(C_{mpr} + D_{mpr}\big)\bigg(\frac{p}{w_r} K^{YZ}_{mprlqs} - \frac{m}{h} K^{ZZ}_{mprlqs}\bigg) \Bigg] \\
& \times \frac{\pi i}{\sqrt{w_r h}} e^{i(\varphi_r - \omega t)} \Bigg\} \\
= -\sum_r \sum_{(m,\,p)} \Bigg\{ \Bigg[& \frac{2\omega\varepsilon_0}{\nu_{mp}^2}\big(A_{mpr} + B_{mpr}\big)\frac{m}{h} \\
& + \frac{\varkappa_{mp}\sqrt{\zeta_p\zeta_m}}{\mu_{mp}^2}\big(C_{mpr} - D_{mpr}\big)\frac{p}{w_r} \Bigg] \\
& \times \frac{\pi i}{\sqrt{w_r h}} e^{i(\varphi_r - \omega t)}\, \delta_{rs}\, \frac{h}{2}(3 - \zeta_m)\delta_{ml}\, \frac{w_r}{2}(\zeta_p - 1)\delta_{pq} \Bigg\}.
\end{aligned}
\tag{2.50}
$$

Snadnými úpravami první rovnice, tedy (2.49), přechází na

$$
\begin{aligned}
&\sum_{r}\sum_{(m,\,p)}\Bigg\{-\frac{2e^{i\varphi_r}}{\nu_{mp}^2\sqrt{w_r h}}\Bigg[\lambda_{mp}\left(\frac{m}{h}K^{YY}_{mprlqs}+\frac{p}{w_r}K^{ZY}_{mprlqs}\right)\\
&\qquad\qquad-\omega\varepsilon_0\frac{h(\zeta_m-1)(3-\zeta_p)p}{4}\,\delta_{ml}\delta_{pq}\delta_{rs}\Bigg]B_{mpr}\\
&\qquad+\frac{\sqrt{\zeta_p\zeta_m}e^{i\varphi_r}}{\mu_{mp}^2\sqrt{w_r h}}\Bigg[\omega\mu_0\left(\frac{p}{w_r}K^{YY}_{mprlqs}-\frac{m}{h}K^{ZY}_{mprlqs}\right)\\
&\qquad\qquad+\varkappa_{mp}\frac{m(\zeta_m-1)(3-\zeta_p)w_r}{4}\,\delta_{ml}\delta_{pq}\delta_{rs}\Bigg]D_{mpr}\Bigg\}\\
&\quad=\sum_{r}\sum_{(m,\,p)}\Bigg\{-\frac{2e^{i\varphi_r}}{\nu_{mp}^2\sqrt{w_r h}}\Bigg[\lambda_{mp}\left(\frac{m}{h}K^{YY}_{mprlqs}+\frac{p}{w_r}K^{ZY}_{mprlqs}\right)\\
&\qquad\qquad+\omega\varepsilon_0\frac{h(\zeta_m-1)(3-\zeta_p)p}{4}\,\delta_{ml}\delta_{pq}\delta_{rs}\Bigg]A_{mpr}\\
&\qquad-\frac{\sqrt{\zeta_p\zeta_m}e^{i\varphi_r}}{\mu_{mp}^2\sqrt{w_r h}}\Bigg[\omega\mu_0\left(\frac{p}{w_r}K^{YY}_{mprlqs}-\frac{m}{h}K^{ZY}_{mprlqs}\right)\\
&\qquad\qquad-\varkappa_{mp}\frac{m(\zeta_m-1)(3-\zeta_p)w_r}{4}\,\delta_{ml}\delta_{pq}\delta_{rs}\Bigg]C_{mpr}\Bigg\},
\end{aligned}
\tag{2.51}
$$

což stručněji zapíšeme jako

$$
\begin{aligned}
&\sum_{r}\sum_{(m,\,p)}\left\{{}^2M_{mprlqs}B_{mpr}+{}^4M_{mprlqs}D_{mpr}\right\}\\
&\qquad=\sum_{r}\sum_{(m,\,p)}\left\{{}^1M_{mprlqs}A_{mpr}+{}^3M_{mprlqs}C_{mpr}\right\},
\end{aligned}
\tag{2.52}
$$

a druhá z nich, tedy (2.50), přechází na

$$\begin{aligned}
&\sum_r \sum_{(m,\,p)} \Bigg\{ -\frac{2e^{i\varphi_r}}{\nu_{mp}^2\sqrt{w_r h}} \Bigg[\lambda_{mp} \left(\frac{m}{h} K_{mprlqs}^{YZ} + \frac{p}{w_r} K_{mprlqs}^{ZZ} \right) \\
&\qquad\qquad -\omega\varepsilon_0 \frac{m(3-\zeta_m)(\zeta_p-1)w_r}{4}\, \delta_{ml}\delta_{pq}\delta_{rs} \Bigg] B_{mpr} \\
&\qquad + \frac{\sqrt{\zeta_p\zeta_m} e^{i\varphi_r}}{\mu_{mp}^2\sqrt{w_r h}} \Bigg[\omega\mu_0 \left(\frac{p}{w_r} K_{mprlqs}^{YZ} - \frac{m}{h} K_{mprlqs}^{ZZ} \right) \\
&\qquad\qquad -\varkappa_{mp} \frac{h(3-\zeta_m)(\zeta_p-1)p}{4}\, \delta_{ml}\delta_{pq}\delta_{rs} \Bigg] D_{mpr} \Bigg\} \\
&= \sum_r \sum_{(m,\,p)} \Bigg\{ -\frac{2e^{i\varphi_r}}{\nu_{mp}^2\sqrt{w_r h}} \Bigg[\lambda_{mp} \left(\frac{m}{h} K_{mprlqs}^{YZ} + \frac{p}{w_r} K_{mprlqs}^{ZZ} \right) \\
&\qquad\qquad +\omega\varepsilon_0 \frac{m(3-\zeta_m)(\zeta_p-1)w_r}{4}\, \delta_{ml}\delta_{pq}\delta_{rs} \Bigg] A_{mpr} \\
&\qquad - \frac{\sqrt{\zeta_p\zeta_m} e^{i\varphi_r}}{\mu_{mp}^2\sqrt{w_r h}} \Bigg[\omega\mu_0 \left(\frac{p}{w_r} K_{mprlqs}^{YZ} - \frac{m}{h} K_{mprlqs}^{ZZ} \right) \\
&\qquad\qquad +\varkappa_{mp} \frac{h(3-\zeta_m)(\zeta_p-1)p}{4}\, \delta_{ml}\delta_{pq}\delta_{rs} \Bigg] C_{mpr} \Bigg\},
\end{aligned} \tag{2.53}$$

což zapíšeme opět stručněji, tedy jako

$$\begin{aligned}
&\sum_r \sum_{(m,\,p)} \left\{ {}^6M_{mprlqs} B_{mpr} + {}^8M_{mprlqs} D_{mpr} \right\} \\
&\qquad = \sum_r \sum_{(m,\,p)} \left\{ {}^5M_{mprlqs} A_{mpr} + {}^7M_{mprlqs} C_{mpr} \right\}.
\end{aligned} \tag{2.54}$$

2.2 Matice rozptylu a její numerická reprezentace

V tomto odstavci udáme explicitní tvar matice rozptylu pro naši soustavu grill - vakuum - plazma a naznačíme, jakým způsobem ji reprezentujeme pro účely numerického výpočtu amplitud odražených vln uvnitř vlnovodů. Nejprve však učiníme pár přípravných kroků.

2.2.1 Motivace

V prvním kroku bude výhodné zapsat formálně pomocí operátorů rovnice (2.52) a (2.54) získané v předchozím odstavci. Tím máme na mysli reprezentovat tenzory ${}^{\iota}M, \iota \in \{1, 2, \ldots, 8\}$, pomocí jistých matic $\left(\mathcal{M}_\iota\right)$, a na tyto matice nahlížet jako na matice jistých operátorů $\mathcal{M}_\iota$. Zvolme tedy následující zápis, jehož detaily a důvody k němu vyplynou z úvah, které budou následovat dále v tomto odstavci. Pišme tedy

$$
\begin{aligned}
\mathcal{B}^T \mathcal{M}_2 + \mathcal{D}^T \mathcal{M}_4 &= \mathcal{A}^T \mathcal{M}_1 + \mathcal{C}^T \mathcal{M}_3 \\
\mathcal{B}^T \mathcal{M}_6 + \mathcal{D}^T \mathcal{M}_8 &= \mathcal{A}^T \mathcal{M}_5 + \mathcal{C}^T \mathcal{M}_7,
\end{aligned}
$$

Formálním transponováním předešlého získáme

$$
\begin{aligned}
\mathcal{M}_2^T \mathcal{B} + \mathcal{M}_4^T \mathcal{D} &= \mathcal{M}_1^T \mathcal{A} + \mathcal{M}_3^T \mathcal{C} \\
\mathcal{M}_6^T \mathcal{B} + \mathcal{M}_8^T \mathcal{D} &= \mathcal{M}_5^T \mathcal{A} + \mathcal{M}_7^T \mathcal{C}.
\end{aligned}
$$

Nahlédneme-li na příslušné matice $\left(\mathcal{M}_\iota\right)^T$, jako na prvky (bloky) jistých blokových matic, lze tyto dvě rovnice zapsat následovně

$$
\begin{pmatrix} \mathcal{M}_2^T & \mathcal{M}_4^T \\ \mathcal{M}_6^T & \mathcal{M}_8^T \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \mathcal{B} \\ \mathcal{D} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \mathcal{M}_1^T & \mathcal{M}_3^T \\ \mathcal{M}_5^T & \mathcal{M}_7^T \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \mathcal{A} \\ \mathcal{C} \end{pmatrix}. \tag{2.55}
$$

Následnou formální inverzí blokové matice na levé straně rovnice (2.55) získáváme

$$
\begin{pmatrix} \mathcal{B} \\ \mathcal{D} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \mathcal{M}_2^T & \mathcal{M}_4^T \\ \mathcal{M}_6^T & \mathcal{M}_8^T \end{pmatrix}^{-1} \begin{pmatrix} \mathcal{M}_1^T & \mathcal{M}_3^T \\ \mathcal{M}_5^T & \mathcal{M}_7^T \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \mathcal{A} \\ \mathcal{C} \end{pmatrix}, \tag{2.56}
$$

tedy formální vztah mezi amplitudami odražených vln ve vlnovodech, reprezentovanými pomocí blokového vektoru s bloky $\left(\mathcal{B}\right)$ a $\left(\mathcal{D}\right)$, a amplitudami excitovaných vln ve vlnovodech, reprezentovanými pomocí blokového vektoru s bloky $\left(\mathcal{A}\right)$ a $\left(\mathcal{C}\right)$. Nabízí se, že by matice

$$
\tilde{S} \equiv \begin{pmatrix} \mathcal{M}_2^T & \mathcal{M}_4^T \\ \mathcal{M}_6^T & \mathcal{M}_8^T \end{pmatrix}^{-1} \begin{pmatrix} \mathcal{M}_1^T & \mathcal{M}_3^T \\ \mathcal{M}_5^T & \mathcal{M}_7^T \end{pmatrix}
$$

mohla být onou kýženou maticí rozptylu. Ukazuje se však, že tomu tak není, neboť inverzi blokové matice na levé straně rovnice (2.55) nelze provést. Je to totiž matice singulární, jak ukážeme dále. A v dalším rovněž uvidíme, jak tento problém vyřešit.

2.2.2 Vlastní realizace

Nejprve upřesníme, jakým způsobem definujeme matice $\big(\mathcal{M}_\iota\big)$. Vezměme tedy tenzory ${}^\iota M$ a najďeme nějakou jejich maticovou reprezentaci. K tomu nám poslouží následující zobrazení, tzv. "indexový izomorfismus"

$$\Phi : \Big\{\hat{\mathrm{M}}_0 \times \hat{\mathrm{P}}_0 \setminus \{(0,0)\}\Big\} \times \hat{\mathrm{R}} \longrightarrow \hat{\mathrm{I}}$$
$$(m,p,r) \overset{\Phi}{\longmapsto} i$$

$$\Phi(m,p,r) \equiv \begin{cases} (r-1)P + p, & \text{pro} \;\; m = 0 \wedge p \neq 0 \\ RP + (r-1)M + m, & \text{pro} \;\; m \neq 0 \wedge p = 0 \\ (mR + r - 1)P + p + RM, & \text{pro} \;\; m \neq 0 \wedge p \neq 0, \end{cases} \tag{2.57}$$

kde indexové množiny $\hat{\mathrm{M}}_0$, $\hat{\mathrm{P}}_0$, $\hat{\mathrm{R}}$ a $\hat{\mathrm{I}}$ jsou definovány takto

$$\begin{aligned} \hat{\mathrm{M}}_0 &\equiv \{0,1,2,\ldots,M\}\,,\;\; M \in \mathbb{N}, \\ \hat{\mathrm{P}}_0 &\equiv \{0,1,2,\ldots,P\}\,,\;\; P \in \mathbb{N}, \\ \hat{\mathrm{R}} &\equiv \{1,2,3,\ldots,R\}\,,\;\; R \in \mathbb{N}, \\ \hat{\mathrm{I}} &\equiv \{1,2,3,\ldots,I\}\,,\;\; \text{kde}\; I = (M+P+MP)R. \end{aligned} \tag{2.58}$$

Lze se snadno přesvědčit, že zobrazení Φ je prosté, a že zobrazuje množinu $\Big\{\hat{\mathrm{M}}_0 \times \hat{\mathrm{P}}_0 \setminus \{(0,0)\}\Big\} \times \hat{\mathrm{R}}$ na množinu $\hat{\mathrm{I}}$. Existuje k němu tedy zobrazení inverzní, Φ^{-1}, pro které platí

$$\begin{aligned} \Phi^{-1} : \hat{\mathrm{I}} &\longrightarrow \Big\{\hat{\mathrm{M}}_0 \times \hat{\mathrm{P}}_0 \setminus \{(0,0)\}\Big\} \times \hat{\mathrm{R}} \\ i &\overset{\Phi^{-1}}{\longmapsto} (m,p,r) \end{aligned} \tag{2.59}$$

$\Phi^{-1}(i)\Big|_{i\in\{1,2,\ldots,RP\}} = (m,p,r)$, kde

$$\begin{aligned} m &= 0 \\ p &= i - \left(\left[\frac{i}{P}\right]_C - 1\right) P \\ r &= \left[\frac{i}{P}\right]_C \end{aligned}$$

$$\Phi^{-1}(i)\Big|_{i\in\{RP+1,\ldots,(M+P)R\}} = (m,p,r), \text{ kde}$$

$$\begin{aligned}
m &= i - RP - \left(\left[\frac{i-RP}{M}\right]_C - 1\right) M \\
p &= 0 \\
r &= \left[\frac{i-RP}{M}\right]_C
\end{aligned}$$

$$\Phi^{-1}(i)\Big|_{i\in\{(M+P)R+1,\ldots,(M+P+MP)R\}} = (m,p,r), \text{ kde}$$

$$\begin{aligned}
m &= \left[\frac{i-RM}{PR}\right]_C - 1 \\
p &= i - RM - \left(\left[\frac{i-RM}{PR}\right]_C - 1\right) PR \\
&\quad - \left(\left[\frac{i - RM - \left(\left[\frac{i-RM}{PR}\right]_C - 1\right) PR}{P}\right]_C - 1\right) P \\
r &= \left[\frac{i - RM - \left(\left[\frac{i-RM}{PR}\right]_C - 1\right) PR}{P}\right]_C,
\end{aligned}$$

přičemž symbol $[\,.\,]_C$ značí zobrazení, které svému obecně reálnému argumentu přiřazuje nejbližší vyšší celé číslo, tj. je definováno takto

$$[x]_C \equiv \min_{a\in I_x} a, I_x = \{b \in \mathbb{Z} \mid b \geq x\}. \tag{2.60}$$

Pomocí zobrazení Φ aplikovaného na první a druhou trojici indexů složek tenzorů ${}^{\iota}M$ "naindukujeme" jejich maticovou reprezentaci $\left(\mathcal{M}_{\iota}\right)$, tedy

$$\left(\mathcal{M}_{\iota}\right) \equiv \left(\mathcal{M}_{\iota}{}^{\mathrm{u}}{}_{\mathrm{v}}\right) \cong_{\Phi} \left({}^{\iota}M_{mprlqs}\right), \tag{2.61}$$

kde

$$\begin{aligned}
\mathcal{M}_{\iota}{}^{\mathrm{u}}{}_{\mathrm{v}} &= {}^{\iota}M_{mprlqs} \\
\mathrm{u} &= \Phi(m,p,r) \\
\mathrm{v} &= \Phi(l,q,s).
\end{aligned} \tag{2.62}$$

Podobně reprezentujeme i amplitudy A, B, C a D. Například pro A platí

$$\left(\mathcal{A}\right)^T = \left(\mathcal{A}^T\right) \equiv \left(\mathcal{A}^T{}_{\mathrm{u}}\right) \cong_{\Phi} \left(A_{mpr}\right), \tag{2.63}$$

kde

$$\begin{aligned}
\mathcal{A}^T{}_{\mathrm{u}} &= A_{mpr} \\
\mathrm{u} &= \Phi(m,p,r).
\end{aligned} \tag{2.64}$$

Pro úplnost značení dodejme, že $\mathcal{A}^{\mathrm{u}} = \mathcal{A}^{T}{}_{\mathrm{u}}$ a $\mathcal{M}_{\iota}^{T\,\mathrm{v}}{}_{\mathrm{u}} = \mathcal{M}_{\iota}{}^{\mathrm{u}}{}_{\mathrm{v}}$.

Udejme také konkrétní příklad matice $\big(\mathcal{M}_{\iota}\big)$, resp. vektoru $\big(\mathcal{A}\big)$, pro nejmenší možný rozsah indexů složek ${}^{\iota}M_{mprlqs}$, resp. složek A_{mpr}, tedy pro případ, kdy $(m,p,r) \in \{(0,1,1);(1,0,1);(1,1,1)\}$

$$
\begin{aligned}
\big(\mathcal{M}_{\iota}{}^{\mathrm{u}}{}_{\mathrm{v}}\big)\Big|_{\mathrm{u},\mathrm{v}\in\{1,2,3\}} &= \begin{pmatrix} {}^{\iota}M_{011011} & {}^{\iota}M_{011101} & {}^{\iota}M_{011111} \\ {}^{\iota}M_{101011} & {}^{\iota}M_{101101} & {}^{\iota}M_{101111} \\ {}^{\iota}M_{111011} & {}^{\iota}M_{111101} & {}^{\iota}M_{111111} \end{pmatrix}, \text{ respektive} \\
\big(\mathcal{A}^{\mathrm{u}}\big)\Big|_{\mathrm{u}\in\{1,2,3\}} &= \begin{pmatrix} A_{011} \\ A_{101} \\ A_{111} \end{pmatrix}.
\end{aligned}
\tag{2.65}
$$

Zůstaňme ještě chvíli u minimálního rozsahu indexů a sestavme blokovou matici s bloky $\big(\mathcal{M}_{\kappa}\big)$, $\big(\mathcal{M}_{\kappa+2}\big)$ v prvním řádku a bloky $\big(\mathcal{M}_{\kappa+4}\big)$, $\big(\mathcal{M}_{\kappa+6}\big)$ v řádku druhém. Číslo $\kappa \in \{1,2\}$ volíme pevně, tedy pro každý blok stejné.[8] Ještě než tuto matici zapíšeme, zjistěme, zda její bloky mají nějaké obecně nulové prvky, a pokud ano, rovnou je vyznačme. Získáme tak následující

$$
\begin{pmatrix}
0 & 0 & 0 & 0 & {}^{\kappa+2}M_{011101} & {}^{\kappa+2}M_{011111} \\
0 & 0 & 0 & 0 & {}^{\kappa+2}M_{101101} & {}^{\kappa+2}M_{101111} \\
0 & {}^{\kappa}M_{111101} & {}^{\kappa}M_{111111} & 0 & {}^{\kappa+2}M_{111101} & {}^{\kappa+2}M_{111111} \\
0 & 0 & 0 & {}^{\kappa+6}M_{011011} & 0 & {}^{\kappa+6}M_{011111} \\
0 & 0 & 0 & {}^{\kappa+6}M_{101011} & 0 & {}^{\kappa+6}M_{101111} \\
{}^{\kappa+4}M_{111011} & 0 & {}^{\kappa+4}M_{111111} & {}^{\kappa+6}M_{111011} & 0 & {}^{\kappa+6}M_{111111}
\end{pmatrix}.
\tag{2.66}
$$

Dá se snadno ukázat, že nulové prvky matice (2.66) utváří jisté její podbloky, které mají své analogie pro libovolný jiný rozsah indexů. Tuto skutečnost schematicky vystihuje Obrázek 2.1. Když sestavíme blokovou matici s bloky $\big(\mathcal{M}_{\kappa}^{T}\big)$, $\big(\mathcal{M}_{\kappa+2}^{T}\big)$ v prvním řádku a bloky $\big(\mathcal{M}_{\kappa+4}^{T}\big)$, $\big(\mathcal{M}_{\kappa+6}^{T}\big)$ v řádku druhém a budeme postupovat stejně jako u předchozího, dostaneme

$$
\begin{pmatrix}
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 0 & {}^{\kappa}M_{111101} & {}^{\kappa+2}M_{011101} & {}^{\kappa+2}M_{101101} & {}^{\kappa+2}M_{111101} \\
0 & 0 & {}^{\kappa}M_{111111} & {}^{\kappa+2}M_{011111} & {}^{\kappa+2}M_{101111} & {}^{\kappa+2}M_{111111} \\
0 & 0 & {}^{\kappa+4}M_{111011} & {}^{\kappa+6}M_{011011} & {}^{\kappa+6}M_{101011} & {}^{\kappa+6}M_{111011} \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 0 & {}^{\kappa+4}M_{111111} & {}^{\kappa+6}M_{011111} & {}^{\kappa+6}M_{101111} & {}^{\kappa+6}M_{111111}
\end{pmatrix}.
\tag{2.67}
$$

Zde jsou nulové podbloky dobře patrné a opět platí, že mají své analogie pro libovolný jiný rozsah indexů, jak je znázorněno na Obrázku 2.2.

[8] Celkem tak sestavíme dvě blokové matice.

Než přistoupíme k samotné diskusi rovnice (2.55), sestavme ještě blokové vektory v ní vystupující a to opět pro případ minimálního rozsahu indexů. Potom tedy

$$\begin{pmatrix} \mathcal{A} \\ \mathcal{C} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} A_{011} \\ A_{101} \\ A_{111} \\ C_{011} \\ C_{101} \\ C_{111} \end{pmatrix} \quad \text{a} \quad \begin{pmatrix} \mathcal{B} \\ \mathcal{D} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} B_{011} \\ B_{101} \\ B_{111} \\ D_{011} \\ D_{101} \\ D_{111} \end{pmatrix}. \tag{2.68}$$

Avšak A_{mpr}, resp. B_{mpr}, představují dopadající (excitované), resp. odražené, amplitudy TM modů ve vlnovodech a jelikož TM mody jsou přítomny až od TM_{11}, nic nebrání tomu, abychom položili $A_{0pr} = 0$, $A_{m0r} = 0$ a $B_{0pr} = 0$, $B_{m0r} = 0$. Když si toto uvědomíme, můžeme (v případě minimálního rozsahu indexů) soustavu rovnic (2.55) ekvivalentně zapsat jako

$$\begin{aligned} &\begin{pmatrix} {}^2M_{111101} & {}^4M_{011101} & {}^4M_{101101} & {}^4M_{111101} \\ {}^2M_{111111} & {}^4M_{011111} & {}^4M_{101111} & {}^4M_{111111} \\ {}^6M_{111011} & {}^8M_{011011} & {}^8M_{101011} & {}^8M_{111011} \\ {}^6M_{111111} & {}^8M_{011111} & {}^8M_{101111} & {}^8M_{111111} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} B_{111} \\ D_{011} \\ D_{101} \\ D_{111} \end{pmatrix} \\ &\qquad = \begin{pmatrix} {}^1M_{111101} & {}^3M_{011101} & {}^3M_{101101} & {}^3M_{111101} \\ {}^1M_{111111} & {}^3M_{011111} & {}^3M_{101111} & {}^3M_{111111} \\ {}^5M_{111011} & {}^7M_{011011} & {}^7M_{101011} & {}^7M_{111011} \\ {}^5M_{111111} & {}^7M_{011111} & {}^7M_{101111} & {}^7M_{111111} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} A_{111} \\ C_{011} \\ C_{101} \\ C_{111} \end{pmatrix}, \end{aligned} \tag{2.69}$$

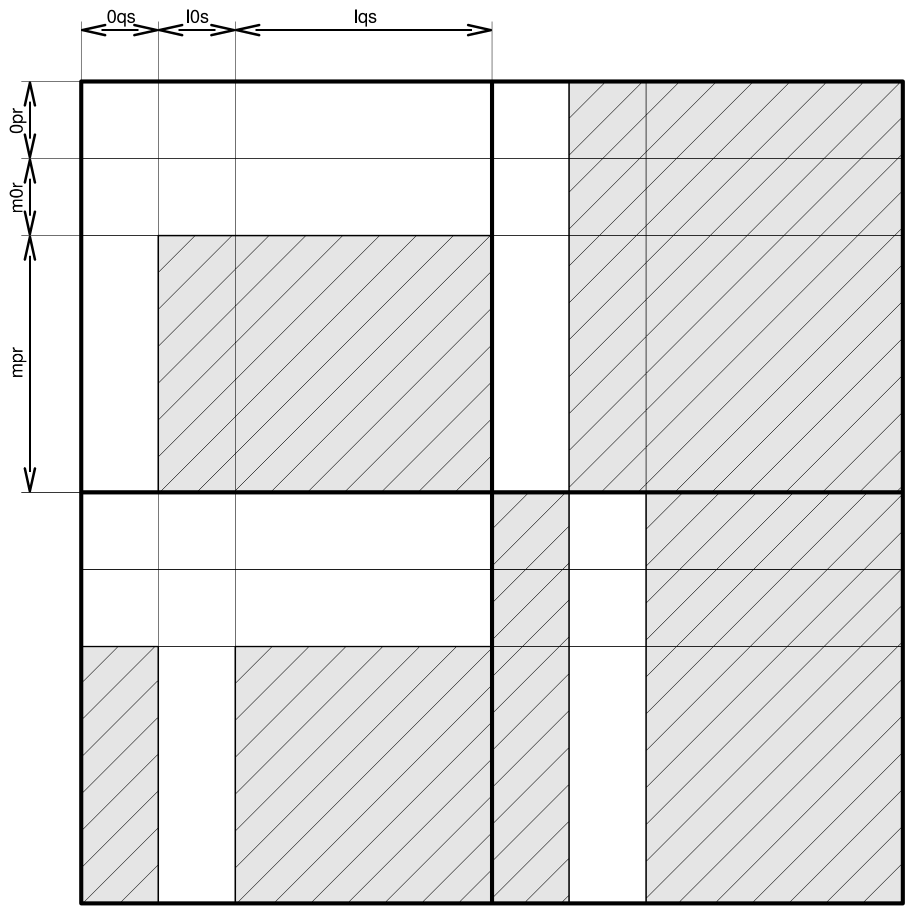
tedy doslova vynechat všechny nulové podbloky. Na základě předchozího lze již snadno nahlédnout, že tento postup není omezen pouze na minimální rozsahy indexů a lze jej tedy aplikovat obecně. Dále se ukazuje, že takto zredukované blokové matice jsou již regulární a mají tedy inverzi. Kýžená matice rozptylu pro náš systém grill - vakuum - plazma tedy zní

$$S \equiv (\mathcal{S}) \equiv \begin{pmatrix} \tilde{\mathcal{M}}_2^T & \tilde{\mathcal{M}}_4^T \\ \tilde{\mathcal{M}}_6^T & \tilde{\mathcal{M}}_8^T \end{pmatrix}^{-1} \begin{pmatrix} \tilde{\mathcal{M}}_1^T & \tilde{\mathcal{M}}_3^T \\ \tilde{\mathcal{M}}_5^T & \tilde{\mathcal{M}}_7^T \end{pmatrix}, \tag{2.70}$$

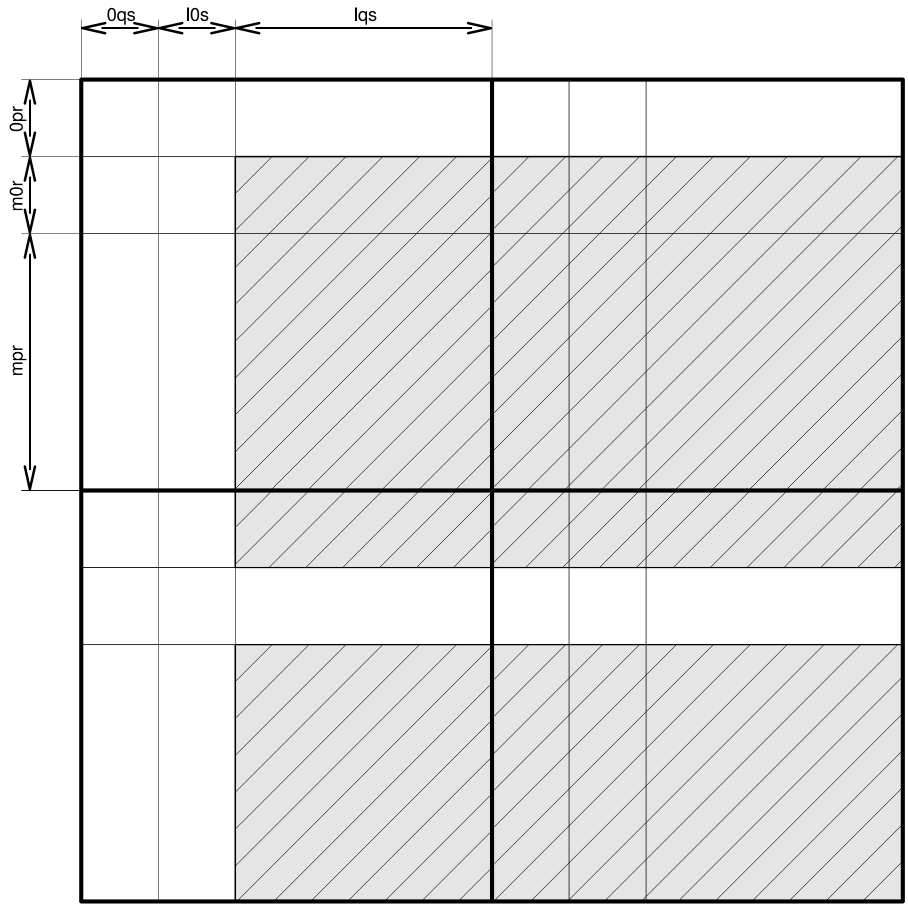
kde bloky $\left(\tilde{\mathcal{M}}_\iota^T\right)$ značí bloky $\left(\mathcal{M}_\iota^T\right)$ zredukované o nulové podbloky. Můžeme tedy psát

$$\begin{pmatrix} \tilde{\mathcal{B}} \\ \mathcal{D} \end{pmatrix} = (\mathcal{S}) \begin{pmatrix} \tilde{\mathcal{A}} \\ \mathcal{C} \end{pmatrix}, \tag{2.71}$$

přičemž $(\tilde{\mathcal{A}})$ značí vektor $(\mathcal{A})$ zredukovaný o nulové podbloky, $(\tilde{\mathcal{B}})$ analogicky.



Obrázek 2.1: Schéma blokové matice s bloky $(\mathcal{M}_\kappa)$, $(\mathcal{M}_{\kappa+2})$ v prvním řádku a bloky $(\mathcal{M}_{\kappa+4})$, $(\mathcal{M}_{\kappa+6})$ v řádku druhém, $\kappa = 1 \vee \kappa = 2$. Šrafované oblasti vyznačují obecně nenulové podbloky, bílé oblasti podbloky nulové.



Obrázek 2.2: Schéma blokové matice s bloky $\left(\mathcal{M}_{\kappa}^{T}\right)$, $\left(\mathcal{M}_{\kappa+2}^{T}\right)$ v prvním řádku a bloky $\left(\mathcal{M}_{\kappa+4}^{T}\right)$, $\left(\mathcal{M}_{\kappa+6}^{T}\right)$ v řádku druhém, $\kappa = 1 \vee \kappa = 2$. Šrafované oblasti vyznačují obecně nenulové podbloky, bílé oblasti podbloky nulové.

Kapitola 3

Matice odrazu

V této kapitole stručně naznačíme, jakým způsobem získáváme komponenty matice odrazu. Nejprve uvedeme, jakými rovnicemi popisujeme EM pole v plazmatu. Poté se budeme věnovat jejich okrajovým podmínkám. Numerickou realizací, neřku-li softwareovou implementací, se zde nezabýváme.

Zde je třeba říct, že následující text, který lze chápat jako nástin teoretického podkladu pro numerickou realizaci, je silně inspirován pracemi [17] a [18], neboť právě numerické rutiny, pomocí kterých je zmíněná okrajová úloha řešena jsou dílem Dr. Jakuba Urbana a Dr. Josefa Preinhaeltera z Ústavu fyziky plazmatu AV ČR. Jedná se o rutiny využívající adaptivní metodu konečných prvků. Více lze nalézt v již zmíněných zdrojích nebo též v [19].

3.1 EM pole v plazmatu

Jelikož zde uvažujeme tzv. studené magnetoaktivní plazma s 1D-nehomogenitou (hustoty částic) ve směru osy x, hledáme řešení EM polí v následujícím tvaru[1]

$$\vec{E} = \iint\limits_{\mathbb{R}^2} \mathrm{d}k_y \, \mathrm{d}k_z \, e^{i(k_y y + k_z z - \omega t)} \vec{W}, \tag{3.1}$$

kde $\vec{W} = \vec{W}(x, k_y, k_z)$. Dosazením pole tohoto tvaru do vlnové rovnice

$$\nabla \times \nabla \times \vec{E} + \frac{1}{c^2} \epsilon \frac{\partial^2 \vec{E}}{\partial t^2} = \vec{0}, \tag{3.2}$$

[1] Uvádíme pouze výraz pro elektrickou složku pole, neboť ta je v našem přístupu klíčová.

kde ϵ představuje tenzor permitivity plazmatu, jehož matice je v obecné podobě dána

$$(\epsilon) = \begin{pmatrix} \varepsilon^x{}_x & \varepsilon^x{}_y & \varepsilon^x{}_z \\ \varepsilon^y{}_x & \varepsilon^y{}_y & \varepsilon^y{}_z \\ \varepsilon^z{}_x & \varepsilon^z{}_y & \varepsilon^z{}_z \end{pmatrix}, \tag{3.3}$$

lze po snadných úpravách získat následující rovnice pro složky W^y a W^z

$$\begin{aligned} ik_y \frac{\mathrm{d}W^x}{\mathrm{d}x} - k_0^2 \varepsilon^y{}_x W^x - \frac{\mathrm{d}^2 W^y}{\mathrm{d}x^2} + \left(k_z^2 - k_0^2 \varepsilon^y{}_y\right) W^y - \left(k_y k_z + k_0^2 \varepsilon^y{}_z\right) W^z = 0 \\ ik_z \frac{\mathrm{d}W^x}{\mathrm{d}x} - k_0^2 \varepsilon^z{}_x W^x - \frac{\mathrm{d}^2 W^z}{\mathrm{d}x^2} - \left(k_y k_z + k_0^2 \varepsilon^z{}_y\right) W^y + \left(k_y^2 - k_0^2 \varepsilon^z{}_z\right) W^z = 0, \end{aligned} \tag{3.4}$$

kde

$$W^x = \frac{1}{k_y^2 + k_z^2 - k_0^2 \varepsilon^x{}_x} \left(-ik_y \frac{\mathrm{d}W^y}{\mathrm{d}x} - ik_z \frac{\mathrm{d}W^z}{\mathrm{d}x} + k_0^2 \varepsilon^x{}_y W^y + k_0^2 \varepsilon^x{}_z W^z \right). \tag{3.5}$$

3.2 Okrajové podmínky pro rovnice (3.4)

3.2.1 OP pro rozhraní vakuum - plazma

Nyní z podmínek spojitosti tečných složek EM pole na rozhraní vakuum - plazma odvodíme explicitní tvar okrajové podmínky (zkráceně OP) pro soustavu rovnic (3.4). Jak již bylo řečeno v odstavci 2.1.1 ve 2. kapitole, EM pole v naší modelové vakuové mezeře vyjadřujeme pomocí fourierovských integrálů (2.1) a (2.2). EM pole v plazmatu jsme vyjádřili podobně pomocí (3.1). V dalším tedy postačí pracovat pouze s integrandy příslušných výrazů.

Podmínka spojitosti tečných složek elektrických polí vyžaduje, aby platilo

$$\begin{aligned} S^y e^{ik_x x_p} + T^y e^{-ik_x x_p} = W^y \Big|_{x=x_p} \\ S^z e^{ik_x x_p} + T^z e^{-ik_x x_p} = W^z \Big|_{x=x_p}, \end{aligned} \tag{3.6}$$

přičemž zopakujme, že $\vec{S}$ pokládáme za známou amplitudu dopadající vlny (na uvažované rozhraní), kdežto na $\vec{T}$ nahlížíme jako na neznámou amplitudu odražené vlny (od uvažovaného rozhraní).

Podmínku spojitosti tečných složek magnetických polí získáme ve dvou následujících krocích. Nejprve vyjádříme tečné složky magnetického pole v modelové vakuové mezeře pomocí tečných složek elektrického pole tamtéž, k čemuž samozřejmě využijeme Maxwellových rovnic. Ve druhém kroku vyjádříme tečné složky magnetického pole uvnitř plazmatu pomocí tečných složek (a jejich derivací podle x) elektrického pole tamtéž, přičemž nám pomůže vztah (3.5) a opět Maxwellovy rovnice.

Nahlédneme-li zpět do 2. kapitoly na vztahy (2.4) počínaje, zjistíme, že první krok už je téměř za námi. Ze zmíněných vztahů totiž snadno plyne

$$\begin{aligned} U^y e^{ik_x x_p} + V^y e^{-ik_x x_p} &= \frac{k_y k_z}{\omega\mu_0 k_x}\left(-S^y e^{ik_x x_p} + T^y e^{-ik_x x_p}\right) \\ &\quad + \frac{k_0^2 - k_y^2}{\omega\mu_0 k_x}\left(-S^z e^{ik_x x_p} + T^z e^{-ik_x x_p}\right) \end{aligned} \tag{3.7}$$

$$\begin{aligned} U^z e^{ik_x x_p} + V^z e^{-ik_x x_p} &= \frac{k_y k_z}{\omega\mu_0 k_x}\left(S^z e^{ik_x x_p} - T^z e^{-ik_x x_p}\right) \\ &\quad + \frac{k_0^2 - k_z^2}{\omega\mu_0 k_x}\left(S^y e^{ik_x x_p} - T^y e^{-ik_x x_p}\right) \end{aligned} \tag{3.8}$$

Dosadíme-li v právě získaných vztazích za T^y a T^z jejich vyjádření ze vztahů (3.6), získáme

$$\begin{aligned} U^y e^{ik_x x_p} + V^y e^{-ik_x x_p} &= \frac{k_y k_z}{\omega\mu_0 k_x}\left(-2S^y e^{ik_x x_p} + W^y\Big|_{x=x_p}\right) \\ &\quad + \frac{k_0^2 - k_y^2}{\omega\mu_0 k_x}\left(-2S^z e^{ik_x x_p} + W^z\Big|_{x=x_p}\right) \end{aligned} \tag{3.9}$$

$$\begin{aligned} U^z e^{ik_x x_p} + V^z e^{-ik_x x_p} &= \frac{k_y k_z}{\omega\mu_0 k_x}\left(2S^z e^{ik_x x_p} - W^z\Big|_{x=x_p}\right) \\ &\quad + \frac{k_0^2 - k_z^2}{\omega\mu_0 k_x}\left(2S^y e^{ik_x x_p} - W^y\Big|_{x=x_p}\right). \end{aligned} \tag{3.10}$$

Nyní využijme Faradayova zákona[2] a vyjádřeme tečné složky magnetického pole v plazmatu na základě tečných složek elektrického pole tamtéž. Pro y-ovou složku magnetického pole (vyhodnocenou v $x = x_p$) dostáváme

$$\frac{-i}{\omega\mu_0}\left(ik_z W^x - \frac{\mathrm{d}W^z}{\mathrm{d}x}\right)\Bigg|_{x=x_p}, \tag{3.11}$$

zatímco jeho z-ová složka (rovněž vyhodnocená v $x = x_p$) je rovna

$$\frac{-i}{\omega\mu_0}\left(-ik_y W^x + \frac{\mathrm{d}W^y}{\mathrm{d}x}\right)\Bigg|_{x=x_p}. \tag{3.12}$$

[2]Tím samozřejmě máme na mysli Maxwellovu rovnici $\nabla \times \vec{E} = -\mu_0 \frac{\partial \vec{H}}{\partial t}$

Položíme-li v rovnost pravou stranu (3.9) s výrazem (3.11), a pravou stranu (3.10) s výrazem (3.12), potom po snadných úpravách zahrnujících využití vztahu (3.5) získáme

$$\begin{aligned}\Bigg[\left(\frac{k_y k_z}{k_x} - \frac{k_z k_0^2 \varepsilon^x{}_y}{k_y^2 + k_z^2 - k_0^2 \varepsilon^x{}_x}\right) W^y + \frac{i k_y k_z}{k_y^2 + k_z^2 - k_0^2 \varepsilon^x{}_x} \frac{\mathrm{d}W^y}{\mathrm{d}x} \\ + \left(\frac{k_0^2 - k_y^2}{k_x} - \frac{k_z k_0^2 \varepsilon^x{}_z}{k_y^2 + k_z^2 - k_0^2 \varepsilon^x{}_x}\right) W^z + i\left(\frac{k_z^2}{k_y^2 + k_z^2 - k_0^2 \varepsilon^x{}_x} - 1\right) \frac{\mathrm{d}W^z}{\mathrm{d}x}\Bigg]\Bigg|_{x=x_p} \\ = 2e^{i k_x x_p}\left(\frac{k_y k_z}{k_x} S^y + \frac{k_0^2 - k_y^2}{k_x} S^z\right)\end{aligned} \tag{3.13}$$

$$\begin{aligned}\Bigg[\left(\frac{k_y k_z}{k_x} - \frac{k_y k_0^2 \varepsilon^x{}_z}{k_y^2 + k_z^2 - k_0^2 \varepsilon^x{}_x}\right) W^z + \frac{i k_y k_z}{k_y^2 + k_z^2 - k_0^2 \varepsilon^x{}_x} \frac{\mathrm{d}W^z}{\mathrm{d}x} \\ + \left(\frac{k_0^2 - k_z^2}{k_x} - \frac{k_y k_0^2 \varepsilon^x{}_y}{k_y^2 + k_z^2 - k_0^2 \varepsilon^x{}_x}\right) W^y + i\left(\frac{k_y^2}{k_y^2 + k_z^2 - k_0^2 \varepsilon^x{}_x} - 1\right) \frac{\mathrm{d}W^y}{\mathrm{d}x}\Bigg]\Bigg|_{x=x_p} \\ = 2e^{i k_x x_p}\left(\frac{k_y k_z}{k_x} S^z + \frac{k_0^2 - k_z^2}{k_x} S^y\right),\end{aligned} \tag{3.14}$$

tedy konečnou podobu okrajových podmínek na rozhraní vakuum - plazma pro soustavu rovnic (3.4). Zde je pěkně vidět, že (3.13) a (3.14) jsou invariantní vůči záměně indexů

$$y \longleftrightarrow z$$

a stejně tomu je i v případě samotných rovnic (3.4), včetně vztahu (3.5).

3.2.2 OP v hloubi plazmatu

Než vyslovíme okrajové podmínky v hloubi plazmatu pro soustavu rovnic (3.4), velmi stručně zde popíšeme užití metody WKB ve zdejším kontextu, neboť některé z výsledků této metody jsou při formulaci zmíněných okrajových podmínek potřeba.

Metoda WKB umožňuje (za jistých předpokladů - viz např. [5], [9]) nalézt přibližné řešení, např. naší soustavy rovnic (3.4), ve tvaru

$$\vec{W}_{KB}(x, k_y, k_z) \equiv \left(\vec{W}_0(x, k_y, k_z) + \vec{W}_1(x, k_y, k_z)\right) \exp\left(i \int_{-\infty}^{x} k_x(x')\,\mathrm{d}x'\right), \tag{3.15}$$

kde $\vec{W}_0$ je tzv. "pomalu měnící se" amplituda a $\vec{W}_1$ představuje opravu prvního řádu[3] k $\vec{W}_0$. Dosazením (3.15) do (3.4) lze získat dvě soustavy lineárních rovnic pro amplitudy $\vec{W}_0$ a $\vec{W}_1$, tedy

$$\sum_{j=1}^{3} a^i{}_j W_0^j = 0 \tag{3.16}$$

$$\sum_{j=1}^{3} a^i{}_j W_1^j = G^i, \tag{3.17}$$

kde matice $\left(a^i{}_j\right)$ je dána

$$\left(a^i{}_j\right) = -\begin{pmatrix} k_0^2\varepsilon^x{}_x - k_y^2 - k_z^2 & k_0^2\varepsilon^x{}_y + k_x k_y & k_0^2\varepsilon^x{}_z + k_x k_z \\ k_0^2\varepsilon^y{}_x + k_x k_y & k_0^2\varepsilon^y{}_y - k_x^2 - k_z^2 & k_0^2\varepsilon^y{}_z + k_y k_z \\ k_0^2\varepsilon^z{}_x + k_x k_z & k_0^2\varepsilon^z{}_y + k_y k_z & k_0^2\varepsilon^z{}_z - k_x^2 - k_y^2 \end{pmatrix}.$$

Pravé strany rovnic (3.17) sestávají z lineárních kombinací veličin tvořených součiny tvaru $k_i \frac{\mathrm{d}W_0^j}{\mathrm{d}x}$.

Nyní učiňme zjednodušující předpoklad[4]. Řekněme, že vnější magnetické pole $\vec{B}_0$ (prostupující plazma) je rovnoběžné s osou z. V tomto uspořádání má matice tenzoru permitivity jednoduchý tvar

$$(\epsilon)\Big|_{\vec{B}_0 \parallel z} = \begin{pmatrix} \varepsilon_\perp & ig & 0 \\ -ig & \varepsilon_\perp & 0 \\ 0 & 0 & \varepsilon_\parallel \end{pmatrix}. \tag{3.18}$$

Z podmínky pro netrivialitu řešení soustavy (3.16), tedy z podmínky

$$\det\left(a^i{}_j\right) = 0, \tag{3.19}$$

lze získat následující výraz pro k_x^2

$$\begin{aligned} k_{x,r}^2 = -k_y^2 + \frac{1}{2k_0^2\varepsilon_\perp}\Bigg\{ & \left(k_0^2\varepsilon_\perp - k_z^2\right)\left(k_0^2\varepsilon_\parallel + k_0^2\varepsilon_\perp\right) - k_0^4 g^2 \\ & +(-1)^{r+1}\Bigg[\bigg(\left(k_0^2\varepsilon_\perp - k_z^2\right)\left(k_0^2\varepsilon_\parallel + k_0^2\varepsilon_\perp\right) - k_0^4 g^2\bigg)^2 \\ & -4k_0^4\varepsilon_\parallel\varepsilon_\perp\left(\left(k_0^2\varepsilon_\perp - k_z^2\right)^2 - k_0^4 g^2\right)\Bigg]^{1/2}\Bigg\}, \end{aligned} \tag{3.20}$$

[3]Veličina $\vec{W}_0$ je 0. řádu v L^{-1}, zatímco veličina $\vec{W}_1$ je 1. řádu v L^{-1}, kde L představuje tzv. charakteristickou délkovou škálu plazmatu, tedy zhruba řečeno délku intervalu, na kterém se parametry plazmatu příliš nemění.

[4]Tento krok není principiálně nutný a volíme jej čistě pro snazší zápis.

kde $r \in \{1, 2\}$. Využijeme-li opět podmínku (3.19) a zvolíme si nějakou výchozí komponentu, řekněme W_0^y, můžeme pomocí ní vyjádřit zbývající dvě. Z podmínek řešitelnosti rovnice (3.17) potom vyplyne obyčejná diferenciální rovnice prvního řádu, jejímž řešením lze získat pro W_0^y vyjádření

$$W_{0,r}^y = C_r^{\pm} \left[\frac{\left(k_y^2 - k_0^2\varepsilon_\perp\right) k_{x,r}^2 + \left(k_y^2 - k_0^2\varepsilon_\parallel\right)\left(k_y^2 + k_z^2 - k_0^2\varepsilon_\perp\right)}{k_{x,r} k_0^2 \varepsilon_\perp \left(k_{x,1}^2 - k_{x,2}^2\right)} \right]^{1/2} \times \exp\left\{ \pm i \left(\varsigma_r(x) + \int_{-\infty}^{x} k_{x,r} \mathrm{d}x' \right) \right\}, \tag{3.21}$$

kde ς_r je tzv. "pomalu měnící se" fáze a $C_r^{\pm}$ značí (celkem 4) konstanty.

Na základě právě nastíněné metody WKB již lze odvodit okrajové podmínky v hloubi plazmatu pro soustavu rovnic (3.4), viz např. [17], [18]. Zde pouze uvedeme jejich znění

$$\left.\left[\frac{\mathrm{d}W^z}{\mathrm{d}x} - \varrho_2 \frac{\mathrm{d}W^y}{\mathrm{d}x} - i k_{x,1} W^z - \varrho_2 W^y \right]\right|_{x=x_n} = 0 \tag{3.22}$$

$$\left.\left[\frac{\mathrm{d}W^z}{\mathrm{d}x} - \varrho_1 \frac{\mathrm{d}W^y}{\mathrm{d}x} - i k_{x,2} W^z - \varrho_1 W^y \right]\right|_{x=x_n} = 0 \tag{3.23}$$

kde

$$\begin{aligned} \varrho_r &\equiv \left.\frac{W_{KB}^z}{W_{KB}^y}\right|_{k_x = k_{x,r}} \\ &= \frac{k_y^2 k_{x,r}^2 - \left(k_0^2 \varepsilon^x{}_y\right)^2 - \left(k_y^2 + k_z^2 - k_0^2 \varepsilon^x{}_x\right)\left[k_{x,r}^2 + \left(k_z^2 - k_0^2 \varepsilon^y{}_y\right)\right]}{-k_y k_z k_{x,r}^2 - k_y k_{x,r} k_0^2 \varepsilon^x{}_z + k_z k_{x,r} k_0^2 \varepsilon^x{}_y + k_0^4 \varepsilon^x{}_y \varepsilon^x{}_z - \left(k_y^2 + k_z^2 - k_0^2 \varepsilon^x{}_x\right)\left(k_y k_z + k_0^2 \varepsilon^y{}_z\right)} \end{aligned} \tag{3.24}$$

a x_n značí vhodně volenou souřadnici uvnitř plazmatu, v jejímž okolí jsou splněny podmínky platnosti metody WKB.

Kapitola 4

Spektrální hustota výkonu

V této kapitole se budeme zabývat tzv. prostorovou spektrální hustotou výkonu EM vlny, kterou vyzařuje LH grill do plazmatu. Nejprve na základě Poyntingovy věty určíme prostorovou spektrální hustotu časové střední hodnoty toku energie této EM vlny, přičemž zde máme na mysli tok energie v modelové vakuové mezeře oddělující LH grill od povrchu plazmatu. Po tomto krátkém odvození, které využívá formalismu matice odrazu, budou následovat numerické výsledky - grafy spektrálních hustot výkonu spočtené pomocí numerického programu `ps2d`, který je nedílnou součástí této práce.

4.1 Odvození

Stejně jako v celém tomto textu, i zde předpokládáme, že EM pole mají harmonickou časovou závislost, tj. dají se rozložit na součin dvou faktorů, z nichž jeden je výhradně funkcí polohy a druhý je harmonickou funkcí času, konkrétně $\exp(-i\omega t)$. Tuto vlastnost stručně zapíšeme jako

$$\begin{aligned} \vec{E} &= e^{-i\omega t}\vec{\mathcal{E}} \\ \vec{H} &= e^{-i\omega t}\vec{\mathcal{H}}, \end{aligned} \tag{4.1}$$

kde $\vec{\mathcal{E}} = \vec{\mathcal{E}}(x, y, z) \in \mathbb{C}^3$ a rovněž $\vec{\mathcal{H}} = \vec{\mathcal{H}}(x, y, z) \in \mathbb{C}^3$.

Nyní vyslovme známou Poyntingovu větu a rozveďme dále výrazy v ní vystupující. Věta samotná říká, že pro $\vec{\mathsf{S}}$, tedy pro tok energie EM vlny platí

$$\vec{\mathsf{S}} = \Re\vec{E} \times \Re\vec{H}. \tag{4.2}$$

Ovšem nás bude zjímat spíše časová střední hodnota toku energie, než-li tok samotný. V našem případě, kde předpokládáme EM pole ve tvaru (4.1), dostaneme pro onu střední hodnotu zvlášť sympatickou formuli

$$\overline{\vec{\mathsf{S}}} \equiv \frac{1}{T}\int\limits_0^T \mathrm{d}t\, \Re\vec{E} \times \Re\vec{H} = \frac{1}{2}\Re\left(\vec{\mathcal{E}} \times \vec{\mathcal{H}}^*\right), \tag{4.3}$$

kde T je perioda vlny, tedy $\omega = \frac{2\pi}{T}$, a hvězdička značí komplexní sdružení. Největší význam má pro nás x-ová komponenta časové střední hodnoty toku energie, tedy

$$\overline{\mathsf{S}}_x = \frac{1}{2}\Re\left(\mathcal{E}^y\mathcal{H}^{z*} - \mathcal{E}^z\mathcal{H}^{y*}\right), \tag{4.4}$$

jejímž zintegrovaním přes rovinu yz získáme x-ovou komponentu výkonu, tedy

$$P_x \equiv \iint\limits_{\mathbb{R}^2} \mathrm{d}y\,\mathrm{d}z\, \overline{\mathsf{S}}_x. \tag{4.5}$$

Ze vztahu (4.4) je vidět, že pro naše účely nám postačí pouze y-ové a z-ové komponenty zde uvažovaných vektorových funkcí $\vec{\mathcal{E}}$ a $\vec{\mathcal{H}}$. Pro snazší práci s těmito veličinami proto definujeme dva následující dvousložkové vektory

$$\tilde{\mathcal{E}} \equiv \begin{pmatrix}\tilde{\mathcal{E}}^y\\ \tilde{\mathcal{E}}^z\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}\mathcal{E}^y\\ \mathcal{E}^z\end{pmatrix},\ \tilde{\mathcal{H}} \equiv \begin{pmatrix}\tilde{\mathcal{H}}^y\\ \tilde{\mathcal{H}}^z\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}\mathcal{H}^y\\ \mathcal{H}^z\end{pmatrix} \tag{4.6}$$

a také jeden dvousložkový kovektor

$$\tilde{\mathcal{H}}^\perp \equiv \left(\tilde{\mathcal{H}}^\perp_y, \tilde{\mathcal{H}}^\perp_z\right) = \left(\mathcal{H}^{z*}, -\mathcal{H}^{y*}\right). \tag{4.7}$$

S pomocí právě definovaného můžeme psát

$$P_x = \frac{1}{4}\iint\limits_{\mathbb{R}^2} \mathrm{d}y\,\mathrm{d}z\left[\tilde{\mathcal{H}}^\perp\tilde{\mathcal{E}} + \left(\tilde{\mathcal{H}}^\perp\tilde{\mathcal{E}}\right)^*\right]. \tag{4.8}$$

Uvědomme si, jak konkrétně vypadají $\tilde{\mathcal{E}}$ a $\tilde{\mathcal{H}}^\perp$, tj. dosaďme za jejich složky odpovídající výrazy ze vztahů (2.10), (2.11) a (2.13), (2.14). Takto získáme

$$\tilde{\mathcal{E}} = \iint\limits_{\mathbb{R}^2} \mathrm{d}k'_y\mathrm{d}k'_z\, e^{i(k'_y y + k'_z z)}\left(e^{-ik'_x x}\mathcal{R}' + e^{ik'_x x}\mathcal{I}\right)\begin{pmatrix}S^y\\ S^z\end{pmatrix} \tag{4.9}$$

$$\tilde{\mathcal{H}}^\perp = \iint\limits_{\mathbb{R}^2}\mathrm{d}k_y\mathrm{d}k_z\, \frac{e^{-i(k_y y + k_z z)}}{\omega\mu_0 k_x^*}\begin{pmatrix}S^y\\ S^z\end{pmatrix}^\dagger\left(e^{-ik_x x}\mathcal{R}' - e^{+ik_x x}\mathcal{I}\right)^\dagger\begin{pmatrix}k_z^2 - k_0^2 & -k_y k_z\\ -k_y k_z & k_y^2 - k_0^2\end{pmatrix}, \tag{4.10}$$

kde † značí hermiteovské sdružení, tedy kombinaci transpozice a komplexního sdružení. Dosaďme do (4.8) za $\tilde{\mathcal{E}}$, resp. $\tilde{\mathcal{H}}^{\perp}$, explicitní vyjádření (4.9), resp. (4.10), a proveďme několik málo úprav, které mj. zahrnují i využití symbolických "identit" s Diracovou δ-distribucí

$$\iint\limits_{\mathbb{R}^2} \mathrm{d}y\,\mathrm{d}z\, e^{i\left[\left(k_y'-k_y\right)y+\left(k_z'-k_z\right)z\right]} = 4\pi^2\,\delta\left(k_y'-k_y\right)\,\delta(k_z'-k_z)$$

$$\iint\limits_{\mathbb{R}^2} \mathrm{d}k_y'\,\mathrm{d}k_z'\,\delta\left(k_y'-k_y\right)\,\delta(k_z'-k_z)\,f(k_y',k_z') = f(k_y,k_z).$$

Tím získáme následující

$$P_x = \frac{\pi^2}{\omega\mu_0}\iint\limits_{\mathbb{R}^2} \mathrm{d}k_y\,\mathrm{d}k_z\,\tilde{S}^\dagger\left(\vartheta+\vartheta^\dagger\right)\tilde{S}, \tag{4.11}$$

kde jsme označili

$$\tilde{S} \equiv \begin{pmatrix} S^y \\ S^z \end{pmatrix} \tag{4.12}$$

$$(\vartheta) \equiv \frac{1}{k_x^*}\left(e^{-ik_xx}\mathcal{R}' - e^{+ik_xx}\mathcal{I}\right)^\dagger \begin{pmatrix} k_z^2-k_0^2 & -k_yk_z \\ -k_yk_z & k_y^2-k_0^2 \end{pmatrix} \left(e^{-ik_xx}\mathcal{R}' + e^{+ik_xx}\mathcal{I}\right). \tag{4.13}$$

Dosazením vyjádření (2.26) za $\tilde{S}$ ve vztahu (4.11) bychom mohli tuto stať zakončit. Bude ovšem zajímavé najít ještě jiné tvary integrandu ve (4.11). Všimněme si, že integrand ve (4.11) má jednu příznivou vlastnost. Nezávisí totiž na x-ové souřadnici, jak se můžeme přesvědčit například následujícím přímým výpočtem.

Rozepišme podrobněji definiční vztah (4.13) a jeho hermiteovsky sdruženou podobu

$$\begin{aligned}(\vartheta) = \frac{1}{k_x^*}\Big\{ &\left(e^{-ik_xx}\mathcal{R}'\right)^\dagger (\mathcal{K}) \left(e^{-ik_xx}\mathcal{R}'\right) + \left(e^{-ik_xx}\mathcal{R}'\right)^\dagger (\mathcal{K}) \left(e^{+ik_xx}\mathcal{I}\right) \\ &- \left(e^{+ik_xx}\mathcal{I}\right)^\dagger (\mathcal{K}) \left(e^{-ik_xx}\mathcal{R}'\right) - \left(e^{+ik_xx}\mathcal{I}\right)^\dagger (\mathcal{K}) \left(e^{+ik_xx}\mathcal{I}\right) \Big\}\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}(\vartheta)^\dagger = \frac{1}{k_x}\Big\{ &\left(e^{-ik_xx}\mathcal{R}'\right)^\dagger (\mathcal{K}) \left(e^{-ik_xx}\mathcal{R}'\right) - \left(e^{-ik_xx}\mathcal{R}'\right)^\dagger (\mathcal{K}) \left(e^{+ik_xx}\mathcal{I}\right) \\ &+ \left(e^{+ik_xx}\mathcal{I}\right)^\dagger (\mathcal{K}) \left(e^{-ik_xx}\mathcal{R}'\right) - \left(e^{+ik_xx}\mathcal{I}\right)^\dagger (\mathcal{K}) \left(e^{+ik_xx}\mathcal{I}\right) \Big\},\end{aligned}$$

kde jsme označili

$$(\mathcal{K}) \equiv \begin{pmatrix} k_z^2-k_0^2 & -k_yk_z \\ -k_yk_z & k_y^2-k_0^2 \end{pmatrix}. \tag{4.14}$$

Zároveň přihlédněme k definičnímu vztahu (2.3) pro k_x, $k_x = k_x(k_y, k_z)$, ze kterého mj. vyplývá, že k_x je buď reálné, nebo ryze imaginární

$$(2.3) \implies \begin{cases} k_x^* = k_x, & \text{pro } k_x \in \mathbb{R} \iff k_0^2 \geq k_y^2 + k_z^2 \\ k_x^* = -k_x, & \text{pro } k_x \in i\mathbb{R} \iff k_0^2 < k_y^2 + k_z^2. \end{cases}$$

Sloučením těchto dvou důsledků zmíněných definic dostáváme

$$\left(\vartheta + \vartheta^\dagger\right) = \begin{cases} \frac{2}{k_x}\left(\mathcal{R}'^\dagger \mathcal{K} \mathcal{R}' - \mathcal{K}\right), & \text{pro } k_x \in \mathbb{R} \\ \frac{2}{k_x}\left(\mathcal{R}'^\dagger \mathcal{K} - \mathcal{K} \mathcal{R}'\right), & \text{pro } k_x \in i\mathbb{R}, \end{cases} \tag{4.15}$$

tedy výraz, který je na x naprosto nezávislý. Připomeňme, že složky S^y a S^z jsou dle své výchozí definice (2.1) výhradně funkcí veličin k_y, k_z a tedy $\tilde{S}$ také. Tím je tvrzení o nezávislosti (na x) integrandu ve (4.11) dokázáno.

Díky právě dokázanému tvrzení můžeme dosadit za zmiňované x libovolnou reálnou hodnotu, aniž bychom se dopustili újmy na obecnosti. Dosaďme tedy hodnotu pro nás nejvýhodnější, položme $x = 0$. Současně dosaďme za $\tilde{S}$ vyjádření (2.26). Takto pro integrand ve (4.11) získáme tvar

$$\begin{aligned} \tilde{S}^\dagger \left(\vartheta + \vartheta^\dagger\right) \tilde{S} = & \frac{1}{16\pi^4 k_x^*} \tilde{L}_E^\dagger \left[\left(\mathcal{R}' + \mathcal{I}\right)^{-1}\right]^\dagger \left(\mathcal{R}' - \mathcal{I}\right)^\dagger \left(\mathcal{K}\right) \tilde{L}_E \\ & + \frac{1}{16\pi^4 k_x} \tilde{L}_E^\dagger \left(\mathcal{K}\right) \left(\mathcal{R}' - \mathcal{I}\right) \left(\mathcal{R}' + \mathcal{I}\right)^{-1} \tilde{L}_E, \end{aligned} \tag{4.16}$$

kde jsme označili

$$\tilde{L}_E \equiv \begin{pmatrix} L_E^y \\ L_E^z \end{pmatrix}\Bigg|_{t=0}. \tag{4.17}$$

Jelikož na základě definic (2.37) a (2.38) platí

$$\left(\Lambda\right) \equiv -\begin{pmatrix} \Xi_y & \Xi_z \\ \Gamma_y & \Gamma_z \end{pmatrix} = \frac{1}{k_x} \left(\mathcal{K}\right) \left(\mathcal{R}' - \mathcal{I}\right) \left(\mathcal{R}' + \mathcal{I}\right)^{-1}, \tag{4.18}$$

můžeme (4.16) zapsat jako

$$\tilde{S}^\dagger \left(\vartheta + \vartheta^\dagger\right) \tilde{S} = \frac{1}{16\pi^4} \tilde{L}_E^\dagger \left(\Lambda + \Lambda^\dagger\right) \tilde{L}_E. \tag{4.19}$$

Potom tedy

$$P_x = \iint_{\mathbb{R}^2} \mathrm{d}k_y \, \mathrm{d}k_z \, \frac{1}{16\pi^2 \omega \mu_0} \tilde{L}_E^\dagger \left(\Lambda + \Lambda^\dagger\right) \tilde{L}_E. \tag{4.20}$$

Označme ještě

$$\begin{aligned} \Upsilon'(k_y,k_z) &\equiv \frac{1}{16\pi^2\omega\mu_0}\tilde{L}_E^\dagger\left(\Lambda+\Lambda^\dagger\right)\tilde{L}_E \\ \Upsilon(N_y,N_z) &\equiv k_0^2\Upsilon'(k_0N_y,k_0N_z), \end{aligned} \tag{4.21}$$

kde

$$\begin{aligned} \vec{N} &= (N_x,N_y,N_z)^T \equiv \frac{1}{k_0}\vec{k} \\ \vec{k} &= (k_x,k_y,k_z)^T. \end{aligned} \tag{4.22}$$

Pomocí (4.21) zapíšeme (4.20) takto

$$P_x = \iint\limits_{\mathbb{R}^2} \mathrm{d}N_y\,\mathrm{d}N_z\,\Upsilon(N_y,N_z), \tag{4.23}$$

přičemž veličinu Υ nazveme prostorovou spektrální hustotou výkonu a veličinu danou vztahem

$$\Upsilon_\mathrm{r} \equiv \frac{\Upsilon}{P_x} \tag{4.24}$$

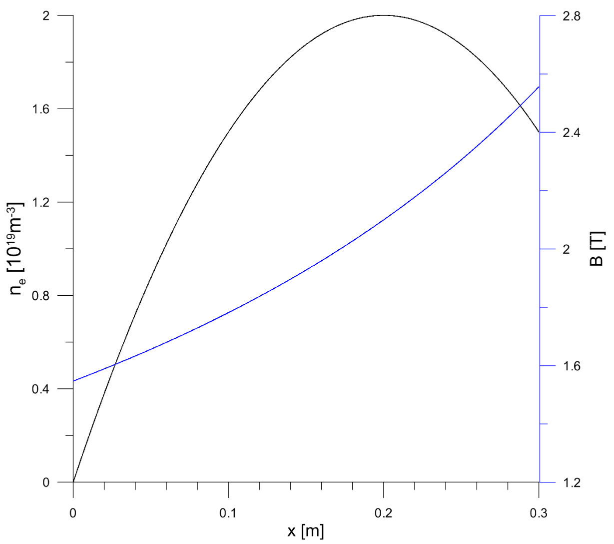
pojmenujeme relativní spektrální hustota výkonu.

4.2 Numerické výsledky

V tomto paragrafu uvádíme některé výsledky našich numerických výpočtů, získaných pro parametry LH grillu tokamaku COMPASS, které uvádí Tabulka 4.1. Pro tyto výpočty byl zvolen parabolický profil hustoty plazmatu a hyperbolický profil intenzity toroidálního magnetického pole, které znázorňuje Obrázek 4.1.

počet vlnovodů	$N=$ 8
šířka vlnovodů	$b=$ 1,48cm
výška vlnovodů	$h=$16,50cm
tloušťka přepážek	$d=$ 0,20cm
frekvence zdroje	$f=$ 1,30GHz
šířka vakuové mezery	$x_p=$ 0,0mm

Tabulka 4.1: Parametry LH grillu tokamaku COMPASS.



Obrázek 4.1: Radiální profil hustoty plazmatu a intenzity toroidálního magnetického pole.

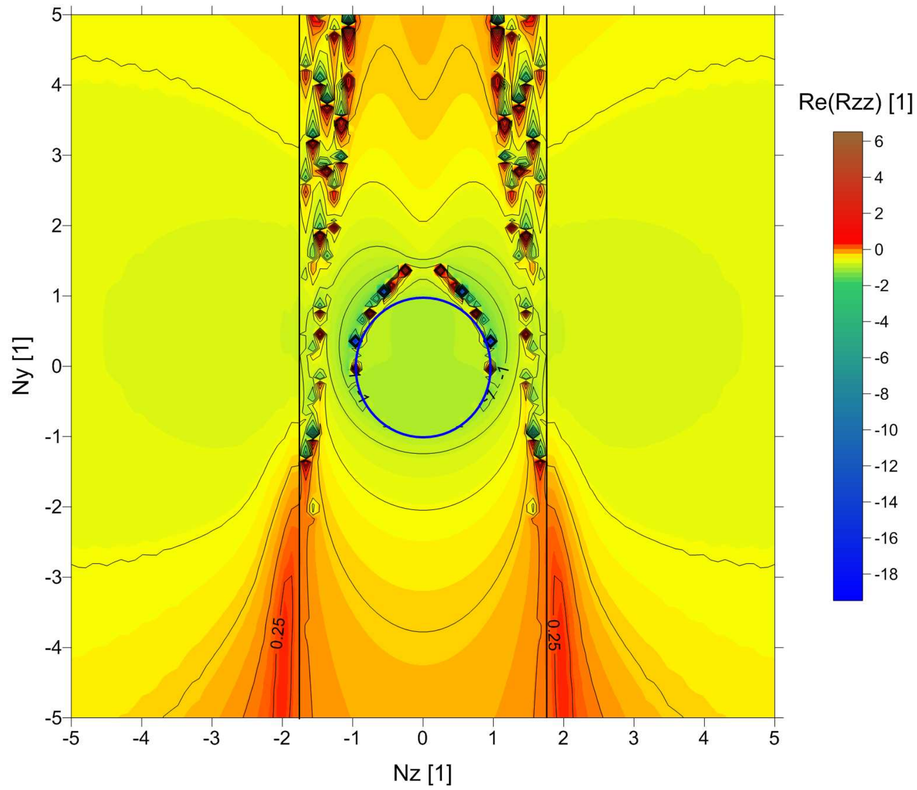
Obrázek 4.2 ilustruje $\Re\left(\mathcal{R}^z{}_z\right)$ jako funkci proměnných N_y, N_z. Vepsaná kružnice ve středu tohoto obrázku reprezentuje prakticky totální odraz vakuových vln. Interval $-N_{acc} < N_z < N_{acc}$, $N_{acc} = 1.75$, představuje oblast nedostupnosti LH vln. Hranice nedostupnosti byla určena z WKB řešení, ale je vidět, že dobře souhlasí s úplným řešením vlnových rovnic. V této oblasti se pomalá vlna na okraji plazmatu konvertuje na vlnu rychlou, neproniká do hloubi plazmatu a má obvykle velký koeficient odrazu. Profily vlnových čísel N_x z WKB přiblížení pro vlnu z této oblasti vidíme na Obrázku 4.3.

Radiální profily jednotlivých složek elektrického pole, které znázorňují Obrázky 4.4, 4.5, 4.6, 4.7, 4.8 a 4.9 svědčí o přítomnosti stojatých vln a ukazují, že koeficient odrazu je extrémně velký.

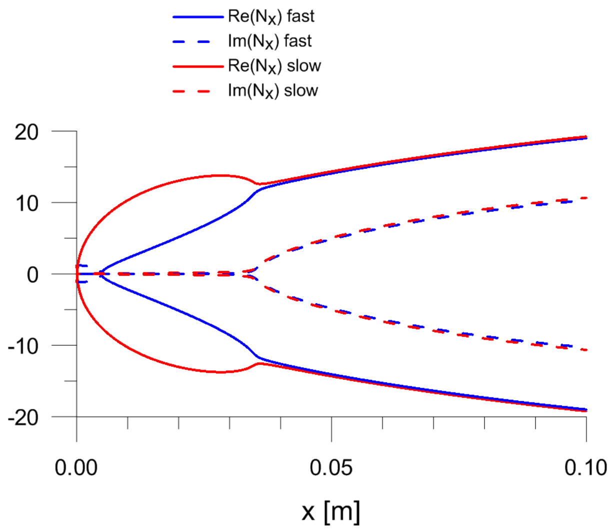
Mimo oblast nedostupnosti je keficient odrazu $\mathcal{R}^z{}_z$ hladkou funkcí proměnných N_y, N_z a jeho absolutní hodnota je víceméně malá. Z radiálních profilů vlnových čísel N_x na Obrázku 4.10 vidíme, že se do plazmatu může šířit pouze pomalá vlna, která bez překážek dosahuje centrální oblasti plazmatu.

Z profilů jednotlivých složek elektrického pole, které znázorňují Obrázky 4.11, 4.12, 4.13, 4.14, 4.15 a 4.16, vidíme, že pomalá vlna v tomto případě volně prochází do plazmatu. Rychlá vlna je evanescentní, a tedy při okrajové podmínce $S^y = 1$, $S^z = 0$ se téměř nic nevybudí.

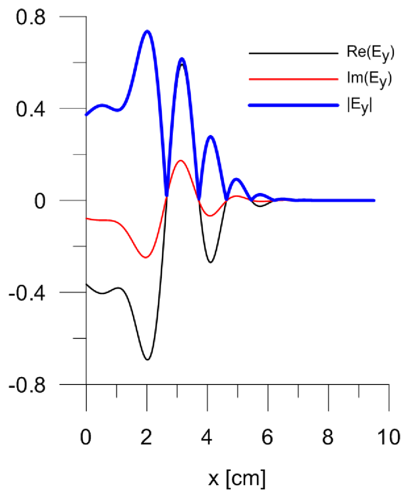
Hlavní výsledky tvoří prostorové spektrální hustoty vyzařovaného výkonu a výkon odražený. Pro případ fázování $\Delta\varphi_r = \pi$ dostáváme symetrické spek-



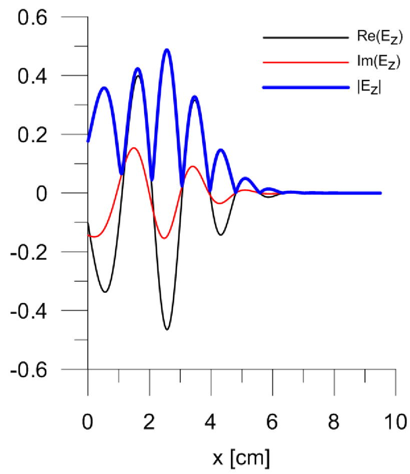
Obrázek 4.2: Mapa reálné části koeficientu odrazu $\mathcal{R}^z{}_z$.



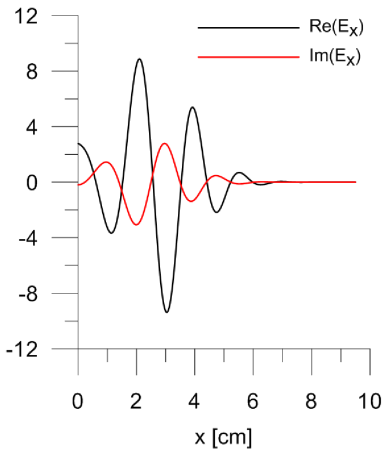
Obrázek 4.3: Radiální profily vlnového čísla N_x pomalé a rychlé vlny vybuzené nedostatečně zpomalenou dopadající vlnou s $N_y = 0{,}151476$ a $N_z = 1{,}54$. Vlnová čísla odpovídají případu prostorové rezonance.



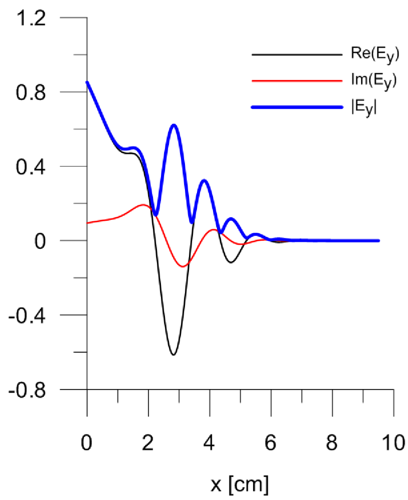
Obrázek 4.4: Radiální profil složky E_y vlny vybuzené nedostatečně zpomalenou dopadající vlnou s $N_y = 0{,}151476$, $N_z = 1{,}54$. Situace odpovídá okrajové podmínce $S^y = 0$, $S^z = 1$.



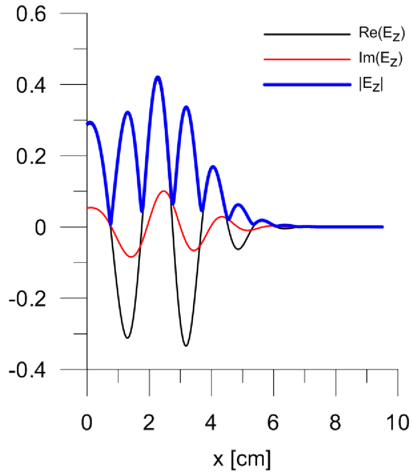
Obrázek 4.5: Radiální profil složky E_z vlny vybuzené nedostatečně zpomalenou dopadající vlnou s $N_y = 0{,}151476$, $N_z = 1{,}54$. Situace odpovídá okrajové podmínce $S^y = 0$, $S^z = 1$.



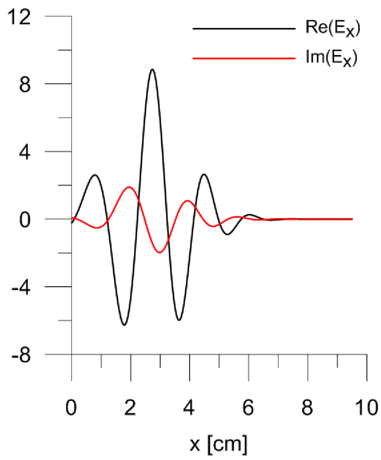
Obrázek 4.6: Radiální profil složky E_x vlny vybuzené nedostatečně zpomalenou dopadající vlnou s $N_y = 0{,}151476$, $N_z = 1{,}54$. Situace odpovídá okrajové podmínce $S^y = 0$, $S^z = 1$.



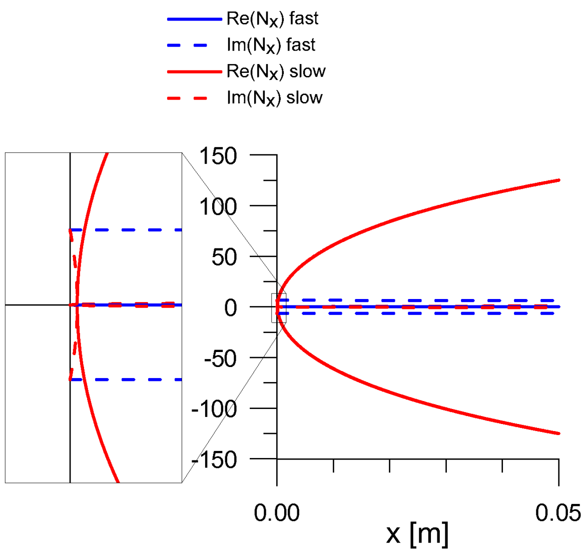
Obrázek 4.7: Radiální profil složky E_y vlny vybuzené nedostatečně zpomalenou dopadající vlnou s $N_y = 0{,}151476$, $N_z = 1{,}54$. Situace odpovídá okrajové podmínce $S^y = 1$, $S^z = 0$.



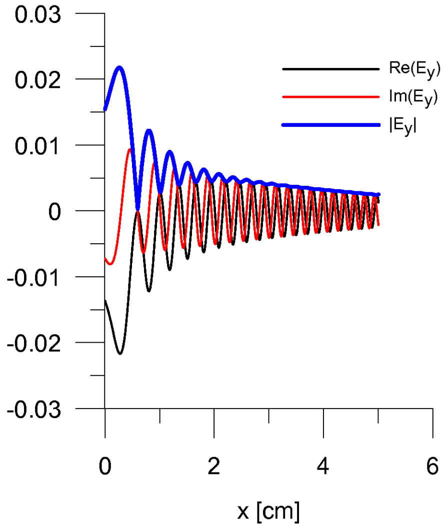
Obrázek 4.8: Radiální profil složky E_z vlny vybuzené nedostatečně zpomalenou dopadající vlnou s $N_y = 0{,}151476$, $N_z = 1{,}54$. Situace odpovídá okrajové podmínce $S^y = 1$, $S^z = 0$.



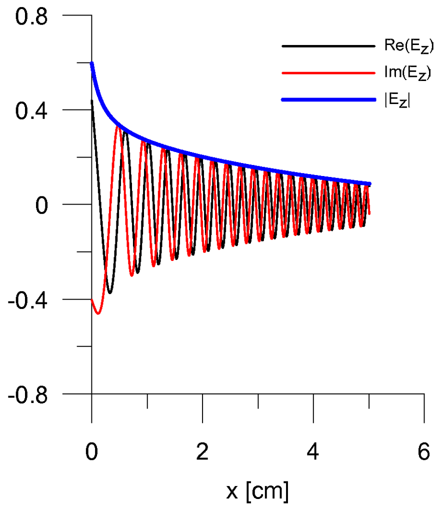
Obrázek 4.9: Radiální profil složky E_x vlny vybuzené nedostatečně zpomalenou dopadající vlnou s $N_y = 0{,}151476$, $N_z = 1{,}54$. Situace odpovídá okrajové podmínce $S^y = 1$, $S^z = 0$.



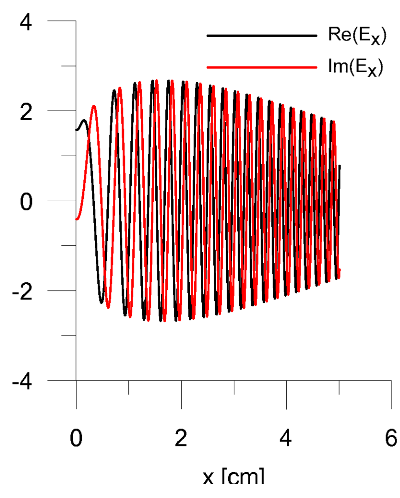
Obrázek 4.10: Radiální profily vlnového čísla N_x pomalé a rychlé vlny vybuzené dopadající vlnou s $N_y = 0{,}151476$, $N_z = 6{,}54$. Je vidět, že zpomalené vlny musí překonat velice úzkou evanescentní vrstvu na povrchu plazmatu - viz detail. Hodnoty N_y, N_z odpovídají hlavnímu maximu vyzařování LH grillu pro fázování $\Delta\varphi_r = \pi$.



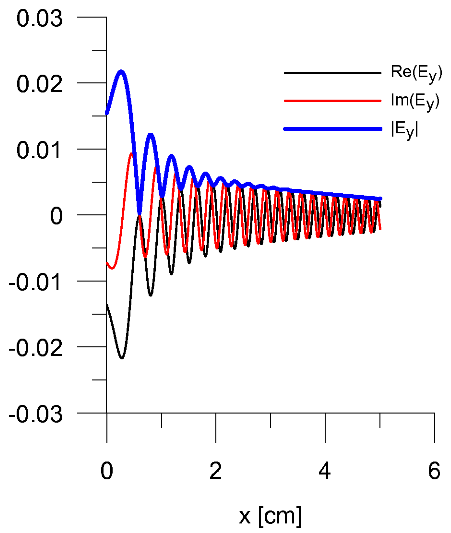
Obrázek 4.11: Radiální profil složky E_y vlny vybuzené dopadající vlnou s $N_y = 0{,}151476$, $N_z = 6{,}54$. Situace odpovídá okrajové podmínce $S^y = 0$, $S^z = 1$.



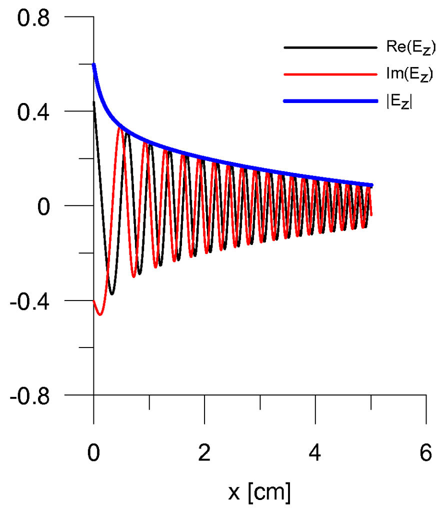
Obrázek 4.12: Radiální profil složky E_z vlny vybuzené dopadající vlnou s N_y = 0,151476, N_z = 6,54. Situace odpovídá okrajové podmínce $S^y = 0$, $S^z = 1$.



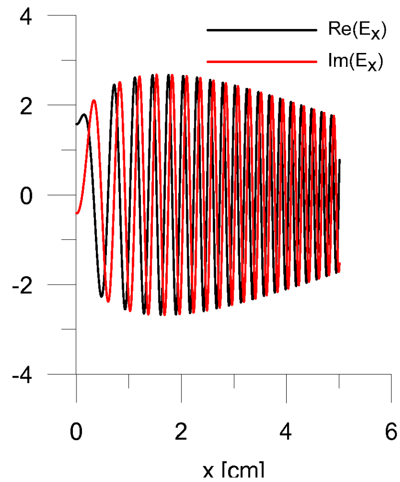
Obrázek 4.13: Radiální profil složky E_x vlny vybuzené dopadající vlnou s N_y = 0,151476, N_z = 6,54. Situace odpovídá okrajové podmínce $S^y = 0$, $S^z = 1$.



Obrázek 4.14: Radiální profil složky E_y vlny vybuzené dopadající vlnou s $N_y = 0{,}151476$, $N_z = 6{,}54$. Situace odpovídá okrajové podmínce $S^y = 1$, $S^z = 0$.



Obrázek 4.15: Radiální profil složky E_z vlny vybuzené dopadající vlnou s $N_y = 0{,}151476$, $N_z = 6{,}54$. Situace odpovídá okrajové podmínce $S^y = 1$, $S^z = 0$.

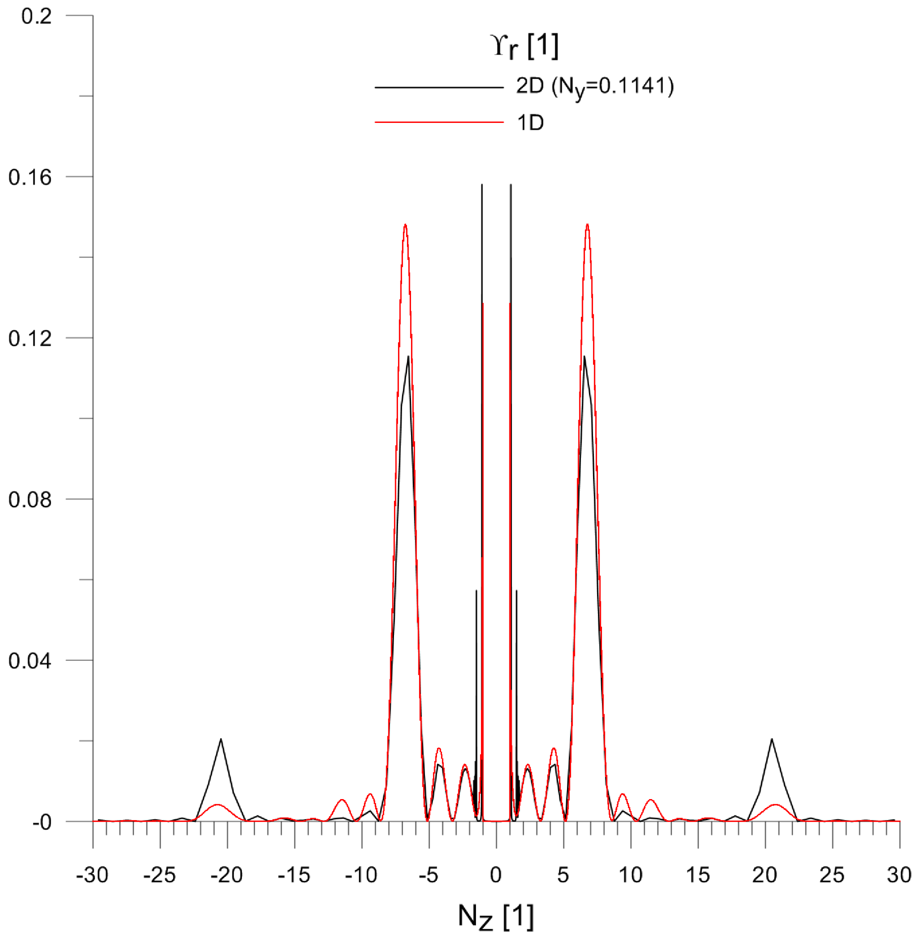


Obrázek 4.16: Radiální profil složky E_x vlny vybuzené dopadající vlnou s $N_y = 0{,}151476$, $N_z = 6{,}54$. Situace odpovídá okrajové podmínce $S^y = 1$, $S^z = 0$.

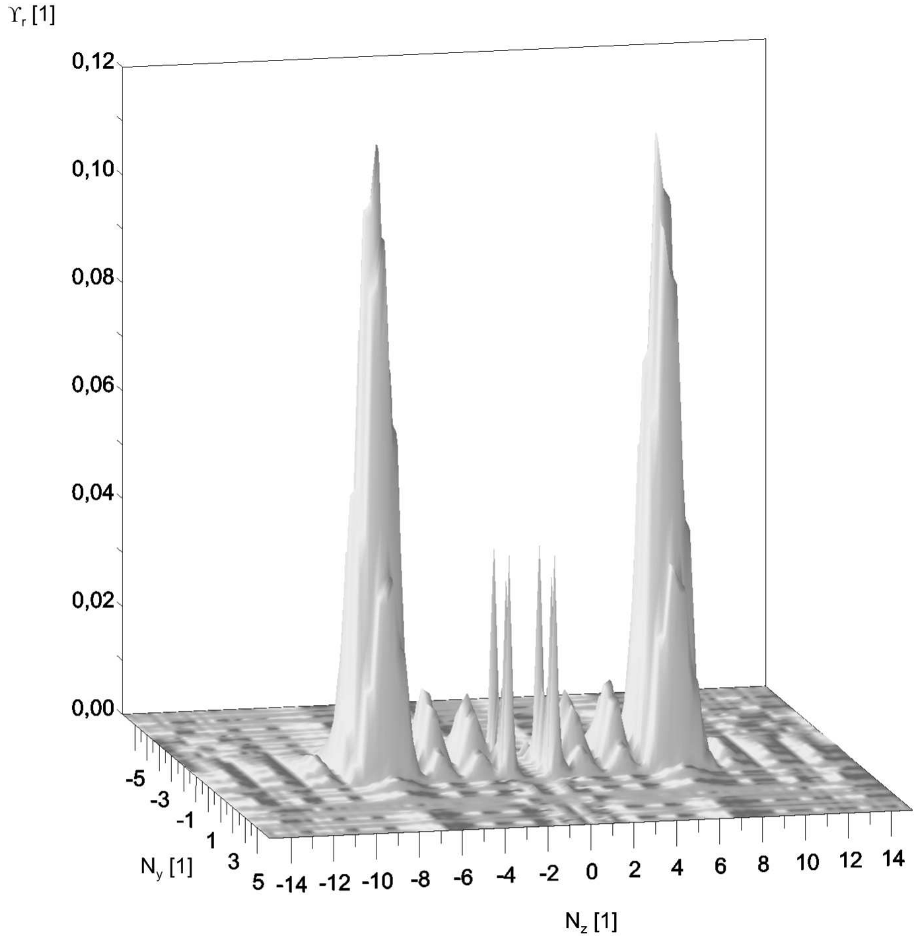
trum s hlavními maximy v $N_z = \pm 7$, $N_y = 0$. Na Obrázku 4.18 vidíme, že kromě hlavních maxim je zde i několik maxim vedlejších umístěných symetricky kolem $N_z = 0$. Odraz je v tomto případě 25%. Je to poměrně vysoká hodnota, ale nebyla zde prováděna žádná optimalizace vzhledem k profilu hustoty plazmatu. Oblast nedostupnosti je změtí píků odpovídajících prostorovým rezonancím.

Důležitou kontrolou správnosti je kontrola zákona zachování energie, která vychází na 1% (porovnáváme dopadající výkon se součtem odraženého výkonu a výkonu přeneseného, který získáme integrací spektra). Další důležitou kontrolou je porovnání s 1D modelem. Na Obrázku 4.17 vidíme, že poloha píků řezu (pro $N_y = 0{,}1141$) spektrální hustoty velmi dobře souhlasí s jednoduchou Brambillovou teorií (viz [3]).

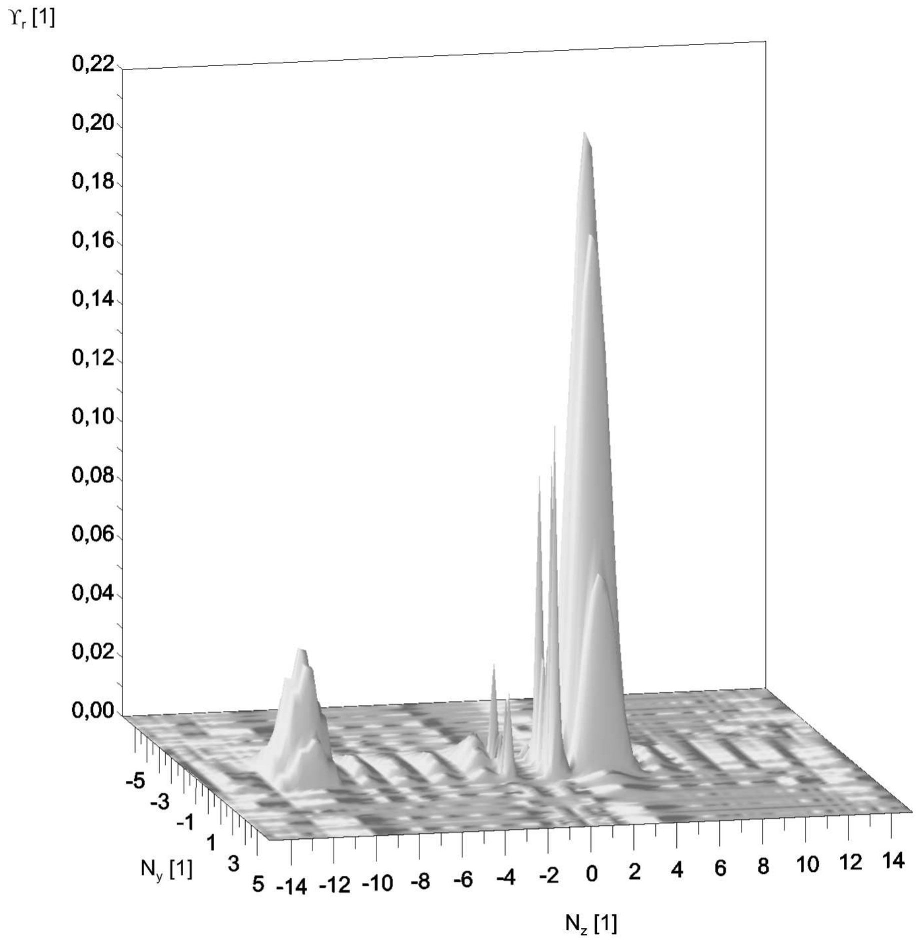
LH grill se hlavně používá ke generaci proudu a zde je nutné, aby mělo spektrum co nejvyšší směrovost. Jako příklad uvedeme spektrum pro fázování $\Delta\varphi_r = \frac{\pi}{2}$, viz Obrázek 4.19, pro které se hlavní pík nalézá v $N_z = 3{,}22$. Toto spektrum má směrovost 52% a odraz činí 12%.



Obrázek 4.17: Porovnání 1D spektra s řezem 2D spektra pro $N_y = 0{,}1141$.



Obrázek 4.18: Graf relativní spektrální hustoty pro $\Delta\varphi_r = \pi$.



Obrázek 4.19: Graf relativní spektrální hustoty pro $\Delta\varphi_r = \frac{1}{2}\pi$.

Závěr

Numerický program `ps2d` splňuje základní požadavky, které byly stanoveny před začátkem jeho vývoje. Avšak díky nepředvídaným obtížím při jeho tvorbě, obzvláště ve fázi odlaďování, nezbylo mnoho času na jeho optimalizaci, kterou nezbývá, než provést v budoucnu. Do budoucna se také počítá s jeho dalším vylepšením. Zejména se zahrnutím střihu magnetického pole.

Numerické výsledky získané pro námi zvolený profil hustoty plazmatu a intenzity toroidálního magnetického pole tokamaku COMPASS bereme jako předběžné. Neboť zejména intenzita toroidálního magnetického pole, jejíž hodnota v ose průřezu nádoby činí $2{,}1T$, je vyšší, než ta, kterou je COMPASS reálně schopen dosáhnout. Ovšem pro nižší hodnoty magnetického pole (v kombinaci s frekvencí zdroje 1,3*GHz*) se oblast nedostupnosti jeví jako nepřijatelně široká. Toto pozorování otevírá prostor pro diskuzi, zda je současný LH grill tokamaku COMPASS optimální a zda by bylo výhodné jej nahradit grillem konstruovaným pro vyšší frekvenci zdroje, například $3{,}7GHz$. Řešení této otázky si však žádá detailnější rozbor, ke kterému, jak doufáme, program `ps2d` přispěje.

Příloha

Obsah přiloženého CD

K této práci je přiloženo CD, na kterém je uložen zdrojový kód programu `ps2d`.

Literatura

[1] J. F. Baranov and O. N. Scherbinin. Exctitation of slow electromagnetic waves used for plasma heating in lower hybrid frequency range. *Fizika plazmy*, 3(2):246–255, 1977.

[2] P. Bonoli. Linear theory of lower hybrid heating. *IEEE Transactions on Plasma Science*, PS-12(2):95–107, 1984.

[3] M. Brambilla. Slow-wave launching at lower hybrid frequency using a phased waveguide array. *Nuclear Fusion*, 16(1):47–54, 1976.

[4] M. Brambilla. Waveguide launching of lower hybrid waves. *Nuclear Fusion*, 19(10):1343–1357, 1979.

[5] K. G. Budden. *Radio Waves in the Inosphere.* Cambridge, 1961.

[6] F. F. Chen. *Úvod do fyziky plazmatu.* ACADEMIA, Praha, 1984.

[7] M. A Irzak and O. N. Scherbinin. Theory of waveguide antennas for plasma heating and current drive. *Nuclear Fusion*, 35(11):1341–1356, 1995.

[8] D. S. Jones. *Theory of Electromagnetism.* Pergamon Press, Oxford, 1964.

[9] V. Kopecký and J. Preinhaelter. *Linear Mode Conversion in an Inhomogeneous Magnetized Plasma.* ACADEMIA, Praha, 1983.

[10] N. A. Krall and A. W. Trivelpiece. *Principles of Plasma Physics.* McGraw-Hill, 1973.

[11] L. P. Meissner. *Fortran 90.* PWS Pub. Co., 1995.

[12] R. Mitra and S. W. Lee. *Analytical techniques in the theory of guided waves.* Macmillan, New York, 1971.

[13] Visual Numerics. *IMSL Fortran Numerical Library User's Guide, MATH/LIBRARY*, version 6.0 edition, 2006.

[14] V. D. Shafranov. Electromagnetic waves in a plasma. *Reviews of plasma physics*, 3, 1966.

[15] T. H. Stix. *The Theory of Plasma Waves.* McGraw-Hill, 1962.

[16] J. A. Stratton. *Teorie elektromagnetického pole.* SNTL, 1961.

[17] J. Urban. *EBW Emission Simulations for Spherical Tokamaks.* Ph.D. Thessis, CTU - FNSPE (ČVUT v Praze, FJFI), 2004.

[18] J. Urban. *Metoda adaptivních konečných prvků pro řešení Maxwellových rovnic v nehomogenním magnetoaktivním plazmatu.* Diplomová práce, ČVUT v Praze, FJFI, 2004.

[19] J. Urban and J. Preinhaelter. Adaptive finite elements for a set of second-order ODEs. *J. Plasma Physics*, 72(6):1–4, 2006.

[20] M. Záruba. *Vyzařovací struktury pro dolně hybridní vlny - prostorové spektrum LH grilu pro tokamak Commpass-D.* Bakalářská práce, ČVUT v Praze, FJFI, 2007.

Prohlášení

Prohlašuji, že jsem svou diplomovou práci vypracoval samostatně a použil jsem pouze podklady (literaturu, projekty, SW atd.) uvedené v přiloženém seznamu.

Nemám závažný důvod proti užití tohoto školního díla ve smyslu § 60 Zákona č.121/2000 Sb. , o právu autorském, o právech souvisejících s právem autorským a o změně některých zákonů (autorský zákon).

V Praze dne ______________

____
podpis