

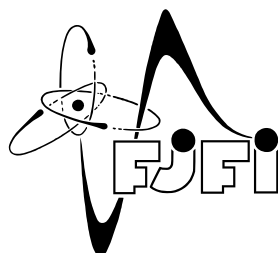
ČESKÉ VYSOKÉ UČENÍ TECHNICKÉ V PRAZE  
FAKULTA JADERNÁ A FYZIKÁLNĚ INŽENÝRSKÁ

# BAKALÁŘSKÁ PRÁCE

2007

Michal Záruba

ČESKÉ VYSOKÉ UČENÍ TECHNICKÉ V PRAZE  
FAKULTA JADERNÁ A FYZIKÁLNĚ INŽENÝRSKÁ



# BAKALÁŘSKÁ PRÁCE

VYZAŘOVACÍ STRUKTURY PRO DOLNĚ HYBRIDNÍ  
VLNY - PROSTOROVÉ SPEKTRUM LH GRILU  
PRO TOKAMAK COMPASS-D

Michal Záruba

Vedoucí práce: Ing. Josef Preinhaelter, DrSc.

Praha, 2007

## Poděkování

Tímto děkuji především Dr. Josefu Preinhaelterovi, vedoucímu mé bakalářské práce, za jeho obětavý přístup při nesčetných konzultacích a diskuzích, a rovněž za poskytnutí hodnotných studijních materiálů.

*Název práce:*

**Vyzařovací struktury pro dolně hybridní vlny - prostorové spektrum LH grilu pro tokamak Compass-D**

*Autor:* Michal Záruba

*Obor:* Matematické inženýrství

*Druh práce:* Bakalářská práce

*Vedoucí práce:* Ing. Josef Preinhaelter, DrSc. , Ústav fyziky plazmatu, AV ČR

*Abstrakt:* Tato práce se věnuje popisu LH grilu. Je zde studován jeho nejjednodušší model. Vlnovody jsou považovány za nekonečně vysoké, mající stejné příčné rozměry. Při výpočtu zavádíme rovněž nejjednodušší model impedance povrchové vrstvy plazmatu. Pomocí ní následně stanovujeme prostorové spektrum výkonu grilu. Rovněž zde uvádíme výňatky z teorie šíření EM vln ve studeném nehomogenním bezesrážkovém plazmatu, potřebné pro náš výpočtový model. V této práci také uvádíme příklad aplikace obdobného modelu pro výpočet prostorové spektra výkonu grilu pro tokamak Compass-D.

*Klíčová slova:* LH gril, plazma, metoda WKB, prostorové spektrum výkonu.

***Title:* Launching structures for lower hybrid waves - space spectrum of LH grill for Compass-D tokamak**

*Author:* Michal Záruba

*Abstract:* This work is dealing with a description of the LH grill. The simplest model of it is studied. Waveguides are considered of infinite height, having the same width. We introduce the simplest model of the plasma edge impedance. By means of it, we consequently obtain a power spectrum of the grill. We also put some selected topics from the theory of EM waves in a cold collisionless inhomogeneous plasma in this work, that were needed for our model. In this work we present an application of a similar computational model for the power spectrum of an LH grill of the Compass-D tokamak as well.

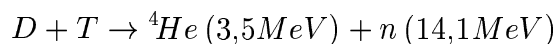
*Key words:* LH grill, plasma, WKB method, power spectrum.

# Obsah

Úvod	6
<b>1 Výpočet prostorového spektra grilu</b>	<b>9</b>
1.1 Pole ve vlnovodech	9
1.2 Pole ve vakuové mezeře	17
1.3 Pole ve studeném plazmatu	19
1.3.1 Tenzor permitivity	19
1.3.2 Disperzní vztah	22
1.3.3 Dolně hybridní rezonanční frekvence	25
1.3.4 Dosažitelnost	27
1.3.5 Povrchová impedance plazmatu	31
1.4 Podmínky na rozhraní	37
1.5 Prostorové spektrum	41
1.5.1 Spektrum LH grilu pro tokamak Compass-D	43
<b>2 Metoda WKB</b>	<b>45</b>
2.1 Motivace	45
2.2 Princip zobecněné fáze	46
2.3 Podmínky platnosti	48

# Úvod

Jedním z potenciálních zdrojů energie, který by mohl pomoci vyřešit energetickou otázku v budoucích desetiletích, je řízená termojaderná fúze. Tento způsob výroby energie by oproti jadernému štěpení (principu, na kterém jsou založeny současné jaderné reaktory používané k výrobě energie) představoval neporovnatelně menší ekologickou zátěž, neboť by v principu neprodukoval žádný dlouhodobě radioaktivní odpad. Fúze (slučování) jader deuteria -  $D$  (jádra izotopu vodíku  ${}^2H$ ) a tritia -  $T$  (jádra izotopu vodíku  ${}^3H$ )



tj. reakce, které se při experimentech s řízenou termojadernou fúzí snažíme dosáhnout, má totiž jediný vedlejší produkt a to stabilní izotop helia -  ${}^4He$ . Zmíněná fúzní reakce jader deuteria a tritia má také větší výtěžek energie (přepočtený na hmotnost reaktantů), než-li výtěžek při štěpení uranu.

Oproti štěpným reaktorům mají navrhovaná fúzní zařízení tzv. vrozenou bezpečnost, tj. nemůže v nich dojít k neřízené reakci, už jen proto, že v uvažovaných zařízeních se počítá s přítomností paliva o hmotnosti řádově jednotek gramů. Další velkou výhodou fúze je dostupnost (velký přirozený výskyt) surovin potřebných pro reakci, tj. deuteria a také lithia (nutného pro výrobu tritia, které se v přírodě téměř nevyskytuje, neboť je to nestabilní izotop s poločasem rozpadu 12,32 let).

Termojaderná fúze, jak by se mohlo zdát, není ničím neobvyklým (ve vesmírném měřítku). Je zdrojem energie hvězd, např. nám tak dobře známého Slunce. Uvnitř Slunce, v jeho tzv. jádru, probíhají sledy reakcí, při nichž dochází ke slučování protonů (jader vodíku) s následným vznikem jader helia a uvolněním velkého množství energie. Jádro Slunce má teplotu přibližně  $1,36 \times 10^7 K$  a měrnou hmotnost přibližně  $1,5 \times 10^5 kg/m^3$ . Tato značná měrná hmotnost je možná jen díky jeho vlastnímu gravitačnímu působení, tedy obrovskému tlaku, který samotná gravitace Slunce vyvozuje. V důsledku toho je uvnitř jeho jádra enormní hustota energie a tedy dobré podmínky k tomu, aby probíhaly fúzní reakce.

Abychom byli schopni dosáhnout podmínek pro uskutečnění řízené fúzní reakce zde na Zemi, kde v principu nemůžeme dosáhnout takto velkých

měrných hmotností (a tedy i hustot částic), musíme dosáhnout mnohem vyšších teplot, než jaké panují v plazmatu uvnitř jádra Slunce. Ukazuje se, že je třeba dosáhnout teploty přibližně  $2 \times 10^8 K$ .

Jedním ze způsobů, jak dosáhnout podmínek pro uskutečnění řízené reakce v pozemských podmínkách, je využít zařízení jménem *tokamak*. Tokamak je zkratka pocházející z ruštiny - "toroidalnaja kamera i magnyt-nije katusky", tedy toroidální komora s magnetickými cívkami. Tato zkratka v podstatě vystihuje, oč se jedná. Základem je tedy toroidální (nebo též prstencová) vakuová komora, která prochází soustavou elektromagnetických cívek, které budí magnetické pole jehož siločáry jsou kolmé na osový řez komory - tzv. toroidální mag. pole. Nedílnou součástí tokamaku jsou také cívky, které budí mag. pole kolmé na rovinu toroidální komory a pomocí změny jejich mag. indukčního toku indukují elektrické pole v rovině komory. Vpustíme-li do této komory plyn (obvykle vodík nebo deuterium), vybudíme-li toroidální mag. pole, zionizujeme-li přítomný plyn (tj. uvedeme jej do plazmatického stavu, např. pomocí VF výboje) a následně vybudíme-li zmíněné elektrické pole v rovině prstence, pak toto el. pole začne urychlovat nabitě částice (dochází k tzv. indukčnímu ohřevu plazmatu) a vzniklý elektrický proud vybudí tzv. poloidální mag. pole (tedy prstenec plazmatu zde představuje analogii k sekundárnímu vinutí pomyslného transformátoru). Díky složení toroidálního a poloidálního mag. pole vznikne uvnitř komory mag. pole ve tvaru šroubovic navíjejících se na pomyslné prstence. Nabitě částice se díky Lorentzově síle mohou volně pohybovat (volně, odmyslíme-li si přítomnost indukovaného elektrického pole) jen ve směru těchto vzniklých mag. siločar. V důsledku toho získáme uzavřený systém, a zamezíme plazmatu kontakt se stěnami komory, resp. minimalizujeme únik částic vně tuto pomyslnou magnetickou nádobu, tvořenou siločarami popsáného mag. pole. To vše je ovšem možné pouze po relativně krátkou dobu, neboť abychom zajistili potřebnou změnu indukčního toku, potom nutně musíme s příslušnými cívkami pracovat v pulzním režimu. Tokamak je tedy (pulzní) zařízení, které umožňuje nejen udržet plazma, ale zároveň jej výše popsáním indukčním ohřevem zahřát na teplotu přibližně  $1,5 \times 10^6 K$ .

Jak jsme již uvedli výše, tato teplota by sama o sobě nestačila, vezmeme-li v úvahu, že hustota částic (která je limitovaná tlakem, kterého jsme pomocí magnetického udržení schopni dosáhnout) se v tokamacích pohybuje v rozmezí  $(10^{18} - 10^{21}) m^{-3}$ . Jednou z možností, jak ohřát plazma v tokamaku na vyšší teploty, je tzv. radiofrekvenční ohřev, tj. ohřev pomocí elektromagnetických vln o frekvencích v rozmezí přibližně  $(10^8 - 10^{11}) Hz$ .

Další důležitou aplikací elektromagnetických vln na těchto frekvencích je neindukční generace toroidálního proudu, pomocí níž jsme např. schopni zachovat toroidální proud (vzniklý indukci) i po poklesu indukovaného el.

pole a prodloužit tak dobu, po kterou je možné plazma s požadovanými parametry udržet. Nezastupitelnou roli právě v této aplikaci hrají tzv. dolně hybridní vlny, pomocí nichž je možné, a v praxi hodně využívané, upravovat profil toroidálního el. proudu příčným průřezem tokamaku.

Tato práce se věnuje právě dolně hybridním vlnám, přičemž je kladen důraz na fyzikální popis zařízení - tzv. LH<sup>1</sup> grilu (mnohočetného vlnovodu), který umožňuje takové vlny vyzařovat (samotnému grilu ovšem předchází výkonný zdroj EM vlnění, např. klystron, obvykle pracující na frekvenci v oblasti 10<sup>9</sup> Hz). Součástí této práce je rovněž krátký úvod do teorie šíření EM vln v plazmatu, přičemž je zde uvažován jeho nejjednodušší model, tedy tzv. studené bezsrážkové plazma. Mechanismy přenosu energie vln do plazmatu se zde nezabýváme.

V první části první kapitoly ukazujeme, jaké EM pole je možné (v závislosti na parametrech vlnovodů) grilem vyzařovat. Ve druhé části první kapitoly se věnujeme (modelové<sup>2</sup>) vakuové mezeře mezi ústím grilu a samotným plazmatem. V dalších částech uvádíme výňatky z teorie šíření EM vln v plazmatu, potřebné k doplnění celkového obrazu o dolně hybridních vlnách a hlavně k výpočtu povrchové impedance plazmatu. Následně sešíváme řešení Maxwellových rovnic na rozhraních jednotlivých prostředí a stanovujeme výkonové spektrum grilu. Jako příklad aplikace zde uvedeného výpočtového modelu (resp. modelu analogického) uvádíme prostorové spektrum výkonu grilu pro tokamak Compass-D.

Druhá kapitola se věnuje krátkému pojednání o WKB aproximaci, metodě, kterou zde používáme k přibližnému řešení Maxwellových rovnic v nehomogenním plazmatu.

---

<sup>1</sup>Lower Hybrid (dolně hybridní)

<sup>2</sup>Potřebné pro náš výpočtový model.



# Kapitola 1

## Výpočet prostorového spektra grilu

EM vlny dopadající z vakua na povrch plazmatu, s frekvencí v LH oblasti, polarizované tak, aby v plazmatu budily tzv. pomalou<sup>1</sup> vlnu, nemohou do plazmatu pronikat, neboť se odráží v plazmové rezonanci. Místo odrazu je přitom prakticky na okraji plazmatu. Do plazmatu však jednoduše pronikají tzv. zpomalené vlny, které mají vlnovou délku ve směru vnějšího magnetického pole podstatně kratší, než vakuovou vlnovou délku. Tyto vlny je možné vybudit pouze pomocí nějaké prostorové struktury. V dalším popíšeme nejjednodušší model takovéto vlnovodné struktury a to v původním Brambillově podání. Tato struktura se v praxi velmi osvědčila a používá se pro průnik LH vln do plazmatu dodnes.

### 1.1 Pole ve vlnovodech

Náš gril se skládá z  $N$  nekonečně vysokých vlnovodů. Každý z vlnovodů je tvořen dvojicí rovnoběžných desek o tloušťce  $d$ , vzdálených od sebe o  $b$ . Obrázek 1.1 ukazuje dva z vlnovodů tohoto uspořádání. Tedy  $p$ -tý vlnovod je tvořen dutinou mezi polorovinami

$$\{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid x < 0, z = pd + (p - 1)b\} \quad (1.1)$$

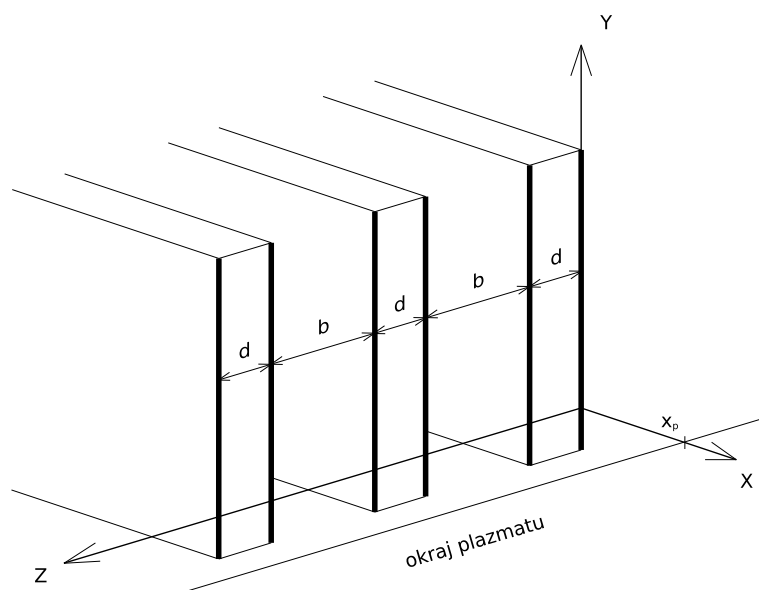
$$\{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid x < 0, z = p(d + b)\} \quad (1.2)$$

Desky vlnovodů považujeme za ideální vodiče, tj. jejich vodivost  $\sigma \rightarrow +\infty$ .

Označíme-li symbolem  $\vec{n}$  jednotkový normálový vektor ke stěně vlnovodu, potom z podmínky spojitosti tečných složek na rozhraní vyplývá okrajová

---

<sup>1</sup>Též dolně hybridní.



Obrázek 1.1: Schéma grilu

podmínka pro stěny vlnovodu

$$\vec{n} \times \vec{E} = \vec{0} \quad (1.3)$$

a v případě časově závislé magnetické indukce, což je náš případ, také

$$\vec{n} \cdot \vec{B} = 0 \quad (1.4)$$

Odvození lze nalézt v [15, str. 465].

Jelikož se v našem uspořádání nenachází volné náboje, tedy  $\rho \equiv 0$ ,  $\vec{j} \equiv \vec{0}$ , řešíme homogenní Maxwellovy rovnice

$$\nabla \times \vec{H} - \varepsilon_0 \frac{\partial \vec{E}}{\partial t} = \vec{0} \quad (1.5)$$

$$\nabla \times \vec{E} + \mu_0 \frac{\partial \vec{H}}{\partial t} = \vec{0} \quad (1.6)$$

$$\nabla \cdot \vec{E} = 0 \quad (1.7)$$

$$\nabla \cdot \vec{B} = 0 \quad (1.8)$$

kde  $\vec{B} = \mu_0 \vec{H}$ ,  $\varepsilon_0$  je permitivita vakua a  $\mu_0$  jeho permeabilita.

Zkoumejme harmonické vlny šířící se podél osy  $x$ . Zavedme konvenci  $\exp(-i\omega t)$  pro časovou závislost polí. Tedy rovinná vlna s kladným vlnovým

číslem se bude šířit v kladném směru souřadnicové osy s úhlovou frekvencí  $\omega$ . Předpokládejme, že dopadající vlny v jednotlivých vlnovodech nezávisí na  $y$ , takže hledaná pole lze psát ve tvaru

$$\vec{E} = \vec{E}(x, z) \exp(-i\omega t) \quad (1.9)$$

$$\vec{H} = \vec{H}(x, z) \exp(-i\omega t) \quad (1.10)$$

Označme složky pole  $\vec{E} = (E_x, E_y, E_z)$  a  $\vec{H} = (H_x, H_y, H_z)$ . Položme  $E_y \equiv 0$ , tj. předpokládejme excitaci pouze TM-modu<sup>2</sup>.

Nyní odvodíme vlnovou rovnici pro pole  $\vec{E}$ . Použijme na 1.6 operátor  $\nabla \times$  a dosaďme do takto získané rovnice za  $\nabla \times \vec{H}$  výraz z 1.5. Využijme, že platí identita

$$\nabla \times \nabla \times \vec{E} = \nabla (\nabla \cdot \vec{E}) - \Delta \vec{E} \quad (1.11)$$

a využijme také rovnice 1.7. Konečně po úpravě dostáváme

$$\Delta \vec{E} - \varepsilon_0 \mu_0 \frac{\partial^2 \vec{E}}{\partial t^2} = \vec{0} \quad (1.12)$$

Naopak, jestliže bychom vyšli z rovnice 1.5, obdobným postupem bychom získali vlnovou rovnici pro  $\vec{H}$

$$\Delta \vec{H} - \varepsilon_0 \mu_0 \frac{\partial^2 \vec{H}}{\partial t^2} = \vec{0} \quad (1.13)$$

Při řešení rovnice 1.12 věnujme nejprve pozornost složce  $E_x(x, z)$ . Dále využijme tvaru předpokládané časové závislosti pole a definičních vztahů

$$\varepsilon_0 \mu_0 = \frac{1}{c^2} \quad (1.14)$$

$$k_0 = \frac{\omega}{c} \quad (1.15)$$

kde  $c$  značí rychlost světla ve vakuu a  $k_0$  vlnové číslo vakua. Řešme tedy nejprve rovnici

$$\Delta E_x + k_0^2 E_x = 0 \quad (1.16)$$

s okrajovými podmínkami

$$E_x(x, z_p) \equiv 0 \quad (1.17)$$

$$E_x(x, z_p + b) \equiv 0 \quad (1.18)$$

které plynou z 1.1, 1.2, 1.3, přičemž  $z_p$  definujeme jako

$$z_p = pd + (p - 1)b \quad (1.19)$$

---

<sup>2</sup>Toto značení bude vysvětleno dále.

kde  $p \in \hat{N}$  je index příslušející  $p$ -tému vlnovodu. Použijme metodu separace proměnných, tj. řešení rovnice 1.16 předpokládejme ve tvaru

$$E_x(x, z) = f(x)g(z) \quad (1.20)$$

Dosazením do 1.16 po úpravě získáme

$$\frac{f''(x)}{f(x)} + \frac{g''(z)}{g(z)} + k_0^2 = 0 \quad (1.21)$$

Aby tato rovnice šla splnit, musí pro první a druhý člen její levé strany zároveň platit

$$\frac{f''(x)}{f(x)} + C_1^2 = 0 \quad (1.22)$$

$$\frac{g''(z)}{g(z)} + C_2^2 = 0 \quad (1.23)$$

kde  $C_1, C_2$  jsou konstanty splňující vztah

$$C_1^2 + C_2^2 = k_0^2 \quad (1.24)$$

Označme  $C_k^R = \Re C_k$  reálnou a  $C_k^I = \Im C_k$  imaginární část  $C_k$ , kde  $k \in \hat{2}$ . Skutečnost, že  $k_0 > 0$  implikuje

$$(C_1^2)^I + (C_2^2)^I = 0$$

což je ekvivalentní s

$$C_1^R C_1^I = -C_2^R C_2^I \quad (1.25)$$

Obecné řešení rovnic 1.22, 1.23 (pro  $p$ -tý vlnovod) lze psát ve tvaru

$$f_p(x) = M_p \exp(iC_1 x) + N_p \exp(-iC_1 x) \quad (1.26)$$

$$g_p(z) = O_p \exp(iC_2 z) + P_p \exp(-iC_2 z) \quad (1.27)$$

kde  $M_p, N_p, O_p, P_p \in \mathbb{C}$ . Funkce  $g_p$  musí splňovat  $g_p(z_p) = 0$ , tedy konstanty  $O_p, P_p$  jsou vázány podmínkou

$$O_p \exp(iC_2 z_p) + P_p \exp(-iC_2 z_p) = 0 \quad (1.28)$$

Zapišme (bez újmy na obecnosti) tyto konstanty ve tvaru s vhodně zvoleným vyjádřením jejich fází, tedy

$$\begin{aligned} O_p &= |O_p| \exp [i (\alpha_p - C_2^R z_p)] \\ P_p &= |P_p| \exp [i (\beta_p + C_2^R z_p)] \end{aligned} \quad (1.29)$$

kde  $\alpha_p, \beta_p \in \mathbb{R}$ . Podmínka 1.28 při tvarech konstant 1.29 přechází na

$$|P_p| = |O_p| \exp(-2C_2^I z_p)$$

současně s  $\beta_p = \alpha_p + \pi$ . Po úpravě tedy získáváme tvar funkce  $g_p$

$$g_p(z) = 2i|O_p| \exp(i\alpha_p - C_2^I z_p) \left( \frac{\exp[iC_2(z - z_p)] - \exp[-iC_2(z - z_p)]}{2i} \right)$$

což lze zapsat jako

$$g_p(z) = O_p' \sin[C_2(z - z_p)] \quad (1.30)$$

kde

$$O_p' = 2i|O_p| \exp(i\alpha_p - C_2^I z_p)$$

Dále funkce  $g_p$  musí splňovat  $g_p(z_p + b) = 0$ , tedy

$$O_p' \sin(C_2 b) = 0$$

což je ekvivalentní s podmínkou

$$\sin(C_2^R b) \cosh(C_2^I b) + i \cos(C_2^R b) \sinh(C_2^I b) = 0 \quad (1.31)$$

z čehož plyne, že musí platit  $C_2^R = \frac{m\pi}{b}$  a současně  $C_2^I = 0$ . Zde nám podmínka 1.31 říká, že obecně  $m \in \mathbb{Z}$ , ovšem nám stačí uvažovat  $m \in \mathbb{Z}_0^+$ , tj. celé nezáporné, neboť jak kladnou, tak zápornou větev odmocniny z  $C_2^2$  již zahrnuje 1.27. Tedy bez újmy na obecnosti stačí uvažovat pouze  $C_2 \geq 0$ . Nyní můžeme z 1.24 vypočítat

$$C_1 = \begin{cases} \sqrt{k_0^2 - \left(\frac{m\pi}{b}\right)^2} & , \text{ pro } k_0 \geq \frac{m\pi}{b} \\ i \sqrt{\left(\frac{m\pi}{b}\right)^2 - k_0^2} & , \text{ pro } k_0 < \frac{m\pi}{b} \end{cases} \quad (1.32)$$

což je samozřejmě v souladu s podmínkou 1.25. Tedy  $C_1$  je buď reálné, nebo ryze imaginární - odpovídající evanescentním modům. Dále poznamenejme, že ze stejných důvodů, jako u  $C_2$ , vybíráme pro 1.32 kladný kořen.

Shrneme-li výsledky pro  $E_x(x, z)$ , vidíme, že její  $m$ -tý mod v  $p$ -tém vlnovodu lze zapsat

$$E_{x,p,m}(x, z) = [M_{p,m} \exp(iC_{1,m}x) + N_{p,m} \exp(-iC_{1,m}x)] \cdot O_{p,m}' \sin\left[\frac{m\pi}{b}(z - z_p)\right] \quad (1.33)$$

kde  $C_{1,m}$  značí hodnotu 1.32 pro pevně zvolené  $m$ .

Analogicky k předchozímu řešení vlnové rovnice pro  $E_x(x, z)$ , lze  $m$ -tý mod složky  $E_z(x, z)$  v  $p$ -tém vlnovodu zapsat jako

$$E_{z,p,m}(x, z) = [Q_{p,m} \exp(iD_{1,m}x) + R_{p,m} \exp(-iD_{1,m}x)] \cdot [S_{p,m} \exp(iD_{2,m}z) + T_{p,m} \exp(-iD_{2,m}z)] \quad (1.34)$$

kde pro konstanty  $D_{1,m}$ ,  $D_{2,m}$  platí analogické vztahy k 1.24 a 1.25. Přestože okrajová podmínka 1.3 tvar  $E_z(x, z)$  nijak neomezuje, neboť je to normálová složka, nejsou konstanty  $Q_{p,m}$ ,  $R_{p,m}$ ,  $S_{p,m}$ ,  $T_{p,m}$  libovolné. Jejich vyjádření pomocí konstant vyskytujících se ve výrazu 1.33 plynou z rovnice 1.7, kterou  $E_{x,p,m}$  a  $E_{z,p,m}$  jakožto jediné nenulové složky  $\vec{E}_{p,m}$  musí splňovat. Dosazením 1.33 a 1.34 do 1.7 získáme

$$0 = iC_{1,m} [M_{p,m} \exp(iC_{1,m}x) - N_{p,m} \exp(-iC_{1,m}x)] O'_{p,m} \sin \left[ \frac{m\pi}{b}(z - z_p) \right] + [Q_{p,m} \exp(iD_{1,m}x) + R_{p,m} \exp(-iD_{1,m}x)] iD_{2,m} \cdot [S_{p,m} \exp(iD_{2,m}z) - T_{p,m} \exp(-iD_{2,m}z)] \quad (1.35)$$

Z tvaru výrazů vystupujících v 1.35 vyplývá, že  $D_{1,m} = C_{1,m}$  a  $D_{2,m} = C_{2,m}$ , dále pak  $Q_{p,m} = -iC_{1,m}M_{p,m}$  a  $R_{p,m} = iC_{1,m}N_{p,m}$ ,  $\forall m \in \mathbb{Z}_0^+$ ,  $\forall p \in \hat{N}$ . Nyní opět využijme vhodného exponenciálního tvaru komplexního čísla, tentokrát pro konstanty u funkcí proměnné  $z$  vystupující na pravé straně 1.35, tedy

$$S_{p,m} = |S_{p,m}| \exp [i(\gamma_{p,m} - C_{2,m}z_p)] \\ T_{p,m} = |T_{p,m}| \exp [i(\delta_{p,m} + C_{2,m}z_p)] \quad (1.36)$$

kde  $\gamma_{p,m}, \delta_{p,m} \in \mathbb{R}$ . Dosazením výrazů 1.36 do 1.35 získáme podmínky

$$|T_{p,m}| = |S_{p,m}| \\ \delta_{p,m} = \gamma_{p,m} \\ -2C_{2,m} |S_{p,m}| \exp(i\gamma_{p,m}) = O'_{p,m}$$

Pro další účely bude výhodné vzít za výchozí  $U_{p,m}$ , definované pomocí  $S_{p,m}$  jako  $U_{p,m} = 2 |S_{p,m}| \exp(i\gamma_{p,m})$ , a naopak vyjádřit  $O'_{p,m}$  pomocí něj, tj.  $O'_{p,m} = -C_{2,m}U_{p,m}$ . Potom lze psát

$$E_{x,p,m}(x, z) = - [M_{p,m} \exp(iC_{1,m}x) + N_{p,m} \exp(-iC_{1,m}x)] \cdot \frac{m\pi}{b} U_{p,m} \sin \left[ \frac{m\pi}{b}(z - z_p) \right] \quad (1.37)$$

$$E_{z,p,m}(x, z) = iC_{1,m} [-M_{p,m} \exp(iC_{1,m}x) + N_{p,m} \exp(-iC_{1,m}x)] \cdot U_{p,m} \cos \left[ \frac{m\pi}{b}(z - z_p) \right] \quad (1.38)$$

kde  $M_{p,m}, N_{p,m}, U_{p,m} \in \mathbb{C}$  jsou neznámé konstanty.

Nyní využijme 1.6 a na základě znalosti  $\vec{E}_{p,m}$  určíme  $\vec{H}_{p,m}$ . Připomeňme, že v úvodu jsme zavedli předpoklad  $E_y \equiv 0$ . Dále připomeňme skutečnost, že pole v našem uspořádání nejsou funkcí  $y$ -ové souřadnice. V důsledku toho se rovnice 1.6 zjednoduší na

$$\frac{\partial E_{x,p,m}}{\partial z} - \frac{\partial E_{z,p,m}}{\partial x} - i\omega\mu_0 H_{y,p,m} = 0 \quad (1.39)$$

Využijeme-li 1.14, tj. že  $k_0^2 = \omega^2 \varepsilon_0 \mu_0$ , potom na základě 1.39 lze psát

$$H_{y,p,m}(x, z) = i\omega\varepsilon_0 [M_{p,m} \exp(iC_{1,m}x) + N_{p,m} \exp(-iC_{1,m}x)] \cdot U_{p,m} \cos \left[ \frac{m\pi}{b}(z - z_p) \right] \quad (1.40)$$

Právě získané vyjádření 1.40 evidentně splňuje rovnici 1.8.

Lze se snadno přesvědčit, že EM pole určené složkami 1.37, 1.38 a 1.40 splňuje také rovnici 1.5. Tedy takovéto pole splňuje každou z Maxwellových rovnic, tj. 1.5, 1.6, 1.7 a 1.8. Navíc okrajová podmínka 1.4 složku 1.40 nijak neomezuje, neboť je to složka tečná. Z tohoto již plyne, že 1.40 splňuje vlnovou rovnici 1.13 s okrajovou podmínkou 1.4. Shrneme-li získané poznatky o takto určeném EM poli, vidíme, že takovéto EM vlny mohou v našem vlnovodu samostatně existovat. Poznamenejme, že takovýto mod, skládající se z 1.37, 1.38 a 1.40, se při  $m = 0$  standardně označuje jako TEM-mod a pro  $m > 0$  jako TM-mod, jak lze nalézt například v [16, str. 246] nebo [7, str. 250]. TEM-mod je tedy tvořen jednou elektrickou transverzální složkou  $E_{z,p,0}$  a jednou magnetickou transverzální složkou  $H_{y,p,0}$ , přičemž obě jsou díky  $m = 0$  konstantní podél  $z$ . Oproti tomu mod TM má navíc longitudinální elektrickou složku  $E_{x,p,m}$  a žádná ze složek není obecně konstantní.

Kdybychom opustili předpoklad  $E_y \equiv 0$  a řešili vlnovou rovnici 1.13 pro složku  $H_z$  s okrajovou podmínkou 1.4 a postupovali analogicky k předchozímu, zjistili bychom, podobně jako jsme v předchozím získali mody TEM a TM, že navíc získáme tzv. mod TE, který je tvořen jednou elektrickou transverzální složkou  $E_{y,p,m}$ , dále magnetickou transverzální složkou  $H_{z,p,m}$  a longitudinální magnetickou složkou  $H_{x,p,m}$ .

Analogicky k [16, str. 248] lze obecné pole s  $E_y \equiv 0$  vyjádřit jako lineární

superpozici TM-modů a modu TEM. Tedy pro  $p$ -tý vlnovod lze psát

$$\begin{aligned}\vec{E}_p &= \sum_{m=0}^{+\infty} \vec{E}_{p,m} \\ \vec{H}_p &= \sum_{m=0}^{+\infty} \vec{H}_{p,m}\end{aligned}\tag{1.41}$$

Dříve než přikročíme k popisu celkového pole grilu, provedme následující úvahu. Pro dostatečně velká  $m$  nabývá  $C_{1,m}$  ryze imaginárních hodnot. V důsledku toho se ve výrazech 1.37, 1.38 a 1.40 hodnota exponenciály stojící za konstantou  $M_{p,m}$  při  $x \rightarrow -\infty$  blíží k  $+\infty$ . Jediná možnost, jak splnit požadavek omezenosti polí při  $x \rightarrow -\infty$ , je položit  $M_{p,m} = 0$ , pro  $m$  taková, že  $k_0 < \frac{m\pi}{b}$ . Poznamenejme, že šířka vlnovodů  $b$  je volena záměrně tak, aby pouze 0-tý mod, tj. mod TEM, nebyl evanescentní. Tedy pouze  $M_{p,0}$  je nenulové.

Definujme

$$\begin{aligned}A_p &= |-iC_{1,0}M_{p,0}U_{p,0}| \\ \varphi_p &= \arg(-iC_{1,0}M_{p,0}U_{p,0})\end{aligned}$$

$$B_{p,m} = C_{1,m}N_{p,m}U_{p,m} \exp\left[i\left(\frac{\pi}{2} - \varphi_p\right)\right]$$

dále definujme funkci  $\chi_p$  jako charakteristickou funkci množiny

$$\{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid x \leq 0, z \in [z_p, z_p + b]\}$$

Potom lze celkové pole grilu zapsat jako

$$\begin{aligned}E_z &= \sum_{p=1}^N \chi_p \exp[i(\varphi_p - \omega t)] \left\{ A_p \exp(ik_0x) + B_{p,0} \exp(-ik_0x) + \right. \\ &\quad \left. + \sum_{m=1}^{+\infty} B_{p,m} \exp\left(\sqrt{\left(\frac{m\pi}{b}\right)^2 - k_0^2}x\right) \cos\left[\frac{m\pi}{b}(z - z_p)\right] \right\}\end{aligned}\tag{1.42}$$

$$\begin{aligned}E_x &= \sum_{p=1}^N \sum_{m=1}^{+\infty} \chi_p \exp[i(\varphi_p - \omega t)] \frac{\frac{m\pi}{b}}{\sqrt{\left(\frac{m\pi}{b}\right)^2 - k_0^2}} B_{p,m} \exp\left(\sqrt{\left(\frac{m\pi}{b}\right)^2 - k_0^2}x\right) \cdot \\ &\quad \cdot \sin\left[\frac{m\pi}{b}(z - z_p)\right]\end{aligned}\tag{1.43}$$



$$\begin{aligned}
H_y = & - \sum_{p=1}^N \chi_p \exp [i (\varphi_p - \omega t)] \cdot \\
& \cdot \sqrt{\frac{\varepsilon_0}{\mu_0}} \left\{ A_p \exp (i k_0 x) - B_{p,0} \exp (-i k_0 x) + \right. \\
& \left. + \sum_{m=1}^{+\infty} \frac{k_0}{\sqrt{\left(\frac{m\pi}{b}\right)^2 - k_0^2}} i B_{p,m} \exp \left( \sqrt{\left(\frac{m\pi}{b}\right)^2 - k_0^2} x \right) \cos \left[ \frac{m\pi}{b} (z - z_p) \right] \right\}
\end{aligned} \tag{1.44}$$

## 1.2 Pole ve vakuové mezeře

Před ústím grilu, pro účely výpočtu, předpokládáme vakuovou mezeru předcházející vlastnímu okraji plazmatu. V této části nyní vyjádříme pole v uvažované mezeře, která je vymezena rovinami  $x = 0$  a  $x = x_p$ .

Zavedme obvyklé značení  $k_{\parallel}$  pro vlnové číslo vlny šířící se ve směru rovnoběžném s toroidálním magnetickým polem tokamaku. Pro kolmý směr budeme používat symbol  $k_{\perp}$ . Poznamenejme, že v našem uspořádání je rovnoběžný směr totožný s osou  $z$  a směr kolmý je totožný s osou  $x$  námi zavedeného souřadného systému. Opět uvažujme časovou závislost polí  $\exp(-i\omega t)$ ,  $\omega$  pevné.

Nejprve uvažujme partikulární řešení rovnice 1.16, ve které  $E_x$  nahradíme  $E_z$ . Využijme výsledku 1.34 a analogicky s ním pišme

$$\begin{aligned}
E_z^0(x, z) = & [Q \exp(i k_{\perp} x) + R \exp(-i k_{\perp} x)] \cdot \\
& \cdot [S \exp(i k_{\parallel} z) + T \exp(-i k_{\parallel} z)]
\end{aligned} \tag{1.45}$$

kde  $k_{\parallel} \geq 0$  a  $Q, R, S, T \in \mathbb{C}$ . Mezi  $k_{\perp}$  a  $k_{\parallel}$  platí vztah analogický k 1.24, tedy

$$k_{\perp}^2 = k_0^2 - k_{\parallel}^2 \tag{1.46}$$

Obecné řešení pro  $E_z(x, z)$  lze vyjádřit pomocí Fourierova integrálu (viz např. [15])

$$\begin{aligned}
& \int_0^{+\infty} [Q(k_{\parallel}) \exp(i k_{\perp} x) + R(k_{\parallel}) \exp(-i k_{\perp} x)] S(k_{\parallel}) \exp(i k_{\parallel} z) dk_{\parallel} + \\
& + \int_0^{+\infty} [Q(k_{\parallel}) \exp(i k_{\perp} x) + R(k_{\parallel}) \exp(-i k_{\perp} x)] T(k_{\parallel}) \exp(-i k_{\parallel} z) dk_{\parallel}
\end{aligned} \tag{1.47}$$

kde  $Q(k_{\parallel})$ ,  $R(k_{\parallel})$ ,  $S(k_{\parallel})$  a  $T(k_{\parallel})$  jsou funkce definované pro  $k_{\parallel} \geq 0$ .

Ve druhém integrálu výrazu 1.47 provedeme několik drobných úprav. Nejprve následující substituci

$$\begin{aligned} k'_{\parallel} &= -k_{\parallel} \\ dk_{\parallel} &= -dk'_{\parallel} \end{aligned}$$

a poté přeznačme proměnnou  $k'_{\parallel}$  zpět na  $k_{\parallel}$ . Takto získáme

$$\int_{-\infty}^0 [Q(-k_{\parallel}) \exp(ik_{\perp}x) + R(-k_{\parallel}) \exp(-ik_{\perp}x)] T(-k_{\parallel}) \exp(ik_{\parallel}z) dk_{\parallel} \quad (1.48)$$

Dodefinujeme

$$\begin{aligned} Q(k_{\parallel}) &:= Q(-k_{\parallel}) \\ R(k_{\parallel}) &:= R(-k_{\parallel}) \\ S(k_{\parallel}) &:= T(-k_{\parallel}) \end{aligned}$$

pro  $k_{\parallel} < 0$ . Dále definujeme funkce

$$\begin{aligned} C(k_{\parallel}) &:= R(k_{\parallel}) S(k_{\parallel}) \\ D(k_{\parallel}) &:= Q(k_{\parallel}) S(k_{\parallel}) \end{aligned}$$

Potom můžeme přepsat 1.47 do kompaktní podoby

$$E_z(x, z) = \int_{-\infty}^{+\infty} [C(k_{\parallel}) \exp(-ik_{\perp}x) + D(k_{\parallel}) \exp(ik_{\perp}x)] \exp(ik_{\parallel}z) dk_{\parallel} \quad (1.49)$$

Dosaďme 1.49 do 1.7. Po krátkých úpravách získáme vyjádření složky  $E_x$

$$E_x(x, z) = \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{k_{\parallel}}{k_{\perp}} [C(k_{\parallel}) \exp(-ik_{\perp}x) - D(k_{\parallel}) \exp(ik_{\perp}x)] \exp(ik_{\parallel}z) dk_{\parallel} \quad (1.50)$$

Obdobně, dosadíme-li 1.49 a 1.50 do 1.39, můžeme vyjádřit složku  $H_y$

$$\begin{aligned} H_y(x, z) &= \sqrt{\frac{\varepsilon_0}{\mu_0}} \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{k_0}{k_{\perp}} [C(k_{\parallel}) \exp(-ik_{\perp}x) - \\ &\quad - D(k_{\parallel}) \exp(ik_{\perp}x)] \exp(ik_{\parallel}z) dk_{\parallel} \end{aligned} \quad (1.51)$$

Poznamenejme, že zde užíváme obvyklé konvence pro argument komplexního čísla, tj.  $\arg(z) \in (-\pi, \pi)$ ,  $z \in \mathbb{C}$ . Zavedeme-li do komplexní roviny pro  $k_{\parallel}$  řezy  $(-\infty, -k_0)$  a  $(k_0, +\infty)$ , potom první kořen druhé odmocniny z pravé strany rovnosti 1.46, který je zde označen jako  $k_{\perp}$ , bude mít nezápornou reálnou část, tj.  $\Re k_{\perp} \geq 0$ . Dále jak  $\Re k_{\perp}$ , tak  $\Im k_{\perp}$ , brány jako reálné funkce komplexní proměnné  $k_{\parallel}$ , jsou, po zúžení na reálnou osu, spojitě a nezáporné. Důsledkem toho jsme oprávněni říct, že člen  $D(k_{\parallel}) \exp(ik_{\perp}x)$  představuje mod postupující v kladném směru osy  $x$ , případně klesající evanescentní mod, a člen  $C(k_{\parallel}) \exp(-ik_{\perp}x)$  představuje mod odražený (od překážky v  $x > 0$ , například od povrchové vrstvy plazmatu), jak uvádí [3], případně klesající evanescentní mod (bráno v záporném směru osy  $x$ ).

## 1.3 Pole ve studeném plazmatu

### 1.3.1 Tenzor permitivity

Dříve než uvedeme definici tenzoru permitivity, napišme obecnější tvar Maxwellových rovnic, kde oproti paragrafu 1.1 uvažujeme  $\rho \neq 0$ ,  $\vec{j} \neq \vec{0}$ , tedy

$$\nabla \times \vec{H} = \vec{j} + \varepsilon_0 \frac{\partial \vec{E}}{\partial t} \quad (1.52)$$

$$\nabla \times \vec{E} = -\mu_0 \frac{\partial \vec{H}}{\partial t} \quad (1.53)$$

$$\nabla \cdot \vec{E} = \frac{\rho}{\varepsilon_0} \quad (1.54)$$

$$\nabla \cdot \vec{B} = 0 \quad (1.55)$$

kde opět platí vztah  $\vec{B} = \mu_0 \vec{H}$ .

Tenzor permitivity ( $\varepsilon_{\beta}^{\alpha}$ ) je definován vztahem

$$D^{\alpha} = \varepsilon_{\beta}^{\alpha} E^{\beta} \quad (1.56)$$

který dává do souvislosti elektrickou indukci  $\vec{D}$  a intenzitu elektrického pole  $\vec{E}$ . Poznamenejme, že zde používáme Einsteinovu sumační konvenci a budeme ji používat i dále, ale pouze tehdy, když se objeví dvojice totožných indexů zapsaných malými řeckými písmeny. Pro úplnost dodejme, že zapisujeme složky vektorů pomocí horního indexu a tedy horní index je řádkový a dolní index sloupcový. Dále uvedme definici tenzoru vodivosti ( $\sigma_{\beta}^{\alpha}$ )

$$j^{\alpha} = \sigma_{\beta}^{\alpha} E^{\beta} \quad (1.57)$$

Pro naše účely bude výhodné zahrnout do el. indukce hustotu proudu  $\vec{j}$  generovaného částicemi plazmatu, jak tomu činí např. [12], tedy

$$\frac{\partial \vec{D}}{\partial t} \equiv \vec{j} + \varepsilon_0 \frac{\partial \vec{E}}{\partial t} \quad (1.58)$$

Poznamenejme, že pro hustotu proudu platí (viz např. [6])

$$\vec{j} = \sum_k \vec{j}_k = \sum_k \rho_k \vec{v}_k = \sum_k q_k n_k \vec{v}_k \quad (1.59)$$

kde index  $k \in \{i, e\}$  značí sčítání přes jednotlivé druhy částic, tj. ionty s nábojem  $q_i$  (zde uvažujeme pouze jeden druh iontů) resp. elektrony s nábojem  $q_e$ , obsažené v objemovém elementu s hustotou iontů  $n_i$  resp. elektronů  $n_e$ , který se pohybuje rychlostí  $\vec{v}_i$  resp.  $\vec{v}_e$ . Předpokládáme-li časovou závislost  $\exp(-i\omega t)$  veličin  $\vec{D}$  a  $\vec{E}$ , potom lze psát

$$\vec{D} = \frac{i}{\omega} \vec{j} + \varepsilon_0 \vec{E} \quad (1.60)$$

a s využitím 1.56 a 1.57 získáváme z 1.60 vztah pro  $(\varepsilon_\beta^\alpha)$

$$\varepsilon_\beta^\alpha = \frac{i}{\omega} \sigma_\beta^\alpha + \varepsilon_0 \delta_\beta^\alpha \quad (1.61)$$

kde  $\delta_\beta^\alpha$  je Kroneckerův symbol.

Nyní odvodíme tenzor permitivity pro plazma ve vnějším, konstantním, magnetickém poli  $\vec{B}_0$ . Pro zjednodušení popisu budeme uvažovat tzv. studené plazma ( $T = 0$ ), tj. zanedbáme tepelný pohyb částic. Nejprve vyřešíme, vzhledem k  $\vec{v}_k$ , pohybovou rovnici pro nabitou částici<sup>3</sup>, která je vystavena působení pole  $\vec{B}_0$  a současně pole monochromatické vlny

$$m_k \frac{d\vec{v}_k}{dt} = q_k \left( \vec{E} + \vec{v}_k \times \vec{B}_0 \right) \quad (1.62)$$

kde  $m_k$  je hmotnost částice a  $q_k$  její náboj. Magnetickou složku pole vlny zanedbáváme<sup>4</sup>. Dále předpokládejme, že díky časové závislosti  $\exp(-i\omega t)$  pole  $\vec{E}$  uvažované vlny má i  $\vec{v}_k$  tuto časovou závislost, tedy

$$-i\omega m_k \vec{v}_k = q_k \left( \vec{E} + \vec{v}_k \times \vec{B}_0 \right) \quad (1.63)$$

<sup>3</sup>Stejnou rovnici obdržíme z linearizovaných rovnic dvoukomponentní magnetohydrodynamiky, viz např. [12].

<sup>4</sup>Naším cílem je sestavit rovnici lineární.

Vynásobíme-li 1.63 zprava, nejprve vektorově a poté skalárně, vektorem  $\vec{B}_0$ , dostaneme tyto dvě rovnice

$$\begin{aligned} -i\omega m_k \vec{v}_k \times \vec{B}_0 &= q_k \vec{E} \times \vec{B}_0 + q_k (\vec{v}_k \cdot \vec{B}_0) \vec{B}_0 - q_k (\vec{B}_0 \cdot \vec{B}_0) \vec{v}_k \\ -i\omega m_k \vec{v}_k \cdot \vec{B}_0 &= q_k \vec{E} \cdot \vec{B}_0 \end{aligned} \quad (1.64)$$

kde jsme na pravé straně první z těchto rovnic využili identitu

$$(\vec{v}_k \times \vec{B}_0) \times \vec{B}_0 = (\vec{v}_k \cdot \vec{B}_0) \vec{B}_0 - (\vec{B}_0 \cdot \vec{B}_0) \vec{v}_k \quad (1.65)$$

Nyní ze druhé z rovnic 1.64 vyjádříme člen  $\vec{v}_k \cdot \vec{B}_0$  a dosadíme jej do první z těchto rovnic. Z takto upravené první rovnice vyjádříme člen  $\vec{v}_k \times \vec{B}_0$  a dosadíme jej do 1.63. Po těchto krocích nám již nic nebrání, abychom vyjádřili  $\vec{v}$  explicitně

$$\vec{v}_k = i \frac{q_k \omega}{m_k (\omega^2 - \omega_c^2)} \left[ \vec{E} - \frac{q_k^2}{\omega^2 m_k^2} (\vec{E} \cdot \vec{B}_0) \vec{B}_0 + i \frac{q_k}{\omega m_k} \vec{E} \times \vec{B}_0 \right] \quad (1.66)$$

kde  $\omega_{c,k}$  je tzv. cyklotronová frekvence, která je definována

$$\omega_{c,k} = \frac{q_k B_0}{m_k} \quad (1.67)$$

kde  $B_0 = \|\vec{B}_0\|$  značí velikost vektoru  $\vec{B}_0$ . V 1.60 dosadíme za  $\vec{j}$  výraz 1.59 a do získaného vztahu dosadíme za  $\vec{v}_k$  výraz 1.66. Takto jsme získali

$$\begin{aligned} \vec{D} &= \varepsilon_0 \left( 1 - \sum_k \frac{\omega_{0,k}^2}{\omega^2 - \omega_{c,k}^2} \right) \vec{E} + \varepsilon_0 \sum_k \frac{q_k^2 \omega_{0,k}^2}{m_k^2 \omega^2 (\omega^2 - \omega_{c,k}^2)} (\vec{E} \cdot \vec{B}_0) \vec{B}_0 - \\ &\quad - i \varepsilon_0 \sum_k \frac{q_k \omega_{0,k}^2}{m_k \omega (\omega^2 - \omega_{c,k}^2)} \vec{E} \times \vec{B}_0 \end{aligned} \quad (1.68)$$

kde  $\omega_{0,k}$  je tzv. plazmová frekvence, která je definována

$$\omega_{0,k} = \sqrt{\frac{q_k^2 n_k}{\varepsilon_0 m_k}} \quad (1.69)$$

Abychom mohli vyjádřit tenzor permitivity explicitně, je nutné přepsat členy  $\vec{E} \times \vec{B}_0$  a  $(\vec{E} \cdot \vec{B}_0) \vec{B}_0$  do vhodné podoby. Pro první člen platí (viz např. [17])

$$\vec{E} \times \vec{B}_0 = (\varepsilon_{\beta\gamma}^\alpha B_0^\gamma E^\beta) = \begin{pmatrix} 0 & B_0^3 & -B_0^2 \\ -B_0^3 & 0 & B_0^1 \\ B_0^2 & -B_0^1 & 0 \end{pmatrix} \vec{E} \quad (1.70)$$

kde je třeba říci, že  $\varepsilon_{\beta\gamma}^\alpha$  zde představuje Levi-Civitův symbol a jeho volný index zapisujeme nahoře jen z toho důvodu, aby v námi zavedeném zápisu indexů vektorů byl výsledkem opět vektor. Tedy náš zápis nijak nemění jeho obvyklý význam. Druhý člen lze zapsat jako

$$\left(\vec{E} \cdot \vec{B}_0\right) \vec{B}_0 = (\delta_{\mu\nu} E^\mu B_0^\nu B_0^\alpha) = (B_0^\alpha B_{0\mu} E^\mu) = \begin{pmatrix} B_0^1 B_0^1 & B_0^1 B_0^2 & B_0^1 B_0^3 \\ B_0^2 B_0^1 & B_0^2 B_0^2 & B_0^2 B_0^3 \\ B_0^3 B_0^1 & B_0^3 B_0^2 & B_0^3 B_0^3 \end{pmatrix} \vec{E} \quad (1.71)$$

Tedy explicitní vyjádření pro tenzor permitivity zní

$$\begin{aligned} \varepsilon_\beta^\alpha = \varepsilon_0 \left( 1 - \sum_k \frac{\omega_{0,k}^2}{\omega^2 - \omega_{c,k}^2} \right) \delta_\beta^\alpha + \varepsilon_0 \sum_k \frac{q_k^2 \omega_{0,k}^2}{m_k^2 \omega^2 (\omega^2 - \omega_{c,k}^2)} B_0^\alpha B_{0\beta} - \\ - i\varepsilon_0 \sum_k \frac{q_k \omega_{0,k}^2}{m_k \omega (\omega^2 - \omega_{c,k}^2)} \varepsilon_{\beta\gamma}^\alpha B_0^\gamma \end{aligned} \quad (1.72)$$

V našem uspořádání je  $\vec{B}_0$  rovnoběžné s osou  $z$  námi zavedeného souřadného systému, tj. pouze složka  $B_0^3 = B_0$  je nenulová. V tomto případě ( $\varepsilon_\beta^\alpha$ ) nabývá kompaktní podoby

$$\varepsilon_0 \begin{pmatrix} \varepsilon_\perp & ig & 0 \\ -ig & \varepsilon_\perp & 0 \\ 0 & 0 & \varepsilon_\parallel \end{pmatrix} =: \varepsilon_0 \epsilon \quad (1.73)$$

kde

$$\begin{aligned} \varepsilon_\perp &\equiv \left( 1 - \sum_k \frac{\omega_{0,k}^2}{\omega^2 - \omega_{c,k}^2} \right) \\ \varepsilon_\parallel &\equiv \left( 1 - \sum_k \frac{\omega_{0,k}^2}{\omega^2} \right) \\ g &\equiv - \sum_k \frac{\omega_{c,k} \omega_{0,k}^2}{\omega (\omega^2 - \omega_{c,k}^2)} \end{aligned} \quad (1.74)$$

### 1.3.2 Disperzní vztah

Právě získaný tenzor permitivity 1.72 nám již umožňuje využít Maxwellovy rovnice, konkrétně 1.52 a 1.53, a stanovit disperzní vztah pro studené plazma.

V části 1.3.1 jsme definovali časovou změnu vektoru el. indukce  $\vec{D}$  vztahem 1.58. Nahradíme-li pravou stranu rovnice 1.52 právě touto definicí, získáme

$$\nabla \times \vec{H} = \frac{\partial \vec{D}}{\partial t} \quad (1.75)$$

Vyjádříme-li pravou stranu rovnice 1.75 v souladu s definicí 1.56, potom v našem souřadném systému, kde  $\vec{B}_0 \parallel z$ , dostáváme

$$\nabla \times \vec{H} = \varepsilon_0 \epsilon \frac{\partial \vec{E}}{\partial t} \quad (1.76)$$

Nyní aplikujme na rovnici 1.53 operátor  $\nabla \times$  a její pravou stranu vyjádřeme pomocí 1.76. Dostáváme

$$\nabla \times \nabla \times \vec{E} + \frac{1}{c^2} \epsilon \frac{\partial^2 \vec{E}}{\partial t^2} = \vec{0} \quad (1.77)$$

Aby se nám s touto rovnicí dobře pracovalo, zapíšeme ji ve složkách

$$\left[ \varepsilon_{\beta\gamma}^{\alpha} \varepsilon_{\mu\nu}^{\gamma} \partial^{\beta} \partial^{\mu} + \frac{1}{c^2} \epsilon_{\nu}^{\alpha} \partial_t^2 \right] E^{\nu} = 0 \quad (1.78)$$

kde, pro jednoduchost zápisu ve složkách a v souladu s naší indexovou konvencí, používáme pro operátor parciální derivace podle prostorové souřadnice  $x^{\beta}$  symbol  $\partial^{\beta}$ , přičemž  $(x_{\beta}) \equiv (x_1, x_2, x_3) := (x, y, z)$ , a pro operátor parciální derivace podle času symbol  $\partial_t$ , tedy  $\partial_t \partial_t \equiv \partial_t^2$ .

Nyní uvažujme pole  $\vec{E}$  ve tvaru rovinné monochromatické vlny

$$E^{\nu} = E^{0\nu} \exp [i (k_{\xi} x^{\xi} - \omega t)] \quad (1.79)$$

kde  $(E^{0\nu}) = \vec{E}^0 \in \mathbb{C}^3$ . Dále využijme identity

$$\varepsilon_{\beta\gamma}^{\alpha} \varepsilon_{\mu\nu}^{\gamma} = \varepsilon_{\beta\gamma}^{\alpha} \varepsilon_{\mu\nu}^{\gamma} = \delta_{\mu}^{\alpha} \delta_{\beta\nu} - \delta_{\nu}^{\alpha} \delta_{\beta\mu} \quad (1.80)$$

Potom 1.78 nabývá podoby (viz [8])

$$[k^2 \delta_{\nu}^{\alpha} - k^{\alpha} k_{\nu} - k_0^2 \epsilon_{\nu}^{\alpha}] E^{0\nu} = 0 \quad (1.81)$$

kde  $k^2 = \|\vec{k}\|^2$ .

Označíme-li fázovou rychlost monochromatické vlny 1.79 jako  $v$ , potom pro index lomu  $N$  platí

$$N = \frac{c}{v} = \frac{kc}{\omega} = \frac{k}{k_0} \quad (1.82)$$

Dále zavedme vektor

$$\vec{N} \equiv (N_{\xi}) := (k_{\xi}/k_0) \quad (1.83)$$

Pro jeho velikost platí  $\|\vec{N}\| = N$ . Dále označme ortonormální bázi našeho souřadného systému jako  $(\vec{e}_1, \vec{e}_2, \vec{e}_3)$  a vyjádřeme vektor  $\vec{k}$  pomocí jeho Fourierových koeficientů (směrových kosínů) v této bázi, tedy píšeme ve složkách

$$k^{\xi} = k_{\mu} e_{\alpha}^{\mu} e_{\alpha}^{\xi} =: k \cos(\theta_{\alpha}) e_{\alpha}^{\xi} \quad (1.84)$$

kde  $\theta_\alpha$  je úhel, který svírají vektory  $\vec{k}$  a  $\vec{e}_\alpha$ . Vektor  $\vec{N}$  vyjádříme také tímto způsobem, tedy

$$N^\xi = N \cos(\theta_\alpha) e_\alpha^\xi \quad (1.85)$$

Vydělíme-li 1.81  $k_0^2$  a použijeme-li vyjádření 1.85, potom 1.81 můžeme přepsat do podoby

$$[N^2 \delta_\nu^\alpha - N^2 \cos(\theta_\alpha) \cos(\theta_\nu) - \epsilon_\nu^\alpha] E^{0\nu} = 0 \quad (1.86)$$

Nyní zvolme vektor  $\vec{k}$  tak, aby ležel v rovině  $x, z$ , tedy  $\vec{k} := (k_1, 0, k_3)$ , potom  $\cos(\theta_2) = 0$ . Dále využijme toho, že pro součet kvadrátů Fourierových koeficientů vystupujících v 1.84 platí Parsevalova rovnost (viz např. [11])

$$k^2 \cos(\theta_\alpha) \cos(\theta_\alpha) = k^2 \quad (1.87)$$

Využijeme-li vztahu 1.87, zjistíme, že platí

$$\cos(\theta_1) = \sin(\theta_3) \quad (1.88)$$

Označme  $\theta := \theta_3$ , tedy  $\theta$  je úhel mezi vektory  $\vec{k}$  a  $\vec{B}_0$ . Potom rovnici 1.86 můžeme zapsat takto (viz [14], [9])

$$\begin{pmatrix} N^2 \cos^2 \theta - \varepsilon_\perp & -ig & -\frac{N^2}{2} \sin 2\theta \\ +ig & N^2 - \varepsilon_\perp & 0 \\ -\frac{N^2}{2} \sin 2\theta & 0 & N^2 \sin^2 \theta - \varepsilon_\parallel \end{pmatrix} \vec{E}^0 = \vec{0} \quad (1.89)$$

Rovnice 1.89 je homogenní, tedy pokud má mít netriviální řešení, potom determinant matice v ní vystupující musí být nulový. Vyčíslíme-li tento determinant a položíme-li jej roven nule, získáme tzv. disperzní vztah (rovnici) pro studené plazma (viz např. [12])

$$AN^4 + BN^2 + C = 0 \quad (1.90)$$

kde

$$\begin{aligned} A &= \varepsilon_\perp \sin^2 \theta + \varepsilon_\parallel \cos^2 \theta \\ B &= (g^2 - \varepsilon_\perp^2 + \varepsilon_\perp \varepsilon_\parallel) \sin^2 \theta - 2\varepsilon_\perp \varepsilon_\parallel \\ C &= (\varepsilon_\perp^2 - g^2) \varepsilon_\parallel \end{aligned} \quad (1.91)$$

Vyřešíme-li jej vzhledem k  $N^2$ , získáme

$$\begin{aligned} N_{1,2}^2 &= \frac{-B \pm \sqrt{B^2 - 4AC}}{2A} \\ &= \frac{(\varepsilon_\perp^2 - g^2 - \varepsilon_\perp \varepsilon_\parallel) \sin^2 \theta + 2\varepsilon_\perp \varepsilon_\parallel}{2(\varepsilon_\perp \sin^2 \theta + \varepsilon_\parallel \cos^2 \theta)} \pm \\ &\quad \pm \frac{\sqrt{(g^2 - \varepsilon_\perp^2 + \varepsilon_\perp \varepsilon_\parallel)^2 \sin^4 \theta + 4g^2 \varepsilon_\parallel^2 \cos^2 \theta}}{2(\varepsilon_\perp \sin^2 \theta + \varepsilon_\parallel \cos^2 \theta)} \end{aligned} \quad (1.92)$$



Zdůrazněme, že složky tenzoru permitivity jsou mj. funkcí hustoty částic  $n_k$ , jak je vidět ze vztahů 1.74 a 1.69. V této části jsme považovali  $n_k$  za pevné, tj. považovali jsme plazma za homogenní, což nám při odvození umožnilo využít el. pole ve tvaru postupující rovinné *harmonické* vlny (výraz 1.79). V obecnějším případě je  $n_k$  funkcí souřadnic, tj. plazma je nehomogenní. Jak ukazujeme v kapitole 2, v nehomogenním plazmatu obecně nelze hovořit o postupující rovinné *harmonické* vlně (viz např. [5]), nicméně, pokud se hustota částic mění v rámci rozměru jedné vlnové délky uvažované vlny dostatečně pomalu, je možné pro popis vln v nehomogenním plazmatu použít v každém bodě disperzní vztah pro homogenní plazma a vyhodnocovat jej v tomto bodě (viz [14]). V takovémto případě o rovnici 1.90 hovoříme jako o tzv. lokálním disperzním vztahu (viz [8]).

### 1.3.3 Dolně hybridní rezonanční frekvence

V této části podáme definici tzv. hybridních rezonančních frekvencí studeného plazmatu. Zvláště se zaměříme na *dolně hybridní* rezonanční frekvenci a uvedeme některé aproximace jejího definičního vztahu.

Uvažujme nyní EM vlnu šířící se v homogenním plazmatu kolmo k vnějšímu konstantnímu magnetickému poli, tj.  $\vec{k} \perp \vec{B}_0$ ,  $\vec{B}_0 = (0, 0, B_0)$ . V tomto případě je  $\vec{k} = (k_\perp, 0, 0)$ ,  $N = N_\perp = \frac{k_\perp c}{\omega}$  a  $\theta = \frac{\pi}{2}$ . Dosadíme-li do vztahu 1.92 právě tuto hodnotu úhlu  $\theta$  a vynásobíme-li 1.92 výrazem  $\frac{\omega^2}{c^2}$  získáme

$$(k_\perp)_{1,2}^2 = \omega^2 \frac{(\varepsilon_\perp^2 - g^2 + \varepsilon_\perp \varepsilon_\parallel) \pm |g^2 - \varepsilon_\perp^2 + \varepsilon_\perp \varepsilon_\parallel|}{2c^2 \varepsilon_\perp} \quad (1.93)$$

a vidíme, že  $k_\perp^2$  může nabývat dvou hodnot

$$k_\perp^2 = \begin{cases} k_{\perp\ominus}^2 := \omega^2 \frac{\varepsilon_\perp^2 - g^2}{c^2 \varepsilon_\perp} \\ k_{\perp\oplus}^2 := \frac{\omega^2}{c^2} \varepsilon_\parallel \end{cases} \quad (1.94)$$

kde symboly zde použité mají následující vztah ke kořenům  $(k_\perp)_{1,2}^2$

$$k_{\perp\ominus}^2 = \begin{cases} (k_\perp)_1^2 & , \text{ pro } (g^2 - \varepsilon_\perp^2 + \varepsilon_\perp \varepsilon_\parallel) < 0 \\ (k_\perp)_2^2 & , \text{ pro } (g^2 - \varepsilon_\perp^2 + \varepsilon_\perp \varepsilon_\parallel) > 0 \end{cases} \quad (1.95)$$

$$k_{\perp\oplus}^2 = \begin{cases} (k_\perp)_1^2 & , \text{ pro } (g^2 - \varepsilon_\perp^2 + \varepsilon_\perp \varepsilon_\parallel) \geq 0 \\ (k_\perp)_2^2 & , \text{ pro } (g^2 - \varepsilon_\perp^2 + \varepsilon_\perp \varepsilon_\parallel) \leq 0 \end{cases} \quad (1.96)$$

Nyní zaměříme pozornost na otázku, pro jaké frekvence EM vln šířících se kolmo k vnějšímu mag. poli nastává v plazmatu rezonance, tj. pro jaká  $\omega$

dochází k úplnému pohlcení energie vlny plazmatem. Lze ukázat, že za jistých předpokladů o funkci  $k^2 = k^2(\omega)$  k rezonanci dochází při takových  $\omega$ , označme je  $\omega_r$ , pro která platí (viz [5])

$$\lim_{\omega \rightarrow \omega_r^-} k^2(\omega) = +\infty \quad (1.97)$$

Vzhledem k tomu, že  $k_{\perp\oplus}^2$  nemá žádnou singularitu, jediným kandidátem na splnění podmínky 1.97 se stává  $k_{\perp\ominus}^2$ . Dosadíme-li ve výrazu 1.94 pro  $k_{\perp\ominus}^2$  za  $\varepsilon_{\perp}$  a  $g$  jejich explicitní vyjádření (viz vztah 1.74), potom po úpravě získáme podíl dvou polynomů v proměnné  $\omega$ . Lze se snadno přesvědčit, že tyto polynomy jsou nesoudělné (pro libovolná nenulová  $n_i$ ,  $n_e$  a  $B_0$ ), tedy stačí hledat taková  $\omega$ , pro která jmenovatel tohoto podílu nabývá nulových hodnot. Úloha o nalezení  $\omega_r$  se tedy redukuje na řešení rovnice

$$\omega^4 + B\omega^2 + C = 0 \quad (1.98)$$

kde

$$\begin{aligned} B &= -(\omega_{c,i}^2 + \omega_{c,e}^2 + \omega_{0,i}^2 + \omega_{0,e}^2) \\ C &= \omega_{0,e}^2 \omega_{c,i}^2 + \omega_{0,i}^2 \omega_{c,e}^2 + \omega_{c,i}^2 \omega_{c,e}^2 \end{aligned} \quad (1.99)$$

Poznamenejme, že výraz na levé straně rovnice 1.98 je totožný s čitatelem výrazu pro  $\varepsilon_{\perp}$ .

Vyřešíme-li 1.98 vzhledem k  $\omega^2$ , získáme

$$(\omega^2)_{1,2} = \frac{1}{2} \left( -B \pm \sqrt{B^2 - 4C} \right) \quad (1.100)$$

Tento vztah můžeme vzít jako definiční, přičemž první kořen (známenko +) odpovídá tzv. *horně hybridní* (upper hybrid) rezonanční frekvenci, označované jako  $\omega_{UH}$ , a druhý kořen tzv. *dolně hybridní* (lower hybrid) rezonanční frekvenci, označované jako  $\omega_{LH}$ .

Abychom získali názornější a přitom stále dostatečně přesnou představu o hodnotách  $\omega_{LH}$ , aproximujme odmocninu ve výrazu 1.100 pomocí Taylova rozvoje do prvního řádu

$$\omega_{LH}^2 = -\frac{B}{2} \left( 1 - \sqrt{1 - \frac{4C}{B^2}} \right) \approx -\frac{C}{B} = \frac{\omega_{0,e}^2 \omega_{c,i}^2 + \omega_{0,i}^2 \omega_{c,e}^2 + \omega_{c,i}^2 \omega_{c,e}^2}{\omega_{c,i}^2 + \omega_{c,e}^2 + \omega_{0,i}^2 + \omega_{0,e}^2} \quad (1.101)$$

Z definice 1.67 vyplývá, že obecně platí

$$\omega_{c,e}^2 \gg \omega_{c,i}^2 \quad (1.102)$$

Tento fakt spolu s aproximací 1.101 dává již dostatečný argument k následujícímu tvrzení

$$\omega_{c,e}^2 \gg \omega_{LH}^2 \gg \omega_{c,i}^2 \quad (1.103)$$

Ještě názornější, ovšem méně přesnou představu získáme, vydělíme-li v aproximaci 1.101 čítecitel a jmenovatel hodnotou  $\omega_{c,e}^2$  a zanedbáme-li podíly, ve kterých vystupuje  $\omega_{c,i}^2$  nebo  $\omega_{0,i}^2$ . Tímto způsobem tedy získáme další aproximační vztah

$$\omega_{LH}^2 \approx \frac{\omega_{0,i}^2}{1 + \frac{\omega_{0,e}^2}{\omega_{c,e}^2}} \quad (1.104)$$

který používá např. [2] nebo [3].

V hustém plazmatu lze pro  $\omega_{LH}$  získat také následující jednoduché vyjádření

$$\omega_{LH}^2 \approx \omega_{c,i} |\omega_{c,e}| \quad (1.105)$$

### 1.3.4 Dosažitelnost

V samotném úvodu této části poznamenejme, že výrazem *dosažitelnost* zde míníme překlad, lépe řečeno snahu o český ekvivalent, běžně užívaného anglického termínu *accessibility* (např. autory [2] a [14]).

V dalším textu této části uvažujeme nehomogenní plazma (přičemž uvažujeme pouze stupeň ionizace  $Z = 1$ , tedy  $n_e = n_i =: n$ ) se vzrůstajícím gradientem hustoty částic ve směru osy  $x$ , tj.

$$\nabla n = \left( \frac{dn}{dx}(x), 0, 0 \right), \quad \frac{dn}{dx}(x) > 0 \quad (1.106)$$

které je umístěno ve vnějším konstantním magnetickém poli, orientovaném ve směru osy  $z$ , tj.  $\vec{B}_0 = (0, 0, B_0)$ . O gradientu hustoty předpokládáme, že není příliš strmý (upřesnění tohoto požadavku uvádíme v kapitole 2). Dále pro jednoduchost uvažujeme pouze vlnový vektor o složkách  $\vec{k} = (k_\perp, 0, k_\parallel)$ .

Na základě jednoduchých úvah se pokusíme odvodit podmínky, za kterých lze pomocí EM vlny, vybuzené vně a postupující dovnitř plazmatu, *dosáhnout* dolně hybridní rezonance v oblasti s požadovanou hustotou částic (samozřejmě je nutné, aby při dopadu na povrchovou vrstvu plazmatu nedošlo k úplnému odrazu uvažované vlny - této otázce se věnujeme blíže v části 1.3.5). Pro danou hustotu (spolu se známou velikostí vnějšího mag. pole) jsme již schopni stanovit, např. pomocí vztahu 1.104 z části 1.3.3, jakou má mít tato vlna frekvenci, aby v požadované oblasti došlo k rezonanci. Otázkou však zůstává, jaké další vlastnosti má vlna mít, zejména jaký má mít vlnový vektor, aby byla schopna dosáhnout požadované oblasti, aniž by během jejího

postupu oblastmi s nižší hustotou došlo k odrazu nebo její konverzi na rychlou vlnu - přetnutí větví (branch crossing).

Odraz nastává tehdy, když příčná složka vlnového vektoru, resp. její kvadrát, chápána jako funkce hustoty částic, nabývá nulových hodnot. V dalším se tedy budeme zabývat tím, jak zajistit, aby  $k_{\perp}^2$  bylo kladné, neboť jak víme, záporné hodnoty odpovídají evanescentní vlně, tj. útlumu, který je rovněž nežádoucí (nicméně úzké evanescentní oblasti se nevyhneme, jak uvidíme níže). Dále poznamenejme, že podélná složka vlnového vektoru  $k_{\parallel}$  a tedy i  $N_{\parallel}$  se v našich podmínkách, kde  $\nabla n \parallel x$  a  $\omega$  je konstantní, zachovává.

Vraťme se nyní k rovnici 1.78 a zjednodušíme ji pomocí identity 1.80. Dosaďme do ní přibližný tvar řešení, který poskytuje metoda WKB (viz kapitola 2)

$$\vec{E} = \vec{E}^0 N_{\perp}^{-1/2}(x) \exp \left( i \int_{x_0}^x k_{\perp}(\xi) d\xi + ik_{\parallel}z - i\omega t \right) \quad (1.107)$$

a zanedbejme vzniklé členy s  $N'_{\perp}$  nebo  $N''_{\perp}$ . Vzniklou rovnici vydělme  $k_0^2$ ,  $N_{\perp}^{-1/2}$  a rovněž exponenciálou z výše uvedeného vztahu 1.107. Po všech těchto krocích získáváme

$$\begin{pmatrix} N_{\parallel}^2 - \varepsilon_{\perp} & -ig & -N_{\perp}N_{\parallel} \\ +ig & N_{\perp}^2 + N_{\parallel}^2 - \varepsilon_{\perp} & 0 \\ -N_{\perp}N_{\parallel} & 0 & N_{\perp}^2 - \varepsilon_{\parallel} \end{pmatrix} \vec{E}^0 = \vec{0} \quad (1.108)$$

Vyčíslíme-li determinant matice této soustavy a položíme-li jej roven nule, získáme následující rovnici pro  $N_{\perp}^2$  (viz [14])

$$AN_{\perp}^4 + BN_{\perp}^2 + C = 0 \quad (1.109)$$

kde

$$\begin{aligned} A &= \varepsilon_{\perp} \\ B &= (N_{\parallel}^2 - \varepsilon_{\perp})(\varepsilon_{\parallel} + \varepsilon_{\perp}) + g^2 \\ C &= \varepsilon_{\parallel} \left[ (N_{\parallel}^2 - \varepsilon_{\perp})^2 - g^2 \right] \end{aligned} \quad (1.110)$$

Vyřešíme-li tuto rovnici vzhledem k  $N_{\perp}^2$ , získáme

$$(N_{\perp}^2)_{1,2} = \frac{-B \pm \sqrt{B^2 - 4AC}}{2A} \quad (1.111)$$

Vidíme, že  $N_{\perp}^2$  mj. závisí na  $N_{\parallel}^2$ . Pokusme se tedy najít takovou hodnotu  $N_{\parallel}^2$ , pro kterou by  $N_{\perp}^2$  bylo kladnou veličinou a to pokud možno pro celý

požadovaný rozsah hustot, od okrajové vrstvy plazmatu, až po blízké okolí tzv. rezonanční hustoty  $n_r$ , tj. bodu, pro který platí

$$\lim_{n \rightarrow n_r^-} N_{\perp}^2(n) = +\infty \quad (1.112)$$

Z tvaru výrazu 1.111 vyplývá, že pro splnění kritéria rezonance 1.112 je nutné, aby

$$\lim_{n \rightarrow n_r^-} \varepsilon_{\perp}(n) = 0 \quad (1.113)$$

Uvědomíme-li si, že  $\varepsilon_{\perp}(0) = 1$ , a že se jedná o klesající funkci (dokonce je to lineární funkce hustoty), potom je již zřejmé, že tato funkce nabývá kladných hodnot pro  $n \in (0, n_r)$ . Z tohoto faktu vyplývá, že ke splnění požadavku  $N_{\perp}^2 > 0$  je nutné, aby i čítec výrazu 1.111 byl kladný. Zejména je tedy nutné zajistit, aby diskriminant v 1.111 byl nezáporný, v opačném případě by totiž zmíněný čítec obsahoval imaginární složku.

Nejprve uvažujme oblast plazmatu dále od okrajové vrstvy, kde platí

$$\begin{aligned} 0 < \varepsilon_{\perp} < 1 \\ |\varepsilon_{\parallel}| \gg \varepsilon_{\perp} \end{aligned} \quad (1.114)$$

Aproximujeme-li s pomocí těchto nerovností výraz  $B^2 - 4AC$  v podmínce pro nezáporný diskriminant

$$B^2 - 4AC \geq 0 \quad (1.115)$$

získáme

$$(\varepsilon_{\perp}^2 - g^2 - \varepsilon_{\parallel}\varepsilon_{\perp})^2 + \varepsilon_{\parallel}N_{\parallel}^2(\varepsilon_{\parallel}N_{\parallel}^2 - 2\varepsilon_{\perp}^2 + 2g^2 - 2\varepsilon_{\parallel}\varepsilon_{\perp} + 8\varepsilon_{\perp}^2 - 4\varepsilon_{\perp}N_{\parallel}^2) \geq 0 \quad (1.116)$$

Aproximujme takto podruhé a zanedbejme v 1.116 navíc kladný člen  $g^4$ . Takto získáme

$$\varepsilon_{\parallel}^2 N_{\parallel}^4 + 2\varepsilon_{\parallel}g^2 N_{\parallel}^2 - 2\varepsilon_{\parallel}^2 \varepsilon_{\perp} N_{\parallel}^2 \geq 0 \quad (1.117)$$

Vydělme nerovnost 1.117 (kladným)  $N_{\parallel}^2$ . Využijme toho, že v námi uvažované oblasti je  $\varepsilon_{\parallel} < 0$  a tedy  $|\varepsilon_{\parallel}| = -\varepsilon_{\parallel}$ . Po úpravě získáváme

$$N_{\parallel}^2 \geq \frac{2g^2}{|\varepsilon_{\parallel}|} + 2\varepsilon_{\perp} \quad (1.118)$$

Opět použijme nerovnost  $\varepsilon_{\perp} < 1$  a pomocí ní zjednodušíme 1.118 (zvětšíme dolní hranici) na

$$N_{\parallel}^2 \geq 2 \left( \frac{g^2}{|\varepsilon_{\parallel}|} + 1 \right) \quad (1.119)$$

Lze se snadno přesvědčit, např. opět pomocí aproximací využívajících nerovnosti 1.114, že pro  $N_{\parallel}^2$  splňující podmínku 1.119 nabývá výraz 1.110 pro  $B$  záporných hodnot, tj.  $-B > 0$ . Dále si uvědomme, že pro číselný výraz 1.111 (v případě kladného diskriminantu) platí

$$\lim_{\varepsilon_{\perp} \rightarrow 0^+} \left( -B \pm \sqrt{B^2 - 4AC} \right) = -B \pm |B| = -B \mp B \quad (1.120)$$

jak se lze přesvědčit např. pomocí Taylorova rozvoje odmocniny zde vystupující. Z toho již plyne, že má pro nás význam pouze první kořen (znaménko +) výrazu 1.111 pro  $N_{\perp}^2$ . A tedy podmínka 1.119 je podmínkou postačující k tomu, abychom vyhověli požadavku  $N_{\perp}^2 > 0$  (v oblastech hustot, pro které platí nerovnosti 1.114).

Nyní diskutujeme oblast hustot blízkou okrajové vrstvě. Pro dostatečně nízká  $n$  můžeme aproximovat

$$\begin{aligned} |g| &\ll 1 \\ \varepsilon_{\perp} &\approx 1 \\ \varepsilon_{\perp}^2 - g^2 &\approx 1 \end{aligned} \quad (1.121)$$

S využitím 1.121 tedy píšme

$$\begin{aligned} B &\approx (\varepsilon_{\parallel} + 1) (1 - N_{\parallel}^2) \\ C &\approx \varepsilon_{\parallel} (1 - N_{\parallel}^2)^2 \end{aligned} \quad (1.122)$$

a samozřejmě také  $A \approx 1$ , neboť  $A = \varepsilon_{\parallel}$ . S koeficienty  $A, B$  a  $C$  v tomto tvaru lze rovnici 1.109 upravit na následující

$$[N_{\perp}^2 - \varepsilon_{\parallel} (1 - N_{\parallel}^2)] [N_{\perp}^2 - (1 - N_{\parallel}^2)] = 0 \quad (1.123)$$

Nejprve se zaměříme na druhý součinitel (hranatou závorku) v rovnici 1.123. Jak jsme viděli výše, musí být  $N_{\parallel}^2 > 2$ , tedy tento člen nutně představuje evanescentní vlnu (a v podstatě odpovídá druhému z kořenů v 1.111). Naopak první součinitel je evanescentní pouze pro velmi úzkou oblast hustot, počínaje okrajovou vrstvou plazmatu až po bod, kde  $\varepsilon_{\parallel}$  dosahuje nulové hodnoty ( $\varepsilon_{\parallel}$  je rovněž lineární klesající funkcí a také platí  $\varepsilon_{\parallel}(0) = 1$ , ovšem má podstatně strmější průběh, než-li má  $\varepsilon_{\perp}$ ). Jakmile  $\varepsilon_{\parallel}$  překročí nulu a začíná nabývat záporných hodnot, stává se z prvního součinitele postupná vlna.

Shrneme-li poznatky získané v této části, můžeme konstatovat, že kritériem *dosazitelnosti* dolně hybridní rezonance je vztah 1.119, který uvádí např. [14]. Abychom získali názornější představu o tomto kritériu, provedme následující. Pomocí nerovnosti 1.103 aproximujme  $g$  v něm vystupující

$$g \approx \frac{\omega_{0,e}^2}{\omega \omega_{c,e}} \quad (1.124)$$

a dosadíme za  $\omega$  (jak do  $\varepsilon_{\parallel}$ , tak do takto upraveného  $g$ ) přibližnou hodnotu  $\omega_{LH}$  danou vztahem 1.104. Tímto způsobem dospějeme ke vztahu

$$N_{\parallel}^2 > 2 \left( \frac{\omega_{0,e}^2}{\omega_{c,e}^2} + 1 \right) \quad (1.125)$$

kde  $\omega_{0,e}$  je vyhodnocena v  $n_r$ , neboť právě v  $n_r$  nabývá pravá strana 1.125 nejvyšší hodnoty.

Připomeňme, že pro jednoduchost jsme v celém odvození předpokládali konstantní vnější mag. pole, což ovšem neodpovídá reálným situacím. Už jen z tohoto důvodu lze brát zde uvedené kritérium pouze jako orientační.

### 1.3.5 Povrchová impedance plazmatu

V této části odvodíme impedanci povrchové vrstvy plazmatu (tj. modelového rozhraní mezi vakuem a samotným plazmatem), která je v jednoduchých modelech (jako je ten náš) obvykle definována (viz [1]) jako

$$\varrho := - \lim_{x \rightarrow x_p+} \frac{E_z(x)}{H_y(x)} \quad (1.126)$$

kde  $x_p$  označuje souřadnici povrchové vrstvy plazmatu. Pomocí  $\varrho$  v části 1.4 poté určíme amplitudu odražené vlny od povrchové vrstvy.

Abychom byli schopni vyčíslit 1.126, musíme nejprve vyřešit rovnice pole uvnitř plazmatu. Přitom předpokládáme, že vlna, která (částečně) projde povrchovou vrstvou, postupuje dále do plazmatu a uvnitř něj se již neodráží zpět, tj. hledáme pouze řešení ve tvaru odcházející vlny. Povrchové vlny v našem modelu rovněž neuvažujeme.

V dalším textu této části uvažujeme nehomogenní plazma se vzrůstajícím lineárním profilem hustoty částic ve směru osy  $x$ , tj.

$$n(x) = \nu (x - x_p), \quad \nabla n(x) = (\nu, 0, 0), \quad \nu > 0 \quad (1.127)$$

O gradientu hustoty  $\nu$  předpokládáme, že není příliš strmý (upřesnění tohoto požadavku uvádíme v kapitole 2). Uvažované plazma je umístěno ve vnějším konstantním magnetickém poli, orientovaném ve směru osy  $z$ , tedy  $\vec{B}_0 = (0, 0, B_0)$ . Dále předpokládáme, že elektrické pole vlny má tvar

$$\vec{E} = \vec{E}(x) \exp [i (k_{\parallel} z - \omega t)] \quad (1.128)$$

kde  $\vec{E}(x) = (E_x(x), 0, E_z(x))$ .

Vraťme se nyní k rovnici 1.78 a upravme ji následujícím způsobem. Nejprve využijme identity 1.80. Poté do ní dosadíme tvar pole 1.128 a vydělme ji členem  $\exp [i (k_{\parallel} z - \omega t)]$ . Dále přejdeme k bezrozměrným souřadnicím

$$X := k_0 x, Y := k_0 y, Z := k_0 z \quad (1.129)$$

pro které platí následující operátorové identity

$$\partial_X \equiv \frac{1}{k_0} \partial_x, \partial_Y \equiv \frac{1}{k_0} \partial_y, \partial_Z \equiv \frac{1}{k_0} \partial_z \quad (1.130)$$

a nakonec vydělme takto získanou rovnici  $k_0^2$ . Po rozepsání do jednotlivých složek obdržíme následující soustavu rovnic

$$\begin{aligned} \left[ N_{\parallel}^2 - \tilde{\varepsilon}_{\perp}(X) \right] E_X(X) + i N_{\parallel} \partial_X E_Z(X) &= 0 \\ i \tilde{g}(X) E_X(X) &= 0 \\ i N_{\parallel} \partial_X E_X(X) - \left[ \tilde{\varepsilon}_{\parallel}(X) + \partial_X^2 \right] E_Z(X) &= 0 \end{aligned} \quad (1.131)$$

K používanému značení dodejme, že  $E_X(X) := E_x(x)$ ,  $E_Z(X) := E_z(x)$ ,  $\tilde{\varepsilon}_{\parallel}(X) := \varepsilon_{\parallel}(x)$ ,  $\tilde{\varepsilon}_{\perp}(X) := \varepsilon_{\perp}(x)$  a rovněž  $\tilde{g}(X) := g(x)$ .

V pravém okolí povrchové vrstvy, kde je  $n(x) =: \tilde{n}(X)$  blízké nule, můžeme aproximovat

$$\tilde{g} \approx 0, \tilde{\varepsilon}_{\perp} \approx 1 \quad (1.132)$$

a zjednodušit soustavu 1.131 na

$$\begin{aligned} (N_{\parallel}^2 - 1) E_X(X) + i N_{\parallel} \partial_X E_Z(X) &= 0 \\ i N_{\parallel} \partial_X E_X(X) - \left[ \tilde{\varepsilon}_{\parallel}(X) + \partial_X^2 \right] E_Z(X) &= 0 \end{aligned} \quad (1.133)$$

Aplikujme na první z rovnic 1.133 operátor  $\partial_X$ . Z takto upravené rovnice vyjádřeme člen  $\partial_X E_X(X)$  a dosadíme jeho vyjádření do druhé z rovnic 1.133. Po krátké úpravě získáme

$$\partial_X^2 E_Z(X) + (1 - N_{\parallel}^2) \tilde{\varepsilon}_{\parallel}(X) E_Z(X) = 0 \quad (1.134)$$

Dosadíme do rovnice 1.134 tvar řešení, který poskytuje metoda WKB

$$E_Z(X) \approx \sqrt{\frac{k_0}{\tilde{k}_{\perp}(X)}} \exp \left( \frac{i}{k_0} \int_{X_0}^X \tilde{k}_{\perp}(\xi) d\xi \right) E_Z^0 \quad (1.135)$$



kde  $\tilde{k}_\perp(X) := k_\perp(x)$ . Zanedbejme vzniklé členy, ve kterých vystupují derivace  $\tilde{k}_\perp$ . Po krátké úpravě získáme vztah<sup>5</sup>

$$\tilde{k}_\perp(X) = k_0 \sqrt{(1 - N_\parallel^2) \tilde{\varepsilon}_\parallel(X)} \quad (1.136)$$

Aproximujme  $\tilde{\varepsilon}_\parallel$  v něm vystupující

$$\tilde{\varepsilon}_\parallel(X) \approx 1 - \frac{\tilde{\omega}_{0,e}^2(X)}{\omega^2} \quad (1.137)$$

tedy oproti  $\omega^2$  zanedbejme  $\tilde{\omega}_{0,i}^2(X) := \omega_{0,i}^2(x)$ . Využijme toho, že  $\tilde{\omega}_{0,e}^2(X) := \omega_{0,e}^2(x)$  je v našich podmínkách lineární funkcí hustoty a vyjádřeme ji následujícím způsobem

$$\tilde{\omega}_{0,e}^2(X) = \frac{X - X_p}{X_\omega - X_p} \omega^2 = (X - X_p) \omega^2 \delta \quad (1.138)$$

kde  $X_\omega$  značí bod, pro nějž platí  $\tilde{\omega}_{0,e}(X_\omega) = \omega$  (plazmová rezonance) a který je tedy dán vztahem

$$X_\omega = \frac{\omega^2 \varepsilon_0 m_e k_0}{\nu e^2} + X_p \quad (1.139)$$

a kde symbol  $\delta$  označuje  $(X_\omega - X_p)^{-1}$ , tedy

$$\delta = \frac{1}{X_\omega - X_p} = \frac{\nu e^2}{\omega^2 \varepsilon_0 m_e k_0} \quad (1.140)$$

Vužijeme-li předchozích úprav, můžeme psát

$$\tilde{\varepsilon}_\parallel(X) \approx (X_\omega - X) \delta \quad (1.141)$$

a vztah 1.136 zapsat takto

$$\tilde{k}_\perp(X) = k_0 \sqrt{(1 - N_\parallel^2) (X_\omega - X) \delta} \quad (1.142)$$

Vidíme, že mohou nastat pouze dva případy, pro něž je  $\tilde{k}_\perp$  kladné, tj. kdy se uvažovaná vlna šíří (tj. není evanescentní)

1.  $N_\parallel^2 < 1$  a současně  $X_p < X < X_\omega$

---

<sup>5</sup>WKB řešení 1.135 jsme vybrali s  $+\tilde{k}_\perp$ , takže u odmocniny vybíráme kořen rovněž kladný.

2.  $N_{\parallel}^2 > 1$  a současně  $X > X_{\omega}$

přičemž  $N_{\parallel}$  uvažujeme pouze kladné.

Věnujme se nejdříve prvnímu případu. S využitím aproximace 1.141 můžeme rovnici 1.134 zapsat

$$\frac{d^2 E_Z}{dX^2}(X) - [(1 - N_{\parallel}^2) \delta] (X - X_{\omega}) E_Z(X) = 0 \quad (1.143)$$

V rovnici 1.143 provedme záměnu proměnných

$$\zeta := [(1 - N_{\parallel}^2) \delta]^{1/3} (X - X_{\omega}) \quad (1.144)$$

po které 1.143 nabývá podoby

$$\frac{d^2 \tilde{E}_Z}{d\zeta^2}(\zeta) - \zeta \tilde{E}_Z(\zeta) = 0 \quad (1.145)$$

kde  $\tilde{E}_Z(\zeta) := E_Z(X)$ . Rovnice tohoto tvaru je známa jako tzv. Stokesova<sup>6</sup> a její obecné řešení lze zapsat

$$\tilde{E}_Z(\zeta) = \alpha \text{Ai}(\zeta) + \beta \text{Bi}(\zeta) \quad (1.146)$$

kde Ai a Bi jsou tzv. Airyho integrální funkce a  $\alpha, \beta \in \mathbb{C}$  (viz [5]).

Funkce Bi však nevyhovuje přirozenému požadavku na omezenost polí. Pro  $\zeta > 0$  má průběh podobný exponenciálnímu, ovšem vzrůstajícímu a nikoliv klesajícímu průběhu, jak bychom od evanescentní vlny očekávali ( $\zeta > 0$  odpovídá  $X > X_{\omega}$ , tedy oblasti, kde výraz 1.142 nabývá ryze imaginárních hodnot). V tomto případě tedy pokládáme  $\beta = 0$ . Oproti tomu funkce Ai tento požadavek splňuje.

Nyní jsme tedy stanovili (až na násobek) čitatel zlomku, který vystupuje v definici 1.126. Jeho jmenovatel určíme již snadno a to pomocí rovnice 1.53 a první z rovnic 1.133. Uvědomíme-li si totiž, že el. pole tvaru 1.128 nezávisí na  $Y$  a tedy jedinou nenulovou magnetickou složkou plynoucí z rovnice 1.53 je

$$H_Y = i \sqrt{\frac{\varepsilon_0}{\mu_0}} (\partial_X E_Z - \partial_Z E_X) \quad (1.147)$$

a rovněž pomocí tvaru 1.128 zjistíme, že

$$\partial_Z E_X = i N_{\parallel} E_X \quad (1.148)$$

---

<sup>6</sup>Někdy též označována jako rovnice Airyho.

a konečně, vyjádříme-li pomocí první z rovnic 1.133 složku  $E_X$  na základě  $E_Z$ , získáme

$$H_Y = \frac{i}{(1 - N_{\parallel}^2)} \sqrt{\frac{\varepsilon_0}{\mu_0}} \partial_X E_Z \quad (1.149)$$

Potom tedy pro  $N_{\parallel}^2 < 1$  můžeme psát

$$\varrho(N_{\parallel}) = i \frac{\text{Ai}(\zeta_p)}{\text{Ai}'(\zeta_p)} \sqrt{\frac{\mu_0}{\varepsilon_0}} (1 - N_{\parallel}^2)^{2/3} \delta^{-1/3} \quad (1.150)$$

kde

$$\zeta_p = - (1 - N_{\parallel}^2)^{1/3} \delta^{-2/3} \quad (1.151)$$

Ve druhém z případů, tj. pro  $N_{\parallel}^2 > 1$  postupujme následovně. Napišme rovnici 1.143 takto

$$\frac{d^2 E_Z}{dX^2}(X) - [(N_{\parallel}^2 - 1) \delta] (X_{\omega} - X) E_Z(X) = 0 \quad (1.152)$$

a opět provedme záměnu proměnných, ovšem tentokrát

$$\zeta := [(N_{\parallel}^2 - 1) \delta]^{1/3} (X_{\omega} - X) \quad (1.153)$$

Tato záměna vede taktéž na Stokesovu rovnici, tj. na 1.145 a stejně jako v předchozím případě, hledáme její řešení, které by představovalo odcházející vlnu. Ovšem zde je třeba provést detailnější rozbor.

Nejprve umocňme výraz 1.136 a dosaďme do něj aproximaci 1.137, čímž získáme

$$\tilde{k}_{\perp}^2 = k_0^2 (1 - N_{\parallel}^2) \left( 1 - \frac{\tilde{\omega}_{0,e}^2}{\omega^2} \right) \quad (1.154)$$

Považujme nyní členy na pravé straně 1.154 za konstanty, až na  $\omega$ . Zderivujme 1.154 podle  $\tilde{k}_{\perp}$ . Po krátké úpravě získáváme

$$\frac{d\omega}{d\tilde{k}_{\perp}} = \frac{\tilde{k}_{\perp} \omega^3}{k_0^2 (1 - N_{\parallel}^2) \tilde{\omega}_{0,e}^2} \quad (1.155)$$

tedy výraz pro grupovou rychlost, který pro  $N_{\parallel}^2 > 1$  nabývá záporných hodnot. Abychom zachovali požadavek odcházející vlny, tj. takové, jejíž tok energie směřuje do plazmatu (kladný směr osy  $x$ ), musíme hledat řešení ve formě vlny postupující v záporném směru osy  $x$  (zpětné vlny), tj. řešení se záporným vlnovým číslem.

Vezměme tedy výraz 1.142, ovšem tentokrát se zápornou větví odmocniny na jeho pravé straně, a dosadíme jej do pravé strany WKB aproximace 1.135. Položme  $X_0 = X_\omega$  a integrujme. Takto získáme

$$E_Z^0 [(N_{\parallel}^2 - 1) (X - X_\omega) \delta]^{-1/4} \exp \left[ -i \frac{2}{3} (X - X_\omega)^{3/2} (N_{\parallel}^2 - 1)^{1/2} \delta^{1/2} \right] \quad (1.156)$$

Pokusme se tedy vyjádřit výraz tohoto tvaru pomocí lineární kombinace Airyho funkcí, resp. jejich asymptotických rozvoje.

Pro  $\zeta$  splňující

$$\frac{2\pi}{3} \leq \arg \zeta \leq \frac{4\pi}{3} \quad (1.157)$$

tedy i pro  $\zeta < 0$ , mají asymptotické rozvoje Airyho funkcí následující vyjádření (viz [5])

$$\text{Ai}(\zeta) \sim \frac{1}{2} \pi^{-1/2} \zeta^{-1/4} \left[ \exp \left( -\frac{2}{3} \zeta^{3/2} \right) + i \exp \left( \frac{2}{3} \zeta^{3/2} \right) \right] \quad (1.158)$$

$$\text{Bi}(\zeta) \sim \frac{1}{2} \pi^{-1/2} \zeta^{-1/4} \left[ i \exp \left( -\frac{2}{3} \zeta^{3/2} \right) + \exp \left( \frac{2}{3} \zeta^{3/2} \right) \right] \quad (1.159)$$

přičemž zlomkové mocniny  $\zeta$  jsou zde brány ve smyslu

$$\zeta^q = |\zeta^q| \exp(iq \arg \zeta) \quad (1.160)$$

kde  $q$  je příslušná zlomková mocnina.

Na základě výše uvedených vztahů zjišťujeme, že právě kombinací

$$\text{Ai}(\zeta) + i \text{Bi}(\zeta) \sim \frac{i}{\sqrt[4]{\pi^2 \zeta}} \exp \left( \frac{2}{3} \zeta^{3/2} \right) \quad (1.161)$$

získáme požadované řešení, jak se lze přesvědčit dosadíme-li za  $\zeta$  do pravé strany 1.161 definici 1.153.

Pro případ  $N_{\parallel}^2 > 1$  tak získáváme řešení Stokesovy rovnice

$$\tilde{E}_Z(\zeta) = \alpha [\text{Ai}(\zeta) + i \text{Bi}(\zeta)] \quad (1.162)$$

a zde tedy pro povrchovou impedanci platí

$$\varrho(N_{\parallel}) = i \frac{\text{Ai}(\zeta_p) + i \text{Bi}(\zeta_p)}{\text{Ai}'(\zeta_p) + i \text{Bi}'(\zeta_p)} \sqrt{\frac{\mu_0}{\varepsilon_0}} (N_{\parallel}^2 - 1)^{2/3} \delta^{-1/3} \quad (1.163)$$

kde

$$\zeta_p = (N_{\parallel}^2 - 1)^{1/3} \delta^{-2/3} \quad (1.164)$$

## 1.4 Podmínky na rozhraní

V této části sešijeme řešení rovnic pole na rozhraních jednotlivých prostředí. Nejprve na základě povrchové impedance určíme koeficient odrazu povrchové vrstvy plazmatu.

Přepíšme nyní výrazy 1.49 a 1.51 vyjadřující řešení složek  $E_z$  a  $H_y$  pro vakuum do bezrozměrných souřadnic 1.129

$$E_Z(X, Z) = k_0 \int_{-\infty}^{+\infty} \left[ \tilde{C}(N_{\parallel}) \exp(-iN_{\perp}X) + \tilde{D}(N_{\parallel}) \exp(iN_{\perp}X) \right] \exp(iN_{\parallel}Z) dN_{\parallel} \quad (1.165)$$

$$H_Y(X, Z) = \frac{k_0}{\varrho_0} \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{1}{N_{\perp}} \left[ \tilde{C}(N_{\parallel}) \exp(-iN_{\perp}X) - \tilde{D}(N_{\parallel}) \exp(iN_{\perp}X) \right] \exp(iN_{\parallel}Z) dN_{\parallel} \quad (1.166)$$

kde

$$N_{\perp} = \begin{cases} \sqrt{1 - N_{\parallel}^2} & , \text{ pro } N_{\parallel}^2 \leq 1 \\ i\sqrt{N_{\parallel}^2 - 1} & , \text{ pro } N_{\parallel}^2 > 1 \end{cases} \quad (1.167)$$

a také

$$\tilde{C}(N_{\parallel}) := C(k_{\parallel}), \quad \tilde{D}(N_{\parallel}) := D(k_{\parallel}) \quad (1.168)$$

$$\varrho_0 := \sqrt{\frac{\mu_0}{\varepsilon_0}} \quad (1.169)$$

Vyjádříme koeficient odrazu jako poměr spektrálních hustot odražené a dopadající vlny, tedy

$$r(N_{\parallel}) = \frac{\tilde{C}(N_{\parallel})}{\tilde{D}(N_{\parallel})} \quad (1.170)$$

Položme do rovnosti  $\varrho$  vypočtené v části 1.3.5 (vztah 1.150 resp. 1.163) a zápornou hodnotu podílu spektrálních hustot složek  $E_Z(X, Z)$  a  $H_Y(X, Z)$ , tj. zápornou hodnotu podílu integrandů v 1.165 a 1.166

$$\varrho = \varrho_0 N_{\perp} \frac{\tilde{D}(N_{\parallel}) \exp(iN_{\perp}X_p) + \tilde{C}(N_{\parallel}) \exp(-iN_{\perp}X_p)}{\tilde{D}(N_{\parallel}) \exp(iN_{\perp}X_p) - \tilde{C}(N_{\parallel}) \exp(-iN_{\perp}X_p)} \quad (1.171)$$

Pomocí 1.170 a 1.171 se lze již snadno přesvědčit, že platí

$$r(N_{\parallel}) = \frac{\varrho(N_{\parallel}) - \varrho_0 N_{\perp}}{\varrho(N_{\parallel}) + \varrho_0 N_{\perp}} \exp(i2N_{\perp} X_p) \quad (1.172)$$

Nyní na základě podmínek spojitosti pro  $E_Z$  (tečnou složku el. pole) v bodě  $X = 0$  (ústí grilu), určíme závislost spektrální hustoty<sup>7</sup> vakuové vlny na amplitudách odražených vln ve vlnovodech.

Podmínka spojitosti vyžaduje, aby byla splněna následující rovnost

$$k_0 \int_{-\infty}^{+\infty} \tilde{D}(N_{\parallel}) [1 + r(N_{\parallel})] \exp(iN_{\parallel} Z) dN_{\parallel} = \sum_{p=1}^N \tilde{\chi}_p \exp(i\varphi_p) \left\{ A_p + B_{p,0} + \sum_{m=1}^{+\infty} B_{p,m} \cos \left[ \frac{m\pi}{bk_0} (Z - Z_p) \right] \right\} \quad (1.173)$$

kde

$$\tilde{\chi}_p(Z) := \chi_p(0, z) \quad (1.174)$$

Levá strana 1.173 tedy představuje tečnou složku el. pole ve vakuu (výraz 1.165), pravá strana představuje tutéž složku uvnitř vlnovodů<sup>8</sup> (výraz 1.42), přičemž oba výrazy jsou vyhodnoceny pro  $X = 0$ .

Vynásobme rovnost 1.173 výrazem  $\exp(-i\tilde{N}_{\parallel} Z)$  a integrujme ji podle  $Z$  přes celou reálnou osu. Zaměňme pořadí integrace a využijme následujících vztahů plynoucích z teorie zobecněných funkcí (viz např. [18])

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \exp[iZ(N_{\parallel} - \tilde{N}_{\parallel})] dZ = 2\pi \delta(N_{\parallel} - \tilde{N}_{\parallel}) \quad (1.175)$$

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \delta(N_{\parallel} - \tilde{N}_{\parallel}) \tilde{D}(N_{\parallel}) [1 + r(N_{\parallel})] dN_{\parallel} = \tilde{D}(\tilde{N}_{\parallel}) [1 + r(\tilde{N}_{\parallel})] \quad (1.176)$$

kde  $\delta$  zde pro tentokrát představuje Diracovu delta funkci.

Po těchto úpravách získáváme vztah

$$\tilde{D}[1 + r] = \sum_{p=1}^N \exp(i\varphi_p) \left\{ (A_p + B_{p,0}) I_{p,0} + \sum_{m=1}^{+\infty} B_{p,m} I_{p,m} \right\} \quad (1.177)$$

<sup>7</sup>Přesněji prostorové spektrální hustoty.

<sup>8</sup>Pravá strana díky funkci  $\tilde{\chi}_p$  vystihuje rovněž skutečnost, že na čelních plochách přepážek grilu je tečná složka el. pole nulová.

kde

$$I_{p,m}(\tilde{N}_{\parallel}) = \frac{1}{2\pi k_0} \int_{-\infty}^{+\infty} \tilde{\chi}_p \cos \left[ \frac{m\pi}{bk_0} (Z - Z_p) \right] \exp(-i\tilde{N}_{\parallel} Z) dZ \quad (1.178)$$

$$= -\frac{i\tilde{N}_{\parallel} \exp(-i\tilde{N}_{\parallel} Z_p)}{2\pi k_0 \left[ \tilde{N}_{\parallel}^2 - \left( \frac{m\pi}{bk_0} \right)^2 \right]} \left[ 1 - (-1)^m \exp(-i\tilde{N}_{\parallel} bk_0) \right] \quad (1.179)$$

Využijme nyní podmínky spojitosti pro tečnou složku mag. pole (tj. pro  $H_Y$ ) v ústích vlnodů a za pomoci předchozích vztahů určíme závislost amplitud odražených vln ve vlnovodech na amplitudách vln excitovaných. Položme tedy do rovnosti výraz 1.166 a 1.44

$$k_0 \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\tilde{D}(N_{\parallel})}{N_{\perp}} [1 - r(N_{\parallel})] \exp(iN_{\parallel} Z) dN_{\parallel} = \sum_{p=1}^N \tilde{\chi}_p \exp(i\varphi_p) \left\{ A_p - B_{p,0} + \sum_{m=1}^{+\infty} \frac{iB_{p,m}}{\gamma_m} \cos \left[ \frac{m\pi}{bk_0} (Z - Z_p) \right] \right\} \quad (1.180)$$

Zde jsme pro jednodušší zápis označili

$$\gamma_m = \sqrt{\left( \frac{m\pi}{bk_0} \right)^2 - 1} \quad (1.181)$$

Ze vztahu 1.177 vyjádříme  $\tilde{D}$  a dosadíme jej do 1.180. Poté rovnost 1.180 vynásobíme výrazem

$$\tilde{\chi}_q \cos \left[ \frac{l\pi}{bk_0} (Z - Z_q) \right] \quad (1.182)$$

a integrujme ji podle  $Z$  po celé reálné ose. Po těchto úpravách nabývá 1.180 tvar

$$\sum_{p=1}^N \exp(i\varphi_p) \left\{ (A_p + B_{p,0}) K_{p,q,0,l} + \sum_{m=1}^{+\infty} B_{p,m} K_{p,q,m,l} \right\} = \sum_{p=1}^N \exp(i\varphi_p) \cdot \left\{ (A_p - B_{p,0}) \delta_{pq} \delta_{0l} v_l b + \sum_{m=1}^{+\infty} \frac{iB_{p,m}}{\gamma_m} \delta_{pq} \delta_{ml} v_l b \right\} \quad (1.183)$$

kde

$$K_{p,q,m,l} = 2\pi k_0 \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{1}{N_{\perp}} \frac{1-r}{1+r} I_{p,m} I_{q,l}^* dN_{\parallel} \quad (1.184)$$

a také

$$v_l = \begin{cases} \frac{1}{2} & , \text{ pro } l \neq 0 \\ 1 & , \text{ pro } l = 0 \end{cases} \quad (1.185)$$

Poznamenejme, že  $I_{q,l}^*$  značí komplexně sdružené  $I_{q,l}$ .

Pro zadané amplitudy excitovaných vln, tj.  $A_p$ , tedy 1.183 představuje soustavu rovnic pro neznámé amplitudy odražených vln ve vlnovodech, tj.  $B_{p,m}$ . Upravme ji tedy tak, aby na její pravé straně vystupovaly pouze známé veličiny

$$\begin{aligned} \sum_{p=1}^N \sum_{m=1}^{+\infty} \exp(i\varphi_p) B_{p,m} \left[ \delta_{m0} (K_{p,q,0,l} + \delta_{pq} \delta_{0l} v_l b) + K_{p,q,m,l} - \frac{i}{\gamma_m} \delta_{pq} \delta_{ml} v_l b \right] = \\ = \sum_{p=1}^N \exp(i\varphi_p) A_p (\delta_{pq} \delta_{0l} v_l b - K_{p,q,0,l}) \end{aligned} \quad (1.186)$$

Řešením soustavy 1.186 získáme amplitudy odražených vln a amplitudy evanescentních vln v jednotlivých vlnovodech. Pomocí vztahu 1.177 následně můžeme určit pole ve vakuové mezeře před grilem, a pomocí rovnic z 1.3.5 i pole v plazmatu. Tímto by byl problém vyzařování grilu plně vyřešen.

Tato práce si neklade za cíl řešit rovnici (soustavu lineárních rovnic) 1.186. K jejímu řešení však poznamenejme, že tato soustava není jednoznačně řešitelná. Má nekonečně mnoho řešení, z nichž pouze jedno představuje fyzikálně použitelný výsledek. Nejednoznačnost řešení úlohy je způsobena zjednodušenou formulací naší vlnovodné struktury, která v ústí obsahuje hrany.

Problém difrakce vln na překážkách s hranami je diskutován např. v knize [7]. V [7] se ukazuje, že problém je způsoben tím, že na hraně není definován směr vnější normály, takže zde nejde dobře určit okrajovou podmínku pro elektrické pole. El. pole na hraně obecně diverguje. V [7] se rovněž ukazuje, že fyzikálně správné řešení úlohy difrakce je takové, při kterém hrana nevyzařuje EM vlny. Rozbor v knize [7] také zmiňuje původní práce v této oblasti, např. [13].

Numerické řešení soustav tohoto typu je studováno např. v knize [10]. Pokud řešíme tuto soustavu numericky, tedy vybíráme konečný počet modů, pak každým tímto výběrem získáváme právě jedno řešení (obecně různé pro každý výběr). Také se ukazuje, že v našem případě, kde vlnovody mají stejnou



šířku, skutečně stačí vzít v každém vlnovodu stejný počet módů (jak tomu činíme), abychom dostali fyzikálně správné řešení.

## 1.5 Prostorové spektrum

V této části na základě Poyntingovy věty určíme tok energie pole jednotlivými vlnovody a vakuovou mezerou před grilem. Budeme tedy vycházet ze vztahu

$$\vec{S} = \Re \vec{E} \times \Re \vec{H} \quad (1.187)$$

Z 1.187 ihned plyne, že v našem případě je složka  $S_y$  nulová. Zbývá tedy oddiskutovat už jen další dvě. My se zaměříme zejména na  $S_x$ , která je z hlediska zákona zachování energie nejzajímavější.

Uvažme nejprve situaci uvnitř  $p$ -tého vlnovodu, a to v dostatečné vzdálenosti od ústí, abychom mohli zanedbat evanescentní mody. Spočtíme časovou střední hodnotu (středujeme přes periodu  $T = 2\pi/\omega$ ) hustoty toku energie ve směru osy  $x$

$$\begin{aligned} \overline{S_{x,p}} &= -\frac{1}{T} \int_0^T dt (\Re E_{z,p} \Re H_{y,p}) = -\frac{1}{2} \Re [E_{z,p}(x, z) H_{y,p}^*(x, z)] \\ &= \frac{1}{2\varrho_0} (A_p^2 - |B_{p,0}|^2) \end{aligned} \quad (1.188)$$

Samotný tok energie  $p$ -tým vlnovodem, resp. časovou střední hodnotu toku připadajícího na  $1m$  výšky vlnovodu, získáme integrací vztahu 1.188 přes jeho příčný rozměr

$$P_{x,p} = \int_{z_p}^{z_p+b} dz \overline{S_{x,p}} = \frac{b}{2\varrho_0} (A_p^2 - |B_{p,0}|^2) \quad (1.189)$$

Nyní určíme tok energie<sup>9</sup> vakuovou mezerou před grilem. Uvažujme nejprve případ, kdy  $N_{\parallel} < 1$  a tedy  $N_{\perp} \in \mathbb{R}$ . V tomto případě lze psát

$$P_x = \frac{1}{2k_0} \int_{\mathbb{R}} dZ \Re \left( E_Z(X, Z) \tilde{H}_Y^*(X, Z) \right) \quad (1.190)$$

---

<sup>9</sup>Oplet se přísně vzato jedná o časovou střední hodnotu toku připadajícího na  $1m$  výšky, ovšem pro jednoduchost už dále nebudeme striktně rozlišovat tyto dva pojmy.

$$P_x = \frac{k_0}{2\varrho_0} \iiint_{\mathbb{R}^3} dZ dN_{\parallel} d\tilde{N}_{\parallel} \frac{1}{\tilde{N}_{\perp}} \Re \left\{ \left[ \tilde{D} \exp(i\psi_1) + \tilde{C} \exp(i\psi_2) \right] \cdot \left[ \tilde{D}^* \exp(-i\psi_1) - \tilde{C}^* \exp(-i\psi_2) \right] \right\} \quad (1.191)$$

$$P_x = \frac{\pi k_0}{\varrho_0} \int_{\mathbb{R}} d\tilde{N}_{\parallel} \frac{1}{\tilde{N}_{\perp}} \left\{ \left| \tilde{D}(\tilde{N}_{\parallel}) \right|^2 \left[ 1 - \left| \tilde{r}(\tilde{N}_{\parallel}) \right|^2 \right] \right\} =: \int_{\mathbb{R}} d\tilde{N}_{\parallel} \Upsilon(\tilde{N}_{\parallel}) \quad (1.192)$$

kde jsme v rámci usnadnění zapsali výrazy 1.165 a 1.166 v této podobě

$$E_Z(X, Z) = k_0 \int_{\mathbb{R}} dN_{\parallel} \left[ \tilde{D} \exp(i\psi_1) + \tilde{C} \exp(i\psi_2) \right] \quad (1.193)$$

$$\tilde{H}_Y(X, Z) = \frac{k_0}{\varrho_0} \int_{\mathbb{R}} d\tilde{N}_{\parallel} \frac{1}{\tilde{N}_{\perp}} \left[ \tilde{D} \exp(i\psi_1) - \tilde{C} \exp(i\psi_2) \right] \quad (1.194)$$

a při úpravách jsme rovněž využili analogie vztahů 1.175 a 1.176.

Pokud zanedbáváme disipativní jevy (jak tomu zde činíme), vlny s  $N_{\parallel} < 1$  se odrážejí, tj.

$$\left| \tilde{r} \right| \equiv 1, P_x \equiv 0$$

Výpočet toku energie v případě, kdy  $N_{\parallel} > 1$  a tedy  $N_{\perp}$  je ryze imaginární, je naprosto analogický. Pro další účely si označme

$$N_{\perp} =: i\kappa, \kappa > 0 \quad (1.195)$$

Zde po provedení úprav shodných s předchozím případem dostáváme

$$P_x = \frac{\pi k_0}{\varrho_0} \int_{\mathbb{R}} d\tilde{N}_{\parallel} \left\{ \frac{1}{\tilde{\kappa}} \left| \tilde{D}(\tilde{N}_{\parallel}) \right|^2 \left[ \left| \tilde{r}^*(\tilde{N}_{\parallel}) \right|^2 - \left| \tilde{r}(\tilde{N}_{\parallel}) \right|^2 \right] \right\} \quad (1.196)$$

$$=: \int_{\mathbb{R}} d\tilde{N}_{\parallel} \Upsilon(\tilde{N}_{\parallel})$$

### 1.5.1 Spektrum LH grilu pro tokamak Compass-D

Na závěr této kapitoly uvádíme graf (obrázek 1.2) prostorového spektra výkonu (resp. relativní spektrální hustoty časové střední hodnoty toku energie) LH grilu pro tokamak Compass-D. Tento graf je výsledkem numerického výpočtu provedeného v laboratořích UKAEA<sup>10</sup> Culham Science Center. Výpočet byl založen na obdobném modelu<sup>11</sup>, jaký prezentuje tato práce. Poznamenejme, že tento graf nezobrazuje hodnoty spektra v okolí intervalu  $N_{\parallel} \in (-1, 1)$ , tj. vynechává zejména singularity v bodech  $N_{\parallel} = \pm 1$  (ačkoliv jsou to singularity integrabilní).

Tabulka 1.1 uvádí hodnoty hlavních parametrů použité při výpočtu tohoto grafu.

K výsledkům zmíněného numerického výpočtu dodejme, že odražený výkon tvoří 8,3% celkového. Směrnost (directivity), která je definována jako

$$\varsigma = \int_0^{+\infty} dN_{\parallel} \Upsilon_r(N_{\parallel}) - \int_{-\infty}^0 dN_{\parallel} \Upsilon_r(N_{\parallel}) \quad (1.197)$$

kde

$$\Upsilon_r(N_{\parallel}) = \Upsilon(N_{\parallel}) \left( \int_{\mathbb{R}} d\tilde{N}_{\parallel} \Upsilon(\tilde{N}_{\parallel}) \right)^{-1} \quad (1.198)$$

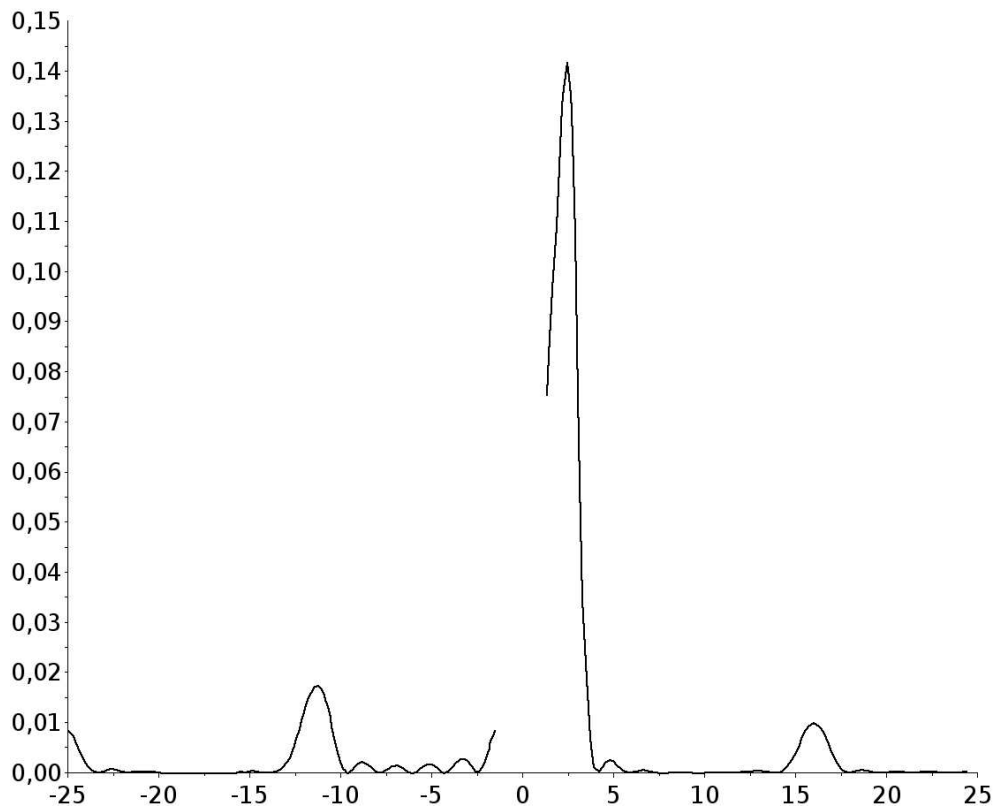
značí relativní spektrální hustotu časové střední hodnoty toku energie, zde nabývá hodnoty  $\varsigma = 81,9\%$ . Tedy zvolené fázování (vzájemný fázový posuv každé jednotlivé dvojice sousedních vlnovodů)  $\Delta\varphi_p = \pi/3$  zde představuje typickou konfiguraci pro dolně hybridní generaci toroidálního proudu - LHCD<sup>12</sup>.

---

<sup>10</sup>United Kingdom Atomic Energy Authority

<sup>11</sup>Za povšimnutí stojí jeden důležitý rozdíl oproti našemu přístupu - model použitý v Culham Science Center uvažuje vlnovody konečné výšky.

<sup>12</sup>Lower Hybrid Current Drive



Obrázek 1.2: Graf prostorového spektra výkonu v oblasti  $N_{\parallel} \in (-25, 25)$

počet vlnovodů	$N = 8$
šířka vlnovodu	$b = 1,48cm$
výška vlnovodu	$h = 16,50cm$
tloušťka dělicí desky	$d = 0,20cm$
frekvence zdroje	$f = 1,30GHz$
fázování	$\Delta\varphi_p = \pi/3$
relativní amplituda	$A_{p,r} = 1$
gradient plazmatu	$\nu = 2 \times 10^{11}cm^{-4}$
hustota plazmatu	$n = 1 \times 10^{11}cm^{-3}$

Tabulka 1.1: Hodnoty parametrů použité při výpočtu grafu

# Kapitola 2

## Metoda WKB

V této kapitole se věnujeme přibližné metodě řešení rovnic popisujících šíření EM vln v nehomogenním plazmatu. Konkrétně se zde zaměříme na principy metody WKB<sup>1</sup>.

### 2.1 Motivace

Uvažujme nyní nehomogenní plazma s gradientem hustoty

$$\nabla n = \left( \frac{dn}{dx}(x), 0, 0 \right) \quad (2.1)$$

a bez přítomnosti vnějšího magnetického pole. Pokusme se nalézt takové řešení Maxwellových rovnic 1.53 a 1.76, které by představovalo vlnu šířící se v kladném směru osy  $x$  a podléhalo časové závislosti  $\exp(-i\omega t)$ .

V nepřítomnosti vnějšího magnetického pole, tj. s  $\vec{B}_0 = \vec{0}$ , je  $g = 0$  a  $\varepsilon_{\perp} = \varepsilon_{\parallel}$ . V důsledku toho tenzor permitivity 1.73 nabývá diagonálního tvaru

$$(\varepsilon_{\beta}^{\alpha}) = \varepsilon_0 \varepsilon_{\parallel} (\delta_{\beta}^{\alpha}) = \varepsilon_0 \begin{pmatrix} \varepsilon_{\parallel} & 0 & 0 \\ 0 & \varepsilon_{\parallel} & 0 \\ 0 & 0 & \varepsilon_{\parallel} \end{pmatrix} \quad (2.2)$$

Rozepíšeme-li zmíněné rovnice 1.53 a 1.76 do jednotlivých složek, získáme následující dvě sousatvy

$$H_x = 0 \quad (2.3)$$

$$-\partial_x E_z = i\omega\mu_0 H_y \quad (2.4)$$

$$\partial_x E_y = i\omega\mu_0 H_z \quad (2.5)$$

---

<sup>1</sup>Wentzel-Kramers-Brillouin

$$E_x = 0 \quad (2.6)$$

$$\partial_x H_z = i\omega\varepsilon_0\varepsilon_{\parallel} E_y \quad (2.7)$$

$$-\partial_x H_y = i\omega\varepsilon_0\varepsilon_{\parallel} E_z \quad (2.8)$$

Rovnice 2.4 spolu s rovnicí 2.8 tvoří vzhledem k ostatním nezávislý pár a stejně tak dvojice 2.5, 2.7 je nezávislá. Jelikož jsou tyto páry rovnic naprosto analogické, stačí věnovat pozornost jen jednomu z nich, např. páru 2.4, 2.8.

Položme si otázku, zda by řešením těchto dvou rovnic mohla být rovinná *harmonická* vlna, tj. zda by prostorovou závislost jak  $E_z$ , tak  $H_y$  mohla popisovat funkce  $\exp(i\phi)$ , kde pro  $\phi$  platí

$$\phi(x) = kx \quad (2.9)$$

kde  $k = k_x$  je *konstanta*, tedy  $\phi$  je zde *lineární* funkcí polohy. Rychlou odpověď získáme, vezmeme-li složky  $E_z$ ,  $H_y$  ve tvaru

$$E_z = E_z^0 \exp[i(\phi - \omega t)] \quad (2.10)$$

$$H_y = H_y^0 \exp[i(\phi - \omega t)] \quad (2.11)$$

kde  $E_z^0, H_y^0 \in \mathbb{C}$ , a dosadíme-li je do uvažovaného páru rovnic 2.4, 2.8. Po dosazení a krátké úpravě získáme následující dvojici rovnic pro funkci  $\phi$

$$\frac{d\phi}{dx}(x) = -\omega\mu_0 \frac{H_y^0}{E_z^0} \quad (2.12)$$

$$\frac{d\phi}{dx}(x) = -\omega\varepsilon_0 \frac{E_z^0}{H_y^0} \varepsilon_{\parallel}(x) \quad (2.13)$$

První z těchto rovnic sice vede na  $\phi$  jako lineární funkci polohy, ovšem druhá z nich požaduje, aby

$$\phi(x) = -\omega\varepsilon_0 \frac{E_z^0}{H_y^0} \int_{x_0}^x \varepsilon_{\parallel}(\xi) d\xi \quad (2.14)$$

kde  $x_0$  je libovolné pevné, pro které má výraz 2.14 smysl. Tímto na naši otázku dostáváme zápornou odpověď. Zároveň však vztah 2.14 představuje myšlenku, která je, jak uvidíme dále, velice blízká metodě WKB.

## 2.2 Princip zobecněné fáze

Dříve, než přikročíme k samotnému odvození základního principu metody WKB, učinme ještě jeden přípravný krok. Vyjádřeme z rovnice 2.4 složku  $H_y$

a dosadíme ji do 2.8. Po krátké úpravě zahrnující zkrácení členem  $\exp(-i\omega t)$  takto získáme rovnici

$$\frac{d^2 E_z}{dx^2}(x) = -k_0^2 \varepsilon_{\parallel}(x) E_z(x) \quad (2.15)$$

přičemž zde již používáme symbolou  $\frac{d}{dx}$ , neboť zde již není přítomen člen časové závislosti a tedy jedinou proměnnou zůstává  $x$ .

Nyní se pokusme najít přibližné řešení rovnice 2.15 ve tvaru

$$E_z = E_z^0 \exp(i\phi) \quad (2.16)$$

přičemž na tvar  $\phi$  tentokrát nečiníme výchozí požadavky. Naopak, dosazením výrazu 2.16 do rovnice 2.15 a krátkou úpravou získáme pro  $\phi$  rovnici

$$\phi'^2 = i\phi'' + k_0^2 \varepsilon_{\parallel} \quad (2.17)$$

na jejímž základě se pokusíme, alespoň přibližně, tvar  $\phi$  určit.

V prvním přiblížení při řešení rovnice 2.17 zanedbejme  $\phi''$ . Vyjádřeme  $\phi'$  a jeho zderivováním získáme přibližné vyjádření  $\phi''$ . Tedy prozatím

$$\begin{aligned} \phi' &\approx \pm k_0 \varepsilon_{\parallel}^{1/2} \\ \phi'' &\approx \pm \frac{k_0 \varepsilon'_{\parallel}}{2\varepsilon_{\parallel}^{1/2}} \end{aligned} \quad (2.18)$$

Ve druhém přiblížení nahradíme  $\phi''$  v rovnici 2.17 jeho aproximací 2.18 a vyjádřeme

$$\phi' \approx \pm k_0 \varepsilon_{\parallel}^{1/2} \left( 1 \pm \frac{i\varepsilon'_{\parallel}}{2k_0 \varepsilon_{\parallel}^{3/2}} \right)^{1/2} \approx \pm k_0 \varepsilon_{\parallel}^{1/2} + \frac{i\varepsilon'_{\parallel}}{4\varepsilon_{\parallel}} \quad (2.19)$$

kde jsme ve druhém kroku použili Taylorův rozvoj druhé odmocniny do prvního řádu, z čehož také vyplývá, že musíme splnit podmínku

$$\left| \frac{\varepsilon'_{\parallel}}{2k_0 \varepsilon_{\parallel}^{3/2}} \right| < 1 \quad (2.20)$$

Integrací rovnice 2.19 dostáváme

$$\phi(x) \approx \pm k_0 \int_{x_0}^x \varepsilon_{\parallel}^{1/2}(\xi) d\xi + i \ln \left( \varepsilon_{\parallel}^{1/4}(x) \right) \quad (2.21)$$

a tedy přibližné řešení rovnice 2.15 zní

$$E_z(x) \approx E_z^0 \varepsilon_{\parallel}^{-1/4}(x) \exp \left( \pm i k_0 \int_{x_0}^x \varepsilon_{\parallel}^{1/2}(\xi) d\xi \right) \quad (2.22)$$

Pomocí rovnice 2.4 potom už snadno získáme

$$H_y(x) \approx \frac{iE_z^0}{\omega\mu_0} \exp \left( \pm i k_0 \int_{x_0}^x \varepsilon_{\parallel}^{1/2}(\xi) d\xi \right) \left[ -\frac{1}{4} \varepsilon_{\parallel}^{-5/4}(x) \varepsilon'_{\parallel}(x) \pm i k_0 \varepsilon_{\parallel}^{1/4}(x) \right] \quad (2.23)$$

a po zanedbání členu obsahujícího  $\varepsilon'_{\parallel}(x)$  dostáváme

$$H_y(x) \approx \mp \sqrt{\frac{\varepsilon_0}{\mu_0}} E_z^0 \varepsilon_{\parallel}^{1/4}(x) \exp \left( \pm i k_0 \int_{x_0}^x \varepsilon_{\parallel}^{1/2}(\xi) d\xi \right) \quad (2.24)$$

Výrazy 2.22 a 2.24 tedy představují přibližná řešení rovnic 2.4 a 2.8 metodou WKB. Zapišme je ve více názornějším tvaru. Ve všech předchozích odvozeních jsme předpokládali  $\vec{B}_0 = \vec{0}$  a pokud tento předpoklad zohledníme i v disperzním vztahu 1.92, získáme jednoduchý vztah mezi indexem lomu  $N$  a složkou  $\varepsilon_{\parallel}$  tenzoru permitivity

$$N^2(x) = \varepsilon_{\parallel}(x) \quad (2.25)$$

potom tedy můžeme např. výraz 2.22 zapsat

$$E_z(x) \approx E_z^0 N^{-1/2}(x) \exp \left( \pm i \int_{x_0}^x k(\xi) d\xi \right) \quad (2.26)$$

kde jsme využili vztahu  $k_0 N = k$  a také  $k = k_x$  (jeden z našich úvodních požadavků na řešení odpovídá vlnovému vektoru ve směru osy  $x$ ). Závěrem této části poznamenejme, že integrál v argumentu exponenciální funkce vystupující ve výrazu 2.26 je obvykle nazýván *zobecněná fáze*<sup>2</sup> (viz [5]).

## 2.3 Podmínky platnosti

Již během odvozování v předchozí části jsme například požadovali platnost podmínky 2.20 a při přechodu od 2.23 k 2.24 jsme zanedbávali. Podívejme

---

<sup>2</sup>Někdy též eikonál.



se proto na otázku platnosti WKB řešení důkladněji. Konkrétně, určíme podmínky pro platnost přibližného řešení 2.26 rovnice 2.15.

Vynásobme rovnici 2.15  $N^{1/2}$  a dosadíme do ní přibližné řešení 2.26. Po zkrácení exponenciál a  $E_z^0$  získáme

$$\left[ 3 \left( \frac{N'}{2N} \right)^2 - \frac{N''}{2N} \right] - k_0^2 N^2 = -k_0^2 N^2 \quad (2.27)$$

Pohledem na 2.27 snadno zjistíme, že je nutné zajistit, aby členy v hranaté závorce byly zanedbatelně malé oproti zbývajícím členům, tj. oproti  $k_0^2 N^2$ . Tedy podmínka platnosti WKB řešení zní

$$\frac{1}{k_0^2} \left| 3 \left( \frac{N'}{2N^2} \right)^2 - \frac{N''}{2N^2} \right| \ll 1 \quad (2.28)$$

Tento vztah lze vzít jako definici pomalu se měnícího nehomogenního prostředí. Z 2.28 vyplývá zejména to, že jak  $N'$ , tak  $N''$  musí být dostatečně malé, ovšem samotné  $N$  nikoliv. Zvláště tedy v oblastech, kde je  $N$  blízké nule, WKB řešení pozbývá platnosti.

# Literatura

- [1] J. F. Baranov and O. N. Scherbinin. Excitation of slow electromagnetic waves used for plasma heating in lower hybrid frequency range. *Fizika plazmy*, 3(2):246–255, 1977.
- [2] P. Bonoli. Linear theory of lower hybrid heating. *IEEE Transactions on Plasma Science*, PS-12(2):95–107, 1984.
- [3] M. Brambilla. Slow-wave launching at lower hybrid frequency using a phased waveguide array. *Nuclear Fusion*, 16(1):47–54, 1976.
- [4] M. Brambilla. Waveguide launching of lower hybrid waves. *Nuclear Fusion*, 19(10):1343–1357, 1979.
- [5] K. G. Budden. *Radio Waves in the Ionosphere*. Cambridge, 1961.
- [6] F. F. Chen. *Úvod do fyziky plazmatu*. ACADEMIA, Praha, 1984.
- [7] D. S. Jones. *Theory of Electromagnetism*. Pergamon Press, Oxford, 1964.
- [8] V. Kopecký and J. Preinhaelter. *Linear Mode Conversion in an Inhomogeneous Magnetized Plasma*. ACADEMIA, Praha, 1983.
- [9] N. A. Krall and A. W. Trivelpiece. *Principles of Plasma Physics*. McGraw-Hill, 1973.
- [10] R. Mitra and S. W. Lee. *Analytical techniques in the theory of guided waves*. Macmillan, New York, 1971.
- [11] J. Pytlíček. *Lineární algebra a geometrie*. Vydavatelství ČVUT, Praha, 2002.
- [12] V. D. Shafranov. Electromagnetic waves in a plasma. *Reviews of plasma physics*, 3, 1966.

- [13] A. Sommerfeld. *Math. Ann.*, 47:317, 1896.
- [14] T. H. Stix. *The Theory of Plasma Waves*. McGraw-Hill, 1962.
- [15] J. A. Stratton. *Teorie elektromagnetického pole*. SNTL, 1961.
- [16] V. Votruba and Č. Muzikář. *Theorie elektromagnetického pole*. ČSAV, 1955.
- [17] I. Štoll and J. Tolar. *Teoretická fyzika*. Vydavatelství ČVUT, Praha, 2004.
- [18] P. Šťovíček. *Metody matematické fyziky I*. Vydavatelství ČVUT, Praha, 2006.

## Prohlášení

Prohlašuji, že jsem svou bakalářskou práci vypracoval samostatně a použil jsem pouze podklady (literaturu, projekty, SW atd.) uvedené v příloženém seznamu.

Nemám závažný důvod proti užití tohoto školního díla ve smyslu § 60 Zákona č.121/2000 Sb. , o právu autorském, o právech souvisejících s právem autorským a o změně některých zákonů (autorský zákon).

V Praze dne \_\_\_\_\_

\_\_\_\_\_ podpis