České Vysoké Učení Technické v Praze
Fakulta Jaderná a Fyzikalně Inženýrská

Diplomová práce

na téma

Supersymetrické rozšíření kanonické formulace Poisson-Lie T-plurality

Vedoucí práce: Prof. RNDr. Ladislav Hlavatý, DrSc.
Autor: Vojtěch Štěpán

Obsah

Průvodce značením

$\langle\,|\,\rangle_{\mathfrak{d}}$ symetrická nedegenerovaná ad-invariantní bilineární forma na Lieově algebře $\mathfrak{d}$ Drinfeľdova doublu D

$f : X \to Y : x \mapsto y$ zobrazení f množiny X do Y přiřazující prvku x prvek y

$T_x X$ tečný prostor k varietě X v bodě x

$T_x f$ tečné zobrazení k zobrazení f v bodě x

$\partial_a \varphi$ $= T_{(\sigma,\tau)}\varphi\,\partial_a$

$\partial_a \varphi^\mu$ μ-tá složka vektoru $\partial_a \varphi$

$Span(R)$ lineární obal množiny R

L_g $: h \mapsto gh$ levé násobení v grupě, nebude-li řečeno něco jiného

R_g $: h \mapsto hg$ pravé násobení v grupě

Ad**,** ad **-** Buď H Lieova grupa, $\mathfrak{h}$ její Lieova algebra, $g \in H$. Pak definujeme:

- $a_g := L_g \circ R_{g^{-1}} \equiv R_{g^{-1}} \circ L_g : H \to H$
- $Ad : H \to Aut(\mathfrak{h}) : h \mapsto Ad_h := T_e a_h$
- $ad := T_e Ad : \mathfrak{h} \to End(\mathfrak{h}) : X \mapsto ad_X$
- $V \cdot g = \left(T_x R_g\right) V$, pro $V \in T_x H$
- $g \cdot V = \left(T_x L_g\right) V$, pro $V \in T_x H$

Tedy $Ad_g X = g \cdot X \cdot g^{-1}$, $ad_X Y = [X, Y]$.

A^t, A^T transponované zobrazení nebo transponovaná matice k zobrazení nebo matici A

$Ran\, f$ obor hodnot zobrazení f

$\widehat{n}$ $= \{1, \ldots, n\} \subseteq \mathbb{N}$, pro $n \in \mathbb{N}$

x^μ $= (x^0, x^1) = (\tau, \sigma)$ prostoročasové proměnné

$\mathbf{X}|_{\theta=0}$**,** $\mathbf{X}|_{\theta_\pm}$ koeficient u nulté mocniny $\theta_\pm$, resp. u $\theta_\pm$, v rozvoji superpole

x $= (\tau, \sigma) = (x^0, x^1)$ prostoročasové souřadnice, souřadnice na Σ

Kapitola 1

Úvod

Cílem této práce bylo seznámit se s kanonickou formulací Poisson-Lieovy T-Plurality a pokusit se nejprve rozšířit na supersymetrické σ-modely samotnou transformaci a poté i její kanonickou formulaci.

První část práce tedy obsahuje stručné shrnutí základních nezbytných pojmů a faktů a přehled konstrukce Poisson-Lieovy T-Plurality.

Druhá část se snaží o pochopení pojmu supersymetrie a její souvislosti s ve fyzice běžnými symetriemi. Je zapotřebí zavést nové pojmy, jako je například superalgebra, superprostor, či superpole. Dále je uvedeno, co je to supersymetrický σ-model, jak se s ním pracuje, jak vypadají jeho pohybové rovnice. Následuje zobecnění Poisson-Lieovy T-Plurality a nakonec diskuze kanoničnosti této transformace.

Kapitola 2

Klasický případ

2.1 Základní pojmy a označení

2.1.1 Drinfeľdův double

Drinfeľdův double D je Lieova grupa jejíž Lieova algebra $\mathfrak{d}$ je jakožto vektorový prostor direktním součtem dvou svých podalgeber $\mathfrak{g}$, $\widetilde{\mathfrak{g}}$, které jsou obě maximálně izotropní vzhledem k symetrické nedegenerované ad-invariantní bilineární formě $\langle\,|\,\rangle_{\mathfrak{d}}$ definované na $\mathfrak{d}$. Maximální izotropie znamená:

$$\langle\,|\,\rangle_{\mathfrak{d}}\,|_{\mathfrak{g}\times\mathfrak{g}}\equiv 0$$

a pro každý další podprostor $V\subseteq\mathfrak{d}$ platí

$$\big(\langle\,|\,\rangle_{\mathfrak{d}}\,|_{V\times V}\equiv 0 \quad \& \quad \mathfrak{g}\subseteq V\big)\Rightarrow \mathfrak{g}=V.$$

Tj. forma je na $\mathfrak{g}\times\mathfrak{g}$ nulová a $\mathfrak{g}$ je ve smyslu inkluze největší podprostor s takovouto vlastností. Pro $\widetilde{\mathfrak{g}}$ zcela analogicky. Ad-invariance formy je následující vlastnost:

$$\forall X,Y,Z\in\mathfrak{d}\big(\langle ad_X Y\mid Z\rangle_{\mathfrak{d}}+\langle Y\mid ad_X Z\rangle_{\mathfrak{d}}=0\big),$$

z čehož plyne

$$\forall d\in Ran\,(exp^D)\,\forall X,Y\in\mathfrak{d}\big(\langle Ad_d X\mid Ad_d Y\rangle_{\mathfrak{d}}=\langle X\mid Y\rangle_{\mathfrak{d}}\big),$$

kde $exp^D:\mathfrak{d}\to D$ je exponenciální zobrazení.

Označme $G,\widetilde{G}\subseteq D$ souvislé Lieovy podgrupy Drinfeľdova doublu příslušné podalgebrám $\mathfrak{g}$, $\widetilde{\mathfrak{g}}$. (Dále v textu tento fakt vždy bude vyjádřen prostě obrázkem $D=(G,\widetilde{G})$.) Potom existuje W okolí jednotky v D takové, že každý element $l\in W$ lze jednoznačně rozložit $l=g\widetilde{h}$, kde $g\in G$, $\widetilde{h}\in\widetilde{G}$. Drinfeľdův double má vždy nutně sudou dimenzi a $\dim G=\dim\widetilde{G}=m\in\mathbb{N}$.

Baze $(T_a)_{a\in\widehat{m}}\subseteq\mathfrak{g}$, $(\widetilde{T}^b)_{b\in\widehat{m}}\subseteq\widetilde{\mathfrak{g}}$ vybíráme duální ve smyslu

$$\langle T_a|\widetilde{T}^b\rangle_{\mathfrak{d}}=\delta_a^b. \tag{2.1}$$

Potom z důvodu ad-invariance formy $\langle\,|\,\rangle_{\mathfrak{d}}$

$$\Big([T_a,T_b]=f_{ab}^c T_c \quad \& \quad [\widetilde{T}^a,\widetilde{T}^b]=\widetilde{f}_c^{ab}\widetilde{T}^c\Big)\Longrightarrow[\widetilde{T}^a,T_b]=f_{bc}^a\widetilde{T}^c-\widetilde{f}_b^{ac}T_c \tag{2.2}$$

Dále se budou hodit následující definice

$$Ad_{g^{-1}} = \begin{pmatrix} a^t(g) & b^t(g) \\ 0 & d^t(g) \end{pmatrix}$$

nechť je matice adjungované reprezentace grupy G na $\mathfrak{d}$ v bazi $(T_a, \widetilde{T}^b)$, czn.

$$g^{-1}T_a g = a_a{}^b T_b, \quad g^{-1}\widetilde{T}^a g = b^{ab}T_b + d^a{}_b \widetilde{T}^b.$$

$$e(g) := T_g L_{g^{-1}} : T_g G \to \mathfrak{g}, \quad e^a{}_\mu T_a = e\partial_\mu$$

$$v_a(g) := \big(T_e L_g\big) T_a \in T_g G, \quad v_a^\mu \partial_\mu = v_a.$$

(Tj. v_a je levoinvariantní vektorové pole na G.)

D může dopouštět i jiný rozklad $\mathfrak{d} = \widehat{\mathfrak{g}} + \bar{\mathfrak{g}}$, $D = (\widehat{G}, \bar{G})$. Baze $(\widehat{T}_a)_{a\in\widehat{m}} \subseteq \widehat{\mathfrak{g}}$, $(\bar{T}^a)_{a\in\widehat{m}} \subseteq \bar{\mathfrak{g}}$ jsou s bazemi algeber $\mathfrak{g}$, $\widetilde{\mathfrak{g}}$ svázány linearní transformací

$$T_a = K_a{}^b \widehat{T}_b + Q_{ab}\bar{T}^b, \quad \widetilde{T}^a = R^{ab}\widehat{T}_b + S^a{}_b \bar{T}^b \tag{2.3}$$

Pokud chceme, aby platily vztahy analogické vztahům (2.2) je nutné požadovat dualitu bazí algeber $\widehat{\mathfrak{g}}$, $\bar{\mathfrak{g}}$ ve smyslu (2.1). Tj.

$$\langle \widehat{T}_a | \bar{T}^b \rangle_{\mathfrak{d}} = \delta_a^b, \quad \begin{pmatrix} K & Q \\ R & S \end{pmatrix}^{-1} = \begin{pmatrix} S^t & Q^t \\ R^t & K^t \end{pmatrix}$$

$$[\widehat{T}_a, \widehat{T}_b] = \widehat{f}_{ab}^c \widehat{T}_c, \quad [\bar{T}^a, \bar{T}^b] = \bar{f}_c^{ab}\bar{T}^c, \quad [\bar{T}^a, \widehat{T}_b] = \widehat{f}_{bc}^a \bar{T}^c - \bar{f}_b^{ac}\widehat{T}_c.$$

A zcela analogicky definujeme matice $\widehat{a}$, $\widehat{b}$, $\widehat{d}$, pole $\widehat{v}_a$ i vielbein $\widehat{e}$.

2.1.2 σ-model

Klasický nelineární dvoudimenzionalní σ-model je teorie pole ve tvaru

$$\varphi : (\Sigma, \eta, \omega) \to (M, \mathbf{g}, B) \in C^\infty,$$

kde Σ je dvoudimenzionální diferencovatelná varieta s metrickým tenzorem η a metrickou formou objemu ω a M je varieta s metrickým tenzorem $\mathbf{g}$ a 2-formou B. Akce, definující dynamiku systému, se zavádí následujícím integrálem:

$$S_\varphi := \int \big[\eta^{ab}(\varphi^*\mathbf{g})_{ab} + \omega^{ab}(\varphi^* B)_{ab}\big]\omega = \int \mathcal{L}\,\omega.$$

Tedy hustota lagranžiánu

$$\mathcal{L} = \eta^{ab}\mathbf{g}_{\mu\nu}(\varphi)\partial_a\varphi^\mu\partial_b\varphi^\nu + \omega^{ab}B_{\mu\nu}(\varphi)\partial_a\varphi^\mu\partial_b\varphi^\nu$$

a pohybové rovnice mají tvar

$$\partial_a(\mathbf{g}_{\mu\nu}\eta^{ab}\partial_b\varphi^\nu) - \frac{1}{2}\mathbf{g}_{\alpha\beta,\mu}\partial_a\varphi^\alpha\eta^{ab}\partial_b\varphi^\beta +$$

$$+\partial_a(B_{\mu\nu}\omega^{ab}\partial_b\varphi^\nu) - \frac{1}{2}B_{\alpha\beta,\mu}\partial_a\varphi^\alpha\omega^{ab}\partial_b\varphi^\beta = 0.$$

V této práci [1] $\Sigma = \mathbb{R}^2$ s Minkowského metrikou $\eta = d\tau \otimes d\tau - d\sigma \otimes d\sigma$ a formou objemu $\omega = d\tau \wedge d\sigma$. Tedy

$$\mathcal{L} = \mathbf{g}_{\mu\nu}\partial_\tau\varphi^\mu\partial_\tau\varphi^\nu - \mathbf{g}_{\mu\nu}\partial_\sigma\varphi^\mu\partial_\sigma\varphi^\nu - 2B_{\mu\nu}\partial_\tau\varphi^\mu\partial_\sigma\varphi^\nu$$

V souřadnicích světelného kužele $\xi_\pm := \frac{1}{2}(\tau \pm \sigma)$

$$\mathcal{L} = F_{\mu\nu}\partial_+\varphi^\mu\partial_-\varphi^\nu$$

a pohybové rovnice zní

$$\partial_+\partial_-\varphi^\mu + \Gamma^\mu_{\alpha\beta}\partial_+\varphi^\alpha\partial_-\varphi^\beta = 0,$$

kde

$$F := \mathbf{g} + B \quad \& \quad \Gamma^\mu_{\alpha\beta} = \frac{1}{2}\mathbf{g}^{\mu\rho}(F_{\rho\beta,\alpha} + F_{\alpha\rho,\beta} - F_{\alpha\beta,\rho}).$$

2.2 Poisson-Lieova T-Pluralita

Máme-li σ-model

$$\varphi : \Sigma \to G, \tag{2.4}$$

kde G je Lieova grupa a existuje Drinfeľdův double $D = (G, \widetilde{G})$, s hustotou lagranžiánu

$$\mathcal{L} = F_{\mu\nu}\partial_+\varphi^\mu\partial_-\varphi^\nu,$$

můžeme $\mathcal{L}$ přepsat ve tvaru

$$\mathcal{L} = E_{ab}(g^{-1}\partial_+ g)^a(g^{-1}\partial_- g)^b,$$

kde

$$(g^{-1}\partial_\pm g)^a = e^a{}_\mu\partial_\pm\varphi^\mu.$$

Potom pokud platí

$$E = \left(a^t E_0^{-1} a + \Pi\right)^{-1}, \text{ kde } \Pi = a^t b \tag{2.5}$$

a E_0 je konstantní matice, pohybové rovnice σ-modelu (2.4) se dají zapsat ve tvaru

$$\partial_- A^+_c - \partial_+ A^-_c - \widetilde{f}^{ab}_c A^+_a A^-_b = 0, \tag{2.6}$$

kde

$$A^+_c = -E_{ac}(g^{-1}\partial_+ g)^a, \tag{2.7}$$

$$A^-_c = +E_{ca}(g^{-1}\partial_- g)^a, \tag{2.8}$$

protože platí

$$(\mathfrak{L}_{v_c}F)_{\mu\nu} = F_{\mu\alpha}v^\alpha_a\widetilde{f}^{ab}_c v^\beta_b F_{\beta\nu}, \tag{2.9}$$

a jsou obsažené v rovnici na Lieově algebře Drinfeľdova doublu $\partial_\pm l \cdot l^{-1} \in \mathcal{E}^\pm$ $\big($ tj. $\langle\partial_\pm l \cdot l^{-1}|\mathcal{E}^\mp\rangle_{\mathfrak{d}} = 0\big)$, kde $l = g\widetilde{h} : \Sigma \to D$, $g \in G$, $\widetilde{h} \in \mathbb{G}$, $\varphi = g$,

$$\mathcal{E}^+ := Span\big[(T_a + E_{0ab}\widetilde{T}^b)_{a\in\widehat{m}}\big] \quad \& \quad \mathcal{E}^- := Span\big[(T_a - E_{0ba}\widetilde{T}^b)_{a\in\widehat{m}}\big].$$

[1] Poznámka z důvodů aplikací σ-modelů v teorii strun: Stejně dobře by mohlo být $\Sigma = \mathbb{R} \times S^1$ nebo $\Sigma = \mathbb{R} \times (0, \pi)$ s požadavkem periodičnosti řešení. Na lokální úrovni je to ovšem jedno.

A to následujícím způsobem:

$$\langle \partial_\pm l l^{-1} \mid \mathcal{E}^\mp \rangle_{\mathfrak{d}} = 0$$

$$\langle \partial_\pm g g^{-1} + g \partial_\pm \widetilde{h} \widetilde{h}^{-1} g^{-1} \mid \mathcal{E}^\mp \rangle_{\mathfrak{d}} = 0$$

$$\langle g^{-1} \partial_\pm g + \partial_\pm \widetilde{h} \widetilde{h}^{-1} \mid g^{-1} \mathcal{E}^\mp g \rangle_{\mathfrak{d}} = 0,$$

kde

$$g^{-1}\mathcal{E}^+ g = Span[(T_a + E_{ab}(g)\widetilde{T}^b)_{a\in\widehat{m}}], \quad g^{-1}\mathcal{E}^- g = Span[(T_a - E_{ba}(g)\widetilde{T}^b)_{a\in\widehat{m}}],$$

$$A_c^\pm \widetilde{T}^c := -\partial_\pm \widetilde{h} \widetilde{h}^{-1}. \tag{2.10}$$

Pokud zároveň $D = (\widehat{G}, \bar{H})$, existujue i rozklad $l = \widehat{g}\bar{h}$, kde $\widehat{g} \in \widehat{G}$, $\bar{h} \in \bar{H}$, a $\partial_\pm l \cdot l^{-1} \in \mathcal{E}^\pm$ je rovnice obsahující i pohybové rovnice σ-modelu ($\widehat{\varphi} = \widehat{g}$)

$$\widehat{\varphi} : \Sigma \to \widehat{G} \tag{2.11}$$

s hustotou lagranžianu

$$\widehat{\mathcal{L}} = \widehat{F}_{\mu\nu} \partial_+ \widehat{\varphi}^\mu \partial_- \widehat{\varphi}^\nu = \widehat{E}_{ab} (\widehat{g}^{-1}\partial_+ \widehat{g})^a (\widehat{g}^{-1}\partial_- \widehat{g})^b,$$

pokud

$$\widehat{E} = \left(\widehat{a}^t \widehat{E}_0^{-1} \widehat{a} + \widehat{\Pi}\right)^{-1}, \text{ kde } \widehat{\Pi} = \widehat{a}^t \widehat{b} \tag{2.12}$$

$$\widehat{E}_0 = \left(K + E_0 R\right)^{-1} \left(Q + E_0 S\right).$$

Tedy známe-li řešení g pohybových rovnic (2.6) σ-modelu (2.4), vyřešíme rovnice (2.7), (2.8), (2.10) (tj. najdeme $\widetilde{h}$), za pomoci znalosti $l = g\widetilde{h}$ najdeme rozklad $l = \widetilde{g}\bar{h}$ a tím jsme našli řešení $\widetilde{g}$ pohybových rovnic σ-modelu (2.11), čímž jsme provedli transformaci Poissonovy-Lieovy T-Plurality ([1],[3]).

Kapitola 3

Supersymetrické zobecnění

3.1 Symetrie

V našem případě, dimenze 1 + 1, obsahuje Poincarého grupa pouze jedinou vlastní Lorentzovu transformaci a dvě prostoročasová posunutí. Její (jeho) algebra má tvar

$$[I^{01}, P^\mu] = i(\eta^{1\mu} P^0 - \eta^{0\mu} P^1), \quad [P^\mu, P^\nu] = 0, \tag{3.1}$$

kde I^{01} je generátor vlastní Lorentzovy transformace a P^μ jsou generátory příslušných posunutí. Naše teorie pole (akce σ-modelu) je vzhledem k této grupě invariantní, protože je invariantní vzhledem ke každému difeomorfizmu na Σ, který zachovává metriku. Kdybychom chtěli invarianci ověřit, postupovali bychom následujícím způsobem.[1] Při infinitesimalním posunutí (resp. Lorentzově transformaci)

$$x^\mu \mapsto x^\mu + \zeta^\mu \quad (\text{resp. } x_\mu \mapsto x_\mu - \omega_{\mu\nu} x^\nu)$$

s infinitesimalním parametrem ζ^μ (resp. $\omega_{\mu\nu} = -\omega_{\nu\mu}$) se pole transformuje

$$\varphi^\alpha(x) \mapsto \varphi^\alpha(x) + \zeta^\mu \partial_\mu \varphi^\alpha(x) \quad \Big(\text{resp. } \varphi^\alpha(x) \mapsto \varphi^\alpha(x) + \frac{1}{2}\omega_{\mu\nu}(x^\mu \partial^\nu - x^\nu \partial^\mu)\Big)$$

a změní se i hustota lagranžiánu $\mathcal{L} \mapsto \mathcal{L} + \delta'\mathcal{L}$ a bylo by třeba ověřit, zda se změní akce, čili zda se lagranžián změní pouze o "povrchový člen". (Naštěstí nic ověřovat netřeba, nicméně v případě posunutí samozřejmě $\delta'\mathcal{L} = \zeta^\mu \partial_\mu \mathcal{L}$, což je povrchový člen.) Tímto jsme reprezentovali Poincarého algebru jako algebru diferenciálních operátorů na funkcích na prostoročasu

$$P_\mu = i\partial_\mu, \quad I^{01} = -i(x^0\partial_1 + x^1\partial_0)$$

a ověření symetrie akce vlastně znamená ověření invariance při infinitesimalní transformaci $\varphi(x) \mapsto \varphi(x) + \delta\,\varphi(x)$, kde $\delta = \zeta^\mu P_\mu$ nebo $\delta = \omega_{\mu\nu} I^{\mu\nu}$.

3.2 Supersymetrie

Supersymetrická teorie pole znamená invarianci polní akce vzhledem k rozšíření Poincarého algebry o spinorové generátory, čili invarianci vzhledem k tzv. Po-

[1] Zde se kvůli zjednodušení hodí, že prostoročas byl na začátku prohlášen za $\mathbb{R}^2$.

incarého superalgebře. Teď je tedy třeba vyjasnit tři věci: Co je spinor, co je superalgebra a jak vypadá ta Poicarého.

3.2.1 Spinory

Spinor ([9], [10]) pro nás bude dvoukomponentní funkce na prostoročasu, která se při Lorentzově transformaci prostoročasových souřadnic

$$\Lambda(\omega) = exp\big(\frac{i}{2}\omega_{\alpha\beta}I^{\alpha\beta}\big), \quad x' = \Lambda(\omega)x$$

(s parametrem $\omega_{\alpha\beta} = -\omega_{\beta\alpha}$) transformuje následujícím způsobem

$$\psi'(x') = S(\omega)\psi(x), \quad S(\omega) = exp\big(\frac{i}{4}\omega_{\alpha\beta}\gamma^{\alpha\beta}\big),$$

kde $I^{\alpha\beta} = -I^{\beta\alpha}$ jsou generátory 2×2 maticové reprezentace Lorentzovy algebry[2]

$$(I^{\alpha\beta})_{\mu\nu} = i(\eta^{\alpha}_{\mu}\eta^{\beta}_{\nu} - \eta^{\alpha}_{\nu}\eta^{\beta}_{\mu}),$$

$\gamma^{\alpha\beta}$ jsou generátory jiné 2×2 reprezentace téže algebry

$$\gamma^{\alpha\beta} = \frac{i}{2}[\gamma^{\alpha}, \gamma^{\beta}]$$

a γ^{α}, γ^{β}, jsou generátory algebry Diracových γ-matic 2×2

$$\{\gamma^{\mu}, \gamma^{\nu}\} = 2\eta^{\mu\nu}.$$

(Mimochodem: Z tvaru generátorů $I^{\alpha\beta}$ je vidět, proč infinitesimalní Lorentzova transformace (uvedená již na začátku této kapitoly) vypadá právě tak, jak vypadá.) Matice $S(\omega)$ tedy představují reprezentaci Lorentzovy grupy, která se jmenuje spinorová. V této práci je algebra Diracových matic realizována takto[3]

$$\gamma^0 = \sigma^2 = \begin{pmatrix} 0 & -i \\ i & 0 \end{pmatrix} \quad \gamma^1 = i\sigma^1 = \begin{pmatrix} 0 & i \\ i & 0 \end{pmatrix}.$$

Tedy ψ_r je r-tá komponenta spinoru ψ. Spinorový index $r \in \{-,+\}$. Ke zvyšování (a snižování) indexů slouží matice C (unitární matice nábojového sdružení splňující příslušné relace). Tedy pohromadě:

$$\psi = \begin{pmatrix} \psi_- \\ \psi_+ \end{pmatrix}, \quad \overline{\psi}^s = C^{rs}\psi_r, \quad \psi_s = C_{sr}\overline{\psi}^r,$$

$$C(\gamma^{\mu})^T C^{\dagger} = -\gamma^{\mu}, \quad C^T = -C. \tag{3.2}$$

Výběr je udělán takto:

$$(C^{rs}) = -(C_{rs}) = \gamma^0, \quad \text{tj. } C^{-+} = C_{+-} = -i,$$

což znamená, že

$$\overline{\psi} = \psi^{\dagger}\gamma^0 = i\,(\psi_+, -\psi_-) \quad \& \quad \overline{\psi}\psi = \overline{\psi}^r\psi_r = \psi^{\dagger}\gamma^0\psi.$$

[2] Teď by se slušelo napsat mezi nimi platící komutační relace, ale v dimenzi 1+1 je generátor pouze jeden. Nicméně formalismu knih [9], [10] je vhodné se držet i v této dimenzi pro jeho kompaktnost.

[3] Výběr je udělán tak, aby platily i vztahy, které nejsou již potřebné, ale se kterými jsem byl zvyklý pracovat v dimenzi $1+3$. Čili ze strachu z chyby a z pohodlnosti. Jedná se například o pořadavek $(\gamma^0)^{\dagger} = \gamma^0$, který zaručoval samosdruženost Diracovského hamiltoniánu, což lze v dimenzi $1+1$ zařídit i pohodlněji (jako např. v [11]).

3.2.2 superalgebra

Stejně jako Lieova algebra je vektorový prostor V se závorkou $[\,,\,]$, která je morfizmem vektorových prostorů $V \otimes V \to V$ splňujícím vlastnosti $(\forall a, b, c \in V)$

1. $[a, b] = -[b, a]$
2. $[a, [b, c]] + [c, [a, b]] + [b, [c, a]] = 0,$

tak i podobným způsobem bude definována ([8], [11])[4] Lieova superalgebra. Je tedy třeba si připravit příslušné superpojmy.

Supervektorový prostor V je vektorový prostor dopouštějící rozklad[5]

$$V = V_0 + V_1 \quad (0, 1 \in \mathbb{Z}_2).$$

Tedy $\mathbb{Z}_2$-gradovaný vektorový prostor. Prvky V_0 (resp. V_1) se jmenují sudé (resp. liché). Morfizmy supervektorových prostorů jsou morfizmy vektorových prostorů, které zachovávají tuto gradaci.[6] Dále je definována funkce parity na homogenních (tj. sudých nebo lichých) prvcích

$$p : (V_0 \cup V_1) \setminus \{0\} \to \mathbb{Z}_2 : v \mapsto p(v) \quad (p(v) = i \Leftrightarrow v \in V_i)$$

Tenzorový součin $V \otimes W$ supervektorových prostorů V, W je jejich tenzorový součin s následovně definovanou sudou a lichou částí

$$(V \otimes W)_0 := (V_0 \otimes W_0) \oplus (V_1 \otimes W_1), \quad (V \otimes W)_1 := (V_0 \otimes W_1) \oplus (V_1 \otimes W_0).$$

Tedy Lieova superalgebra je supervektorový prostor V se závorkou $[\,,\,]$, která je morfizmem $V \otimes V \to V$ s vlastnostmi

1. $[a, b] = -(-1)^{p(a)p(b)}[b, a]$
2. $[a, [b, c]] + (-1)^{p(a)p(c)+p(b)p(c)}[c, [a, b]] + (-1)^{p(a)p(b)+p(a)p(c)}[b, [c, a]] = 0$

pro všechny homogenní prvky z V, na ostatní rozšířeno pomocí linearity. Jsou-li dva elementy a, b vstupující do $[\,,\,]$ oba liché, platí $[a, b] = [b, a]$ a závorky se občas značí $\{\,,\,\}$ a nazývají "antikomutátor", čehož se přidržuji.

3.2.3 Poincarého superalgebra

Má-li být Poincarého superalgebra v jistém smyslu rozšíření původní Poincarého algebry, komutační relace jejích sudých generátorů budou právě relace (3.1). Liché spinorové generatory Q_r se přidávají s (anti)komutačními relacemi ([8], [4], [11])

$$[I^{01}, Q_r] = -\frac{1}{2}(\gamma^{01})_r^s Q_s, \quad [Q_r, P^\mu] = 0, \quad \{Q_r, Q_s\} = 2(\gamma^\mu C)_{rs} P_\mu, \qquad (3.3)$$

kde platnost $\{Q_r, Q_r\} = \{Q_s, Q_r\}$ je zajištěna relacemi (3.2).

[4] Je vhodné poznamenat, že definice se v těchto dvou publikacích nepatrně liší, takže, přísně vzato, použita je ta, kterou uvádí V.S.Varadarajan ([8]).

[5] což dopouští každý...

[6] což již není každý.

Pokud chceme tyto generátory opět reprezentovat jako diferencialní operátory na funkcích na prostoročasu odpovídající nějakým infinitesimalním transformacím, nezbývá než tento prostor rozšířit. Rozšiřuje se prostoročas o dvě antikomutující "fermionové" proměnné θ_-, θ_+,

$$\theta_s\theta_r + \theta_r\theta_s = \{\theta_s, \theta_r\} = 0,$$

se kterými se pracuje stejně jako se spinory v oddíle (3.2.1) až na to, že jsou nezávislé na x, tedy transformací $x \mapsto x'$ si vůbec nevšímají. Máme tedy prostoročas s proměnnými (x^μ, θ_r). (Což je tzv. superprostor.) Derivace podle fermionových proměnných se definuje následujícím vztahem

$$\frac{\partial}{\partial\overline{\theta}^s}\overline{\theta}^r = \delta^r_s.$$

Funkce takovýchto proměnných (tzv. superpole) mají tvar ([11])

$$\phi(x, \theta_-, \theta_+) = \varphi(x) + i\overline{\theta}\psi(x) + \frac{i}{2}\overline{\theta}\theta q(x),$$

kde pole φ a q jsou bosonová (komutující) a pole ψ_s, se kterými se pracuje stejně jako se spinory či proměnnými θ, jsou fermionová (antikomutující), tj.

$$\psi_s\psi_r + \psi_r\psi_s = 0.$$

Objekt ϕ jako celek je tedy se vším komutující, někdy se nazývá sudé superpole.

Jak tedy reprezentace pomocí diferenciálních operátorů vypadá a jak vypadají příslušné infinitesimalní transformace? Reprezentace generátoru P_μ zůstane $P_\mu = i\partial_\mu$ a bude odpovídat infinitesimalnímu posunutí proměnných x (s bosonovými parametry ζ^μ)

$$(x^\mu, \theta_r) \mapsto (x^\mu + \zeta^\mu, \theta_r),$$

operátor

$$Q_s = \frac{\partial}{\partial\overline{\theta}^s} + i(\gamma^\mu\theta)_s\partial_\mu$$

a odpovída transformaci (s fermionovými parametry $\overline{\epsilon}^r$)

$$(x^\mu, \overline{\theta}^r) \mapsto (x^\mu + i\overline{\epsilon}\gamma^\mu\theta, \overline{\theta}^r + \overline{\epsilon}^r),$$

operátor

$$I^{01} = -i(x^0\partial_1 + x^1\partial_0) + \frac{1}{2}\overline{\theta}\gamma^{01}\frac{\partial}{\partial\overline{\theta}}$$

a příslušná transformace (s bosonovými parametry $\omega_{\mu\nu} = -\omega_{\nu\mu}$) je

$$(x_\mu, \overline{\theta}^r) \mapsto \Big(x_\mu - \omega_{\mu\nu}x^\nu, \overline{\theta}^r + \frac{i}{4}\omega_{\mu\nu}\overline{\theta}^s(\gamma^{\mu\nu})_s{}^r\Big).$$

Poslední transformace při označení

$$(x, \theta) \mapsto (x', \theta') \quad \Rightarrow \quad \phi(x, \theta) \mapsto \phi(x', \theta')$$

vlastně znamená

$$\phi(x', \theta') = \varphi(x') + i\overline{\theta}^r\Big(\delta^s_r + \frac{i}{4}\omega_{\mu\nu}(\gamma^{\mu\nu})_r{}^s\Big)\psi_s(x') + \frac{i}{2}\overline{\theta}\theta\, q(x'),$$

kde ve druhém členu na pravé straně je rozvoj do prvního řádu transformační matice $S(\omega)$ z oddílu (3.2.1) Tedy požadujeme, aby se při Lorentzově transformaci pole φ, q transformovala jako skalár a pole $\psi_\mp$ jako spinor.

Zbývá říci, jak se integruje přes antikomutující proměnné θ: Míra je definována vztahy

$$\int d\theta_r\,\theta_s = \delta_{rs}, \quad \int d^2\theta = \int d\theta_- \int d\theta_+ .$$

A nyní je již vše připraveno k tomu, abychom mohli říci, že polní akce bude vypadat nějak takto

$$S = \int d^2x\, d^2\theta\, \mathbf{L}$$

a supersymetrická se bude jmenovat tehdy, bude-li invariantní vúči transformaci $\mathbf{L} \mapsto \mathbf{L} + \delta'\mathbf{L}$, při $\phi \mapsto \phi + \delta_\epsilon\phi$, kde $\delta_\epsilon = \bar\epsilon^r Q_r = \bar\epsilon Q$ s fermionovými parametry $\bar\epsilon^r$. Operátory vhodné pro konstrukci takových akcí

$$D_s = \frac{\partial}{\partial\bar\theta^s} - i(\gamma^\mu\theta)_s\partial_\mu, \quad \text{tj.} \quad D_\pm = \pm i\frac{\partial}{\partial\theta_\mp} \pm \theta_\mp\partial_\pm$$

(Symbol $\partial_\pm = \partial_0 \pm \partial_1 = \partial_\tau \pm \partial_\sigma$ má stále tentýž význam.) splňují následující (anti)komutační relace

$$\{D_-, D_-\} = i\partial_- \quad \{D_+, D_+\} = i\partial_+ \quad \{D_-, D_+\} = 0$$

$$[I^{01}, D_r] = -\frac{1}{2}(\gamma^{01})_r^s D_s, \quad [D_r, P^\mu] = 0,$$

a hlavně (proto jsou také tyto operátory vhodné)

$$\{Q_r, D_s\} = 0 \quad \Longrightarrow \quad [\,\delta_\epsilon, D_r] = 0. \tag{3.4}$$

Takže se dá i říci

$$\int d^2\theta\,\Phi = \big(D_+D_-\Phi\big)|_{\theta=0}.$$

3.3 Supersymetrický σ-model

Supersymetrické zobecnění akce σ-modelu se definuje následujícím způsobem ([5])

$$S_\phi = \frac{1}{2i}\int d^2\xi d^2\theta \big[\mathbf{G}_{\mu\nu}(\phi)\overline{D\phi^\mu}D\phi^\nu + \mathbf{B}_{\mu\nu}(\phi)\overline{D\phi^\mu}(\gamma^5 D)\phi^\nu\big], \tag{3.5}$$

kde $\gamma^5 = \gamma^0\gamma^1$,

$$\phi^\mu = \varphi^\mu + i\bar\theta\psi^\mu + \frac{i}{2}\bar\theta\theta q^\mu.$$

Superpole ϕ mají nyní i horní index $\mu \in \widehat{m}$ a spinorová pole ψ antikomutují

$$\forall\alpha,\beta \in \widehat{m}\,\forall r,s \in \{-,+\}\,\Big(\psi_r^\alpha\psi_s^\beta + \psi_s^\beta\psi_r^\alpha = 0\Big). \tag{3.6}$$

Že se jedná skutečně o akci ve výšeuvedeném smyslu supersymetrickou se dá velice jednoduše ověřit. (Stejně jednoduše jako v případě klasické invariance vůči posunutí.) Při infinitesimalní transformaci $\phi \mapsto \phi + \delta_\epsilon\phi$ se lagranžián $\mathbf{L}$, tj.

člen v akčním integrálu v hranatých závorkách, transformuje prostě $\mathbf{L} \mapsto \mathbf{L}+\delta_\epsilon \mathbf{L}$ (díky vztahům (3.4)) a $\delta_\epsilon \mathbf{L}$ je povrchový člen, protože

$$\delta_\epsilon \mathbf{L} = \bar{\epsilon}^r \frac{\partial}{\partial \bar{\theta}^r} \mathbf{L} + i\partial_\mu \bar{\epsilon}^r (\gamma^\mu \theta)_r \mathbf{L},$$

kde druhý člen je povrchový v klasickém smyslu, a první je součet θ_--nezávislé a θ_+-nezávislé části, takže vymizí při integrování přes $\int d^2\theta$.

Superpole $\mathbf{G}_{\mu\nu} = \mathbf{G}_{\mu\nu}(\phi)$ se dá rozložit do Taylorovy řady se středem ve φ

$$\mathbf{G}_{\mu\nu}(\phi) = \mathbf{g}_{\mu\nu}(\varphi) + \mathbf{g}_{\mu\nu,\alpha}(\varphi)\big(i\bar{\theta}\psi^\alpha + \frac{i}{2}\bar{\theta}\theta q^\alpha\big) + \frac{1}{4}\mathbf{g}_{\mu\nu,\alpha\beta}(\varphi)\bar{\theta}\theta\overline{\psi^\alpha}\psi^\beta, \quad (3.7)$$

kde[7] $\mathbf{g}$ je metrický tenzor z minulé kapitoly. Odobný rozvoj má pochopitelně i superpole $\mathbf{B}_{\mu\nu}$ a také zúžení $\mathbf{B}_{\mu\nu}|_{\theta=0} = B_{\mu\nu}$ jsou složky 2-formy z minulé kapitoly. Akce (3.5) se dá upravit do tvaru

$$S_\phi = \int d^2\xi d^2\theta \mathbf{F}_{\mu\nu}(\phi) D_+\phi^\mu D_-\phi^\nu =: \int d^2\xi\, \mathcal{L}, \quad (3.8)$$

zavedeme-li superpole

$$\mathbf{F}_{\mu\nu}(\phi) = \mathbf{G}_{\mu\nu}(\phi) + \mathbf{B}_{\mu\nu}(\phi),$$

které má potom opět stejný rozvoj v polích φ, ψ, q jako $\mathbf{G}_{\mu\nu}$ a $\mathbf{B}_{\mu\nu}$

$$\mathbf{F}_{\mu\nu}(\phi) = F_{\mu\nu}(\varphi) + F_{\mu\nu,\alpha}(\varphi)\big(i\bar{\theta}\psi^\alpha + \frac{i}{2}\bar{\theta}\theta q^\alpha\big) + \frac{1}{4}F_{\mu\nu,\alpha\beta}(\varphi)\bar{\theta}\theta\overline{\psi^\alpha}\psi^\beta. \quad (3.9)$$

S pomocí tohoto rozvoje lze po vyintegrování přes proměnné θ obdržet akci (interagujících) fermionových a bosonových polí s hustotou lagranžianu

$$\begin{aligned}\mathcal{L} \;=\; & -iF_{\mu\nu}\psi_+^\mu\partial_-\psi_+^\nu - iF_{\mu\nu}\psi_-^\nu\partial_+\psi_-^\mu + F_{\mu\nu}\partial_+\varphi^\mu\partial_-\varphi^\nu - 2\mathbf{g}_{\alpha\gamma}\Gamma^\gamma_{\mu\nu}\psi_+^\mu\psi_-^\nu q^\alpha + \\ + \; & iF_{\mu\nu,\alpha}\psi_+^\alpha\psi_+^\mu\partial_-\varphi^\nu + iF_{\mu\nu,\alpha}\psi_-^\alpha\psi_-^\nu\partial_+\varphi^\mu + F_{\mu\nu,\alpha\beta}\psi_+^\alpha\psi_-^\beta\psi_+^\mu\psi_-^\nu - F_{\mu\nu}q^\mu q^\nu.\end{aligned}$$

Z tohoto tvaru je okamžitě vidět první sada pohybových rovnic

$$q^\gamma = -\Gamma^\gamma_{\mu\nu}\psi_+^\mu\psi_-^\nu,$$

s jejíž pomocí se po troše práce lze dopracovat k ekvivalentnímu Lagranžianu

$$\begin{aligned}\mathcal{L}' \;=\; & -i\mathbf{g}_{\mu\nu}\overline{\psi^\mu}\partial\!\!\!/\psi^\nu + F_{\mu\nu}\partial_+\varphi^\mu\partial_-\varphi^\nu + \frac{1}{2}R_{\alpha\mu\beta\nu}\psi_+^\alpha\psi_-^\beta\psi_+^\mu\psi_-^\nu + \\ & + i\mathbf{g}_{\nu\sigma}\Gamma^\sigma_{\mu\alpha}\psi_+^\mu\psi_+^\nu\partial_-\varphi^\alpha + i\mathbf{g}_{\nu\sigma}\Gamma^\sigma_{\alpha\mu}\psi_-^\mu\psi_-^\nu\partial_+\varphi^\alpha,\end{aligned} \quad (3.10)$$

kde

$$R_{\alpha\mu\beta\nu} = \frac{1}{2}\big(F_{\alpha\nu,\mu\beta} + F_{\mu\beta,\alpha\nu} - F_{\alpha\beta,\mu\nu} - F_{\mu\nu,\alpha\beta}\big) + \mathbf{g}_{\lambda\rho}\big(\Gamma^\lambda_{\mu\beta}\Gamma^\rho_{\alpha\nu} - \Gamma^\lambda_{\mu\nu}\Gamma^\rho_{\alpha\beta}\big),$$

[7] Při úpravě je použito jednoduché identity

$$\bar{\theta}\psi^\alpha\bar{\theta}\psi^\beta = -\frac{1}{2}\bar{\theta}\theta\overline{\psi^\alpha}\psi^\beta.$$

$\not\partial = \gamma^\mu \partial_\mu$ a dva členy byly upraveny následujícím způsobem

$$\begin{aligned} i\int d^2x\, F_{\mu\nu,\alpha}\psi_-^\alpha\psi_-^\nu\partial_+\varphi^\mu &= \frac{i}{2}\int d^2x\left(F_{\mu\nu,\alpha} - F_{\mu\alpha,\nu} + F_{\nu\alpha,\mu} - F_{\nu\alpha,\mu}\right)\psi_-^\alpha\psi_-^\nu\partial_+\varphi^\mu \\ &= i\int d^2x\,\Gamma_{\nu\mu\alpha}\psi_-^\alpha\psi_-^\nu\partial_+\varphi^\mu - \frac{i}{2}\int d^2x\,\partial_+(B_{\nu\alpha})\psi_-^\alpha\psi_-^\nu \\ &= i\int d^2x\,\Gamma_{\nu\mu\alpha}\psi_-^\alpha\psi_-^\nu\partial_+\varphi^\mu + i\int d^2x\, B_{\mu\nu}\psi_-^\nu\partial_+\psi_-^\mu \end{aligned}$$

s pomocí pouhých antikomutačních relací (3.6) (a integrace per partes).

Pohybové rovnice lze odvodit [8] přímo z akce (3.5), resp. (3.8),

$$\begin{aligned} &\delta\int d^2\xi\, d^2\theta \mathbf{F}_{\mu\nu}(\phi)D_+\phi^\mu D_-\phi^\nu = \\ =\ &\int\left(\mathbf{F}_{\mu\nu,\alpha}\delta\phi^\alpha D_+\phi^\mu D_-\phi^\nu + \mathbf{F}_{\mu\nu}D_+\delta\phi^\mu D_-\phi^\nu + \mathbf{F}_{\mu\nu}D_+\phi^\mu D_-\delta\phi^\nu\right) = \\ =\ &-\int\delta\phi^\alpha\Big(D_+D_-\phi^\mu\left(\mathbf{F}_{\alpha\mu} + \mathbf{F}_{\mu\alpha}\right) + D_+\phi^\rho D_-\phi^\nu\left(\mathbf{F}_{\alpha\nu,\rho} + \mathbf{F}_{\rho\alpha,\nu} - \mathbf{F}_{\rho\nu,\alpha}\right)\Big) \end{aligned}$$

a zapsat v kompaktním tvaru

$$D_+D_-\phi^\mu + \mathbf{\Gamma}^\mu_{\alpha\beta}D_+\phi^\alpha D_-\phi^\beta = 0,$$

kde

$$\mathbf{\Gamma}^\mu_{\alpha\beta}(\phi) = \frac{1}{2}\mathbf{G}^{\mu\rho}(\mathbf{F}_{\rho\beta,\alpha} + \mathbf{F}_{\alpha\rho,\beta} - \mathbf{F}_{\alpha\beta,\rho}) = \tag{3.11}$$

$$= \Gamma^\mu_{\alpha\beta}(\varphi) + \Gamma^\mu_{\alpha\beta,\nu}(\varphi)\left(i\bar\theta\psi^\nu + \frac{i}{2}\bar\theta\theta q^\nu\right) + \frac{1}{4}\Gamma^\mu_{\alpha\beta,\nu\lambda}(\varphi)\bar\theta\theta\overline{\psi^\nu}\psi^\lambda. \tag{3.12}$$

Tato sada rovnic je ekvivalentní Euler-Lagrangeovým rovnicím

$$\partial_+\frac{\partial\mathcal{L}}{\partial(\partial_+\Psi^\mu)} + \partial_-\frac{\partial\mathcal{L}}{\partial(\partial_-\Psi^\mu)} - \frac{\partial\mathcal{L}}{\partial\Psi^\mu} = 0, \quad \Psi^\mu \in \{\varphi^\mu, \psi_s^\nu, q^\rho\}.$$

3.3.1 Poissonova-Lieova T-Pluralita

Jedná-li se o supersymetrické zobecnění σ-modelu (2.4),[9] můžeme postupovat stejně jako v předchozí kapitole a přepsat akci do tvaru

$$S_\phi = \int d^2\xi d^2\theta \mathbf{E}_{ab}(\mathbb{G}^{-1}D_+\mathbb{G})^a(\mathbb{G}^{-1}D_-\mathbb{G})^b,$$

kde[10]

$$(\mathbb{G}^{-1}D_\pm\mathbb{G})^a = \mathbf{e}^a{}_\mu D_\pm\phi^\mu \quad \& \quad \mathbf{e}^a{}_\mu|_{\theta=0} = e^a{}_\mu. \tag{3.13}$$

[8] Stačí si uvědomit, že povrchový člen

$$D_-\Big(\mathbf{F}_{\mu\nu}D_+\phi^\mu\delta\phi^\nu\Big) = D_-\Big(\mathbf{F}_{\mu\nu}D_+\phi^\mu\Big)\delta\phi^\nu - \mathbf{F}_{\mu\nu}D_+\phi^\mu D_-\delta\phi^\nu$$

čili, že takto vypadá integrace per partes.

[9] Tedy φ^μ v rozvoji

$$\phi^\mu = \varphi^\mu + i\bar\theta\psi^\mu + \frac{i}{2}\bar\theta\theta q^\mu$$

je složení zobrazení $g : \Sigma \to G$ a μ-té složky příslušné mapy na G.

[10] K tomu je ovšem třeba interpretovat $\psi^\mu_\pm$, q^μ jako složky tečných vektorů $\in T_{g(x)}G$.

A ukazuje se, že pohybové rovnice tohoto modelu se dají zapsat ve tvaru

$$D_+\mathbf{A}_c^- + D_-\mathbf{A}_c^+ + \widetilde{f}_c^{ab}A_a^-A_b^+ = 0, \tag{3.14}$$

kde

$$\mathbf{A}_c^+ = -\mathbf{E}_{ac}(\mathbb{G}^{-1}D_+\mathbb{G})^a, \tag{3.15}$$

$$\mathbf{A}_c^- = +\mathbf{E}_{ca}(\mathbb{G}^{-1}D_-\mathbb{G})^a, \tag{3.16}$$

pokud je splněna podmínka (analogie podmínky (2.9))

$$\mathbf{v}_c^\nu\mathbf{F}_{\beta\alpha,\nu} + \mathbf{v}_{c,\beta}^\nu\mathbf{F}_{\nu\alpha} + \mathbf{v}_{c,\alpha}^\nu\mathbf{F}_{\beta\nu} = \widetilde{f}_c^{ab}\mathbf{F}_{\beta\nu}\mathbf{v}_a^\nu\mathbf{F}_{\rho\alpha}\mathbf{v}_b^\rho \quad \big(\mathbf{v}_c^\nu|_{\theta=0} = v_c^\nu\big), \tag{3.17}$$

jejíž splnění bylo by zaručeno vztahem

$$\mathbf{E} = \big(\mathbf{a}^tE_0^{-1}\mathbf{a} + \mathbf{\Pi}\big)^{-1} \quad \big(\mathbf{\Pi}|_{\theta=0} = \Pi, \quad \mathbf{a}|_{\theta=0} = a\big),$$

který dovoluje říci, že rovnice (3.14) je obsažena v rovnici

$$\langle D_\pm\mathbb{L}\cdot\mathbb{L}^{-1}|\mathcal{E}^\mp\rangle_{\mathfrak{d}} = 0 \quad \big(\mathbb{L} = \mathbb{G}\widetilde{\mathbb{H}}\big), \tag{3.18}$$

kde ([2])

$$\mathbb{L} \;=\; l + i\overline{\theta}l\lambda + \frac{i}{2}\overline{\theta}\theta l\big(\Lambda - \frac{i}{2}\overline{\lambda}\lambda\big), \tag{3.19}$$

$$\mathbb{G} \;=\; g + i\overline{\theta}g\gamma + \frac{i}{2}\overline{\theta}\theta g\big(\Gamma - \frac{i}{2}\overline{\gamma}\gamma\big), \tag{3.20}$$

$$\widetilde{\mathbb{H}} \;=\; \widetilde{h} + i\overline{\theta}\widetilde{h}\widetilde{\kappa} + \frac{i}{2}\overline{\theta}\theta\widetilde{h}\big(\widetilde{K} - \frac{i}{2}\overline{\widetilde{\kappa}}\widetilde{\kappa}\big), \tag{3.21}$$

$$\lambda_\pm, \Lambda \in \mathfrak{d}, \quad \gamma_\pm, \Gamma \in \mathfrak{g}, \quad \widetilde{\kappa}_\pm, \widetilde{K} \in \widetilde{\mathfrak{g}},$$

kde $\gamma_\pm$, $\kappa_\pm$, $\lambda_\pm$ jsou antikomutující ve smyslu

$$\gamma_s = \gamma_s^aT_a \quad \& \quad \{\gamma_s^a, \gamma_r^b\} = \gamma_s^a\gamma_r^b + \gamma_r^b\gamma_s^a = 0.$$

Čili rovnost $\mathbb{L} = \mathbb{G}\widetilde{\mathbb{H}}$ je ekvivalentní vztahům

$$l = g\widetilde{h}, \quad \lambda_\pm = \widetilde{h}^{-1}\gamma_\pm\widetilde{h} + \widetilde{\kappa}_\pm,$$

$$\Lambda = \widetilde{h}^{-1}\Gamma\widetilde{h} + \widetilde{K} + \frac{1}{2}\big(\{\widetilde{h}^{-1}\gamma_+\widetilde{h}, \widetilde{\kappa}_-\} - \{\widetilde{h}^{-1}\gamma_-\widetilde{h}, \widetilde{\kappa}_+\}\big),$$

kde pro antikomutující pole např. γ_r, γ_s

$$\{\gamma_r, \gamma_s\} = \{\gamma_r^aT_a, \gamma_s^bT_b\} = \gamma_r^a\gamma_s^b[T_a, T_b] = \gamma_r^a\gamma_s^bf_{ab}^cT_c. \tag{3.22}$$

Superpole ϕ a $\mathbb{G}$ spolu souvisí následujícím způsobem

$$g = \varphi, \quad \gamma_\pm^a = e^a{}_\mu\psi_\pm^\mu, \quad \big(\Gamma - \frac{i}{2}\overline{\gamma}\gamma\big)^a = e^a{}_\mu q^\mu.$$

Potom v rovnici (3.18) (pro $\mathbb{L} = \widehat{\mathbb{G}}\bar{\mathbb{H}}$) jsou obsaženy i pohybové rovnice supersymetrického rozšíření σ-modelu (2.11) s akcí

$$S_{\widehat{\phi}} = \int d^2\xi d^2\theta\widehat{\mathbf{F}}_{\mu\nu}(\widehat{\phi})D_+\widehat{\phi}^\mu D_-\widehat{\phi}^\nu = \int d^2\xi d^2\theta\widehat{\mathbf{E}}_{ab}(\widehat{\mathbb{G}}^{-1}D_+\widehat{\mathbb{G}})^a(\widehat{\mathbb{G}}^{-1}D_-\widehat{\mathbb{G}})^b, \tag{3.23}$$

pokud

$$\widehat{\mathbf{E}} = \left(\widehat{\mathbf{a}}^t \widehat{E}_0^{-1}\widehat{\mathbf{a}} + \widehat{\mathbf{\Pi}}\right)^{-1}, \text{ kde } \widehat{\mathbf{\Pi}}|_{\theta=0} = \widehat{\Pi}, \quad \widehat{\mathbf{a}}|_{\theta=0} = \widehat{a}. \tag{3.24}$$

Tyto výsledky jsou podezřele formalně-stejné jako výsledky shrnuté v kapitole 2. To je dáno tím, že pro rovnost dvou superpolí $\mathbf{X}, \mathbf{Y}$, které jsou funkcemi téhož superpole ϕ, a mají tedy analogický rozvoj typu (3.7), (3.9), či (3.12), je nutná a dostačující rovnost jejich zúžení $\mathbf{X}|_{\theta=0} = \mathbf{Y}|_{\theta=0}$. To znamená, že například sdělení $\mathbf{X}|_{\theta=0} = X$ obsahuje již plnou informaci. Navíc platnost tohoto tvrzení lze jednoduše ověřit i pro diferencialní výrazy a rovnosti typu (3.11), (3.12) či (3.17). Čili splnění podmínky (3.17) není ani třeba ověřovat, protože je splněna právě tehdy, je-li splněno její zúžení $|_{\theta=0}$, tj. podmínka (2.9) (A ta splněna je.).

Dále rovnice (3.18) se upravuje stejným způsobem, jako v klasickém případě

$$\langle \mathbb{G}(\mathbb{G}^{-1}D_\pm\mathbb{G})\mathbb{G}^{-1} + \mathbb{G}(D_\pm\widetilde{\mathbb{H}}\widetilde{\mathbb{H}}^{-1})\mathbb{G}^{-1}|\mathcal{E}^\mp\rangle_{\mathfrak{d}} = 0$$

$$\langle (\mathbb{G}^{-1}D_\pm\mathbb{G})^a(\mathbf{a}^{-1})_a{}^b T_b + (D_\pm\widetilde{\mathbb{H}}\widetilde{\mathbb{H}}^{-1})_a(\mathbf{b}^{ba}T_b + (\mathbf{d}^{-1})^a{}_b\widetilde{T}^b)|\mathcal{E}^\mp\rangle_{\mathfrak{d}} = 0$$

$$\mathbf{A}_c^\pm := -(D_\pm\widetilde{\mathbb{H}}\widetilde{\mathbb{H}}^{-1})_c \tag{3.25}$$

a nakonec rovnice (3.14):[11]

$$D_+(D_-\widetilde{\mathbb{H}}\widetilde{\mathbb{H}}^{-1}) + D_-(D_+\widetilde{\mathbb{H}}\widetilde{\mathbb{H}}^{-1}) - \{D_-\widetilde{\mathbb{H}}\widetilde{\mathbb{H}}^{-1}, D_+\widetilde{\mathbb{H}}\widetilde{\mathbb{H}}^{-1}\} = 0.$$

Matice $\mathbf{a}$, $\mathbf{b}$, $\mathbf{d}$ jsou definovány pomocí $\mathbb{G}$ (3.20) stejně jako jsou definovány matice a, b, d pomocí g:

$$\mathbb{G}^{-1}T_a\mathbb{G} = \mathbf{a}_a{}^b T_b$$

$$\mathbb{G}^{-1}\widetilde{T}^a\mathbb{G} = \mathbf{b}^{ab}T_b + \mathbf{d}^a{}_b\widetilde{T}^b.$$

A ukazuje se, že, když se formalně spočítají pomocí $\mathbb{G}$ (3.20) mají v superpolích φ, ψ, q přesně takový rozvoj, jaký je potřeba. Čili např.

$$\begin{aligned}
\mathbb{G}^{-1}T_a\mathbb{G} &= \Big(a_a{}^b + i\overline{\theta}a_a{}^c\gamma^d f^b_{cd} + \frac{i}{2}\overline{\theta}\theta a_a{}^c\Gamma^d f^b_{cd} - \\
&\quad -\frac{i}{2}\overline{\theta}\theta a_a{}^c\gamma^d_+\gamma^e_-\frac{1}{2}\big(f^i_{ce}f^b_{di} + f^i_{cd}f^b_{ei}\big)\Big) \\
&= \Big(a_a{}^b + a_a{}^b{}_{,\alpha}\big(i\overline{\theta}\psi^\alpha + \frac{i}{2}\overline{\theta}\theta q^\alpha\big) + \frac{1}{4}a_a{}^b{}_{,\alpha\beta}\overline{\theta}\theta\overline{\psi^\alpha}\psi^\beta\Big).
\end{aligned}$$

Totéž platí pro superpole $\mathbf{e}^a{}_\mu$, $\mathbf{v}^\mu_a$. Ovšem toto všechno bylo třeba ověřit, včetně (alespoň formální) legálnosti výšeuvedené úpravy rovnice (3.14), protože to není na první pohled zřejmé.

Jediný problém je ten, že v poli $\mathbb{G}$, a tedy i ve vztahu polí $\mathbb{G}$ a ϕ se vyskytuje člen $\frac{i}{2}\overline{\gamma}\gamma$, se kterým se musí počítat, ačkoli není zcela jasné, co znamená.[12]

$$\big(\frac{i}{2}\overline{\gamma}\gamma\big) = \frac{1}{2}\big(\gamma_-\gamma_+ - \gamma_+\gamma_-\big) = \frac{1}{2}[\gamma_-, \gamma_+]_K \overset{?}{=} \frac{1}{2}\gamma^a_-\gamma^b_+\big(T_aT_b + T_bT_a\big),$$

ale také

$$\big(\frac{i}{2}\overline{\gamma}\gamma\big)^c = \frac{1}{2}\gamma^a_-\gamma^b_+ e^c{}_\nu\big(v^\mu_a v^\nu_{b,\mu} + v^\mu_b v^\nu_{a,\mu}\big).$$

[11] Kde místo komutátoru stojí antikomutátor, protože, je-li $\widetilde{\mathbb{H}}$ objekt sudý, $D_\pm\widetilde{\mathbb{H}}$ je lichý.

[12] Dolním indexem K u závorky ve třetím členu je vyjádřeno, že takovéto závorky (tj. [,]) je požito v [2].

Má zřejmě původ ve formálním rozvoji (pokud $g = exp\,A$)

$$\mathbb{G} = exp\big(A + i\bar{\theta}\gamma + \frac{i}{2}\bar{\theta}\theta\Gamma\big) = g\Big(1 + i\bar{\theta}\gamma + \frac{i}{2}\bar{\theta}\theta(\Gamma - \frac{i}{2}\bar{\gamma}\gamma)\Big)$$

a ve víceméně takovém tvaru, jaký je za posledním rovnítkem, je v [2] $\mathbb{G}$ i vyjádřeno.

3.4 kanoničnost transformace

Ukazuje se, že přímočaré zobecnění [3] není možné. Nicméně analogickým postupem jako v [3] lze vyjádřit $D_\pm\mathbb{L}\mathbb{L}^{-1}$

$$D_\pm\mathbb{L}\mathbb{L}^{-1} = (\mathbb{G}^{-1}D_\pm\mathbb{G})^a(\mathbf{a}^{-1})_a{}^bT_b + (D_\pm\widetilde{\mathbb{H}}\widetilde{\mathbb{H}}^{-1})_a(\mathbf{b}^{ba}T_b + (\mathbf{d}^{-1})^a{}_b\widetilde{T}^b),$$

$$D_\pm\mathbb{L}\mathbb{L}^{-1} = (\widehat{\mathbb{G}}^{-1}D_\pm\widehat{\mathbb{G}})^a(\widehat{\mathbf{a}}^{-1})_a{}^b\widehat{T}_b + (D_\pm\bar{\mathbb{H}}\bar{\mathbb{H}}^{-1})_a(\widehat{\mathbf{b}}^{ba}\widehat{T}_b + (\widehat{\mathbf{d}}^{-1})^a{}_b\bar{T}^b),$$

dosadit do těchto vztahů pohybové rovnice (3.15), (3.16), (3.25) a analogické pohybové rovnice pro $\widehat{\mathbb{G}}$, dosadit rovnice (2.3) pro transformaci baze $\mathfrak{d}$, porovnat koeficienty u bazických vektorů a tak obdržet rovnice

$$(\widehat{\mathbb{G}}^{-1}D_+\widehat{\mathbb{G}})^a(\widehat{\mathbf{E}}\widehat{\mathbf{a}}^t)_{ac} = (\mathbb{G}^{-1}D_+\mathbb{G})^a(\mathbf{E}\mathbf{a}^tM_+)_{ac}, \tag{3.26}$$

$$(\widehat{\mathbb{G}}^{-1}D_-\widehat{\mathbb{G}})^a(\widehat{\mathbf{E}}^t\widehat{\mathbf{a}}^t)_{ac} = -(\mathbb{G}^{-1}D_-\mathbb{G})^a(\mathbf{E}^t\mathbf{a}^tM_-)_{ac}, \tag{3.27}$$

kde

$$M^a_{+c} = (E_0^{-1})^{ab}Q_{bc} + S^a{}_c, \quad M^a_{-c} = (E_0^{-t})^{ab}Q_{bc} - S^a{}_c,$$

což jsou vícemémě jediné transformační vztahy mezi stříškovanými a nestříškovanými veličinami, které máme k dispozici. Dále je možné spočíst veličiny

$$\begin{aligned}
\mathcal{P}^+_\nu &= \frac{\partial\mathcal{L}}{\partial\big(\partial_0\psi^\nu_+\big)} = iF_{\mu\nu}\psi^\mu_+ = \big(\mathbf{F}_{\mu\nu}D_+\phi^\mu\big)|_{\theta=0},\\
\mathcal{P}^-_\nu &= \frac{\partial\mathcal{L}}{\partial\big(\partial_0\psi^\nu_-\big)} = iF_{\nu\mu}\psi^\mu_- = \big(\mathbf{F}_{\nu\mu}D_-\phi^\mu\big)|_{\theta=0},\\
\mathcal{P}_\nu &= \frac{\partial\mathcal{L}}{\partial\big(\partial_0\varphi^\nu\big)} = F_{\alpha\mu}\partial_+\varphi^\alpha + iF_{\alpha\mu,\nu}\psi^\nu_+\psi^\alpha_+ + F_{\mu\alpha}\partial_-\varphi^\alpha + iF_{\mu\alpha,\nu}\psi^\nu_-\psi^\alpha_- =\\
&= \mathbf{F}_{\mu\nu}D_+\phi^\mu|_{\theta_-} + \mathbf{F}_{\nu\mu}D_-\phi^\mu|_{-\theta_+} =\\
&= \big(\mathbf{e}^b{}_\nu\mathbf{E}_{ab}(\mathbb{G}^{-1}D_+\mathbb{G})^a\big)|_{\theta_-} + \big(\mathbf{e}^a{}_\nu\mathbf{E}_{ab}(\mathbb{G}^{-1}D_-\mathbb{G})^b\big)|_{-\theta_+} =: \mathcal{P}^{\varphi+}_\nu + \mathcal{P}^{\varphi-}_\nu,
\end{aligned}$$

které umíme transformovat pomocí rovnic (3.26), (3.27), které představují rovnosti mezi superpoli, takže platí to, co bylo řečeno v závěru předchozího oddílu a samozřejmě platí rovnosti mezi příslušnými koeficienty v rozvojích do mocnin $\theta_\pm$. Konkrétněji, definujeme-li[13]

$$\mathcal{P}^+_c = \overset{R}{v}{}^\nu_c\,\mathcal{P}^+_\nu = \overset{R}{v}{}^\nu_c\,e^b{}_\nu E_{ab}(\mathbb{G}^{-1}D_+\mathbb{G})^a|_{\theta=0} = a_c{}^bE_{ab}(\mathbb{G}^{-1}D_+\mathbb{G})^a|_{\theta=0},$$

[13]kde

$$\overset{R}{v}_c(g) = \Big(T_eR_g\Big)T_c \in T_gG, \quad \overset{R}{v}{}^\nu_c\,\partial_\nu = \overset{R}{v}_c\,.$$

a dále se bude hodit

$$\overset{R}{\mathbf{v}}{}^\nu_c\,|_{\theta=0} = \overset{R}{v}{}^\nu_c$$

$$\mathcal{P}_c^- = \overset{R}{v_c^\nu}\,\mathcal{P}_\nu^- = \overset{R}{v_c^\nu}\,e^a{}_\nu E_{ab}(\mathbb{G}^{-1}D_-\mathbb{G})^b|_{\theta=0} = a_c{}^a E_{ab}(\mathbb{G}^{-1}D_-\mathbb{G})^b|_{\theta=0},$$
$$\mathcal{P}_c = \overset{R}{v_c^\nu}\,\mathcal{P}_c = \mathcal{P}_c^{\varphi+} + \mathcal{P}_c^{\varphi-}$$

a zcela analogicky pro stříškovaný případ (což znamená ostříškovat všechna písmenka), můžeme psát transformační vztahy

$$\widehat{\mathcal{P}}_c^+ = M^a_{+c}\mathcal{P}_a^+, \quad \widehat{\mathcal{P}}_c^- = -M^a_{-c}\mathcal{P}_a^-, \tag{3.28}$$

$$\widehat{\mathcal{P}}_c^{\widehat{\varphi}+} + \overset{R}{\widehat{\mathbf{v}}_c^\nu}\,|_{\theta_-}\widehat{\mathcal{P}}_\nu^+ = \big(\mathcal{P}_a^{\varphi+} + \overset{R}{\mathbf{v}_a^\nu}\,|_{\theta_-}\mathcal{P}_\nu^+\big)M^a_{+c},$$
$$\widehat{\mathcal{P}}_c^{\widehat{\varphi}-} + \overset{R}{\widehat{\mathbf{v}}_c^\nu}\,|_{-\theta_+}\widehat{\mathcal{P}}_\nu^- = -\big(\mathcal{P}_a^{\varphi-} + \overset{R}{\mathbf{v}_a^\nu}\,|_{-\theta_+}\mathcal{P}_\nu^-\big)M^a_{-c},$$

které sice nejsou tak pěkné jako ty uvedené v [3], ale teoreticky použitelné.[14] Ale použitelné jsou transformační vztahy, nikoli veličiny, které by se jimi měly transformovat. A to z následujících důvodů: Standartní postup spočtení *kanonických* hybností

$$\mathcal{P}_\mu^r = \frac{\partial\mathcal{L}}{\partial\big(\partial_0\psi_r^\mu\big)}, \quad \mathcal{P}_\mu = \frac{\partial\mathcal{L}}{\partial\big(\partial_0\varphi^\mu\big)},$$

definování *kanonických* Poissonových závorek pro φ^μ, ψ_r^μ, $\mathcal{P}_\mu^r$, $\mathcal{P}_\nu$, z nichž jediné nenulové by byly

$$\{\varphi^\mu, \mathcal{P}_\nu\} = \delta_\nu^\mu\delta(\sigma-\sigma'), \quad \{\psi_r^\mu, \mathcal{P}_\nu^s\} = \delta_\nu^\mu\delta_r^s\delta(\sigma-\sigma'),$$

a přechod k hustotě hamiltonianu

$$\mathcal{H} = \mathcal{P}_\mu\partial_0\varphi^\mu + \mathcal{P}_\mu^r\partial_0\psi_r^\mu - \mathcal{L}$$

nikam nevede, protože lagranžian $\mathcal{L}$ akce (3.5), resp. (3.8), je prvního řádu v derivacích polí ψ_r a nikdy se nemůže podařit vyjádřit $\partial_0\psi_r^\mu$, jako funkci hybnosti. Takovýto postup znamená vlastně Legendrovu transformaci, pro takovýto případ nepoužitelnou a nelegální. Čili řešením by mohlo být nejít touto (neprůchodnou) cestou, využít antikomutativity polí ψ_r^μ a pokusit se najít Hamiltonovskou strukturu jinak...

Akce pro nehmotné Diracovské pole vypadá takto

$$\int d^2x\,\mathcal{L} = \int d^2x\,\overline{\psi}\gamma^\mu\partial_\mu\psi.$$

Euler-Lagrangeovy rovnice z této akce plynoucí

$$(C\gamma^\mu)^{rs}\partial_\mu\psi_s = 0$$

opravňují její název. Ke stejným pohybovým rovnicím lze dospět s hustotou hamiltonianu[15]

$$\mathcal{H} = \frac{1}{2}\overline{\psi}\gamma^j\partial_j\psi$$

[14] Viz. závěr pro diskuzi použitelnosti.

[15] Důvod pro to, že místo $\gamma^1\partial_1$ a $\delta(\sigma-\sigma')$ je napsáno $\gamma^j\partial_j$ a $\delta(\vec{x}-\vec{x}')$ je pouze ten, že toto platí i v dimensi $1+3$ při zachování konvencí oddílu (3.2.1). ($j \in \widehat{3}$.)

a Poissonovou závorkou

$$\{\psi_r, \psi_s\} = (\gamma^0 C)_{rs}\delta(\vec{x} - \vec{x}').$$

Tj.

$$\partial_0\psi_r = \{\psi_r, \mathcal{H}\} \Longleftrightarrow \partial\!\!\!/\psi = 0.$$

S takovouto závorkou nezbývá než pracovat tak, že pro dvě veličiny $\mathcal{A}$, $\mathcal{B}$

$$\{\mathcal{A}, \mathcal{B}\} = \frac{\partial\mathcal{A}}{\partial z^A}\,\frac{\partial\mathcal{B}}{\partial z^B}\,\{z^A, z^B\}, \quad \text{kde } z^A,\ z^B \in \mathrm{VDP}, \tag{3.29}$$

kde VDP znamená množinu Všech Dynamických Proměnných, čili všechny hybnosti a všechny souřadnice a jejich prostorové derivace.

Toto lze zobecnit i na akci s konstantní metrikou $\mathbf{g}$:

$$\int d^2x\,\mathcal{L} = \int d^2x\,\mathbf{g}_{\mu\nu}\overline{\psi^\mu}\partial\!\!\!/\psi^\nu.$$

V tomto případě Euler-Lagrangeovy rovnice mají tvar

$$2i(C\gamma^\alpha)^{rs}\partial_\alpha\psi_s = 0$$

A hustota hamiltonianu

$$\mathcal{H} = \frac{1}{2}\mathbf{g}_{\mu\nu}\overline{\psi^\mu}\gamma^j\partial_j\psi^\nu$$

s Poissonovou závorkou

$$\{\psi^\mu_r, \psi^\nu_s\} = \mathbf{g}^{\mu\nu}(\gamma^0 C)_{rs}\delta(\vec{x} - \vec{x}')$$

vede opět přímo na rovnice

$$\partial_0\psi^\mu_r = \{\psi^\mu_r, \mathcal{H}\} \Longrightarrow \partial\!\!\!/\psi^\mu = 0.$$

To znamená, že toto je možné opět přímočaře zobecnit na σ-model (3.5), resp. (3.8), s $\mathbf{g} = const.$, $B = const.$ Tedy na akci neinteragujících polí

$$\int d^2x\,\mathcal{L} = \int d^2x\Big(-iF_{\mu\nu}\psi^\mu_+\partial_-\psi^\nu_+ - iF_{\mu\nu}\psi^\nu_-\partial_+\psi^\mu_- + F_{\mu\nu}\partial_+\varphi^\mu\partial_-\varphi^\nu - F_{\mu\nu}q^\mu g^\nu\Big)$$

nebo ekvivalentně[16]

$$\mathcal{L}' = -i\mathbf{g}_{\mu\nu}\overline{\psi^\mu}\partial\!\!\!/\psi^\nu + F_{\mu\nu}\partial_+\varphi^\mu\partial_-\varphi^\nu + F_{\mu\nu}q^\mu q^\nu =: \mathcal{L}_\psi + \mathcal{L}_\varphi + \mathcal{L}_q.$$

Třetím členem se vůbec nemusíme zabývat, protože pole q^μ nemají časový vývoj. Tj. pohybové rovnice pro tato pole budou znít $\dot{q}^\mu = \partial_0 q^\mu = \{q^\mu, \mathcal{H}\} = 0$. Hamiltonian pro bosonovou část získáme kanonicky

$$\mathcal{P}_\mu = \frac{\partial\mathcal{L}}{\partial\big(\partial_0\varphi^\mu\big)} = 2\mathbf{g}_{\mu\nu}\partial_0\varphi^\nu - 2B_{\mu\nu}\partial_1\varphi^\nu,$$

$$\mathcal{H}_\varphi = \mathcal{P}_\mu\,\partial_0\varphi^\mu - \mathcal{L}_\varphi = \frac{1}{4}\mathcal{P}^\mu\mathcal{P}_\mu + \mathcal{P}^\mu B_{\mu\nu}\partial_1\varphi^\nu + B_{\mu\nu}B^\mu{}_\rho\partial_1\varphi^\nu\partial_1\varphi^\rho + \mathbf{g}_{\mu\nu}\partial_1\varphi^\mu\partial_1\varphi^\nu.$$

[16] Zde je opět použito jen antikomutativity polí ψ^μ_r a integrace per partes.

Diracovskou část položíme

$$\mathcal{D} = \frac{1}{2}\mathbf{g}_{\mu\nu}\overline{\psi^\mu}\gamma^1\partial_1\psi^\nu$$

A výsledný popis dynamiky systému, tj. hamiltonian s Poissonovými závorkami:

$$\mathcal{H} = \mathcal{D} + \mathcal{H}_\varphi, \quad \{\psi^\mu_r, \psi^\nu_s\} = \mathbf{g}^{\mu\nu}(\gamma^0 C)_{rs}\delta(\sigma - \sigma'), \quad \{\varphi^\mu, \mathcal{P}_\nu\} = \delta^\mu_\nu\delta(\sigma - \sigma'),$$

ostatní závorky nulové. A pro tento případ ve smyslu (3.29)

$$\mathrm{VDP} = \{\psi^\mu_r,\, \partial_1\psi^\lambda_s,\, \mathcal{P}_\nu,\, \varphi^\rho,\, \partial_1\varphi^\kappa\}.$$

A vše funguje tak, jak má, tj.

$$\partial_0\mathcal{P}_\mu = \{\mathcal{P}_\mu, \mathcal{H}\} \iff (\partial_0\partial_0 - \partial_1\partial_1)\varphi^\mu = 0, \quad \partial_0\psi^\mu_r = \{\psi^\mu_r, \mathcal{H}\} \iff \not\partial\psi = 0.$$

Je-li toto možné zobecnit i na případ interagujících polí, tj. supersymetrických σ-modelů s nekonstantními tenzory $\mathbf{g}$, B, se mi zatím dokázat nepodařilo (ani vyvrátit). Ale pokud to možné je (a zatím nic nenasvědčuje tomu, že nikoli), je velmi pravděpodobné, že transformace Poisson-Lieovy T-plurality není kanonická vzhledem k takovéto zajímavé Hamiltonovské struktuře. Veličiny

$$\mathcal{P}^+_c = \overset{R}{v}{}^\nu_c\, \mathcal{P}^+_\nu = i\, \overset{R}{v}{}^\nu_c\, F_{\mu\nu}\psi^\mu_+, \quad \mathcal{P}^-_c = \overset{R}{v}{}^\nu_c\, \mathcal{P}^-_\nu = i\, \overset{R}{v}{}^\nu_c\, F_{\nu\mu}\psi^\mu_-$$

závisí pouze na polích φ^μ, $\psi^\mu_\pm$. Analogicky i jejich stříškované ekvivalenty. Zachovat Poissonovu závorku

$$\{\varphi^\mu, \psi^\nu_\pm\} = 0$$

se zdá rozumné. Pokud zůstane zachována i závorka (nebo se změní jen nějak nepodstatně)

$$\{\psi^\mu_r, \psi^\nu_s\} = \mathbf{g}^{\mu\nu}(\gamma^0 C)_{rs}\delta(\sigma - \sigma'), \quad \text{tj. } \{\psi^\mu_\pm, \psi^\nu_\pm\} = -\mathbf{g}^{\mu\nu}\delta(\sigma - \sigma'),$$

jen těžko bude moci být transformace mezi $\widehat{\mathcal{P}}^\pm_c$ a $\mathcal{P}^\pm_a$ zajištěna konstantní maticí, protože např.

$$\{\mathcal{P}^+_a, \mathcal{P}^+_b\} = \overset{R}{v}{}^\kappa_a \overset{R}{v}{}^\alpha_b\, \mathbf{g}^{\mu\nu}F_{\mu\kappa}F_{\nu\alpha}.$$

Ale ona je (3.28).

Kapitola 4

Závěr

Podařilo se tedy nahlédnout do oblasti supersymetrie, ale zatím doopravdy jen nahlédnout. Zatímco v prví části práce (v kapitole 2) vím, do potřebné hloubky, co se děje na každém kroku, v supersymetrických zobecněních jsem se prozatím musel spokojit s formálními rozvoji a početními pravidly bez blízkého pochopení matematického pozadí.

Nyní slíbená diskuze použitelnosti transformačních vztahů (3.26), (3.27), (3.28): Poisson-Lieovu T-Pluralitu lze formulovat různými způsoby, což s sebou nese některé těžkosti. Například lagranžian

$$\mathcal{L} = F_{\mu\nu}\partial_+\varphi^\mu\partial_-\varphi^\nu$$

akce σ-modelu (2.4) je možné upravit nejen

$$\mathcal{L} = E_{ab}(g^{-1}\partial_+ g)^a(g^{-1}\partial_- g)^b,$$

ale i

$$\mathcal{L} = K_{ab}(\partial_+ g g^{-1})^a(\partial_- g g^{-1})^b$$

a pak ještě třeba provést záměnu $g \mapsto g^{-1}$

$$\mathcal{L} = N_{ab}(g^{-1}\partial_+ g)^a(g^{-1}\partial_- g)^b,$$

což vede na různé matice E, K, N, různým způsobem vyjádřené pohybové rovnice atd. Zmiňuji se o tom pouze z toho důvodu, že v této práci transformační vztahy (3.26), (3.27) mezi stříškovanými a nestříškovanými veličinami explicitně obsahují matici $\mathbf{a}_a{}^b$ a tím i koeficienty pravoinvariantních vektorových polí, což je důvod pro to, že se tak pěkně transformují právě "kanonické" (ne)hybnosti násobené těmito koeficienty. Nicméně by to rozhodně vedlo k problémům (alespoň početním) při pokusu s takovýmito veličinami po transformaci dále pracovat, protože všechna ostatní teorie je formulována v jazyce polí *levoinvariantních*. To ovšem neznamená, že je něco špatně, ale jen to, že v [3] je k danému účelu lépe vybrána formulace Poisson-Lieovy T-Plurality.

Dále si pár komentářů zajisté zaslouží poslední oddíl. Takováto zvláštní formulace Hamiltonovské struktury je umožněna pouze antikomutativitou polí $\psi^\mu_\pm$, která by mohla ospravedlnit symetrii Poissonových závorek. Takovýto tvar závorek je velice pěkný vzhledem k tomu, že velice podobně vypadá antikomutátor

$\{\psi_\alpha, \psi_\beta^\dagger\} = \delta_{\alpha\beta}\delta^3(\mathbf{x} - \mathbf{x}')$ operátorů příslušných Diracovským polím v kvantové teorii pole [9].

Je veliká škoda, že se mi zatím nepodařilo dovést tuto konstrukci (je-li to možné) do konce. Zatím je tedy několik možností

1. Nejde to.
2. Jde to, ale z jakýchsi důvodů to není dobrá Hamiltonovská struktura.
3. Vše je v pořádku a transformace se (proti očekáváním) ukáže být kanonickou.
4. Je to správná cesta a transformace není kanonická.

Poděkování

Za cenné rady, připomínky a hlavně trpělivost děkuji zejména vedoucímu této práce Prof. RNDr. Ladislavu Hlavatému, DrSc.

Literatura

[1] C. Klimčík: Poisson-Lie T-duality, Nucl. Phys. Proc. Suppl. 46 (1996) 116-121 (arXiv:hep-th/9509095)

[2] C. Klimčík: Poisson-Lie T-duality and (1,1) supersymmetry, Phys. Lett. B414 (1997) 85-91 (arXiv:hep-th/9707194v2)

[3] Ladislav Hlavatý & Libor Šnobl: Poisson-Lie T-plurality as canonical transformation, Nucl. Phys. B768 (2007) 209-218 (arXiv:hep-th/0608133)

[4] Adel Bilal: Introduction to Supersymmetry, arXiv:hep-th/0101055

[5] Svend E. Hjelmeland & Ulf Lindström: N=1 Supersymmetric Path-Integral Poisson-lie Duality, JHEP 0104 (2001) 027 (arXiv:hep-th/0102089)

[6] Breno Cesar de Oliveira Imbiriba: Explorando o Modelo σ Supersimétrico, arXiv:hep-th/9906088

[7] Лев Давидович Ланлау & Евгений Михайлович Лифшиц: Теория Поля, ФИЗМАТЛИТ, Москва 2003

[8] Veeravalli S. Varadarajan: Courant Lectures on Supersymmetry, http://www.math.ucla.edu/~vsv

[9] James D. Bjorken & Sidney D. Drell: Relativistic Quantum Mechanics, Relativistic Quantum Fields; McGraw-Hill Book Company

[10] Jiří Formánek: Úvod do relativistické kvantové mechaniky a kvantové teorie pole 1, Nakladatelství Karolinum, Praha 2000

[11] Peter G. O. Freund: Introduction to supersymmetry, Cambridge University Press