

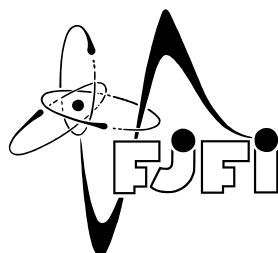
ČESKÉ VYSOKÉ UČENÍ TECHNICKÉ V PRAZE
FAKULTA JADERNÁ A FYZIKÁLNĚ INŽENÝRSKÁ

VÝZKUMNÝ ÚKOL

2008

Michal Záruba

ČESKÉ VYSOKÉ UČENÍ TECHNICKÉ V PRAZE
FAKULTA JADERNÁ A FYZIKÁLNĚ INŽENÝRSKÁ



VÝZKUMNÝ ÚKOL

KÓD PRO VÝPOČET PROSTOROVÉHO SPEKTRA
DOLNĚ HYBRIDNÍHO GRILU PRO TOKAMAK
COMPASS-D

Michal Záruba

Vedoucí práce: Ing. Josef Preinhaelter, DrSc.

Praha, 2008

Poděkování

Tímto děkuji především Dr. Josefu Preinhaelterovi, vedoucímu mého výzkumného úkolu, za jeho obětavý přístup při nesčetných konzultacích a diskuzích, a rovněž za poskytnutí hodnotných studijních materiálů. Dále děkuji Dr. Jakubu Urbanovi za přínosné rady a diskuze o programování v jazyce Fortran.

***Název práce:* Kód pro výpočet prostorového spektra dolně hybridního grilu pro tokamak Commpass-D**

Autor: Michal Záruba

Obor: Matematické inženýrství

Druh práce: Výzkumný úkol

Vedoucí práce: Ing. Josef Preinhaelter, DrSc. , Ústav fyziky plazmatu, AV ČR

Abstrakt: Tato práce se věnuje výpočtu prostorové spektrální hustoty výkonu elektromagnetické vlny vyzářené dolně hybridním grilem - mnohočetným vlnovodem, jemuž předchází zdroj EM vlnění na tzv. dolně hybridní frekvenci. Při výpočtu je uvažován nejjednodušší model grilu. Vlnovody jsou považovány za nekonečně vysoké, mající stenijné příčné rozměry. Při výpočtu je uvažován rovněž nejjednodušší model impedance povrchové vrstvy plazmatu. Těžiště této práce spočívá v optimalizovaném numerickém programu, který byl pro výpočet spektra vytvořen - konkrétně v jazyce Fortran, ve standardu F90 a vyšším. Pomocí tohoto programu jsou následně získána spektra pro různé parametry plazmatu a grilu.

Klíčová slova: LH gril, plazma, prostorové spektrum výkonu.

***Title:* A code to evaluate the spatial spectrum of the lower hybrid grill for Compass-D tokamak**

Author: Michal Záruba

Document: Research task report

Supervisor: Ing. Josef Preinhaelter, DrSc. , Institute of Plasma Physics, Academy of Sciences of the Czech Republic

Abstract: This work is focused on the calculation of a spatial spectral density of the power of an electromagnetic wave radiated by a lower hybrid grill - a multiple waveguide which is preceded by an EM wave source operating at the so-called lower hybrid frequency. The simplest model of a grill is studied. The waveguides are considered of infinite height, having the same width. We introduce the simplest model of the plasma edge impedance. The core of this work is the optimized numerical programme developed for the evaluation of the spectra - in the Fortran language, standard 90 and higher. Using it we obtain spectra for different parameter values of the plasma and the grill.

Key words: LH grill, plasma, power spectrum.

Obsah

1	Úvod	6
1.1	Soustava gril - vakuum - plazma	6
1.1.1	Pole ve vlnovodech	6
1.1.2	Pole ve vakuové mezeře	9
1.1.3	Pole v plazmatu	10
1.1.4	Podmínky na rozhraní	15
1.2	Prostorová spektrální hustota výkonu	18
2	Příprava výpočtu	20
2.1	Lineární profil hustoty plazmatu	20
2.2	Tenzor vazebné admitance	22
2.2.1	Definice	22
2.2.2	Symetrie	23
2.3	Maticová reprezentace	25
2.3.1	Motivace	25
2.3.2	Reprezentace tenzoru vazebné admitance	26
2.3.3	Reprezentace ostatních členů	27
3	Numerický výpočet	31
3.1	Výsledky	31
3.2	Výpočetní program	40
3.2.1	Kód	40
3.2.2	Program z pohledu uživatele	40
	Příloha	44

Kapitola 1

Úvod

Abychom podali ucelený obraz o problému, uvádíme zde stručný souhrn pojetí úlohy řešené v práci [5], na který v dalším úzce navážeme.

Formulujme tedy úlohu o vyzařování grilu a připomeňme jednu z metod jejího řešení.

1.1 Soustava gril - vakuum - plazma

1.1.1 Pole ve vlnovodech

Náš gril se skládá z N nekonečně vysokých vlnovodů. Každý z vlnovodů je tvořen dvojicí rovnoběžných desek o tloušťce d , vzdálených od sebe o b . Obrázek 1.1 ukazuje dva z vlnovodů tohoto uspořádání. Tedy p -tý vlnovod je tvořen dutinou mezi polorovinami

$$\begin{aligned} & \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid x < 0, z = z_p\} \\ & \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid x < 0, z = z_p + b\}, \end{aligned} \quad (1.1)$$

kde

$$z_p = pd + (p - 1)b. \quad (1.2)$$

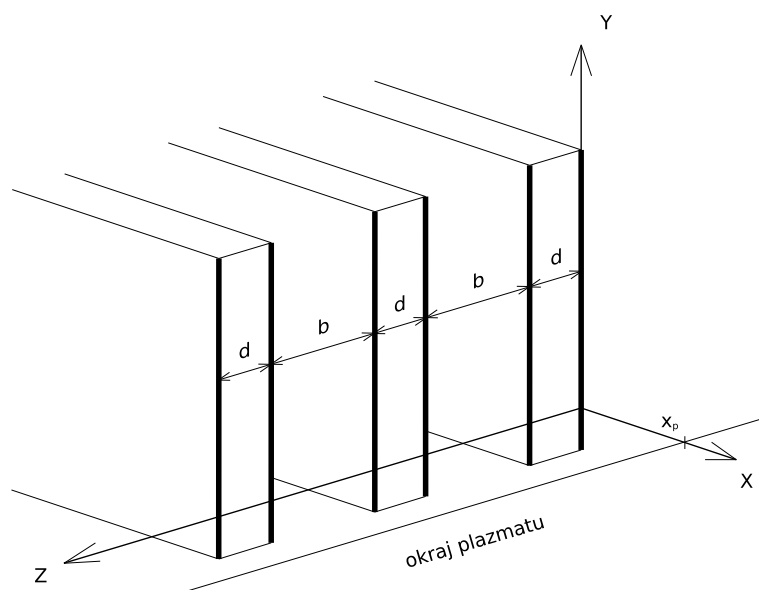
Desky vlnovodů považujeme za ideální vodiče, tj. jejich vodivost $\sigma \rightarrow +\infty$.

Označíme-li symbolem \vec{n} jednotkový normálový vektor ke stěně vlnovodu, potom z podmínky spojitosti tečných složek na rozhraní vyplývá okrajová podmínka pro stěny vlnovodu

$$\vec{n} \times \vec{E} = \vec{0} \quad (1.3)$$

a v případě časově závislé magnetické indukce, což je náš případ, také

$$\vec{n} \cdot \vec{B} = 0. \quad (1.4)$$



Obrázek 1.1: Schéma grilu

Řešme vlnovou rovnici pro elektrické, respektive magnetické pole

$$\begin{aligned}\Delta \vec{E} - \varepsilon_0 \mu_0 \frac{\partial^2 \vec{E}}{\partial t^2} &= \vec{0} \\ \Delta \vec{H} - \varepsilon_0 \mu_0 \frac{\partial^2 \vec{H}}{\partial t^2} &= \vec{0} .\end{aligned}\tag{1.5}$$

Zkoumejme harmonické vlny šířící se podél osy x . Pro časovou závislost polí zaveďme konvenci $\exp(-i\omega t)$. Tedy rovinná vlna s kladným vlnovým číslem se bude šířit v kladném směru souřadnicové osy s úhlovou frekvencí ω . Předpokládejme, že dopadající vlny v jednotlivých vlnovodech nezávisí na y , takže hledaná pole lze psát ve tvaru

$$\begin{aligned}\vec{E} &= \vec{E}(x, z) \exp(-i\omega t) \\ \vec{H} &= \vec{H}(x, z) \exp(-i\omega t) .\end{aligned}\tag{1.6}$$

Označme složky polí

$$\begin{aligned}\vec{E} &= (E_x, E_y, E_z) \\ \vec{H} &= (H_x, H_y, H_z) .\end{aligned}\tag{1.7}$$

Položme

$$E_y \equiv 0 ,\tag{1.8}$$

tj. předpokládejme excitaci pouze TM-modu¹. Předpokládáme-li tvar řešení (1.6), potom úloha řešit první z vlnových rovnic (1.5) se redukuje na úlohu řešit rovnici Helmholtzovu

$$\Delta \vec{E} + k_0^2 \vec{E} = \vec{0}, \quad (1.9)$$

kde konstanta

$$k_0 = \frac{\omega}{c} \quad (1.10)$$

značí vakuové vlnové číslo, přičemž konstanta

$$c = (\varepsilon_0 \mu_0)^{-1/2} \quad (1.11)$$

značí rychlost světla ve vakuu. Totéž získáme i pro druhou z rovnic (1.5).

Rovnici (1.9) pro elektrické pole spolu s okrajovými podmínkami (1.3) a výše uvedenými dodatečnými požadavky lze řešit například metodou separace proměnných a výsledné pole zapsat jako lineární superpozici jednotlivých modů. Její řešení a rovněž řešení odpovídající rovnice pro magnetické pole s okrajovými podmínkami (1.4) dává

$$E_z = \sum_{p=1}^N \chi_p \exp [i (\varphi_p - \omega t)] \left\{ A_p \exp (ik_0 x) + B_{p0} \exp (-ik_0 x) + \sum_{m=1}^{+\infty} B_{pm} \exp \left(\sqrt{\left(\frac{m\pi}{b}\right)^2 - k_0^2} x \right) \cos \left[\frac{m\pi}{b} (z - z_p) \right] \right\} \quad (1.12)$$

$$E_x = \sum_{p=1}^N \sum_{m=1}^{+\infty} \chi_p \exp [i (\varphi_p - \omega t)] \frac{\frac{m\pi}{b}}{\sqrt{\left(\frac{m\pi}{b}\right)^2 - k_0^2}} B_{pm} \exp \left(\sqrt{\left(\frac{m\pi}{b}\right)^2 - k_0^2} x \right) \cdot \sin \left[\frac{m\pi}{b} (z - z_p) \right] \quad (1.13)$$

$$H_y = - \sum_{p=1}^N \chi_p \exp [i (\varphi_p - \omega t)] \cdot \sqrt{\frac{\varepsilon_0}{\mu_0}} \left\{ A_p \exp (ik_0 x) - B_{p0} \exp (-ik_0 x) + \sum_{m=1}^{+\infty} \frac{k_0}{\sqrt{\left(\frac{m\pi}{b}\right)^2 - k_0^2}} i B_{pm} \exp \left(\sqrt{\left(\frac{m\pi}{b}\right)^2 - k_0^2} x \right) \cos \left[\frac{m\pi}{b} (z - z_p) \right] \right\} \quad (1.14)$$

¹TM-mod značí mod transverzálně magnetický, tj. jeho magnetická komponenta je jen jedna a je kolmá na směr šíření.

Přičemž symbol χ_p značí charakteristickou funkci množiny

$$\{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid x \leq 0, z \in [z_p, z_p + b]\} , \quad (1.15)$$

reálná veličina φ_p značí fázový posuv p -tého vlnovodu, reálná veličina A_p označuje amplitudu excitované vlny v p -tém vlnovodu a obecně komplexní veličina B_{pm} značí amplitudy odražených vln² v p -tém vlnovodu.

Dodejme, že výsledné pole ve vlnovodech, tak jak je zde zapsáno, odpovídá obvyklému požadavku na příčný rozměr vlnovodů b

$$k_0 < \left(\frac{m\pi}{b}\right) , \quad \text{pro } m \in \mathbb{N} , \quad (1.16)$$

a tudíž pouze 0-té mody nejsou evanescentní. Rovněž požadavek na omezenost polí při $x \rightarrow -\infty$ zde sehrál svou roli.

1.1.2 Pole ve vakuové mezeře

Před ústím grilu, pro účely výpočtu, předpokládáme vakuovou mezeru předcházející vlastnímu okraji plazmatu. V této části nyní vyjádříme pole v uvažované mezeře, která je vymezena rovinami $x = 0$ a $x = x_p$.

Zavedme obvyklé značení k_{\parallel} pro vlnové číslo vlny šířící se ve směru rovnoběžném s toroidálním magnetickým polem tokamaku. Pro kolmý směr budeme používat symbol k_{\perp} . Poznamenejme, že v našem uspořádání je rovnoběžný směr totožný s osou z a směr kolmý je totožný s osou x námi zavedeného souřadného systému. Opět uvažujeme časovou závislost polí

$$\exp(-i\omega t) ,$$

kde konstanta $\omega \in \mathbb{R}$.

Řešení třetí komponenty rovnice (1.9) můžeme zapsat pomocí Fourierova integrálu

$$E_z(x, z) = \int_{-\infty}^{+\infty} [C(k_{\parallel}) \exp(-ik_{\perp}x) + D(k_{\parallel}) \exp(ik_{\perp}x)] \exp(ik_{\parallel}z) dk_{\parallel} , \quad (1.17)$$

přičemž mezi k_{\perp} a k_{\parallel} platí vztah

$$k_{\perp}^2 = k_0^2 - k_{\parallel}^2 . \quad (1.18)$$

Dosaďme (1.17) do rovnice

$$\nabla \cdot \vec{E} = 0 , \quad (1.19)$$

²Pro $m \neq 0$ se jedná o vlny evanescentní.

tj. do jedné z Maxwellových rovnic pro EM pole ve vakuu. S uvážením předpokladu (1.8) po krátkých úpravách získáme vyjádření složky E_x

$$E_x(x, z) = \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{k_{\parallel}}{k_{\perp}} [C(k_{\parallel}) \exp(-ik_{\perp}x) - D(k_{\parallel}) \exp(ik_{\perp}x)] \exp(ik_{\parallel}z) dk_{\parallel} \quad (1.20)$$

Obdobně, dosadíme-li (1.17) a (1.20) do jiné z Maxwellových rovnic

$$\nabla \times \vec{E} + \mu_0 \frac{\partial \vec{H}}{\partial t} = \vec{0}, \quad (1.21)$$

získáme následující vyjádření pro složku H_y

$$H_y(x, z) = \sqrt{\frac{\varepsilon_0}{\mu_0}} \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{k_0}{k_{\perp}} [C(k_{\parallel}) \exp(-ik_{\perp}x) - D(k_{\parallel}) \exp(ik_{\perp}x)] \exp(ik_{\parallel}z) dk_{\parallel} \quad (1.22)$$

Poznamenejme, že zde užíváme obvyklé konvence pro argument komplexního čísla, tj. $\arg(z) \in (-\pi, \pi)$, $z \in \mathbb{C}$. Zavedeme-li do komplexní roviny pro k_{\parallel} řezy $(-\infty, -k_0)$ a $(k_0, +\infty)$, potom první kořen druhé odmocniny z pravé strany rovnosti (1.18), který je zde označen jako k_{\perp} , bude mít nezápornou reálnou část, tj. $\Re k_{\perp} \geq 0$. Dále jak $\Re k_{\perp}$, tak $\Im k_{\perp}$, brány jako reálné funkce komplexní proměnné k_{\parallel} , jsou, po zúžení na reálnou osu, spojitě a nezáporné. Důsledkem toho jsme oprávněni říct, že člen $D(k_{\parallel}) \exp(ik_{\perp}x)$ představuje mod postupující v kladném směru osy x , případně klesající evanescentní mod, a člen $C(k_{\parallel}) \exp(-ik_{\perp}x)$ představuje mod odražený (od překážky v $x > 0$, například od povrchové vrstvy plazmatu), jak uvádí [1], případně klesající evanescentní mod (bráno v záporném směru osy x).

1.1.3 Pole v plazmatu

Zkoumejme šíření EM vln v plazmatu, jejichž elektrická složka vyhovuje následující vlnové rovnici

$$\nabla \times \nabla \times \vec{E} + \frac{1}{c^2} \epsilon \frac{\partial^2 \vec{E}}{\partial t^2} = \vec{0}. \quad (1.23)$$

V rovnici (1.23) vystupuje tenzor permitivity³, jehož matice má v našem souřadném systému, kde vnější magnetické pole⁴ prostupující plazmatem je

³V našem označení je zmíněný tenzor bezrozměrná veličina. Pokud bychom jí chtěli "navrátit" odpovídající fyzikální rozměr, je třeba ji násobit konstantou ε_0 , tedy permitivitou vakua.

⁴Pole buzené vnějšími zdroji - magnetickými cívkami tokamaku.

orientováno shodně s osou z , následující tvar

$$\epsilon = \begin{pmatrix} \epsilon_{\perp} & ig & 0 \\ -ig & \epsilon_{\perp} & 0 \\ 0 & 0 & \epsilon_{\parallel} \end{pmatrix}. \quad (1.24)$$

Prvky matice (1.24) jsou následující výrazy

$$\begin{aligned} \epsilon_{\perp} &\equiv \left(1 - \sum_k \frac{\omega_{0k}^2}{\omega^2 - \omega_{ck}^2} \right) \\ \epsilon_{\parallel} &\equiv \left(1 - \sum_k \frac{\omega_{0k}^2}{\omega^2} \right) \\ g &\equiv - \sum_k \frac{\omega_{ck} \omega_{0k}^2}{\omega (\omega^2 - \omega_{ck}^2)} \end{aligned} \quad (1.25)$$

kde ω_{ck} je tzv. cyklotronová frekvence, která je definována

$$\omega_{ck} = \frac{q_k B_0}{m_k} \quad (1.26)$$

a ω_{0k} je tzv. plazmová frekvence, která je definována

$$\omega_{0k} = \sqrt{\frac{q_k^2 n_k}{\epsilon_0 m_k}}. \quad (1.27)$$

Index k ve výrazech (1.25) až (1.27) označuje druh částice, například elektron nebo iont. Ve výrazu (1.27) vystupuje hustota plazmatu n_k , tj. počet částic druhu k na jednotku objemu. Pro úplnost dodejme, že symbol q_k značí náboj⁵ částice druhu k , m_k její hmotnost a konečně B_0 označuje velikost vnějšího magnetického pole.

Zde budeme uvažovat pouze elektronovou složku plazmatu a tedy pouze její hustotu n_e , přičemž dále již vynecháme index e . V našem modelu předpokládáme, že hustota plazmatu je lineární funkcí souřadnic. Přesněji řečeno, v našem souřadném systému platí

$$n(x) = \nu(x - x_p), \quad \nu > 0, \quad (1.28)$$

kde x_p je souřadnice povrchu plazmatu.

Dále předpokládejme, že elektrické pole vlny má tvar

$$\vec{E} = \vec{E}(x) \exp [i (k_{\parallel} z - \omega t)] , \quad (1.29)$$

⁵A to včetně znaménka.

kde $\vec{E}(x) = (E_x(x), 0, E_z(x))$. Dosadíme-li tento tvar pole do rovnice (1.23), potom po jednoduchých úpravách, které mimo jiné zahrnují přechod k bezrozměrným souřadnicím

$$X = k_0 x, \quad Y = k_0 y, \quad Z = k_0 z, \quad (1.30)$$

získáme po rozepsání do složek následující soustavu rovnic

$$\begin{aligned} [N_{\parallel}^2 - \varepsilon_{\perp}(X)] E_X(X) + iN_{\parallel} \partial_X E_Z(X) &= 0 \\ ig(X) E_X(X) &= 0 \\ iN_{\parallel} \partial_X E_X(X) - [\varepsilon_{\parallel}(X) + \partial_X^2] E_Z(X) &= 0, \end{aligned} \quad (1.31)$$

přičemž $N_{\parallel} = k_{\parallel}/k_0$.

V pravém okolí povrchové vrstvy, kde je hustota plazmatu blízká nule, můžeme aproximovat

$$g \approx 0, \quad \varepsilon_{\perp} \approx 1. \quad (1.32)$$

Při této aproximaci pozbývá druhá z rovnic (1.31) význam. První z nich se podstatně zjednoduší. Bude mít konstantní koeficienty. Aplikujeme-li na takto zjednodušenou první rovnici operátor ∂_X , vyjádříme-li z ní člen $\partial_X E_X$ a konečně, dosadíme-li jeho vyjádření do třetí z rovnic (1.31), po krátké úpravě získáme rovnici

$$\partial_X^2 E_Z(X) + (1 - N_{\parallel}^2) \varepsilon_{\parallel}(X) E_Z(X) = 0. \quad (1.33)$$

Dosaďme do právě získané rovnice tvar řešení, který poskytuje metoda WKB

$$E_Z(X) \approx \sqrt{\frac{k_0}{k_{\perp}(X)}} \exp\left(\frac{i}{k_0} \int_{X_0}^X k_{\perp}(\xi) d\xi\right) E_Z^0 \quad (1.34)$$

a zanedbejme vzniklé členy obsahující derivace k_{\perp} . Po krátkých úpravách získáme vztah

$$k_{\perp}(X) = k_0 \sqrt{(1 - N_{\parallel}^2)(X_{\omega} - X) \delta}, \quad (1.35)$$

přičemž jsme využili aproximaci

$$\varepsilon_{\parallel}(X) \approx 1 - \frac{\omega_{0e}^2(X)}{\omega^2} = (X_{\omega} - X) \delta, \quad (1.36)$$

kde

$$\begin{aligned} X_{\omega} &= \frac{\omega^2 \varepsilon_0 m_e k_0}{\nu e^2} + X_p \\ \delta &= \frac{1}{X_{\omega} - X_p} = \frac{\nu e^2}{\omega^2 \varepsilon_0 m_e k_0}. \end{aligned} \quad (1.37)$$

Ze vztahu (1.35) vidíme, že mohou nastat pouze dva případy, pro něž je k_{\perp} kladné, tj. kdy se uvažovaná vlna šíří (tj. není evanescentní)

1. $N_{\parallel}^2 < 1$ a současně $X_p < X < X_{\omega}$
2. $N_{\parallel}^2 > 1$ a současně $X > X_{\omega}$

přičemž N_{\parallel} uvažujeme pouze kladné.

Věnujme se nejdříve prvnímu případu. S využitím aproximace (1.36) a záměny proměnných

$$\zeta = [(1 - N_{\parallel}^2) \delta]^{1/3} (X - X_{\omega}) \quad (1.38)$$

můžeme rovnici (1.33) přepsat do následujícího tvaru

$$\frac{d^2 E_Z}{d\zeta^2}(\zeta) - \zeta E_Z(\zeta) = 0. \quad (1.39)$$

Rovnice tohoto tvaru je známa jako tzv. Stokesova⁶ a její obecné řešení lze zapsat

$$E_Z(\zeta) = \alpha \text{Ai}(\zeta) + \beta \text{Bi}(\zeta), \quad (1.40)$$

kde Ai a Bi jsou tzv. Airyho integrální funkce a $\alpha, \beta \in \mathbb{C}$ (viz [2]). Funkce Bi však nevyhovuje přirozenému požadavku na omezenost polí. Pro $\zeta > 0$ má průběh podobný exponenciálnímu, ovšem vzrůstajícímu a nikoliv klesajícímu průběhu, jak bychom od evanescentní vlny očekávali.⁷ V tomto případě tedy pokládáme $\beta = 0$. Oproti tomu funkce Ai tento požadavek splňuje.

Ve druhém z případů, tj. pro $N_{\parallel}^2 > 1$ postupujme následovně. V rovnici (1.33) opět provedme záměnu proměnných, ovšem tentokrát

$$\zeta := [(N_{\parallel}^2 - 1) \delta]^{1/3} (X_{\omega} - X) \quad (1.41)$$

Tato záměna vede taktéž na Stokesovu rovnici, tj. na (1.39), a stejně jako v předchozím případě hledáme její řešení, které by představovalo odcházející vlnu. Ovšem zde je třeba provést detailnější rozbor.

Nejprve umocněme výraz (1.35) a dosadme do něj první tvar aproximace (1.36), čímž získáme

$$k_{\perp}^2 = k_0^2 (1 - N_{\parallel}^2) \left(1 - \frac{\omega_{0e}^2}{\omega^2} \right) \quad (1.42)$$

⁶Někdy též označována jako rovnice Airyho.

⁷ $\zeta > 0$ odpovídá $X > X_{\omega}$, tedy oblasti, kde výraz (1.35) nabývá ryze imaginárních hodnot.

Považujme nyní členy na pravé straně (1.42) za konstanty, až na ω . Zderivujeme (1.42) podle k_{\perp} . Po krátké úpravě získáváme

$$\frac{d\omega}{dk_{\perp}} = \frac{k_{\perp}\omega^3}{k_0^2 (1 - N_{\parallel}^2) \omega_{0e}^2}, \quad (1.43)$$

tedy výraz pro grupovou rychlost, který pro $N_{\parallel}^2 > 1$ nabývá záporných hodnot. Abychom zachovali požadavek odcházející vlny, tj. takové, jejíž tok energie směřuje do plazmatu (kladný směr osy x), musíme hledat řešení ve formě vlny postupující v záporném směru osy x (zpětné vlny), tj. řešení se záporným vlnovým číslem. Vezměme tedy výraz (1.35), ovšem tentokrát se zápornou větví odmocniny na jeho pravé straně, a dosadíme jej do pravé strany WKB aproximace (1.34). Položme $X_0 = X_{\omega}$ a integrujme. Takto získáme

$$E_Z^0 [(N_{\parallel}^2 - 1) (X - X_{\omega}) \delta]^{-1/4} \exp \left[-i \frac{2}{3} (X - X_{\omega})^{3/2} (N_{\parallel}^2 - 1)^{1/2} \delta^{1/2} \right]. \quad (1.44)$$

Pokusme se tedy vyjádřit výraz tohoto tvaru pomocí lineární kombinace Airyho funkcí, resp. jejich asymptotických rozvojų.

Pro ζ splňující

$$\frac{2\pi}{3} \leq \arg \zeta \leq \frac{4\pi}{3}, \quad (1.45)$$

tedy i pro $\zeta < 0$, mají asymptotické rozvoje Airyho funkcí následující vyjádření (viz [2])

$$\text{Ai}(\zeta) \sim \frac{1}{2} \pi^{-1/2} \zeta^{-1/4} \left[\exp \left(-\frac{2}{3} \zeta^{3/2} \right) + i \exp \left(\frac{2}{3} \zeta^{3/2} \right) \right] \quad (1.46)$$

$$\text{Bi}(\zeta) \sim \frac{1}{2} \pi^{-1/2} \zeta^{-1/4} \left[i \exp \left(-\frac{2}{3} \zeta^{3/2} \right) + \exp \left(\frac{2}{3} \zeta^{3/2} \right) \right], \quad (1.47)$$

přičemž zlomkové mocniny ζ jsou zde brány ve smyslu

$$\zeta^q = |\zeta^q| \exp(iq \arg \zeta), \quad (1.48)$$

kde q je příslušná zlomková mocnina.

Na základě výše uvedených vztahů zjišťujeme, že právě kombinací

$$\text{Ai}(\zeta) + i \text{Bi}(\zeta) \sim \frac{i}{\sqrt[4]{\pi^2 \zeta}} \exp \left(\frac{2}{3} \zeta^{3/2} \right) \quad (1.49)$$

získáme požadované řešení, jak se lze přesvědčit dosadíme-li za ζ do pravé strany (1.49) definici (1.41).

Pro případ $N_{\parallel}^2 > 1$ tak získáváme řešení Stokesovy rovnice

$$\tilde{E}_Z(\zeta) = \alpha [\text{Ai}(\zeta) + i \text{Bi}(\zeta)] \quad (1.50)$$

Na závěr tohoto paragrafu dodejme, že z Maxwellovy rovnice vyjadřující tzv. Faradayův zákon vyplývá, že za našich předpokladů je jedinou nenulovou magnetickou složkou vlny složka H_Y , která lze snadno vyjádřit jako

$$H_Y = \frac{i}{(1 - N_{\parallel}^2)} \sqrt{\frac{\varepsilon_0}{\mu_0}} \partial_X E_Z . \quad (1.51)$$

Tento fakt nám již umožní vypočítat tzv. povrchovou impedanci plazmatu, která je pro náš případ definována následovně

$$\varrho = - \lim_{x \rightarrow x_p^+} \frac{E_z(x)}{H_y(x)} , \quad (1.52)$$

a pomocí níž budeme v následujícím paragrafu vyjadřovat podmínky spojitosti polí na rozhraní vakuum - plazma.

Tedy v případě $N_{\parallel}^2 < 1$ získáváme pro (1.52) explicitní vyjádření

$$\varrho(N_{\parallel}) = i \frac{\text{Ai}(\zeta_p)}{\text{Ai}'(\zeta_p)} \sqrt{\frac{\mu_0}{\varepsilon_0}} (1 - N_{\parallel}^2)^{2/3} \delta^{-1/3} , \quad (1.53)$$

přičemž

$$\zeta_p = - (1 - N_{\parallel}^2)^{1/3} \delta^{-2/3} \quad (1.54)$$

a pro případ $N_{\parallel}^2 > 1$ získáváme

$$\varrho(N_{\parallel}) = i \frac{\text{Ai}(\zeta_p) + i \text{Bi}(\zeta_p)}{\text{Ai}'(\zeta_p) + i \text{Bi}'(\zeta_p)} \sqrt{\frac{\mu_0}{\varepsilon_0}} (N_{\parallel}^2 - 1)^{2/3} \delta^{-1/3} , \quad (1.55)$$

kde

$$\zeta_p = (N_{\parallel}^2 - 1)^{1/3} \delta^{-2/3} . \quad (1.56)$$

1.1.4 Podmínky na rozhraní

V tomto paragrafu vyslovíme podmínky spojitosti polí na jednotlivých rozhraních a na jejich základě sestavíme rovnici svazující amplitudy odražených modů ve vlnovodech s amplitudami excitovanými. Následným vyřešením této rovnice, kterému se věnujeme v dalších kapitolách, budeme schopni přikročit k řešení úlohy o vyzářování grilu.

Nejprve věnujme pozornost rozhraní vakuum - plazma. Využijme tedy povrchovou impedanci plazmatu spočtenou v předchozím paragrafu a položíme s ní v rovnost impedanci vlny ve vakuu. Vezměme tedy záporný podíl integrandu ve výrazu (1.17) s integrandem v (1.22), vyhodnotíme jej v místě $x = x_p$, přejdeme do bezrozměrných souřadnic a takto získaný výraz položíme roven (1.53), resp. (1.55). Dostáváme tedy

$$\varrho(N_{\parallel}) = -\varrho_0 N_{\perp} \frac{C(N_{\parallel}) \exp(-iN_{\perp} X_p) + D(N_{\parallel}) \exp(iN_{\perp} X_p)}{C(N_{\parallel}) \exp(-iN_{\perp} X_p) - D(N_{\parallel}) \exp(iN_{\perp} X_p)}, \quad (1.57)$$

kde

$$\varrho_0 = \sqrt{\frac{\mu_0}{\varepsilon_0}} \quad (1.58)$$

je tzv. impedance vakua. Pro úplnost připomeňme, že

$$N_{\perp} = \begin{cases} \sqrt{1 - N_{\parallel}^2} & , \text{ pro } N_{\parallel}^2 \leq 1 \\ i\sqrt{N_{\parallel}^2 - 1} & , \text{ pro } N_{\parallel}^2 > 1. \end{cases} \quad (1.59)$$

Definujme dále koeficient odrazu jako

$$r(N_{\parallel}) = \frac{C(N_{\parallel})}{D(N_{\parallel})} \quad (1.60)$$

a vyjádříme jej pomocí (1.57). Tedy

$$r(N_{\parallel}) = \frac{\varrho(N_{\parallel}) - \varrho_0 N_{\perp}}{\varrho(N_{\parallel}) + \varrho_0 N_{\perp}} \exp(i2N_{\perp} X_p). \quad (1.61)$$

Tímto jsme vyloučili neznámou $C(N_{\parallel})$.

Abychom vyloučili i $D(N_{\parallel})$, využijme podmínky spojitosti polí na rozhraní gril - vakuum. Nejprve věnujme pozornost spojitosti z -ové komponenty elektrického pole na tomto rozhraní. Položíme-li tedy v rovnost výraz (1.12) s upraveným⁸ výrazem (1.17), vyhodnotíme-li je v místě $x = 0$, potom po sérii dílčích úprav⁹ získáme vyjádření

$$D(N_{\parallel}) [1 + r(N_{\parallel})] = \sum_{p=1}^N \exp(i\varphi_p) \left\{ (A_p + B_{p0}) I_{p0}(N_{\parallel}) + \sum_{m=1}^{+\infty} B_{pm} I_{pm}(N_{\parallel}) \right\}, \quad (1.62)$$

⁸Za pomocí koeficientu odrazu. Tedy místo $C(N_{\parallel})$ píšeme $r(N_{\parallel}) D(N_{\parallel})$.

⁹Detailní provedení lze nalézt v [5], str.38.

kde

$$\begin{aligned}
I_{pm}(N_{\parallel}) &= \frac{1}{2\pi k_0} \int_{-\infty}^{+\infty} \chi_p \cos \left[\frac{m\pi}{bk_0} (Z - Z_p) \right] \exp(-iN_{\parallel}Z) dZ \\
&= -\frac{iN_{\parallel} \exp(-iN_{\parallel}Z_p)}{2\pi k_0 \left[N_{\parallel}^2 - \left(\frac{m\pi}{bk_0} \right)^2 \right]} \left[1 - (-1)^m \exp(-iN_{\parallel}bk_0) \right].
\end{aligned} \tag{1.63}$$

Nyní využijeme podmínku spojitosti pro y -ovou komponentu magnetického pole a to opět v místě $x = 0$. Budeme postupovat analogicky k předchozímu, ovšem tentokrát s výrazy (1.14) a (1.22), přičemž za $D(N_{\parallel})$ dosadíme jeho vyjádření z (1.62). Po několika dalších úpravách¹⁰ konečně získáváme

$$\begin{aligned}
\sum_{p=1}^N \exp(i\varphi_p) \left\{ (A_p + B_{p0}) K_{pq0l} + \sum_{m=1}^{+\infty} B_{pm} K_{pqml} \right\} &= \sum_{p=1}^N \exp(i\varphi_p) \cdot \\
\cdot \left\{ (A_p - B_{p0}) \delta_{pq} \delta_{0l} v_l b + \sum_{m=1}^{+\infty} \frac{iB_{pm}}{\gamma_m} \delta_{pq} \delta_{ml} v_l b \right\},
\end{aligned} \tag{1.64}$$

kde

$$K_{pqml} = 2\pi k_0 \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{1}{N_{\perp}} \frac{1-r}{1+r} I_{pm} I_{ql}^* dN_{\parallel}, \tag{1.65}$$

$$\gamma_m = \sqrt{\left(\frac{m\pi}{bk_0} \right)^2 - 1}, \quad m \in \mathbb{N} \tag{1.66}$$

a také

$$v_l = \begin{cases} \frac{1}{2} & , \text{ pro } l \neq 0 \\ 1 & , \text{ pro } l = 0. \end{cases} \tag{1.67}$$

Rovnice (1.64) představuje onu kýženou rovnici svazující odražené amplitudy modů uvnitř vlnodů s amplitudami excitovanými. Excitované amplitudy považujeme za zadaná data, tedy neznámé zde představují odražené amplitudy. Vyřešení této rovnice¹¹ vzhledem k B_{pm} tedy představuje poslední krok k určení elektromagnetického pole vyzařovaného grilem. Vlastním řešením této rovnice a navazujícími výpočty se zabýváme v dalších kapitolách.

¹⁰Detaily lze opět nalézt v [5], str.39.

¹¹Rovnici (1.64) řešíme numericky, přičemž bereme v úvahu jen konečný počet modů.

1.2 Prostorová spektrální hustota výkonu

V tomto odstavci definujeme klíčový pojem - veličinu zvanou *prostorová spektrální hustota výkonu* vlny vyzářené grilem, resp. její časovou střední hodnotu. Jak název napovídá, tato veličina je spjata s Poyntingovou větou. Vyjádříme tedy tok energie¹² vlny vyzářené grilem do prostoru vakuové mezery oddělující gril a plazma. Zajímejme se konkrétně o x -ovou složku toku, pro kterou platí

$$P_x = -\frac{1}{2k_0} \int_{\mathbb{R}} dZ \Re [E_Z(X, Z) H_Y^*(X, Z)] . \quad (1.68)$$

Vyjádříme-li tvar polí explicitně, potom pro $|N_{\parallel}| \leq 1$, tedy při $N_{\perp} \in \mathbb{R}$ získáváme

$$\begin{aligned} P_x &= \frac{\pi k_0}{\varrho_0} \int_{-1}^1 dN_{\parallel} \frac{1}{N_{\perp}} \left\{ |D(N_{\parallel})|^2 \left[1 - |r(N_{\parallel})|^2 \right] \right\} \\ &= \int_{-1}^1 dN_{\parallel} \Upsilon(N_{\parallel}) \end{aligned} \quad (1.69)$$

a v případě $|N_{\parallel}| > 1$, kdy lze psát $N_{\perp} = i\mathcal{N}$, $\mathcal{N} \in \mathbb{R}$, platí

$$\begin{aligned} P_x &= -\frac{2\pi k_0}{\varrho_0} \int_{\mathbb{R} \setminus (-1,1)} dN_{\parallel} \left\{ \frac{1}{\mathcal{N}} |D(N_{\parallel})|^2 \Im [r(N_{\parallel})] \right\} \\ &= \int_{\mathbb{R} \setminus (-1,1)} dN_{\parallel} \Upsilon(N_{\parallel}) , \end{aligned} \quad (1.70)$$

přičemž výraz za posledním znakem rovnosti ve vzorci (1.69) a (1.70) je brán jako definice nové veličiny $\Upsilon(N_{\parallel})$, která není ničím jiným, než spektrální hustotou výkonu.

Na závěr tohoto paragrafu definujme ještě pár dalších veličin, na které se budeme odkazovat v kapitole 3, kde uvádíme některé výsledky numerických výpočtů prostorové spektrální hustoty výkonu. První z těchto veličin je relativní prostorová spektrální hustota výkonu

$$\Upsilon_r(N_{\parallel}) = \Upsilon(N_{\parallel}) \left(\int_{\mathbb{R}} dN_{\parallel} \Upsilon(N_{\parallel}) \right)^{-1} , \quad (1.71)$$

¹²Jak již bylo řečeno, přísně vzato se jedná o časovou střední hodnotu toku energie. V našem uspořádání se dokonce jedná o hodnotu této veličiny připadající na $1m$ výšky vlnovodu.

další je tzv. směrovost¹³

$$\varsigma = \int_0^{+\infty} dN_{\parallel} \Upsilon(N_{\parallel}) - \int_{-\infty}^0 dN_{\parallel} \Upsilon(N_{\parallel}) . \quad (1.72)$$

Veličina definovaná následujícím předpisem

$$R = \frac{\sum_{p=1}^N |B_{p0}|^2}{\sum_{p=1}^N A_p^2} \quad (1.73)$$

se nazývá odrazivost¹⁴ a nevyjadřuje nic jiného, než odražený výkon. Následující výraz

$$A_{p,r} = \frac{A_p}{\max_{p \in \hat{N}} A_p} \quad (1.74)$$

definuje tzv. relativní amplitudu (excitované vlny v p -tém vlnovodu). A konečně, vzorec

$$\Delta\varphi_p = \varphi_p - \varphi_{p-1} \quad (1.75)$$

definuje tzv. relativní fázový posuv p -tého vlnovodu, přičemž pokládáme $\Delta\varphi_1 = 0$.

¹³Tímto pojmem míníme často užívaný anglický termín *directivity*.

¹⁴Pro tento pojem se často užívá anglický termín *reflectivity*.

Kapitola 2

Příprava výpočtu

2.1 Lineární profil hustoty plazmatu

Na rozdíl od pojetí věci v práci [5] se častěji pracuje s drobným zobecněním, které uvažuje nenulovou povrchovou hustotu plazmatu. V tomto případě se hustota plazmatu zavádí vztahem

$$n(x) \equiv (x - x_p)\nu + n_0, \quad x \in \langle x_p, +\infty \rangle, \quad (2.1)$$

kde $\nu > 0$ je gradient hustoty, x_p je souřadnice povrchové vrstvy plazmatu a konečně $n_0 > 0$ je zmíněná povrchová hustota¹, tedy $n(x_p) = n_0$.

Toto, byť drobné, zobecnění má zásadní vliv na plazmovou frekvenci², jejíž obvyklá definice zní³

$$\omega_{0e}^2(x) = \frac{e^2 n_e(x)}{\varepsilon_0 m_e}, \quad (2.2)$$

neboť dosazením (2.1) do (2.2) získáme

$$\omega_{0e}^2(x) = \frac{e^2 n_0}{\varepsilon_0 m_e} + \frac{e^2 \nu}{\varepsilon_0 m_e} (x - x_p). \quad (2.3)$$

Přejděme nyní k bezrozměrným souřadnicím transformací

$$f : x \rightarrow X, \quad f(x) = k_0 x, \quad (2.4)$$

¹Argumentace (1.132) v [5] už nemusí platit, neboť v uvažované oblasti, tj. pro $x \geq x_p$, již neplatí $n(x) \approx 0$.

²Zde, aniž bychom to výslovně zdůraznili, uvažujeme elektronovou plazmovou frekvenci a zde tedy $n = n_e$.

³Symbol ε_0 značí permitivitu vakua a m_e značí klidovou hmotu elektronu.

kde $k_0 \equiv \omega/c$ je vakuové vlnové číslo příslušející frekvenci⁴ ω dané EM vlny. A zavedme

$$\Omega_{0e} \equiv \omega_{0e} \cdot f^{-1}. \quad (2.5)$$

Z uvedeného je zřejmé, že platí

$$\Omega_{0e}(X) = \omega_{0e}(x), \quad (2.6)$$

$$\Omega_{0e}^2(X) = \frac{e^2 n_0}{\varepsilon_0 m_e} + \frac{e^2 \nu}{\varepsilon_0 m_e k_0} (X - X_p). \quad (2.7)$$

Plazmová elektronová rezonance je definována podmínkou

$$\Omega_{0e}^2(X_\omega) = \omega^2. \quad (2.8)$$

Podívejme se nyní, jaké explicitní vyjádření platí pro souřadnici X_ω , na níž dle právě uvedené definice nastává zmíněná rezonance. Rozepsáním levé strany (2.8) získáme

$$\frac{e^2 n_0}{\varepsilon_0 m_e} + \frac{e^2 \nu}{\varepsilon_0 m_e k_0} (X_\omega - X_p) = \omega^2 \quad (2.9)$$

a tedy

$$X_\omega = \frac{k_0}{\nu} \left(\omega^2 \frac{\varepsilon_0 m_e}{e^2} - n_0 \right) + X_p. \quad (2.10)$$

Abychom mohli využít výpočetních postupů provedených v práci [5], počínaje str. 33, je nutné splnit podmínku, která odpovídá vztahu⁵ (1.141) v [5], tj. zajistit, aby platilo⁶

$$1 - \frac{\Omega_{0e}^2(X)}{\omega^2} = (X_\omega - X) \delta. \quad (2.11)$$

Dosazením (2.10) do (2.11) a snadnou úpravou získáme

$$\Omega_{0e}^2(X) = \omega^2 - \frac{\omega^2 \delta k_0}{\nu} \left(\frac{\omega^2 \varepsilon_0 m_e}{e^2} - n_0 \right) + (X - X_p) \omega^2 \delta. \quad (2.12)$$

Porovnáním (2.12) se (2.7) zjistíme, že podmínka (2.11) je splněna pouze pro

$$\delta = \frac{e^2 \nu}{\omega^2 \varepsilon_0 m_e k_0}. \quad (2.13)$$

⁴Přísně vzato se jedná o úhlovou (nebo též kruhovou) frekvenci.

⁵Připomeňme, že v [5] je požadováno, aby $\tilde{\varepsilon}_{\parallel}(X) \approx 1 - \frac{\tilde{\omega}_{0,e}^2(X)}{\omega^2}$.

⁶V této práci používáme symbol Ω_{0e} , namísto $\tilde{\omega}_{0,e}$ použitého v [5].

Definujeme-li takto veličinu δ , zjišťujeme, že má stejnou číselnou hodnotu jako jí odpovídající veličina v [5], nicméně, vyjádříme-li ji s pomocí (2.12), tj. pomocí veličin X_p a X_ω , získáme

$$\delta = \left(X_\omega - X_p + \frac{k_0 n_0}{\nu} \right)^{-1}. \quad (2.14)$$

Shrňme-li důsledky zobecnění (2.1), docházíme k závěru, že veličina X_ω má formálně stejnou definici, (2.8), jako v [5], ovšem nabývá jiné číselné hodnoty, oproti tomu veličina δ nabývá stejné hodnoty jako v [5], ovšem je třeba ji definovat jinak, pomocí (2.11).

2.2 Tenzor vazebné admitance

2.2.1 Definice

V práci [5] je pomocí definice (1.184) zaveden tenzor vazebné admitance⁷

$$K_{p m q l} = 2\pi k_0 \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{1}{N_\perp} \frac{1-r}{1+r} I_{p m} I_{q l}^* dN_\parallel, \quad (2.15)$$

kde příčný index lomu je funkcí podélného indexu lomu a je definován následujícím předpisem

$$N_\perp = \begin{cases} \sqrt{1 - N_\parallel^2} & , \text{ pro } N_\parallel^2 \leq 1 \\ i\sqrt{N_\parallel^2 - 1} & , \text{ pro } N_\parallel^2 > 1. \end{cases} \quad (2.16)$$

Pro koeficient odrazu platí

$$r(N_\parallel) = \frac{\varrho(N_\parallel) - \varrho_0 N_\perp}{\varrho(N_\parallel) + \varrho_0 N_\perp} \exp(i2N_\perp X_p), \quad (2.17)$$

kde povrchová impedance plazmatu je určena⁸

$$\varrho(N_\parallel) = \begin{cases} i \frac{\text{Ai}(\zeta_p)}{\text{Ai}'(\zeta_p)} \varrho_0 (1 - N_\parallel^2)^{2/3} \delta^{-1/3} & , \text{ pro } N_\parallel^2 \leq 1 \\ i \frac{\text{Ai}(\zeta_p) + i \text{Bi}(\zeta_p)}{\text{Ai}'(\zeta_p) + i \text{Bi}'(\zeta_p)} \varrho_0 (N_\parallel^2 - 1)^{2/3} \delta^{-1/3} & , \text{ pro } N_\parallel^2 > 1, \end{cases} \quad (2.18)$$

⁷Na rozdíl od značení $K_{p,q,m,l}$ užitého v [5], zde používáme tohoto přirozenějšího zápisu.

⁸Symbol ϱ_0 zde značí impedanci vakua, která je dána vztahem $\varrho_0 = \sqrt{\frac{\mu_0}{\varepsilon_0}}$, kde μ_0 značí permeabilitu vakua. Symboly Ai a Bi, respektive Ai' a Bi' značí Airyho funkce, respektive jejich derivace.

kde

$$\zeta_p = \begin{cases} -\left(1 - N_{\parallel}^2\right)^{1/3} \delta^{-2/3} & , \text{ pro } N_{\parallel}^2 \leq 1 \\ \left(N_{\parallel}^2 - 1\right)^{1/3} \delta^{-2/3} & , \text{ pro } N_{\parallel}^2 > 1 . \end{cases} \quad (2.19)$$

Dále

$$I_{pm}(N_{\parallel}) = -\frac{iN_{\parallel} \exp(-iN_{\parallel}Z_p)}{2\pi k_0 \left[N_{\parallel}^2 - \left(\frac{m\pi}{bk_0}\right)^2 \right]} \left[1 - (-1)^m \exp(-iN_{\parallel}bk_0) \right] , \quad (2.20)$$

přičemž Z_p definujeme jako

$$Z_p = k_0 [pd + (p-1)b] , \quad (2.21)$$

kde $p \in \{1, 2, \dots, N\}$ je index příslušející p -tému vlnovodu, N je počet vlnovodů, d je tloušťka desky oddělující jednotlivé vlnovody a konečně b je šířka každého z vlnovodů. Dodejme, že symbol I_{ql}^* značí komplexně sdružený výraz ke I_{ql} .

Z předchozího je patrné, že první a třetí index tenzoru vazebné admitance má následující rozsah

$$p, q \in \{1, 2, \dots, N\} \equiv \hat{N} . \quad (2.22)$$

Při numerickém výpočtu složek tenzoru vazebné admitance je nutné omezit rozsah jeho druhého a čtvrtého indexu na rozsah konečný, tj. vybrat konečný počet modů ve Fourierově rozkladu EM pole ve vlnovodech.⁹ Tato dvojice indexů bude tedy mít rozsah

$$m, l \in \{0, 1, \dots, M\} \equiv \hat{M}_0 . \quad (2.23)$$

2.2.2 Symetrie

Symetrie tenzoru vazebné admitance jsou dány symetriemi integrandu v (2.15). Všechny funkce vystupující v tomto integrandu, až na faktor $I_{pm}I_{ql}^*$, jsou funkce sudé, neboť proměnná N_{\parallel} v nich vystupuje vždy ve druhé mocnině. Na druhou stranu platí

$$I_{pm}(-N_{\parallel}) = I_{pm}^*(N_{\parallel}) \quad (2.24)$$

a tedy

$$I_{pm}(-N_{\parallel}) I_{ql}^*(-N_{\parallel}) = I_{pm}^*(N_{\parallel}) I_{ql}(N_{\parallel}) . \quad (2.25)$$

⁹Jak již bylo zmíněno v práci [5].

Pomocí těchto vlastností si můžeme ulehčit numerický výpočet složek uvažovaného tenzoru. Rozepišme si (2.15) následujícím způsobem

$$\begin{aligned}
K_{pml} &= 2\pi k_0 \int_{-\infty}^0 dN_{\parallel} \left\{ \frac{1}{N_{\perp}} \frac{1-r}{1+r} I_{pm}(N_{\parallel}) I_{ql}^*(N_{\parallel}) \right\} + \\
&+ 2\pi k_0 \int_0^{\infty} dN_{\parallel} \left\{ \frac{1}{N_{\perp}} \frac{1-r}{1+r} I_{pm}(N_{\parallel}) I_{ql}^*(N_{\parallel}) \right\}.
\end{aligned} \tag{2.26}$$

V prvním integrálu ve (2.26) nejprve provedme záměnu proměnné N_{\parallel} na $-N_{\parallel}$. Poté využijme vztahu (2.25) a sudosti ostatních faktorů integrandu. Takto vidíme, že

$$\begin{aligned}
K_{pml} &= 2\pi k_0 \int_{\infty}^0 d(-N_{\parallel}) \left\{ \frac{1}{N_{\perp}} \frac{1-r}{1+r} I_{pm}^*(N_{\parallel}) I_{ql}(N_{\parallel}) \right\} + \\
&+ 2\pi k_0 \int_0^{\infty} dN_{\parallel} \left\{ \frac{1}{N_{\perp}} \frac{1-r}{1+r} I_{pm}(N_{\parallel}) I_{ql}^*(N_{\parallel}) \right\} \\
&= 2\pi k_0 \int_0^{\infty} dN_{\parallel} \left\{ \frac{1}{N_{\perp}} \frac{1-r}{1+r} 2\Re [I_{pm}(N_{\parallel}) I_{ql}^*(N_{\parallel})] \right\}.
\end{aligned} \tag{2.27}$$

Vztah (2.27) už na první pohled odhaluje jednu ze symetrií našeho tenzoru, a sice jeho invarianci vůči současné záměně indexů $p \leftrightarrow q$ a $m \leftrightarrow l$. Platí tedy

$$K_{pml} = K_{qlpm}. \tag{2.28}$$

Podívejme se dále na explicitní vyjádření reálné části faktoru $I_{pm} I_{ql}^*$ a pokusme se určit jeho další případné symetrie. Snadno lze zjistit, že platí

$$\begin{aligned}
\Re [I_{pm}(N_{\parallel}) I_{ql}^*(N_{\parallel})] &= \frac{N_{\parallel}^2}{\pi^2 k_0^2 \left[N_{\parallel}^2 - \left(\frac{m\pi}{bk_0} \right)^2 \right] \left[N_{\parallel}^2 - \left(\frac{l\pi}{bk_0} \right)^2 \right]} \\
&\cdot \left\{ \cos \left[N_{\parallel} (d+b) (q-p) k_0 + \frac{(l-m)\pi}{2} \right] \right. \\
&\cdot \left. \sin \left(\frac{N_{\parallel} b k_0 + l\pi}{2} \right) \sin \left(\frac{N_{\parallel} b k_0 + m\pi}{2} \right) \right\}.
\end{aligned} \tag{2.29}$$

Při pohledu na (2.29) zjišťujeme následující. Pokud $p = q$, lze provést záměnu indexů $m \leftrightarrow l$.¹⁰ Ba co víc, pokud platí $p = q$, hodnota K_{pml}

¹⁰Tato symetrie je již obsažena v (2.28) jako její speciální případ.

závisí pouze na dvojici indexů m, l . Platí tedy

$$K_{1m1l} = K_{2m2l} = \dots = K_{NmNl}. \quad (2.30)$$

Dále zjišťujeme dvě následující skutečnosti. První z nich se dá vyjádřit zápisem¹¹

$$\left(p = q \wedge (l - m) = 2w - 1, w \in \mathbb{Z} \right) \implies K_{p m q l} = 0. \quad (2.31)$$

Druhá zní

$$\begin{aligned} p \neq q &\implies K_{p m q l} = (-1)^{l-m} K_{p l q m} \\ p \neq q &\implies K_{p m q l} = (-1)^{l-m} K_{q m p l}. \end{aligned} \quad (2.32)$$

2.3 Maticová reprezentace

2.3.1 Motivace

Za účelem řešit rovnici (1.183) z [5], která zní¹²

$$\begin{aligned} \sum_{p=1}^N \exp(i\varphi_p) \left\{ (A_p + B_{p0}) K_{p0ql} + \sum_{m=1}^{+\infty} B_{pm} K_{p m q l} \right\} &= \sum_{p=1}^N \exp(i\varphi_p) \cdot \\ &\cdot \left\{ (A_p - B_{p0}) \delta_{pq} \delta_{0l} v_l b + \sum_{m=1}^{+\infty} \frac{i B_{pm}}{\gamma_m} \delta_{pq} \delta_{ml} v_l b \right\}, \end{aligned} \quad (2.33)$$

je vhodné ji převést z tenzorového tvaru na tvar maticový. Přesněji řečeno, reprezentovat tenzor vazebné admitance pomocí vhodné matice a taktéž ostatní objekty v ní vystupující. Než tomu tak učiníme, nejprve uvažovanou rovnici přepíšeme do kompaktnější podoby. K tomu poslouží následující redefinice vztahu (1.181) z [5]

$$\gamma_m = \begin{cases} \sqrt{\left(\frac{m\pi}{bk_0}\right)^2 - 1} & , \text{ pro } m \in \mathbb{N} \\ -i & , \text{ pro } m = 0 \end{cases}, \quad (2.34)$$

¹¹Symbol \mathbb{Z} značí množinu celých čísel.

¹²Zde opět, oproti [5], používáme drobnou změnu v zápisu indexů jednotlivých veličin. Kromě změny uvedené již v definici (2.15), pokládáme také $B_{pm} := B_{p,m}$.

pomocí níž jde zápis (2.33) zjednodušit na tvar

$$\begin{aligned} \sum_{p=1}^N \sum_{m=0}^{+\infty} \exp(i\varphi_p) B_{pm} \left[K_{pmql} - \frac{i}{\gamma_m} \delta_{pq} \delta_{ml} v_l b \right] = \\ = \sum_{p=1}^N \exp(i\varphi_p) A_p (\delta_{pq} \delta_{0l} v_l b - K_{p0ql}) . \end{aligned} \quad (2.35)$$

2.3.2 Reprezentace tenzoru vazebné admittance

Maticovou reprezentaci tenzoru K_{pmql} lze provést například pomocí následujícího "indexového isomorfismu"

$$\begin{aligned} \Phi : \hat{\mathbb{N}} \times \hat{\mathbb{M}}_0 &\longrightarrow \hat{\mathbb{R}} \\ (p, m) &\xrightarrow{\Phi} r \\ \Phi(p, m) &= (p-1)(M+1) + m + 1, \end{aligned} \quad (2.36)$$

kde

$$r \in \hat{\mathbb{R}} \equiv \{1, 2, \dots, N(M+1)\}. \quad (2.37)$$

Inverzní zobrazení k Φ je dáno vztahy

$$\begin{aligned} p &= \left[\frac{r}{M+1} \right]_C \\ m &= r - (p-1)(M+1) - 1, \end{aligned} \quad (2.38)$$

přičemž symbol hranaté závorky s indexem C značí¹³ zobrazení $\mathbb{R} \rightarrow \mathbb{Z}$ definované následujícím předpisem

$$[x]_C = \min_{w \in \mathbb{Z}} (x \leq w) . \quad (2.39)$$

Samozřejmě způsobů jak realizovat taková zobrazení $\Phi : \mathbb{N} \times \mathbb{N}_0 \rightarrow \mathbb{N}$ splňujících náš požadavek je mnoho. Nám stačí konkrétní volba daná předpisem v definici (2.36).

Použijeme-li naše Φ jak na první, tak i na druhou dvojici indexů tenzoru K_{pmql}

$$\begin{aligned} (p, m) &\xrightarrow{\Phi} r \\ (q, l) &\xrightarrow{\Phi} s , \end{aligned} \quad (2.40)$$

¹³Index C pochází od anglického slova *ceiling*, tedy *strop*.

”indukujeme” tak isomorfismus mezi prostorem tenzorů čtvrtého řádu a prostorem čtvercových matic, tj. získáme tak jeho konkrétní maticovou reprezentaci

$$K_{p_m q_l} \cong_{\Phi} \mathcal{K}_s^r. \quad (2.41)$$

Zde horním indexem značíme index řádkový a dolním sloupcový. Explicitní tvar matice (\mathcal{K}_s^r) vypadá následovně

$$\begin{pmatrix} K_{1010} & K_{1011} & \dots & K_{101M} & K_{1020} & K_{1021} & \dots & K_{10NM} \\ K_{1110} & K_{1111} & \dots & K_{111M} & K_{1120} & K_{1121} & \dots & K_{11NM} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ K_{1M10} & K_{1M11} & \dots & K_{1M1M} & K_{1M20} & K_{1M21} & \dots & K_{1MNM} \\ K_{2010} & K_{2011} & \dots & K_{201M} & K_{2020} & K_{2021} & \dots & K_{20NM} \\ K_{2110} & K_{2111} & \dots & K_{211M} & K_{2120} & K_{2121} & \dots & K_{21NM} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ K_{NM10} & K_{NM11} & \dots & K_{NM1M} & K_{NM20} & K_{NM21} & \dots & K_{NMNM} \end{pmatrix} \quad (2.42)$$

Pro ilustraci zde uvedme konkrétní příklad matice reprezentující $K_{p_m q_l}$ pro případ $N = 2, M = 1$

$$(\mathcal{K}_s^r)_{\substack{N=2 \\ M=1}} = \begin{pmatrix} K_{1010} & K_{1011} & K_{1020} & K_{1021} \\ K_{1110} & K_{1111} & K_{1120} & K_{1121} \\ K_{2010} & K_{2011} & K_{2020} & K_{2021} \\ K_{2110} & K_{2111} & K_{2120} & K_{2121} \end{pmatrix} \quad (2.43)$$

2.3.3 Reprezentace ostatních členů

Změřme se nyní na ostatní členy rovnice (2.35), konkrétně na členy její levé strany.

Pro zjednodušení si označme

$$\gamma D_{p_m q_l} := -\frac{i}{\gamma_m} \delta_{pq} \delta_{ml} \nu_l b. \quad (2.44)$$

Uvědomíme-li si, že

$$\delta_{pq} \delta_{ml} = \begin{cases} 1 & , \text{ pro } p = q \wedge m = l \\ 0 & , \text{ pro } p \neq q \vee m \neq l \end{cases}, \quad (2.45)$$

můžeme formálně definovat symbol

$$\delta_{p_m q_l} := \delta_{pq} \delta_{ml}, \quad (2.46)$$

který je pomocí zobrazení (2.40) reprezentován jednotkovou maticí

$$\begin{aligned}\delta_{p m q l} &\cong_{\Phi} \mathcal{I}_s^r \\ (\mathcal{I}_s^r) &= \text{diag}(\underbrace{1, 1, 1, \dots}_{N(M+1)}). \end{aligned} \quad (2.47)$$

Snadno tedy nahlédneme, že pro reprezentaci členu (2.44) platí

$$\begin{aligned}\gamma D_{p m q l} &\cong_{\Phi} \gamma \mathcal{D}_s^r \\ (\gamma \mathcal{D}_s^r) &= -\frac{ib}{2} \text{diag}(\underbrace{2\gamma_0^{-1}, \gamma_1^{-1}, \gamma_2^{-1}, \dots, \gamma_M^{-1}, 2\gamma_0^{-1}, \gamma_1^{-1}, \gamma_2^{-1}, \dots, \gamma_M^{-1}, \dots}_{N(M+1)}) \end{aligned} \quad (2.48)$$

Konkrétní příklad matice reprezentující $\gamma D_{p m q l}$ pro případ $N = 2, M = 1$ dává

$$(\gamma \mathcal{D}_s^r)_{\substack{N=2 \\ M=1}} = \frac{b}{2} \text{diag} \left(2, \frac{-i}{\sqrt{\left(\frac{\pi}{bk_0}\right)^2 - 1}}, 2, \frac{-i}{\sqrt{\left(\frac{\pi}{bk_0}\right)^2 - 1}} \right). \quad (2.49)$$

Dále $B_{p m}$ je reprezentováno

$$\begin{aligned}B_{p m} &\cong_{\Phi} \mathcal{B}^r \\ \mathcal{B}^r &= \underbrace{(B_{10}, B_{11}, B_{12}, \dots, B_{1M}, B_{20}, B_{21}, B_{22}, \dots, B_{2M}, \dots)}_{N(M+1)}. \end{aligned} \quad (2.50)$$

Na člen $\exp(i\varphi_p)$ nahlédněme poněkud jinak. Tento člen představuje koeficient před $B_{p m}$, jehož hodnota je stejná pro všechna $m \in \hat{M}_0$. Formálně tedy můžeme definovat

$$\tilde{B}_{p m} := \exp(i\varphi_p) B_{p m}, \quad (2.51)$$

reprezentovat $\tilde{B}_{p m}$

$$\tilde{B}_{p m} \cong_{\Phi} \tilde{\mathcal{B}}^r \quad (2.52)$$

a následně ekvivalentně vyjádřit pomocí¹⁴

$$\tilde{\mathcal{B}}^r \equiv \varphi \mathcal{D}_s^r \mathcal{B}^s, \quad (2.53)$$

¹⁴Zde používáme Einsteinovu sumační konvenci, tedy sčítáme přes dvojice stejných indexů, kde vždy jeden z nich je horní a druhý dolní.

kde

$$(\varphi\mathcal{D}_s^r) = \text{diag}(\underbrace{e^{i\varphi_1}, \dots, e^{i\varphi_1}}_{M+1}, \underbrace{e^{i\varphi_2}, \dots, e^{i\varphi_2}, e^{i\varphi_3}, \dots, e^{i\varphi_3}, \dots}_{N(M+1)}) . \quad (2.54)$$

Levou stranu rovnice (2.35) tedy můžeme ekvivalentně vyjádřit jako

$$\mathcal{B}_r \varphi\mathcal{D}_s^r [\mathcal{K}_t^s + \gamma\mathcal{D}_t^s] . \quad (2.55)$$

Co se týče reprezentace členů na pravé straně rovnice (2.35), lze zvolit dva přístupy. První z nich je využít zobrazení (2.36), respektive jeho restrikcí (zúžení)

$$\begin{aligned} \Phi_0 : \hat{N} \times \{0\} &\longrightarrow \hat{R} \\ (p, 0) &\xrightarrow{\Phi_0} r \\ \Phi_0(p, 0) &= p \end{aligned} \quad (2.56)$$

a přímo provést reprezentaci příslušných tenzorových členů. Druhý přístup, který zde provedeme, využívá již spočítaných reprezentací (2.41), (2.48), (2.54) a jiného pohledu na člen A_p . Ten lze "rozšířit" následující definicí, aniž by změnil fyzikální obsah¹⁵

$$A_{pm} = \begin{cases} A_p & , \text{ pro } m = 0 \\ 0 & , \text{ pro } m \neq 0 . \end{cases} \quad (2.57)$$

Provedeme-li jeho reprezentaci

$$A_{pm} \cong_{\mathbb{F}} \mathcal{A}^r , \quad (2.58)$$

získáme

$$(\mathcal{A}_r) = (\underbrace{A_1, 0, 0, \dots, 0}_{M+1}, \underbrace{A_2, 0, 0, \dots, 0, A_3, 0, 0, \dots, 0, \dots}_{N(M+1)}) . \quad (2.59)$$

A konečně, sestavením výrazu

$$\mathcal{A}_r \varphi\mathcal{D}_s^r [\gamma\mathcal{D}_t^s - \mathcal{K}_t^s] \quad (2.60)$$

¹⁵Toto "rozšíření" definice A_p explicitně vystihuje skutečnost, že excitované vlny ve vlnovodech nejsou evanescentní, narozdíl od vln odražených, které jsou zastoupeny neznámou veličinou B_{pm} , u níž obecně $B_{pm} \neq 0 \quad \forall p \in \hat{N}, \forall m \in \hat{M}_0$.

získáváme reprezentaci pravé strany rovnice (2.35).

Maticová reprezentace rovnice (2.35) tedy zní

$$\mathcal{B}_r \varphi \mathcal{D}_s^r [\mathcal{K}_t^s + \gamma \mathcal{D}_t^s] = \mathcal{A}_r \varphi \mathcal{D}_s^r [\gamma \mathcal{D}_t^s - \mathcal{K}_t^s] . \quad (2.61)$$

Transponujeme-li (2.61), získáme

$$[\mathcal{K}_s^t + \gamma \mathcal{D}_s^t] \varphi \mathcal{D}_r^s \mathcal{B}^r = [\gamma \mathcal{D}_s^t - \mathcal{K}_s^t] \varphi \mathcal{D}_r^s \mathcal{A}^r . \quad (2.62)$$

Tedy úlohu řešit rovnici (2.35) jsme převedli na klasickou úlohu o řešení soustavy lineárních rovnic danou (2.62).

Kapitola 3

Numerický výpočet

3.1 Výsledky

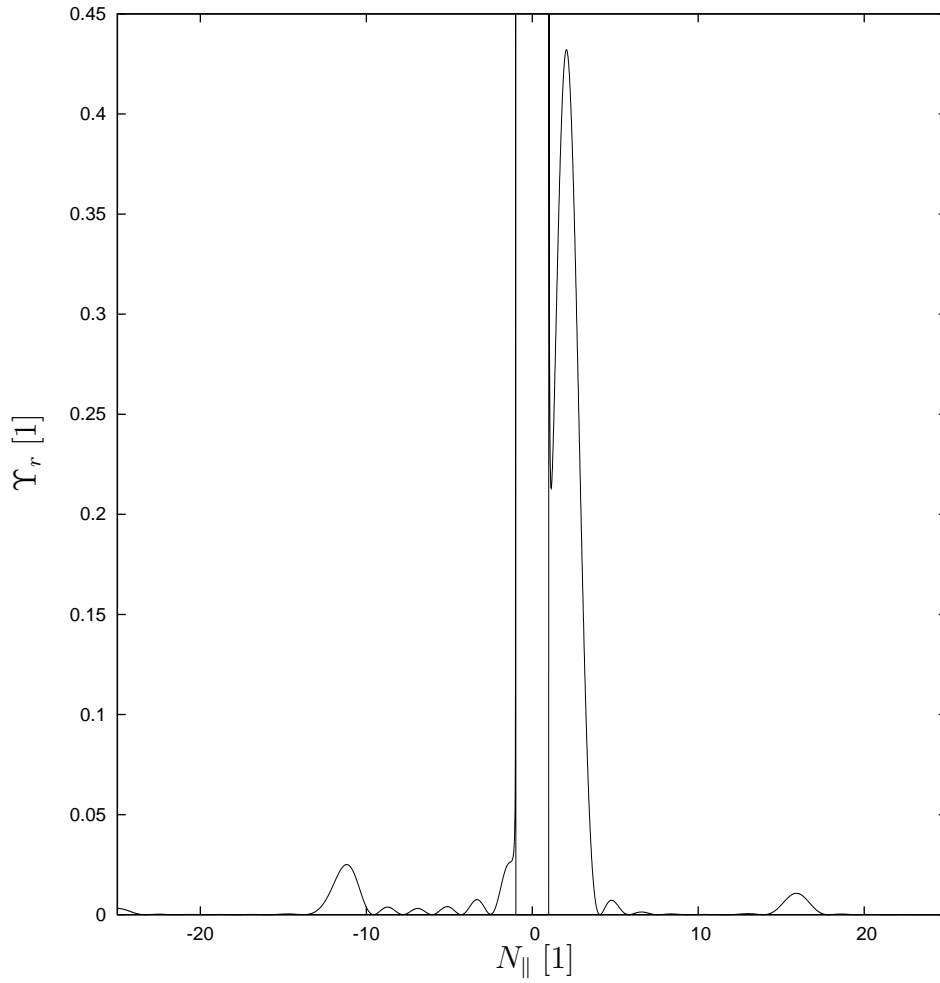
V tomto paragrafu uvádíme některé výsledky našich numerických výpočtů prostorové spektrální hustoty výkonu. Na obrázcích 3.1 až 3.8 jsou vykresleny jednotlivé grafy relativních spektrálních hustot pro příslušné parametry výpočtu. Parametry výpočtu jsou uvedeny v tabulkách 3.2 až 3.9 pod jednotlivými grafy. V dolní části každé z právě uvedených tabulek lze nalézt také několik vypočtených charakteristických veličin příslušejících k danému grafu, konkrétně odrazivost R , směrovost ζ a souřadnice lokálního maxima. Parametry LH grilu tokamaku COMPASS-D, které jsou rovněž zahrnuty do výpočtu, uvádí tabulka 3.1.

Nápadná dvojice svislých čar přítomná v každém z grafů představuje asymptoty procházející body $[-1; 0]$ a $[1; 0]$. Na intervalu mezi těmito asymptotami nabývá relativní spektrální hustota výkonu nulové hodnoty, což zobrazuje fakt, že vlny s paralelním indexem lomu $N_{\parallel} \leq 1$ se od povrchu plazmatu odrážejí.

Většina grafů byla spočtena s hodnotou parametru relativního fázování $\Delta\varphi_p = \pi/3$, při které je dosaženo vysoké směrovosti spolu s nízkou odrazivostí.

počet vlnovodů	$N = 8$
šířka vlnovodu	$b = 1,48cm$
výška vlnovodu	$h = 16,50cm$
tloušťka dělicí desky	$d = 0,20cm$
frekvence zdroje	$f = 1,30GHz$

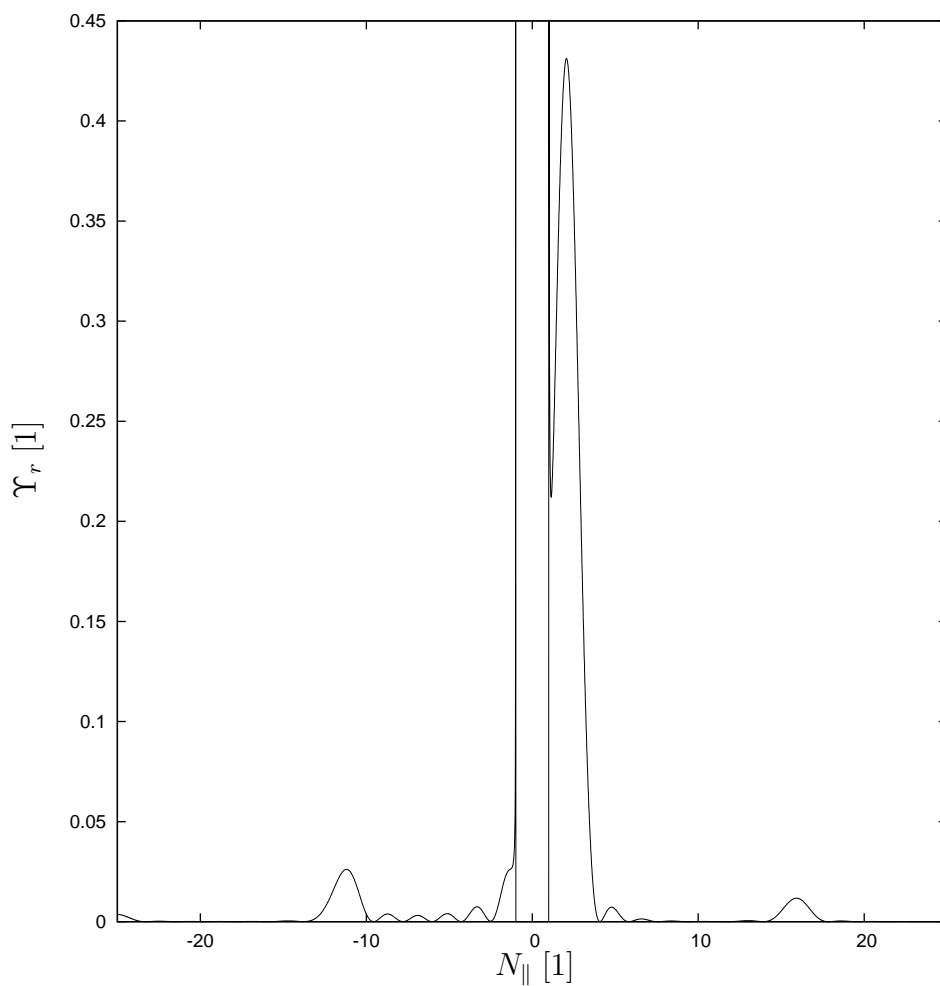
Tabulka 3.1: Parametry LH grilu tokamaku COMPASS-D



Obrázek 3.1: Relativní spektrální hustota (viz Tabulka 3.2)

nejvyšší mod	$M = 8$
gradient plazmatu	$\nu = 2 \times 10^{19} m^{-4}$
povrchová hustota	$n_0 = 1 \times 10^{17} m^{-3}$
fázování	$\Delta\varphi_p = \pi/3, \forall p \in \hat{N} \setminus \{1\}$
relativní amplituda	$A_{p,r} = 1, \forall p \in \hat{N}$
vakuová mezera	$x_p = 1 \times 10^{-3} m$
odrazivost	$R = 0,1351$
směrovost	$\zeta = 0,7701$
lokální maximum	$[N_{ }; \Upsilon_r] = [2,0600 ; 0,4322]$

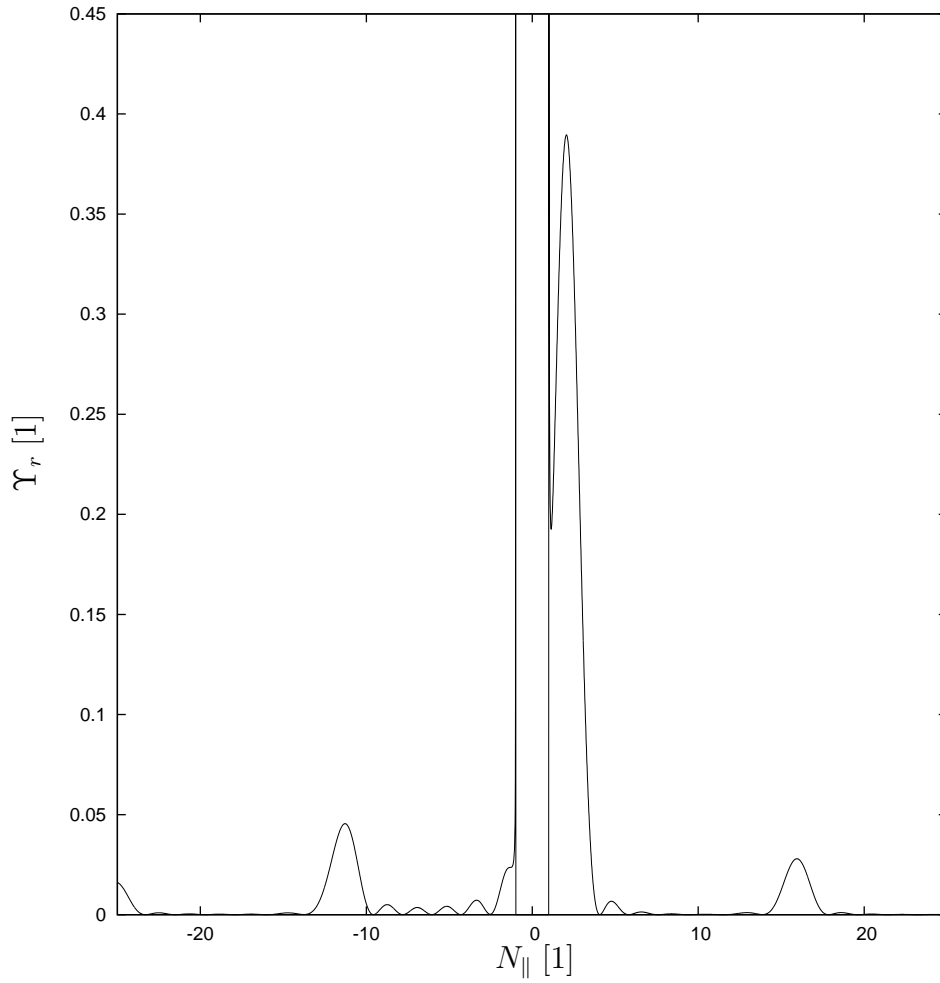
Tabulka 3.2: Parametry a výsledky vážící se k Obrázku 3.1



Obrázek 3.2: Relativní spektrální hustota (viz Tabulka 3.3)

nejvyšší mod	$M = 4$
gradient plazmatu	$\nu = 2 \times 10^{19} m^{-4}$
povrchová hustota	$n_0 = 1 \times 10^{17} m^{-3}$
fázování	$\Delta\varphi_p = \pi/3, \forall p \in \hat{N} \setminus \{1\}$
relativní amplituda	$A_{p,r} = 1, \forall p \in \hat{N}$
vakuová mezera	$x_p = 1 \times 10^{-3} m$
odrazivost	$R = 0,1312$
směrovost	$\zeta = 0,7656$
lokální maximum	$[N_{ }; \Upsilon_r] = [2,0600 ; 0,4312]$

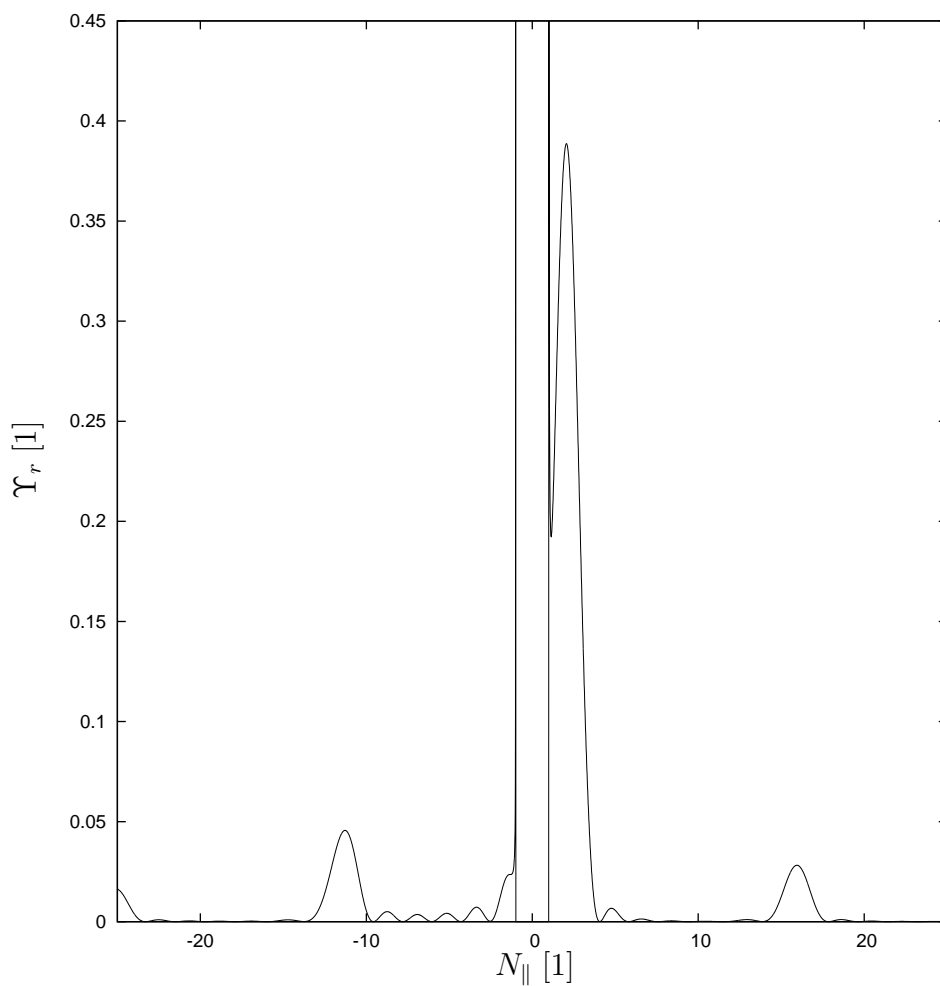
Tabulka 3.3: Parametry a výsledky vážící se k Obrázku 3.2



Obrázek 3.3: Relativní spektrální hustota (viz Tabulka 3.4)

nejvyšší mod	$M = 4$
gradient plazmatu	$\nu = 2 \times 10^{19} m^{-4}$
povrchová hustota	$n_0 = 1 \times 10^{17} m^{-3}$
fázování	$\Delta\varphi_p = \pi/3, \forall p \in \hat{N} \setminus \{1\}$
relativní amplituda	$A_{p,r} = 1, \forall p \in \hat{N}$
vakuová mezera	$x_p = 1 \times 10^{-5} m$
odrazivost	$R = 0,0854$
směrovost	$\zeta = 0,6338$
lokální maximum	$[N_{ }; \Upsilon_r] = [2,0600 ; 0,3896]$

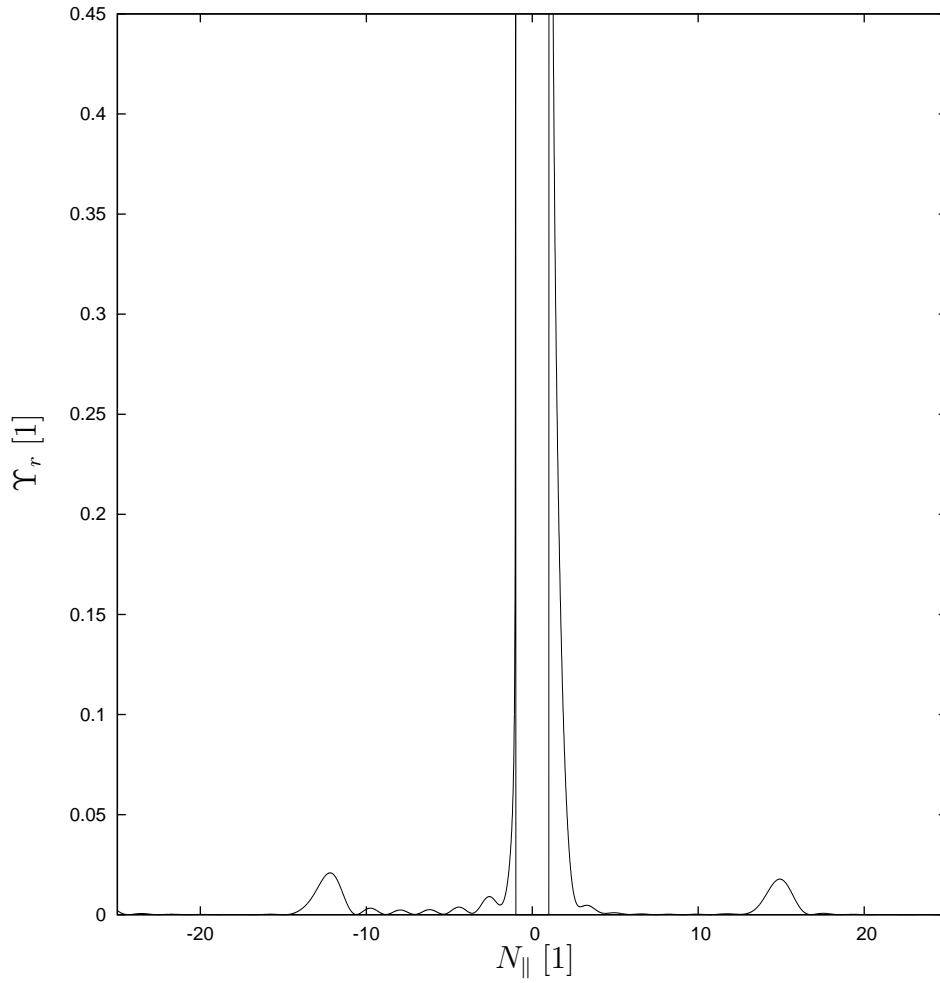
Tabulka 3.4: Parametry a výsledky vážící se k Obrázku 3.3



Obrázek 3.4: Relativní spektrální hustota (viz Tabulka 3.5)

nejvyšší mod	$M = 4$
gradient plazmatu	$\nu = 2 \times 10^{19} m^{-4}$
povrchová hustota	$n_0 = 1 \times 10^{17} m^{-3}$
fázování	$\Delta\varphi_p = \pi/3, \forall p \in \hat{N} \setminus \{1\}$
relativní amplituda	$A_{p,r} = 1, \forall p \in \hat{N}$
vakuová mezera	$x_p = 0 \times 10^0 m$
odrazivost	$R = 0,0852$
směrovost	$\zeta = 0,6321$
lokální maximum	$[N_{ }; \Upsilon_r] = [2,0600 ; 0,3887]$

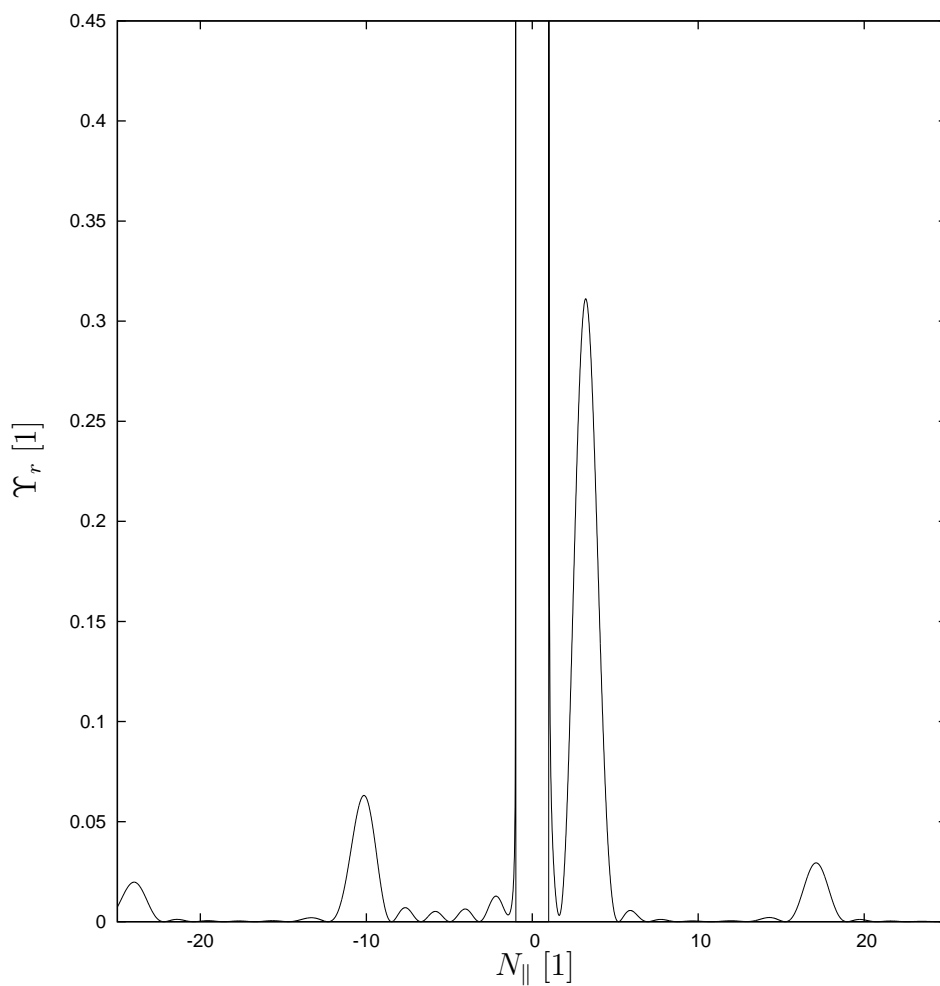
Tabulka 3.5: Parametry a výsledky vážící se k Obrázku 3.4



Obrázek 3.5: Relativní spektrální hustota (viz Tabulka 3.6)

nejvyšší mod	$M = 4$
gradient plazmatu	$\nu = 2 \times 10^{19} m^{-4}$
povrchová hustota	$n_0 = 1 \times 10^{17} m^{-3}$
fázování	$\Delta\varphi_p = \pi/6, \forall p \in \hat{N} \setminus \{1\}$
relativní amplituda	$A_{p,r} = 1, \forall p \in \hat{N}$
vakuová mezera	$x_p = 1 \times 10^{-5} m$
odrazivost	$R = 0,3131$
směrovost	$\varsigma = 0,6473$
lokální maximum	$[N_{ }; \Upsilon_r] = [-12,1800 ; 0,0209]$

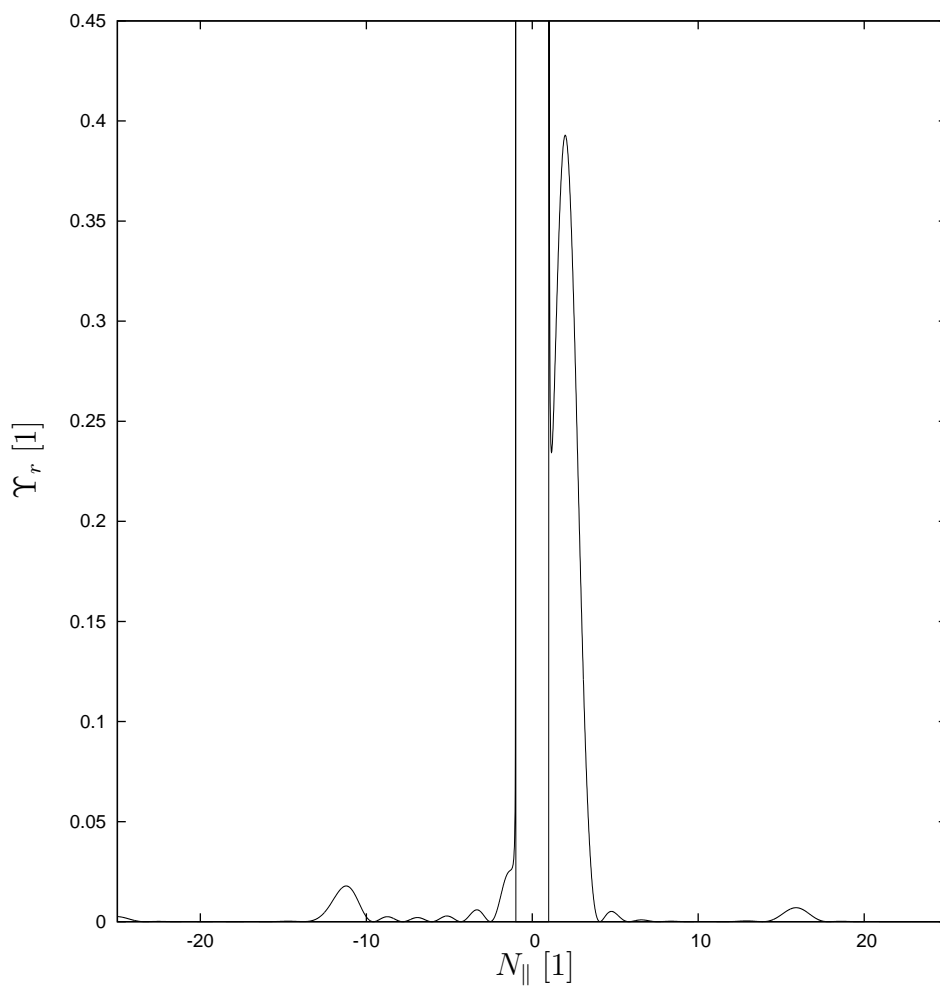
Tabulka 3.6: Parametry a výsledky vážící se k Obrázku 3.5



Obrázek 3.6: Relativní spektrální hustota (viz Tabulka 3.7)

nejvyšší mod	$M = 4$
gradient plazmatu	$\nu = 2 \times 10^{19} m^{-4}$
povrchová hustota	$n_0 = 1 \times 10^{17} m^{-3}$
fázování	$\Delta\varphi_p = \pi/2, \forall p \in \hat{N} \setminus \{1\}$
relativní amplituda	$A_{p,r} = 1, \forall p \in \hat{N}$
vakuová mezera	$x_p = 1 \times 10^{-5} m$
odrazivost	$R = 0,1684$
směrovost	$\zeta = 0,5208$
lokální maximum	$[N_{ }; \Upsilon_r] = [3,2200 ; 0,3112]$

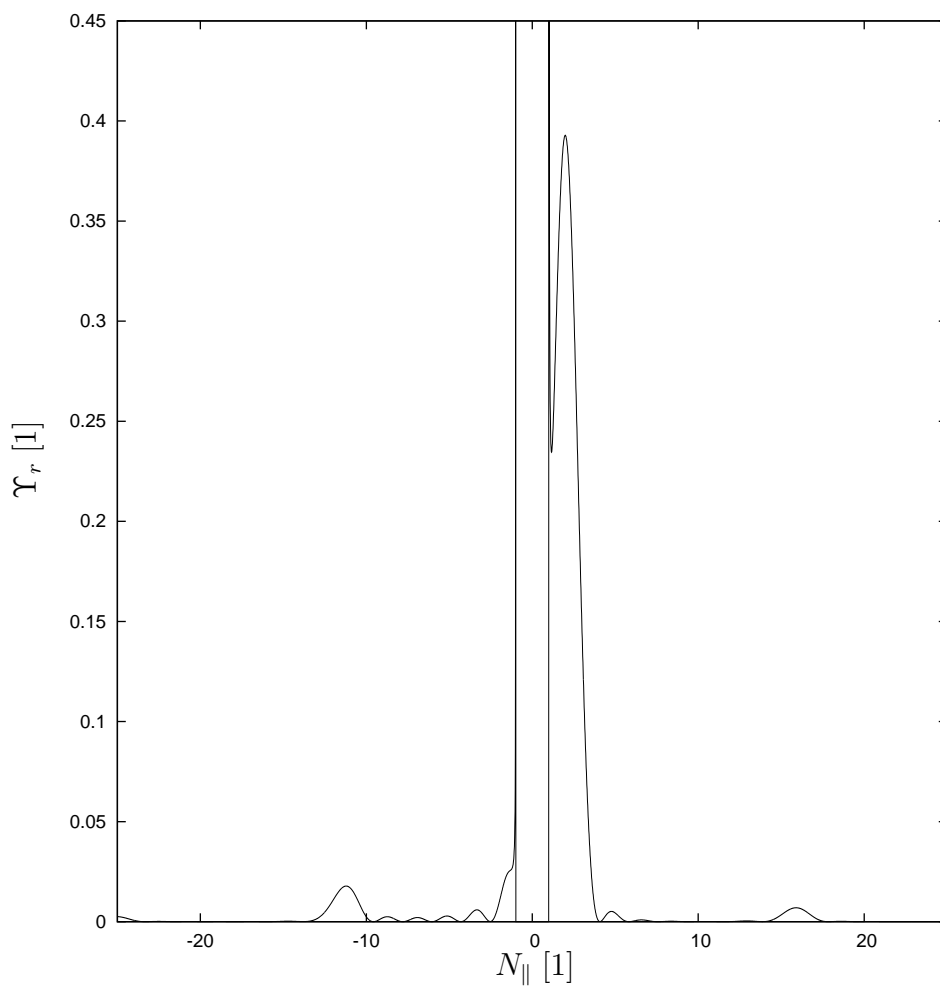
Tabulka 3.7: Parametry a výsledky vážící se k Obrázku 3.6



Obrázek 3.7: Relativní spektrální hustota (viz Tabulka 3.8)

nejvyšší mod	$M = 4$
gradient plazmatu	$\nu = 2 \times 10^{19} m^{-4}$
povrchová hustota	$n_0 = 1 \times 10^{14} m^{-3}$
fázování	$\Delta\varphi_p = \pi/3, \forall p \in \hat{N} \setminus \{1\}$
relativní amplituda	$A_{p,r} = 1, \forall p \in \hat{N}$
vakuová mezera	$x_p = 1 \times 10^{-5} m$
odrazivost	$R = 0,2179$
směrovost	$\zeta = 0,7965$
lokální maximum	$[N_{ }; \Upsilon_r] = [1,9900 ; 0,3929]$

Tabulka 3.8: Parametry a výsledky vážící se k Obrázku 3.7



Obrázek 3.8: Relativní spektrální hustota (viz Tabulka 3.9)

nejvyšší mod	$M = 4$
gradient plazmatu	$\nu = 2 \times 10^{19} m^{-4}$
povrchová hustota	$n_0 = 0 \times 10^0 m^{-3}$
fázování	$\Delta\varphi_p = \pi/3, \forall p \in \hat{N} \setminus \{1\}$
relativní amplituda	$A_{p,r} = 1, \forall p \in \hat{N}$
vakuová mezera	$x_p = 1 \times 10^{-5} m$
odrazivost	$R = 0,2181$
směrovost	$\zeta = 0,7967$
lokální maximum	$[N_{ }; \Upsilon_r] = [1,9900 ; 0,3929]$

Tabulka 3.9: Parametry a výsledky vážící se k Obrázku 3.8

3.2 Výpočetní program

3.2.1 Kód

Výpočetní kód byl realizován v jazyce Fortran verze F90, přičemž některé prvky, jako například funkce s návratovou proměnnou typu dynamicky alokovaného pole, již zasahují do verzí vyšších, tedy F95 či F2003. Jako referenční příručka pro jazyk Fortran 90 byla zvolena kniha [3]. K sestavení programu byl použit kompilátor Intel Fortran 10, který má plnou podporu standardu F95 a akceptuje některé prvky F2003. Program využívá několik "nevlastních" procedur, konkrétně proceduru LSACG na numerické řešení soustav lineárních rovnic a rovněž proceduru QDAG, a jí podobné, k provádění numerických integrací. Tyto zmíněné procedury jsou součástí numerické knihovny IMSL verze 6 od Visual Numerics, viz [4].

3.2.2 Program z pohledu uživatele

V této části uvedeme stručný popis programu a jeho použití. Vycházíme z toho, že nejčastějším uživatelem bude zaměstnanec Ústavu fyziky plazmatu AV ČR mající přístup na unixové servery Sun, např. na `sun1.ipp.cas.cz`. Dále předpokládáme, že uživatel má ve svém domovském adresáři kopii uvažovaného výpočetního programu, který je umístěn v podadresáři `m_grill` (jak byl tento projekt nazván).

Výpis obsahu adresáře `m_grill` za použití příkazu

```
[uzvivatele@Sun1 ~]$ ls m_grill --group-directories-first
```

dává následujících 10 položek

```
input          gnuplot.txt
modules        makefile
objects        power_spectrum
output         save_output_to_results.sh
results
source
```

tedy 6 adresářů a 4 soubory.

Adresář `input` obsahuje soubor vstupních dat `model_parameters.txt`. Jak již název napovídá, tento soubor, konkrétně jeho prvních 12 řádků, obsahuje vstupní parametry pro výpočet. Po řadě to jsou: počet vlnovodů, nejvyšší uvažovaný mod, šířka vlnovodu $[m]$, tloušťka dělicí desky $[m]$, frekvence zdroje $[Hz]$, gradient hustoty plazmatu $[m^{-4}]$, povrchová hustota plazmatu

$[m^{-3}]$, čítec zlomku definujícího fázový posuv v násobcích π , jmenovatel zlomku definujícího fázový posuv v násobcích π , vektor (o délce rovné počtu vlnovodů) určující relativní fázování, vektor amplitud v jednotlivých vlnovodech $[V/m]$, vakuová mezera $[m]$.

Výpis obsahu tohoto souboru příkazem

```
[uzivatel@Sun1 input]$ cat -n model_parameters.txt | head -22
```

dává následující (zde pro parametry odpovídající tabulce 3.9)

```

1  8
2  4
3  1.48D-2
4  0.2D-2
5  1.3D9
6  2.0D19
7  0.0D0
8  1.0D0
9  3.0D0
10 0.0D0 1.0D0 2.0D0 3.0D0 4.0D0 5.0D0 6.0D0 7.0D0
11 1.0D0 1.0D0 1.0D0 1.0D0 1.0D0 1.0D0 1.0D0 1.0D0
12 1.0D-5
13
14 =====
15 Line #1 : number_of_waveguides, dimensionless
16 Line #2 : highest_mode, dimensionless
17 Line #3 : waveguide_width, m
18 Line #4 : septum, m
19 Line #5 : source_frequency, s(-1)
20 Line #6 : plasma_density_gradient, m(-4)
21 Line #7 : edge_plasma_density, m(-3)
22 Line #8 : fraction_of_pi (numerator of the phase
    shift), dimensionless

```

Jak je patrné z použitého příkazu, ve výše uvedeném výpisu je zobrazeno 22 řádků z uvažovaného souboru, přičemž každý vypsáný řádek je očíslován. Další nápadný detail ve výpisu tohoto souboru je exponenciální zápis reálných čísel v tzv. *double precision* typu, kde např. namísto $1.0E-5$, což by odpovídalo hodnotě 1×10^{-5} reprezentované se čtyř-byteovou přesností, je psáno $1.0D-5$, což odpovídá stejné hodnotě, ovšem reprezentované s osmi-byteovou přesností. U všech veličin jsou vyžadovány jejich hodnoty v jim příslušných jednotkách systému SI.

Adresáře `modules` a `objects` obsahují výstupy z jednotlivých fází kompilace programu. Do adresáře `output` se zapisují výstupní soubory s výsledky výpočtů, přičemž při každém běhu programu se tyto soubory *přepisují*. Nejdůležitějším výstupním souborem je `r_dens_output_file.txt`, který obsahuje hodnoty relativní prostorové spektrální hustoty výkonu. Pro ukládání souborů s výsledky je určen adresář `results`, přičemž samotné uložení/zkopírování výsledků do tohoto adresáře je ponecháno na uživateli.¹ Adresář `source` obsahuje soubory se zdrojovým kódem.

Nyní přistupme k výčtu souborů. Oproti předchozímu výčtu jednotlivých adresářů v abecedním pořadí, zvolme výčet souborů v pořadí opačném. Začneme tedy souborem `save_output_to_results.sh`. Tento soubor je bash skript sloužící k snadnému ukládání výsledků z adresáře `output` do adresáře `results`. Tedy například příkazem

```
[uzivatel@Sun1 m_grill]$ sh save_output_to_results.sh 01
```

jsou uloženy všechny výstupní soubory z adresáře `output` a rovněž tak soubor se vstupními parametry z adresáře `input` do adresáře `results`, přičemž k jejich jménům v tomto konkrétním příkladě přibude `_01`.

Soubor `power_spectrum` představuje vlastní spustitelný program. Je tedy hlavním výstupem kompilace. Pro jeho běh, případně pro jeho skompilování, je třeba mít přístup ke knihovnám IMSL. Toho lze na serverech Sun dosáhnout nahráním příslušných modulů, tedy

```
[uzivatel@Sun1 m_grill]$ module load ifort
[uzivatel@Sun1 m_grill]$ module load imsl
```

Pro samotnou kompilaci s výhodou slouží soubor `makefile`, jejíž spuštění příkazem

```
[uzivatel@Sun1 m_grill]$ make
```

vede k překompilování změněných částí. Konečně, soubor `gnuplot.txt` v sobě obsahuje stručný návod, jak zobrazovat výsledky výpočtů pomocí programu `gnuplot`.

¹Uživatel může využít bash skript `save_output_to_results.sh` ke snazšímu ukládání výsledků. O použití tohoto skriptu se zmíníme později.

Literatura

- [1] M. Brambilla. Slow-wave launching at lower hybrid frequency using a phased waveguide array. *Nuclear Fusion*, 16(1):47–54, 1976.
- [2] K. G. Budden. *Radio Waves in the Inosphere*. Cambridge, 1961.
- [3] L. P. Meissner. *Fortran 90*. PWS Pub. Co., 1995.
- [4] Visual Numerics. *IMSL Fortran Numerical Library User's Guide, MATH/LIBRARY*, version 6.0 edition, 2006.
- [5] M. Záruba. *Vyzařovací struktury pro dolně hybridní vlny - prostorové spektrum LH grilu pro tokamak Compass-D*. Bakalářská práce, ČVUT v Praze, FJFI, 2007.

Příloha

Obsah příloženého CD

K této práci je přiloženo CD, na kterém jsou uloženy zdrojové kódy, respektive celá struktura adresáře `m_grill` tak, jak je popsána v kapitole 3, v části 3.2.2.

Prohlášení

Prohlašuji, že jsem svůj výzkumný úkol vypracoval samostatně a použil jsem pouze podklady (literaturu, projekty, SW atd.) uvedené v příloženém seznamu.

Nemám závažný důvod proti užití tohoto školního díla ve smyslu § 60 Zákona č.121/2000 Sb. , o právu autorském, o právech souvisejících s právem autorským a o změně některých zákonů (autorský zákon).

V Praze dne _____

podpis