České vysoké učení technické v Praze
Fakulta jaderná a fyzikálně inženýrská

Kvantový Zenónov jav

Autor:	Miroslav Urbanek
Vedúci práce:	Prof. RNDr. Pavel Exner, DrSc.
Katedra:	KF
Zameranie:	MF
Akademický rok:	2004/2005

Obsah

Úvod

Myšlienka kvantového Zenónovho javu pochádza zo šesťdesiatych rokov 20. storočia a populárnou sa stala najmä potom, ako jej B. Misra a E. C. G. Sudarshan vymysleli súčasný názov. Spočíva v tom, že časté meranie stavu nestabilného systému môže za určitých podmienok spomaliť časový vývoj tohoto systému. V limitnom prípade, tj. ak by meranie prebiehalo sústavne, môže dôjsť k tomu, že systém bude zotrvávať neustále v pôvodnom stave. Napríklad vhodný sústavne pozorovaný nestabilný atóm by sa nikdy nerozpadol.

Naopak, za určitých podmienok môže dôjsť aj k opačnému javu, tj. že neustále pozorovaný nestabilný systém okamžite prejde do nového stavu. Tento jav sa niekedy nazýva anti-Zenónov alebo inverzný Zenónov jav.

Z praktického hľadiska môže mať tento jav veľké uplatnenie. Okrem zrejmých aplikácii typu "zmrazenie častice" je to napríklad zachovanie koherencie pri kvantovom počítaní: interakcie s prostredím zhoršujú čistotu stavov a predstavujú vážnu prekážku pri zachovaní superpozície a entaglementu na dlhší čas. O Zenónovom jave sa uvažuje ako o jednom z možných riešení tohoto problému.

Problematika úzko súvisí s pojmom *meranie* a *pozorovateľná* z kvantovej fyziky. Keďže dodnes neexistuje uspokojivá teória merania, spája sa s týmito pojmami mnoho nejasností.

Experimentálna fyzika v nedávnej dobe pokročila natoľko, že kvantový Zenónov jav je už v dosahu súčasných meracích metód. Väčšina experimentov však prebieha *priamo*, tj. nestabilný systém je silnou väzbou spojený s makroskopickým prístrojom alebo je tento systém vystavený pôsobeniu elektromagnetických vĺn (napríklad excitovaný atóm osvetľovaný laserom). Takéto merania však predstavujú dramatický zásah do systému a nie je teda ani veľkým prekvapením, že priebeh rozpadu sa potom odlišuje od priebehu rozpadu nepozorovaného systému. Preto je zaujímave sledovať snahu niektorých autorov o popis a realizáciu *nepriameho* experimentu: meria sa negatívny výsledok (tj., že systém sa už rozpadol) pomocou vonkajších detektorov. Napríklad pri rozpade dochádza k vyžiareniu fotónu a okolo systému je sústava detektorov, ktorá je schopná tento fotón zachytiť. Popis takéhoto experimentu však už musí zahŕňať aj presný popis mechanizmu interakcie a aj samotného meracieho prístroja.

Matematicky zaujímavý je najmä popis sústavného merania, tj. keď sa čas medzi jednotlivými meraniami limitne blíži k nule, hoci z fyzikálne hľadiska je takéto meranie nemožné. V reálnom svete má každé meranie určitú dobu trvania, resp. príslušná interakcia zahŕňa konečné množstvo energie. Tieto principiálne obmedzenia frekvencie meraní sú dôsledkom neurčitosti čas/energia. Prakticky realizovať sa teda dajú iba experimenty s konečnou frekvenciou meraní.

Otázku praktickej realizácie sa však ďalej zaoberať nebudeme a sústredíme sa čisto na matematický popis problému.

Za konzultácie a poskytnuté materiály by som rád poďakoval prof. RNDr. P. Exnerovi, DrSc.

1 Časový vývoj

Pre popis časového vývoja kvantového systému sa zavádza pojem *unitárneho propagátora.* Je to množina $\{U(t,s) : s,t \in \mathbb{R}\}$ unitárnych operátorov na Hilbertovom priestore $\mathcal{H}$ taká, že

1. platí $U(t,s)U(s,r) = U(t,r)$ pre všetky $r,s,t \in \mathbb{R}$,
2. zobrazenie $(s,t) \mapsto U(t,s)$ je silno spojité v $\mathbb{R}^2$.

Unitárny propagátor $\{U(t,s) : s,t \in \mathbb{R}\}$ sa nazýva aj *evolučný operátor*, resp. *operátor časového vývoja.*

Stav systému v okamihu t je reprezentovaný štatistickým operátorom W_t, resp. vektorom ψ_t, ak sa jedná o čistý stav. Predpokladáme, že v časovom intervale J sa systém nerušene vyvíja, tj. že neprebehne žiadne meranie. Potom pre vývoj stavu tohoto systému platí

$$W_t = U(t,s)W_sU(t,s)^{-1}, \quad \text{resp.} \quad \psi_t = U(t,s)\psi_s, \tag{1}$$

pre všetky $s,t \in J$.

Systém sa nazýva *konzervatívny*, ak jeho propagátor spĺňa podmienku $U(t+\tau, s+\tau) = U(t,s)$. Ak je systém konzervatívny, môžeme definovať množinu $\{U(t) : t \in \mathbb{R}\}$, kde $U(t) := U(t+\tau,\tau)$. Podľa definície je táto množina jednoparametrická silno spojitá grupa unitárnych operátorov. Podľa Stoneovho teorému ku každej takejto grupe existuje práve jeden samozdružený operátor A taký, že $U(t) = e^{itA}$ pre všetky $t \in \mathbb{R}$.

Základný dynamický postulát hovorí, že operátor $-A$ môžeme stotožniť s Hamiltoniánom systému. Propagátor konzervatívneho systému je potom pre všetky $t \in \mathbb{R}$ určený vzťahom

$$U(t) = e^{-itH}, \tag{2}$$

kde H je Hamiltonián systému.

Pre systém v čistom stave je teda časový vývoj určený rovnicou

$$\psi(t) = e^{-itH}\psi_0, \tag{3}$$

kde ψ_0 stav systému v čase $t=0$.

1.1 Nestabilné systémy

V prírode existuje mnoho nestabilných systémov s rôznymi mechanizmami nestability. Napríklad nabitý pión, ktorý sa rozpadne na mión a neutríno, excitovaný elektrón v atóme, ktorý prejde do základneho stavu, dokonca za nestabilný systém môžeme považovať aj časticu, ktorá sa nachádza v ohraničenej oblasti priestoru, a môže túto oblasť opustiť.

Nestabilné systémy nemôžeme považovať za izolované a preto ich musíme popisovať ako súčasť väčšieho systému S, ktorý obsahuje pôvodný nestabilný stav ako aj výsledné stavy po rozpade.

Na popis systému S sa teda zavádza Hilbertov priestor $\mathcal{H}$, ktorý obsahuje vlastný podpriestor $\mathcal{H}_u$ prislúchajúci pôvodnemu stavu pred rozpadom a súčasne podpriestor $\mathcal{H}_u^\perp \neq 0$, do ktorého patria stavy po rozpade. Stavový vektor počas časového vývoja nezostáva iba v podpriestore $\mathcal{H}_u$, ale prechádza aj do podpriestoru $\mathcal{H}_u^\perp$.

Časový vývoj v $\mathcal{H}$ je určený unitárnym propagátorom $U : U(t) = e^{-itH}$, kde H je Hamiltonián celého systému S.

Dôležitou vlastnosťou propagátora U však je, že podpriestor $\mathcal{H}_u$ musí byť neinvariantný v $U(t)$ pre každé $t > 0$. Ak by táto podmienka nebola splnená, k rozpadu by v určitých okamihoch nemohlo dôjsť.

V kvantovej fyzike je každé meranie reprezentované nejakým operátorom, v prípade nestabilného systému zvyčajne zisťujeme, či sa systém už rozpadol, alebo ešte nie. Takémuto *áno-nie experimentu* zodpovedá projektor, v našom prípade je to projektor na podpriestor H_u. Po vykonaní merania bude stavový vektor systému patriť buď do priestoru H_u, ak sa systém ešte nerozpadol, alebo do podpriestoru $H_u^\perp$, ak sa už rozpadol.

Tvrdenie 1.1 *Nech U je unitárny operátor na Hilbertovom priestore $\mathcal{H}$, $\mathcal{H}_u$ je podpriestor $\mathcal{H}$ a E je projektor na $\mathcal{H}_u$. Potom sú nasledujúce tri tvrdenia ekvivalentné:*

1. *$\mathcal{H}_u$ aj $\mathcal{H}^\perp$ sú invariantné v U,*
2. *projektor E komutuje s U,*
3. *$V = EU \restriction H_u$ je unitárny operátor, tj. $V^*V = VV^* = I_u$, kde I_u je jednotkový operátor na $\mathcal{H}_u$.*

Z tvrdenia (1.1) vyplýva, že nutnou podmienkou pre to, aby sa jednalo o nestabilný systém je, že operátory U_t a E spolu nekomutujú pre všetky $t > 0$. Z toho a z definície propagátora $U(t)$ ďalej vyplýva, že v tom prípade operátor E nekomutuje ani s Hamiltoniánom systému H.

Časový vývoj samotného nestabilného systému je potom určený *redukovaným propagátorom*

$$V : \quad V(t) = EU(t) \restriction H_u, \tag{4}$$

kde E je projektor na H_u.

$V(t)$ je silno spojitá funkcia, $\|V(t)\| \leq 1$ a pre všetky $t \in \mathbb{R}$

$$V(t)^* = V(-t). \tag{5}$$

Pretože sa jedná o nestabilný systém, podľa (1.1 bod 3) operátor $V(t)$ nemôže byť unitárny. Z toho a z (5) ďalej platí, že operátor $V(t)$ nemôže spĺňať axióm grupového násobenia $V(s)V(t) = V(s + t), s, t \in \mathbb{R}$. Redukovaný propagátor $V(t)$ teda narozdiel od propagátora $U(t)$ netvorí grupu. Za určitých podmienok však môže tvoriť pologrupu $(V(s)V(t) = V(s + t);\ s, t \geq 0)$.

Ak bol systém v čase $t = 0$ v čistom stave $\psi \in H_u$, potom definujeme *rozpadový zákon* takto

$$P_\psi(t) := \|V(t)\psi\|^2 = \|EU(t)\psi\|^2. \tag{6}$$

Rozpadový zákon udáva pravdepodobnosť nájdenia systému v pôvodnom stave, ak k meraniu dôjde v čase t.

Tvrdenie 1.2 *Pre všetky $\psi \in H_u$ je rozpadový zákon $P_\psi(t)$ spojitá funkcia a platí*

$$0 \leq P_\psi(t) \leq P_\psi(0) = 1.$$

V prípade, že podpriestor $\mathcal{H}_u$ je *jednorozmerný* a jeho bázou je jednotkový vektor ψ, môžeme redukovaný propagátor vyjadriť ako

$$V(t) = v(t)E, \tag{7}$$

kde $v(t) = (\psi, U_t\psi)$ a $E = (\psi, .)\psi$. Pre rozpadový zákon potom dostávame výraz

$$P_\psi(t) = |v(t)|^2 = |(\psi, U(t)\psi)|^2. \tag{8}$$

2 Zenónov jav

2.1 Opakované merania

Nech S je nestabilný systém, v ktorom prebehne n meraní, v ktorých zisťujeme, či je systém stále nerozpadnutý. Nech merania prebehnú v časoch $t/n, 2t/n, \ldots, t$. V prípade, že výsledok merania je kladný, tj. systém je nerozpadnutý, stavový vektor bude po meraní patriť do priestoru $\mathcal{H}_u$, ale nemusí sa zhodovať s pôvodným stavovým vektorom na začiatku experimentu. Pravdepodobnosť toho, že systém bude po prebehnutí všetkých meraní, tj. v čase t, nerozpadnutý je

$$M(t) = P_\psi(t/n)P_{\psi_1}(t/n)\ldots P_{\psi_{n-1}}(t/n), \tag{9}$$

kde ψ_i sú stavové vektory po prebehnutí i-tého merania, tj. normalizované vektory $EU(t/n)\psi_{i-1}$. V prípade, že priestor $\mathcal{H}_u$ je jednorozmerný, dostávame

$$M(t) = \big(P_\psi(t/n)\big)^n. \tag{10}$$

Pravdepodobnosť rozpadu teda závisí hlavne na tvare rozpadového zákona $P_\psi(t)$. Všimnime si, že ak ma rozpadový zákon čisto exponenciálny tvar, tj. $P_\psi(t) = e^{-\Gamma t}$, tak pravdepodobnosť rozpadu po n meraniach bude mať rovnaký exponenciálny tvar

$$M(t) = \left(e^{-\Gamma t/n}\right)^n = e^{-\Gamma t}.$$

Vo mnohých prípadoch však dochádza k malým odchýlkam od čisto exponenciálneho priebehu a tie majú pri tomto jave kľúčovú úlohu.

Ďalej budeme zisťovať, čo sa stane, ak bude počet meraní nekonečný, tj. hľadáme limitu

$$\lim_{n\to\infty} M(t). \tag{11}$$

Tvrdenie 2.1 *Nech $f: [0,+\infty) \mapsto \mathcal{R}$ je spojitá funkcia, $f(0) = 1$ a nech existuje $\dot{f}(0+)$. Potom pre všetky $t \geq 0$ platí*

$$\lim_{n\to\infty} f(t/n)^n = e^{\dot{f}(0+)t}. \tag{12}$$

Dôkaz:

Z definície limity zprava ku každému $\varepsilon > 0$ existuje t_0 také, že pre všetky $\tau \in (0, t_0]$ platí

$$-\varepsilon < \frac{f(\tau) - f(0)}{\tau} - \dot{f}(0+) < \varepsilon.$$

Po úprave dostávame [f(0) = 1]

$$1 + \tau\big[\dot{f}(0+) - \varepsilon\big] < f(\tau) < 1 + \tau\big[\dot{f}(0+) + \varepsilon\big].$$

Pre každé $t \geq 0$ existuje n_0 také, že pre všetky $n > n_0$ patrí t/n do intervalu $(0, t_0]$. Teda pre všetky $n > n_0$

$$1 + \frac{t\big[\dot{f}(0+) - \varepsilon\big]}{n} < f(t/n) < 1 + \frac{t\big[\dot{f}(0+) + \varepsilon\big]}{n}.$$

Po umocnení

$$\left(1+\frac{t\big[\dot f(0+)-\varepsilon\big]}{n}\right)^n < f(t/n)^n < \left(1+\frac{t\big[\dot f(0+)+\varepsilon\big]}{n}\right)^n,$$

a urobení limity $n \to \infty$ dostávame

$$e^{t[\dot f(0+)-\varepsilon]} \leq \lim_{n\to\infty} f(t/n)^n \leq e^{t[\dot f(0+)+\varepsilon]}.$$

Táto nerovnosť platí pre všetky $\varepsilon > 0$, takže

$$\sup_{\varepsilon>0} e^{t[\dot f(0+)-\varepsilon]} \leq \lim_{n\to\infty} f(t/n)^n \leq \inf_{\varepsilon>0} e^{t[\dot f(0+)+\varepsilon]}.$$

Dostávame teda nerovnosť

$$e^{t\dot f(0+)} \leq \lim_{n\to\infty} f(t/n)^n \leq e^{t\dot f(0+)}.$$

Z čoho je zrejme, že

$$\lim_{n\to\infty} f(t/n)^n = e^{\dot f(0+)t}.$$

□

Vznik Zenónovho javu teda závisí od derivácie zprava rozpadového zákona $\dot P_\psi(0+)$. V prípade $\dot P_\psi(0+) = 0$ dochádza k Zenónovmu javu, systém sa nikdy nerozpadne, v prípade $\dot P_\psi(0+) = -\infty$ k anti-Zenónovmu javu, tj. systém sa rozpadne okamžite. Rovnaká situácia nastane aj pre $\dim \mathcal{H}_u > 1$, akurát derivácia $\dot P_\psi(0+)$ musí mať uvedenú vlastnosť pre všetky $\psi \in H_u$.

V prípade, že sa jedná o viacrozmerný systém však môže nastať aj komplikovanejšia situácia. Napríklad kombinácia Zenónovho a anti-Zenónovho javu. Nech $n = 2$ a nech $\mathcal{H}_1$ a $\mathcal{H}_2$ sú Hilbertove priestory, H_1 a H_2 Hamiltoniány na týchto priestoroch a P_1 a P_2 rozpadové zákony na jednotlivých systémoch. Predpokladáme, že dimenzia príslušných nestabilných podpriestorov je $\dim H_{u1} = \dim H_{u2} = 1$ a platí $\dot P_1(0+) = 0$ a $\dot P_2(0+) = -\infty$. Uvažujeme kombinovaný systém $\mathcal{H}_1 \otimes \mathcal{H}_2$, s hamiltoniánom $H_1 \otimes H_2$. Počiatočný stav takého systému je vo všeobecnosti lineárna kombinácia $\psi = c_1\psi_1 + c_2\psi_2, \psi_1 \in \mathcal{H}, \psi_2 \in \mathcal{H}$. Ak začneme nepretržite merať stav systému, zložka ψ_1 sa bude stále zachovávať a zložka ψ_2 okamžite zmizne.

2.2 Krátkodobý časový vývoj

2.2.1 Motivácia

Zo množstva experimentálnych údajov vieme, že väčšina nestabilných systémov v prírode sa rozpadá exponenciálne, tj. priebeh rozpadového zákona má tvar

$$P(t) = e^{-\Gamma t} \tag{13}$$

Po zderivovaní dostávame

$$\dot{P}(0+) = -\Gamma. \tag{14}$$

Na prvý pohľad sa teda zdá, že k Zenónovmu ani k anti-Zenónovmu javu nemôže pri takomto rozpade dôjsť.

Problém však spočíva vo fakte, že tvar rozpadového zákona poznáme iba z experimentálnych údajov. Každé meranie má konečné časové rozlíšenie. Tvar rozpadového zákona teda môžeme namerať iba s určitou presnosťou. Vieme, že pre dostatočné veľký čas t sa blíži exponenciále. Ako vyzerá tento zákon a jeho derivácia v čase $t = 0$ však z nameraných údajov zistiť nedokážeme.

Pozrime sa teda na tvar rozpadového zákona pre malé časy $\tau \to 0$. Vychádzame zo vzťahu (8). Označme $\chi(t) := U(t)\psi$. Predpokladajme ďalej, že na nejakom okolí bodu 0 existujú derivácie $\dot{\chi}(t)$,$\ddot{\chi}(t)$, $\dddot{\chi}(t)$. Pomocou Taylorovho rozvoja môžeme potom vektor $\chi(t)$ vyjadriť ako

$$\chi(\tau) = \chi(0) + \tau\dot{\chi}(0) + \frac{\tau^2}{2}\ddot{\chi}(0) + O(\tau^3).$$

Skalárny súčin $A(\tau) = (\chi(0), \chi(t))$ má tvar

$$A(\tau) = (\chi(0), \chi(t)) = 1 + \tau(\chi(0), \dot{\chi}(0)) + \frac{\tau^2}{2}(\chi(0), \ddot{\chi}(0)) + O(\tau^3).$$

Vektor $\chi(t)$ je normalizovaný, platí teda

$$0 = \frac{\mathrm{d}\|\chi(t)\|^2}{\mathrm{d}t} = (\chi(0), \dot{\chi}(0)) + (\dot{\chi}(0), \chi(0)) = 2\Re(\chi(0), \dot{\chi}(0)).$$

Výraz $(\chi(0), \dot{\chi}(0))$ je teda čisto imaginárny. Podobne dostaneme ďalšiu rovnosť

$$0 = \frac{\mathrm{d}^2\|\chi(t)\|^2}{\mathrm{d}t^2} = 2\big[(\dot{\chi}(0), \dot{\chi}(0)) + \Re(\chi(0), \ddot{\chi}(0))\big].$$

Nakoniec môžeme vyjadriť rozpadový zákon $P(t) = |A(t)|^2$, pričom využijeme predchádzajúce dve rovnosti

$$\begin{aligned}
P(t) \;=\; 1 \;&+\tau\Big[(\chi(0), \dot{\chi}(0)) + (\dot{\chi}(0), \chi(0))\Big] \\
&+\tau^2\Big[(\chi(0), \dot{\chi}(0))(\dot{\chi}(0), \chi(0)) + \tfrac{1}{2}\big[(\chi(0), \ddot{\chi}(0)) + (\ddot{\chi}(0), \chi(0))\big]\Big] + O(\tau^3) \\
=\; 1 \;&+2\tau\ \mathrm{Re}(\chi(0), \dot{\chi}(0)) + \tau^2\Big[|(\chi(0), \dot{\chi}(0))|^2 +\ \mathrm{Re}(\chi(0), \ddot{\chi}(0))\Big] + O(\tau^3) \\
=\; 1 \;&+\tau^2\Big[\big[\Im(\chi(0), \dot{\chi}(0))\big]^2 +\ \mathrm{Re}(\chi(0), \ddot{\chi}(0))\Big] + O(\tau^3) \\
=\; 1 \;&-\tau^2\Big[(\dot{\chi}(0), \dot{\chi}(0)) - \big[\mathrm{i}(\chi(0), \dot{\chi}(0))\big]^2\Big] + O(\tau^3)
\end{aligned}$$

Rozpadový zákon pre $\tau \to 0$ má teda *kvadratický* charakter

$$P(\tau) = 1 - k\tau^2 + O(\tau^3), \tag{15}$$

kde konštanta k je

$$k = (\dot{\chi}(0), \dot{\chi}(0)) - \big[\mathrm{i}(\chi(0), \dot{\chi}(0))\big]^2. \tag{16}$$

Z tvrdenia 1.2 ďalej vyplýva

$$k \geq 0.$$

Zo vzťahu (3) môžeme vyjadriť deriváciu funkcie $\chi(t)$ ako

$$\dot{\chi}(t) = -iHe^{-itH}\psi = -iH\chi(t).$$

Pre čas $t = 0$ dostávame výraz

$$\dot{\chi}(0) = -iH\psi.$$

Dosadením do (16) získame

$$k = (-iH\psi, -iH\psi) - \big[\mathrm{i}(\psi, -iH\psi)\big]^2 = (\psi, H^2\psi) - (\psi, H\psi)^2.$$

Takže pre konštantu k platí nasledujúci vzťah

$$k = (\Delta H)^2_\psi = \langle H^2\rangle_\psi - \langle H\rangle^2_\psi. \tag{17}$$

Konštanta k je teda vlastne disperzia Hamiltoniánu v počiatočnom stave ψ. Zo vzťahu (15) plynie

$$\dot{P(\tau)} = 1 - 2k\tau + O(\tau^2).$$

Aby došlo k vzniku Zenónovho javu, stačí ak $k < \infty$. Kedže $k \geq 0$, dostávame nakoniec podmienku

$$\langle H^2\rangle_\psi < \infty. \tag{18}$$

Predpokladom preto, aby sme mohli v predchádzajúcom odvodení urobiť Taylorov rozvoj je existencia niekoľkých konečných derivácii výrazu $(\chi(0), \chi(t)) = (\psi, e^{-itH}\psi)$ v bode $t = 0$. Pretože propagátor $U(t) = e^{-itH}$ je diferencovateľný, platí

$$U^{(k)}(t) = (-iH)^k e^{-itH},$$

a v čase $t = 0$

$$U^{(k)}(0) = (-i)^k H^k.$$

Aby boli derivácie $\frac{\mathrm{d}^k}{\mathrm{d}t^k}(\chi(0), \chi(t))$ konečné, musia byť konečné výrazy $(\psi, H^k\psi)$. Tento predpoklad je teda predpokladom o počiatočnom stave ψ. Podobne aj podmienka (18) je podmienkou pre ψ.

Vidíme teda, že vznik Zenónovho javu závisí na ψ. Ak sú splnené predpoklady, krátkodobý časový vývoj nemá exponencionálny, ale kvadratický charakter. Podmienka (18) odvodená v tejto časti je síce postačujúca, nie je však nutná. V ďalšej časti ukážeme, že nato, aby $\dot{P}(0+) = 0$, stačia aj slabšie predpoklady.

2.2.2 Podmienky vzniku Zenónovho javu

Ako sme videli v predchádzajúcej časti, krátkodobý časový vývoj súvisí s počiatočným stavom ψ. Dôkladnejšia analýza problému ukazuje, že rozhodujúca je stredná hodnota energie.

Definícia 2.1 *Hovoríme, že ψ je konečne-energetický stav, ak integrál*

$$\langle H \rangle_\psi = (\psi, H\psi) = \int_{\mathcal{R}} \lambda \mathrm{d}(\psi, E_\lambda \psi) \tag{19}$$

konverguje, kde E_λ je rozklad jednotky prísluchajúci Hamiltoniánu H.

Označme si ďalej $H_+ = \int_{\mathcal{R}+} \lambda \mathrm{d}E_\lambda$ a $H_- = -\int_{\mathcal{R}-} \lambda \mathrm{d}E_\lambda$. Môžeme použiť vyjadrenie $H = H_+ + H_-$ a $|H| = H_+ - H_-$. Podmienka konvergencie (19) je potom ekvivalentná nerovnosti

$$\langle |H| \rangle_\psi = \langle |H_+| \rangle_\psi + \langle |H_-| \rangle_\psi < \infty$$

Veta 2.1 *Ak ψ je konečne-energetický stav, tj. ak $\langle |H| \rangle_\psi < \infty$, platí*

$$\dot{P}_\psi(0) = 0.$$

Dôkaz:

Označme

$$p_\psi(t) = |(\psi, V(t)\psi)|^2 = |(\psi, U(t)\psi)|^2.$$

Zo Schwarzovej nerovnosti dostávame

$$|(\psi, V(t)\psi)|^2 \leq \|\psi\|^2 \|V(t)\psi\|^2 = \|V(t)\psi\|^2$$

a teda platí

$$0 \leq p_\psi(t) \leq P_\psi(t) \leq 1$$

Vieme, že $p_\psi(0) = P_\psi(0) = 1$, stačí nám teda overiť, že $\dot{p}_\psi(0) = 0$.

Pretože

$$\left| \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}(e^{-i\lambda t}) \right| = \left| -i\lambda e^{-i\lambda t} \right| = |\lambda|$$

a ψ je konečne-energetický stav

$$\int_{\mathbb{R}} |\lambda| (\psi, E_\lambda \psi) < \infty,$$

sú splnené predpoklady pre zámenu integrálu a derivácie vo výraze

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t} \int_{\mathbb{R}} e^{-i\lambda t} \mathrm{d}(\psi, E_\lambda \psi).$$

Pre deriváciu skalarného súčinu $(\psi, U(t)\psi)$ potom platí

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}(\psi, U(t)\psi) = -i\int_{\mathbb{R}} \lambda e^{-i\lambda t}\mathrm{d}(\psi, E_\lambda\psi).$$

A ďalej pre deriváciu $p_\psi(t)$ dostávame

$$\dot{p}_\psi(t) = \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}(\psi, U(t)\psi)\overline{(\psi, U(t)\psi)} = 2\ \mathrm{Im}\Big[(\psi, U^*(t)\psi)\int_{\mathbb{R}} \lambda e^{-i\lambda t}\mathrm{d}(\psi, E_\lambda\psi)\Big].$$

Konkrétne v čase $t = 0$ platí

$$\dot{p}_\psi(0) = 2\ \mathrm{Im}\int_{\mathbb{R}} \lambda\mathrm{d}(\psi, E_\lambda\psi) = 2\ \mathrm{Im}\langle H\rangle = 0$$

$\square$

Ak je teda počiatočný stav systému konečne-energetický, dochádza pri neustálom pozorovaní systému k Zenónovho javu. Poznamenajme ešte, že ani táto podmienka nie je nutná a existujú nekonečne-energetické stavy, ktoré spĺňajú $\dot{P}(0) = 0$.

2.2.3 Podmienky vzniku anti-Zenónovho javu

Uvedieme výsledky z [6]. Nech E_λ^H je rozklad jednotky prisluchajúci Hamiltoniánu H a $\mathrm{d}\omega(\lambda) = \mathrm{d}(\psi, E_\lambda^H\psi)$.

Najprv uvedieme výsledok pre jednorozmerný prípad.

Veta 2.2 *Nech nestabilný podpriestor $\mathcal{H}_u$ je jednorozmerný. Ak ψ spĺňa pre všetky $N \in \mathcal{R}$ a ľubovoľné $c > 0$ a $\alpha > 1$*

$$\int_{-N}^{N} \lambda^2\mathrm{d}\omega(\lambda)\int_{-N}^{N}\mathrm{d}\omega(\lambda) - \Big(\int_{-N}^{N}\lambda\mathrm{d}\omega(\lambda)\Big)^2 \geq cN^\alpha \tag{20}$$

potom $\dot{P}(0+) = -\infty$.

Výraz (20) môžeme vyjadriť aj v inom tvare. Zavedieme operátor $H_N^\beta := H_\beta E_H(\Delta_N)$ a operátor $I_N := E_H(\Delta_N)$, kde $\Delta_N = (-N, N)$. E_H predstavuje vlastne energetický filter. Nerovnosť (20) je potom ekvivalentná

$$\langle H_N^2\rangle_\psi\langle I_N\rangle_\psi - \langle H_N\rangle_\psi^2 \geq cN^\alpha$$

Všimnime si podobnosť s výrazom (17).

Podmienka pre viacrozmerný prípad je podobná.

Veta 2.3 *Nech nestabilný podpriestor $\mathcal{H}_u$ je viacrozmerný. Ak existujú $c > 0$ a $\alpha > 1$ také, že pre všetky $\psi \in H_u$ a pre všetky $N \in \mathcal{R}$ platí*

$$(\psi, H_N^2 P I_N\psi) - \|PH_N\psi\|^2 \geq cN^\alpha \tag{21}$$

potom $\dot{P}(0+) = -\infty$.

Nerovnosť (21) môžeme vyjadriť aj ako

$$\langle H_N^2 P I_N \rangle_\psi - \langle H_N P H_N \rangle_\psi \geq c N^\alpha$$

Otázkou však zostáva, či sú takého stavy fyzikálne realizovateľné. Pri meraní určujeme pravdepodobnosť, že hodnota pozorovateľnej, v našom prípade energie, patrí do nejakej množiny M. Po vykonaní konečného počtu meraní však nemôžeme určiť, či integrály z predchádzajúcich viet konvergujú alebo divergujú. Takže už z princípialneho hľadiska sa nedá odpoveď na túto otázku overiť experimentálne.

3 Dynamika Zenónovho javu

Kvantový Zenónov jav spôsobuje, že systém zotrváva v pôvodnom nerozpadnutom stave. Otázkou je, aký je časový vývoj tohoto stavu, tj. aká je jeho dynamika.

Budeme ďalej predpokladať, že Hamiltonián H je pozitívny. Táto požiadavka sa dá rozšíriť na požiadavku, aby bol Hamiltonián zdola ohraničený (resp. zhora ohraničený, ale takýto Hamiltonián nemá z fyzikálneho hľadiska význam). Potom stačí namiesto pôvodného Hamiltoniánu použiť posunutý Hamiltonián, ktorý už bude pozitívny:

$$H' = H + cI,$$

kde I je jednotkový operátor a c je vhodná konštanta.

Matematicky sa dá problém dynamiky Zenónovho javu formulovať takto: za akých podmienok a v akej topológii existuje limita

$$(Ee^{itH/n}E)^n \longrightarrow e^{itH_E/n}, \tag{22}$$

kde $n \to \infty$?

Jednou z otázok je, aký je vlastne tvar operátora H_E. Prirodzenou domnienkou je, že $H_E = EHE$. Takýto operátor však nemusí byť samozdružený, dokonca v niektorých prípadoch ani uzavretý. Je to spôsobené faktom, že operátor H je neohraničený a teda operátor HE síce uzavretý je, ale EH už uzavretý byť nemusí. Ak je operátor EHE husto definovaný, platí $EHE \subset (EHE)^*$, je teda symetrický a môžeme sa pokúsiť nájsť nejaké samozdružené rozšírenie.

Ukážeme, že vhodným kandidátom je husto definovaný operátor $H_E = (\sqrt{H}E)^*(\sqrt{H}E)$.

Tvrdenie 3.1 *([3], veta 7.2.11) Nech T je uzavretý lineárny operátor. Potom T^*T je pozitívny samozdružený operátor.*

Keďže operátor H je samozdružený, je samozdruženým aj operátor $\sqrt{H}$. Ďalej platí $\mathrm{Dom}(H) \subset \mathrm{Dom}(\sqrt{H})$. Operátor $\sqrt{H}E$ je uzavretý, spĺňa predpoklady predchádzajúceho tvrdenia a teda operátor $(\sqrt{H}E)^*(\sqrt{H}E)$ je pozitívny a samozdružený. Jedná sa o rozšírenie operátora EHE:

$$EHE \subset E\sqrt{H}\sqrt{H}E \subset E^*\left(\sqrt{H}\right)^*\sqrt{H}E.$$

Z vlastností neohraničených operátorov za predpokladu, že $\sqrt{H}E$ je husto definovaný plynie

$$\left(\sqrt{H}E\right)^* \supset E^*\left(\sqrt{H}\right)^*.$$

Celkovo teda

$$EHE \subset (\sqrt{H}E)^*(\sqrt{H}E).$$

Všimnime si ďalej, že unitárny operátor e^{-itH_E} je rovnakým operátorom aj na podpriestore $E\mathcal{H}$. Na priestore $\mathcal{H}$ musí potom platiť $e^{-itH_E} = e^{-itH_E}E \oplus (I - E)$.

Zaujíma nás vývoj na podpriestore $E\mathcal{H}$, limitu (23) prepíšeme teda na tvar

$$(Ee^{iHt/n}E)^n \longrightarrow e^{iH_Et/n}E, \tag{23}$$

Predpokladá sa, že za uvedených predpokladov limita (23) existuje v silnej topológii. Dôkaz tohoto tvrdenia však doteraz neexistuje. Existencia bola dokázaná iba za určitých ďalších predpokladov. Uvedieme doterajšie výsledky ([4],[5]).

1. **P je konečnerozmerný projektor**

   V tomto prípade limita (23) existuje dokonca v rovnomernej topológii.

   Veta 3.1 *Nech H je pozitívny samozdružený operátor na separabilnom Hilbertovom priestore $\mathcal{H}$ a E je konečnerozmerný ortogonálny projektor v H. Ak $H_E = (\sqrt{H}E)^*(\sqrt{H}E)$ je husto definovaný, tak platí*

$$\text{u-}\lim_{n\to\infty}(Ee^{itH/n}E)^n = e^{itH_E/n}E, \tag{24}$$

   rovnomerne v $t \in [0, t_0]$ pre ľubovoľné $t_0 > 0$.

   Dôkaz:

   Bez ujmy na na všeobecnosti predpokladajme, že Hamiltonián H je striktne pozitívny. Ďalej z faktu, že H_E je husto definovaný a uzatvorený a projektor E je konečnerozmerný plynie, že $\mathrm{Dom}(H_E) = \mathcal{H}$. Podľa vety o uzavretom grafe je potom operátor H_E ohraničený.

   Dôkaz sa skladá z dvoch častí. Najprv dokážeme existenciu limity

$$\lim_{t\to 0}\left\|\frac{Ee^{-itH}E - Ee^{-itH_E}E}{t}\right\| = 0. \tag{25}$$

   a z nej potom samotné tvrdenie vety.

   Pri dôkaze (25) najprv ukážeme, že pre všetky $f, g \in \mathcal{H}$ platí

$$\lim_{t\to 0}\frac{(Ef, Ee^{-itH}Eg) - (Ef, Eg) + it(\sqrt{H}Ef, \sqrt{H}Eg)}{t} = 0. \tag{26}$$

   Prvé dva výrazy v čitateli môžeme upraviť ako

$$(Ef, Ee^{-itH}Eg) - (Ef, Eg) = (Ef, [e^{-itH} - I]Eg).$$

   Pretože operátor H je striktne pozitívny, existuje operátor H^{-1}. Operátory H, H^{-1} a $[e^{-itH} - I]$ spolu komutujú a preto môžeme výraz ďalej upraviť

$$\begin{aligned}
&(Ef, [e^{-itH} - I]Eg) = \\
&= (Ef, [e^{-itH} - I]H^{-1}HEg) = (Ef, [e^{-itH} - I]H^{-1}\sqrt{H}\sqrt{H}Eg) = \\
&= (Ef, \sqrt{H}[e^{-itH} - I]H^{-1}\sqrt{H}Eg) = (\sqrt{H}Ef, [e^{-itH} - I]H^{-1}\sqrt{H}Eg).
\end{aligned}$$

   Pre limitu (26) teda získame výraz

$$\lim_{t\to 0}\Big(\sqrt{H}Ef, \Big[\frac{e^{-itH} - I}{tH} + i\Big]\sqrt{H}Eg\Big).$$

Všimnime si výraz v hranatej zátvorke, jedná sa o funkciu operátora H tvaru

$$f(x) = \frac{e^{-itx} - 1}{tx} + i, \quad x \in (0, \infty)$$

$$\lim_{t \to 0} f(x) = 0.$$

Funkcia $f(x)$ je ohraničená a podľa ([3] Veta 9.3.3d) platí

$$\operatorname*{s-lim}_{t \to 0} \frac{e^{-itH} - I}{tH} + i = 0.$$

Konečne dostávame

$$\lim_{t \to 0} \Big(\sqrt{H} E f, \Big[\frac{e^{-itH} - I}{tH} + i \Big] \sqrt{H} E g \Big) = 0.$$

Vzťah (26) teda platí.

Rovnakým spôsobom sa dá dokázať platnosť vzťahu (26) aj pre operátor H_E, tj. pre všetky $f, g \in \mathcal{H}$ platí

$$\lim_{t \to 0} \frac{(Ef, Ee^{-itH_E} Eg) - (Ef, Eg) + it(\sqrt{H_E} Ef, \sqrt{H_E} Eg)}{t} = 0. \tag{27}$$

Ďalej si všimnime, že $(\sqrt{H} Ef, \sqrt{H} Eg) = (\sqrt{H_E} Ef, \sqrt{H_E} Eg)$:

$$(\sqrt{H} Ef, \sqrt{H} Eg) = (\sqrt{H} EEf, \sqrt{H} EEg) = ((\sqrt{H} E)^* \sqrt{H} EEf, Eg) = (H_E Ef, Eg),$$

$$(\sqrt{H_E} Ef, \sqrt{H_E} Eg) = ((\sqrt{H_E})^* \sqrt{H_E} Ef, Eg) = (H_E Ef, Eg).$$

Môžeme urobiť rozdiel vzťahov (26) a (27)

$$\lim_{t \to 0} \frac{\big(Ef, \big[Ee^{-itH} E - Ee^{-itH_E} E\big] Eg\big)}{t} = 0. \tag{28}$$

Tento vzťah platí pre všetky $f, g \in \mathcal{H}$. Vektory Ef a Eg patria do konečnerozmerného podpriestoru $E\mathcal{H}$. Pre všetky vektory z tohoto podpriestoru platí (28) a to je vlastne limita v slabej topológii

$$\operatorname*{w-lim}_{t \to 0} \frac{Ee^{-itH} E - Ee^{-itH_E} E}{t} = 0.$$

Na konečnerozmernom priestore sú slabá a rovnomerná topológia ekvivalentné, na priestore $\mathcal{B}(E\mathcal{H})$ teda platí

$$\lim_{t \to 0} \Big\| \frac{Ee^{-itH} E - Ee^{-itH_E} E}{t} \Big\| = 0$$

a pretože výraz v norme obsahuje z pravej aj z ľavej strany operátor E, platí tento vzťah aj na $\mathcal{B}(\mathcal{H})$. Tým sme dokázali platnosť limity (25).

Pretože e^{itH} a e^{itH_E} sú unitárne operátory, platí

$$\begin{aligned} \|Ee^{-itH}E\| &\leq \|E\|\|e^{-itH}\|\|E\| = 1, \\ \|Ee^{-itH_E}E\| &\leq \|E\|\|e^{-itH_E}\|\|E\| = 1. \end{aligned}$$

Pre ohraničené operátory A a B s normou $\|A\| \leq 1$, $\|B\| \leq 1$ platí

$$\|A^n - B^n\| = \Big\| \sum_{j=1}^{n} A^{n-j}(A-B)B^{j-1} \Big\| \leq \sum_{j=1}^{n} \|A^{n-j}\|\|A-B\|\|B^{j-1}\| \leq n\|A-B\|.$$

Dosadením $A = Ee^{-itH/n}E, B = Ee^{-itH_E/n}E$ dostávame

$$\begin{aligned} &\Big\|\big(Ee^{-itH/n}E\big)^n - \big(Ee^{-itH_E/n}E\big)^n\Big\| \leq \\ &\leq n\big\|Ee^{-itH/n}E - Ee^{-itH_E/n}E\big\| = t\Big\|\tfrac{Ee^{-itH/n}E - Ee^{-itH_E/n}E}{t/n}\Big\|. \end{aligned}$$

Na posledný výraz môžeme pre $n \to \infty$ použiť vzťah (25) a celkovo platí

$$\lim_{n\to\infty} \Big\|\big(Ee^{-itH/n}E\big)^n - \big(Ee^{-itH_E/n}E\big)^n\Big\| = 0 \tag{29}$$

Operátor H_E je ohraničený, platí teda

$$e^{-itH_E} = \text{u-}\lim_{n\to\infty} \sum_{j=0}^{n} (-it)^j H_E^j = \text{u-}\lim_{n\to\infty} \sum_{j=0}^{n} (-it)^j \big[(\sqrt{H}E)^* \sqrt{H}E\big]^j,$$

a pretože $E(\sqrt{H}E)^* = (\sqrt{H}EE)^* = (\sqrt{H}E)^*$ operátor $Ee^{-itH_E}E$ môžeme upraviť

$$\begin{aligned} &Ee^{-itH_E}E = \\ &= \text{u-lim}_{n\to\infty} E\Big[I + \textstyle\sum_{j=1}^{n}(-it)^j \big[(\sqrt{H}E)^*\sqrt{H}E\big]^j\Big]E = \\ &= \text{u-lim}_{n\to\infty} \Big[E + \textstyle\sum_{j=1}^{n}(-it)^j \big[(\sqrt{H}E)^*\sqrt{H}E\big]^j\Big]E = \\ &= \text{u-lim}_{n\to\infty} \Big[E - I + \textstyle\sum_{j=0}^{n}(-it)^j \big[(\sqrt{H}E)^*\sqrt{H}E\big]^j\Big]E = \\ &= (E-I)E + e^{-itH_E}E = e^{-itH_E}E. \end{aligned}$$

S využitím predchádzajúceho vzťahu upravíme výraz $\big(Ee^{-itH_E/n}E\big)^n$

$$\big(Ee^{-itH_E/n}E\big)^n = Ee^{-itH_E/n}Ee^{-itH_E/n}\ldots e^{-itH_E/n}E = \big(e^{-itH_E/n}\big)^n E = e^{-itH_E}E.$$

A nakoniec dosadením do (29) dostaneme tvrdenie vety

$$\lim_{n\to\infty} \Big\|\big(Ee^{-itH/n}E\big)^n - e^{-itH_E}E\Big\| = 0$$

$\square$

2. **Konvergencia v slabšej topológii**

Definícia 3.1 *Priestorom* $L^2_{\mathrm{loc}}([0,\infty),\mathcal{H}) = L^2_{\mathrm{loc}}([0,\infty))\otimes\mathcal{H}$ *nazývame priestor silno merateľných funkcii* $v : [0,\infty) \mapsto \mathcal{H}$ *takých, že* $\|v(t)\|$ *je lokálne kvadraticky integrovateľná. Topológia je indukovaná systémom seminoriem* $v \mapsto (\int_0^{T_l} \|v(t)\|^2 dt)^{1/2}$*, kde* $\{T_l\}_{l=1}^{\infty}$ *je spočítateľná množina rastúcich kladných čísel takých, že* $\lim_{l->\infty} T_l = \infty$*.*

Interval $[0,\infty)$ z definície považujeme za definičný obor časovej premenej t. Systém seminoriem zahŕňa v sebe časový spriemerovanie normy operátorov $v(t)$. Konvergencia v tomto priestore sa teda líši od konvergencie v operátorovej norme tým, že stačí aby konvergovali tieto priemerné hodnoty normy.

Veta 3.2 *Nech* H *je pozitívny samozdružený operátor na separabilnom Hilbertovom priestore* $\mathcal{H}$ *a* E *je ortogonálny projektor v* H*. Ak* $H_E = (\sqrt{H}E)^*(\sqrt{H}E)$ *je husto definovaný, tak pre každú* $\psi \in \mathcal{H}$ *platí*

$$\lim_{n\to\infty} (Ee^{itH/n}E)^n\psi = e^{itH_E/n}E\psi, \tag{30}$$

v topológii $L^2_{\mathrm{loc}}([0,\infty),\mathcal{H})$*.*

Napriek tomu, že z matematického hľadiska je konvergencia v $L^2_{\mathrm{loc}}([0,\infty),\mathcal{H})$ slabšia ako silná konvergencia, z fyzikálneho hľadiska ju môžeme považovať za dostačujúcu. Je to spôsobené faktom, že každé skutočné meranie, tj. aj meranie času, je zaťažené chybami a pri experimente určujeme priemernú hodnotu meranej veličiny, teda robíme časový priemer (viz. [4], Remark 2.5).

3. **Predpoklad energetického filtra**

Veta 3.3 *Nech* H *je pozitívny samozdružený operátor na separabilnom Hilbertovom priestore* $\mathcal{H}$*,* E_H *je spektrálna miera príslušná* H *a* E *je ortogonálny projektor na uzatvorený podpriestor v* H*. Ak* $H_E = (\sqrt{H}E)^*(\sqrt{H}E)$ *je husto definovaný, tak platí*

$$\operatorname{s-}\lim_{n\to\infty} \left(EE_H([0,\pi n/t))e^{itH/n}E\right)^n = e^{itH_E/n}E, \tag{31}$$

rovnomerne v $t \in [0,t_0]$ *pre ľubovoľné* $t_0 > 0$*.*

Projektor $E_H([0,\pi n/t)$ sa dá fyzikálne interpretovať ako energetický filter. Pred každým meraním stavu systému (okrem prvého) sa vykoná ešte meranie energie. Ak nameraná hodnota patrí do intervalu $[0,\pi n/t)$, experiment pokračuje ďalej, ak nie, experiment končí. Takýto model však už predstavuje modifikovaný Zenónov jav.

4. **Silnejšie predpoklady pre H**

Veta 3.4 *Nech H je pozitívny samozdružený operátor Hilbertovom priestore $\mathcal{H}$ a E je ortogonálny projektor na uzatvorený podpriestor v H, $H_E = (\sqrt{H}E)^*(\sqrt{H}E)$. Ak* $\mathrm{Ran}E \subseteq \mathrm{Dom}(\sqrt{H})$, *tak platí*

$$\text{s-}\lim_{n\to\infty} (Ee^{itH/n}E)^n = e^{itH_E/n}E, \tag{32}$$

rovnomerne v $t \in [0, t_0]$ pre ľubovoľné $t_0 > 0$.

Ak prijmeme ešte silnejšie predpoklady pre H, dá sa dokázať, že limita existuje aj v operátorovej norme.

Veta 3.5 *Nech H je pozitívny samozdružený operátor Hilbertovom priestore $\mathcal{H}$, E je ortogonálny projektor na uzatvorený podpriestor v H, $H_E = (\sqrt{H}E)^*(\sqrt{H}E)$ a* $\mathrm{Ran}E \subseteq \mathrm{Dom}(\sqrt{H})$. *Ak je ďalej operátor $\sqrt{H}E$ kompaktný alebo platí* $\mathrm{Ran}E \subseteq \mathrm{Dom}(H^\alpha)$ *pre nejaké $\alpha \in (\frac{1}{2}, 1]$, tak platí*

$$\text{u-}\lim_{n\to\infty} \left(Ee^{itH/n}E\right)^n = e^{itH_E/n}E, \tag{33}$$

rovnomerne v $t \in [0, t_0]$ pre ľubovoľné $t_0 > 0$.

Literatúra

[1] P. Exner: *Open Quantum Systems and Feynman Integrals,* D. Reidel, Dordrecht 1985.

[2] J. Blank, P. Exner, M. Havlíček: *Hilbert-Space operators in quantum physics,* American Institute of Physics, New York 1994.

[3] J. Blank, P. Exner, M. Havlíček: *Lineární operátory v kvantové fyzice,* Karolinum, Praha 1993.

[4] P. Exner, T. Ichinose: *A product formula related to quantum Zeno dynamics,* Ann. H. Poincare **6** (2005), 195–215 `math-ph/0302060`.

[5] P. Exner, T. Ichinose, H. Neidhardt, V.A. Zagrebnov: *New product formulæ and quantum Zeno dynamics with generalized observables,* `math-ph/0411036`.

[6] P. Exner: *Sufficient conditions for the anti-Zeno effect,* J. Phys. A **38** (2005), L449–454, `quant-ph/0502125`.

[7] P. Exner: *On relations between stable and Zeno dynamics in a leaky graph decay model,* `quant-ph/0504060`.

[8] P. Facchi, S. Pascazio, A. Scardicchio, L.S. Schulman: *Zeno dynamics yields ordinary constraints,* Phys. Rev. A **65** (2002), 012108.

[9] P. Facchi, G. Marmo, S. Pascazio, A. Scardicchio, E.C.G. Sudarshan: *Zeno dynamics and constraints,* J. Opt. B: Quantum Semiclass. Opt. **6** (2004), S492–S501.

[10] A.U. Schmidt: *Mathematics of the quantum Zeno effect,* v "Mathematical Physics Research on Leading Edge" (Ch. Benton, ed.), Nova Sci, Hauppauge, N.Y., 2004.