České Vysoké Učení Technické v Praze
Fakulta Jaderná a Fyzikalně Inženýrská

Výzkumný úkol

na téma

Struktura Drinfeľdova doublu. Konstrukce σ-modelů s přihlížejícími proměnnými.

Vedoucí práce: Prof. RNDr. Ladislav Hlavatý, DrSc.
Autor: Vojtěch Štěpán

Obsah

Průvodce značením

$\langle \, | \, \rangle_{\mathfrak{d}}$ symetrická nedegenerovaná ad-invariantní bilineární forma na Lieově algebře $\mathfrak{d}$ Drinfeľdova doublu D

$(\, | \,)$ kanonická forma párování vektorů a kovektorů

H_x okolí bodu x

$f : X \to Y \in C^\infty$ zobrazení f variety X do variety Y třídy C^∞

$f : X \to Y : x \mapsto y$ zobrazení f množiny X do Y přiřazující prvku x prvek y

$f : x \mapsto y$ zobrazení f přiřazující prvku x prvek y

$T_x X$ tečný prostor k varietě X v bodě x

$T_x^{\#} X$ kotečný prostor k varietě X v bodě x

$T_x f$ tečné zobrazení k zobrazení f v bodě x

$\partial_a x \; = T_{(\sigma,\tau)} x \, \partial_a$

$\partial_a x^\mu$ μ-tá složka vektoru $\partial_a x$

$Span(R)$ lineární obal množiny R

$L_g \; : h \mapsto gh$ levé násobení v grupě, nebude-li řečeno něco jiného

$R_g \; : h \mapsto hg$ pravé násobení v grupě

$T_a \equiv T^a$, $\widetilde{T}^b \equiv \widetilde{T}_b$ prvky baze algebry $\mathfrak{g}$ resp. $\widetilde{\mathfrak{g}}$. Indexy jsou voleny v různých částech textu jako horní či dolní *pouze* kvůli pohodlí, které je poskytováno sumační konvencí.

$\mathbf{v}_x \cdot g \; = \big(T_x R_g\big) \, \mathbf{v}_x$

$g \cdot \mathbf{v}_x \; = \big(T_x L_g\big) \, \mathbf{v}_x$

Ad, ad - Buď H Lieova grupa, $\mathfrak{h}$ její Lieova algebra, $g \in H$. Pak definujeme:

- $a_g := L_g \circ R_{g^{-1}} \equiv R_{g^{-1}} \circ L_g : H \to H$
- $Ad : H \to Aut(\mathfrak{h}) : h \mapsto Ad_h := T_e a_h$
- $ad := T_e Ad : \mathfrak{h} \to End(\mathfrak{h}) : X \mapsto ad_X$

tedy $Ad_g X = g \cdot X \cdot g^{-1}$, $ad_X Y = [X, Y]$.

id podle potřeby označuje identické zobrazení nebo jednotkovou (sub)matici.

A^t transponované zobrazení nebo transponovaná matice k zobrazení nebo matici A

$Ran\, f$ obor hodnot zobrazení f

Kapitola 1

Úvod

První část práce obsahuje diskusi věty o rozkladu elementu Drinfeľdova doublu. Říká se, že Drinfeľdův double je Lieova grupa D, jejíž Lieova algebra $\mathfrak{d}$, vybavená symetrickou nedegenerovanou ad-invariantní[1] bilineární formou $\langle\,|\,\rangle_{\mathfrak{d}}$, je rozložitelná na direktní součet dvou svých podalgeber $\mathfrak{g}$ a $\widetilde{\mathfrak{g}}$, kteréžto jsou maximalně isotropní[2] vzhledem k oné bilineární formě… Potom prý existují k algebrám $\mathfrak{g}, \widetilde{\mathfrak{g}}$ Lieovy grupy $G, \widetilde{G} \subseteq D$ a je možné každý prvek l z „jakési podmnožiny" v D rozložit na součin $l = g\widetilde{h} = \widetilde{g}h$, kde $\widetilde{g}, \widetilde{h} \in \widetilde{G}$, $g, h \in G$ a to jednoznačně.

Otázka je, zda je toto tvrzení pravdivé a je-li třeba naklást na grupu D (popřípadě na grupy $G, \widetilde{G}$) nějaké další požadavky, aby byla zajištěna oprávněnost použitých postupů při konstrukci dualních σ-modelů, protože je zřejmé, že ona „jakási podmnožina" je obecně rozhodně různá od D:

Například buďte G, $\widetilde{G}$ podgrupy grupy $GL(\mathbb{R}^2)$ definované následujícími vztahy:

$$G = \left\{ \begin{pmatrix} g^1 & g^2 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} | g^1 \in \mathbb{R}_+, g^2 \in \mathbb{R} \right\}, \widetilde{G} = \left\{ \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ \widetilde{h}^2 & \widetilde{h}^1 \end{pmatrix} | \widetilde{h}^1 \in \mathbb{R}_+, \widetilde{h}^2 \in \mathbb{R} \right\}$$

Grupové násobení je obvyklým součinem matic. Nejmenší podgrupa D grupy $GL(\mathbb{R}^2)$ obsahující sjednocení $G \cup \widetilde{G}$ je souvislá grupa tvořená všemi lineárními operátory na $\mathbb{R}^2$ s kladným determinantem. Lieova algebra $\mathfrak{d}$ této grupy má tvar

$$T_1 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad T_2 = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$$\widetilde{T}^1 = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad \widetilde{T}^2 = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ -1 & 0 \end{pmatrix},$$

kde (T_1, T_2), resp. $(\widetilde{T}^1, \widetilde{T}^2)$, tvoří bazi podalgebry $\mathfrak{g}$, resp. $\widetilde{\mathfrak{g}}$. Operace $[\,,\,]$ je komutátor matic. Definujeme-li na $\mathfrak{d}$ bilineární formu

$$\langle T_a \mid \widetilde{T}^b \rangle_{\mathfrak{d}} := \delta_a^b \qquad \langle T_a \mid T_b \rangle_{\mathfrak{d}} := 0 =: \langle \widetilde{T}^a \mid \widetilde{T}^b \rangle_{\mathfrak{d}},$$

[1] $\forall X, Y, Z \in \mathfrak{d} \Big(\langle ad_X Y \mid Z \rangle_{\mathfrak{d}} + \langle Y \mid ad_X Z \rangle_{\mathfrak{d}} = 0 \Big)$

[2] $\langle\,|\,\rangle_{\mathfrak{d}} \mid \mathfrak{g} \times \mathfrak{g} \equiv 0$ a pro každý další podprostor $V \subseteq \mathfrak{d}$ splňující $\langle\,|\,\rangle_{\mathfrak{d}} \mid V \times V \equiv 0$ platí $\Big(\mathfrak{g} \subseteq V \Rightarrow \mathfrak{g} = V \Big)$. Tj. forma je na $\mathfrak{g} \times \mathfrak{g}$ nulová a $\mathfrak{g}$ je ve smyslu inkluze největší podprostor s takovouto vlastností. Pro $\widetilde{\mathfrak{g}}$ zcela analogicky.

získáme D jako Drinfeľdův double. Rozklad $l = g\widetilde{h}$ lze najít pouze na množině

$$G\widetilde{G} := \{g\widetilde{h} \mid g \in G, \widetilde{h} \in \widetilde{G}\} = \left\{ \begin{pmatrix} x & y \\ z & w \end{pmatrix} | x, y, z \in \mathbb{R}, w \in \mathbb{R}_+, wx - yz > 0 \right\},$$

rozklad $l = \widetilde{g}h$ na množině

$$\widetilde{G}G := \{\widetilde{g}h \mid \widetilde{g} \in \widetilde{G}, h \in G\} = \left\{ \begin{pmatrix} x & y \\ z & w \end{pmatrix} | y, z, w \in \mathbb{R}, x \in \mathbb{R}_+, wx - yz > 0 \right\}$$

a rozklad $l = g\widetilde{h} = \widetilde{g}h$ na $G\widetilde{G} \cap \widetilde{G}G \subset D$.

Ve druhé části práce se zabývám rozšířením duálních σ-modelů o tzv. přihlížející proměnné. Co to je? Pokud máme dva σ-modely, jejichž cílové variety jsou Lieovy grupy, které spolu tvoří rozklad Drinfeľdova doublu, umíme (teoreticky) převést řešení pohybových rovnic jednoho σ-modelu na řešení pohybových rovnic druhého a naopak. Otázka je, zda nelze takovouto dualitu rozšířit na obecnější případ, kdy cílová varieta každého σ-modelu je (alespoň lokálně) kartézským součinem (libovolné) variety a Lieovy grupy z rozkladu Drinfeľdova doublu. A to rozšířit takovým způsobem, aby se v co největší míře uplatnily postupy, které již umíme, tj. aby dotyčná varieta z kartézského součinu víceméně jen přihlížela, zatímco grupa (v potu tváře) zajišťuje dualitu.

Odpověď na tuto otázku zní: Lze (rozšířit (dualitu)). Nejdříve uvádím, jak tato dualita vypadá teoreticky. Posléze se věnuji konkrétnímu jednoduchému příkladu.

Kapitola 2

Drinfeľdův double

Nejprve pár pojmů z diferencialní geometrie a několik (důležitých a užitečných) vlastností diferencovatelných variet([1], [2])...

Definice 2.1 *Buď $f : X \to Y \in C^\infty$ zobrazení variet, $x \in X$. Potom hodností $rg_x f$ zobrazení f v bodě x se rozumí hodnost tečného zobrazení $T_x f$. Dále f se jmenuje subimmersion v bodě x, jestliže $\exists H_x \forall t \in H_x \,(rg_t f = const.)$. f se jmenuje subimmersion, jestliže $\{x \in X |\, f je\ subimmersion\ v\ bodě\ x\,\} = X$. Jestliže $const. = dim_t X$ (resp. $const. = dim_{f(t)} Y$), mluví se o immersion (resp. o submersion).*

Co znamená být podvarietou X nějaké dané variety Y a jak vypadají tečné prostory? Například (a to se bude dále hodit): $\forall x \in X \,\exists\, H_x$ otevřené okolí v $Y \,\exists$ submersion $\varphi : H_x \to \mathbb{R}^{n-m}$ tak, že $X \cap H_x = \{y \in H_x |\, \varphi(y) = 0\}$.

Důležité je hlavně to, že kanonická injekce $i : X \to Y$ je immersion, což znamená, že $\forall x \in X\, T_x i : T_x X \to T_x Y$ je injekce, tedy $T_x X$ se ztotožňuje s vektorovým podprostorem prostoru $T_x Y$.

Dále je důležité vědět, máme-li Lieovu grupu a jí odpovídající Lieovu algebru, existuje-li vůbec k nějaké podalgebře podgrupa, za jakých podmínek a kolik. Odpověď je uspokojující: Vždy existuje a je v jistém smyslu právě jedna.

Věta 2.2 *Buď G Lieova grupa, $\mathfrak{g}$ její Lieova algebra. Potom pro každou Lieovu podalgebru $\mathfrak{h}$ algebry $\mathfrak{g}$ existuje souvislá Lieova grupa H a monomorfismus Lieových grup $i : H \to G$ tak, že $(T_e i) T_e H = \mathfrak{h}$. Je-li H' souvislá Lieova grupa a $i' : H' \to G$ monomorfismus Lieových grup takový, že $(T_e i') T_e H' = \mathfrak{h}$, pak existuje právě jeden isomorfismus $u : H' \to H$ takový, že $i' = i \circ u$.*

Následující věta 1) je obecně užitečná a 2) odpovídá (spolu se svým důsledkem) na otázku týkající se rozkladu elementu Drinfeľdova doublu, kterou jsme si položili v úvodu.

Věta 2.3 *Buďte X varieta, G Lieova grupa a $G \times X \to X : (g, x) \to gx$ diferencovatelná akce. Potom $\forall x \in X$ zobrazení $G \to X : g \mapsto gx$ je subimmersion konstantní hodnosti (obecně závislé na x).*

Důsledek 2.4 *Buďte A, B Lieovy podgrupy Lieovy grupy G a $\mathfrak{a}, \mathfrak{b}$ jejich Lieovy algebry. Potom zobrazení $A \times B \to G : (x, y) \mapsto xy$ je subimersion konstantní hodnosti $dim(\mathfrak{a} + \mathfrak{b})$.*

Stačí se podívat na levou akci grupy $A \times B$ na grupě G:

$$\lambda : (A \times B) \times G \to G : ((x,y),g) \mapsto xgy^{-1}.$$

Tečné zobrazení $T_{(x,y)}\lambda((.,.),e)$ v libovolném bodě $(x,y) \in A \times B$ k zobrazení $\lambda((.,.),e)$ má tutéž hodnost jako zobrazení

$$T_{(e,e)}\lambda((.,.),e) = T_e\lambda((.,e),e) + T_e\lambda((e,.),e).$$

$\lambda((.,e),e) : A \to G : x \mapsto x$ je kanonická injekce a $B \to B : y \mapsto y^{-1}$ je diffeomorfismus.

Tedy v případě Drinfeľdova doublu D, kde $\dim\mathfrak{g} = \dim\widetilde{\mathfrak{g}} = \frac{1}{2}\dim D$[1]

1. K oběma podalgebrám existují vždy (až na isomorfismus) jednoznačně určené podgrupy G, $\widetilde{G} \subseteq D$.

2. Zobrazení $G \times \widetilde{G} \to D : (x, \widetilde{y}) \mapsto x\widetilde{y}$ je lokální diffeomorfismus. Tedy pro každý bod $z \in D$, pro který existuje rozklad, existuje okolí bodu z, ve kterém má rozklad každý bod a tento rozklad je jednoznačný. (Rozklad vždy s určitostí existuje v bodě $e \in D$.) A ovšem naprosto totéž platí pro zobrazení $\widetilde{G} \times G \to D : (\widetilde{x}, y) \mapsto \widetilde{x}y$.

To znamená, že v okolí jednotky Drinfeľdova doublu skutečně pro každý prvek l existuje rozklad $l = g\widetilde{h} = \widetilde{g}h$ a to jednoznačný. Obecně bohužel pouze v jakémsi blíže neurčeném okolí jednotky…

[1] Což plyne z vlastností formy $\langle\,|\,\rangle_{\mathfrak{d}}$ a z maximalní isotropie podalgeber $\mathfrak{g}$, $\widetilde{\mathfrak{g}}$.

Kapitola 3

Dualita

3.1 Teorie

Klasický nelineární σ-model ([9], [7], [5]) je teorie pole ve tvaru

$$x : (\Sigma, \eta, \omega) \to (M, \mathbf{g}, B) \in C^\infty,$$

kde Σ je diferencovatelná[1] varieta s metrickým tenzorem η a metrickou formou objemu ω a M je varieta s metrickým tenzorem g a 2-formou B. Za slovo „nelineární“ je zodpovědná varieta M tím, že není lineárním prostorem. Akce, definující dynamiku systému, se zavádí následujícím integrálem:

$$S_\phi := \int \big[(\eta, x^*\mathbf{g}) - (\omega, x^*B)\big]\omega = \int \mathcal{L}\,\omega.$$

Zde

$$(t, u) := \frac{1}{2} t^{ab} u_{ab}$$

a x^*t značí pull-back kovariantního tenzorového pole t. Tedy hustota lagranžiánu

$$\mathcal{L} = \frac{1}{2}\eta^{ab}\mathbf{g}_{\mu\nu}(x)\partial_a x^\mu \partial_b x^\nu - \frac{1}{2}\omega^{ab} B_{\mu\nu}(x)\partial_a x^\mu \partial_b x^\nu$$

a pohybové rovnice mají tvar

$$\partial_a(\mathbf{g}_{\mu\nu}\eta^{ab}\partial_b x^\nu) - \frac{1}{2}\mathbf{g}_{\alpha\beta,\mu}\partial_a x^\alpha \eta^{ab}\partial_b x^\beta -$$

$$-\partial_a(B_{\mu\nu}\omega^{ab}\partial_b x^\nu) + \frac{1}{2}B_{\alpha\beta,\mu}\partial_a x^\alpha \omega^{ab}\partial_b x^\beta = 0.$$

Předmětem našeho zájmu budou takové σ-modely, pro které $\Sigma = \mathbb{R}^2$ s Minkowského metrikou $\eta = d\tau \otimes d\tau - d\sigma \otimes d\sigma$ a formou objemu $\omega = d\tau \wedge d\sigma$. Potom

$$\mathcal{L} = \frac{1}{2}\mathbf{g}_{\mu\nu}\partial_\tau x^\mu \partial_\tau x^\nu - \frac{1}{2}\mathbf{g}_{\mu\nu}\partial_\sigma x^\mu \partial_\sigma x^\nu + B_{\mu\nu}\partial_\tau x^\mu \partial_\sigma x^\nu$$

[1] Toto slovo je dlouhé a tak ho nadále nebudu psát. Ke každému druhému podstatnému jménu v textu však patří.

a pohybové rovnice nabudou tvar

$$\partial_\tau \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial(\partial_\tau x^\mu)} + \partial_\sigma \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial(\partial_\sigma x^\mu)} - \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial x^\mu} = 0.$$

Přejdeme-li k souřadnicím světelného kužele $t_\pm := \tau \pm \sigma$, obdržíme vztahy

$$\mathcal{L} = \frac{1}{2} F_{\mu\nu} \partial_- x^\mu \partial_+ x^\nu,$$

$$2\mathbf{g}_{\mu\nu} \partial_+ \partial_- x^\nu + (F_{\mu\nu,\beta} + F_{\beta\mu,\nu} - F_{\beta\nu,\mu}) \partial_- x^\beta \partial_+ x^\nu = 0$$

neboli

$$\partial_+ \partial_- x^\mu + \Gamma^\mu_{\alpha\beta} \partial_- x^\alpha \partial_+ x^\beta = 0,$$

kde

$$F := \mathbf{g} + B \quad \& \quad \Gamma^\mu_{\alpha\beta} = \frac{1}{2} \mathbf{g}^{\mu\rho} (F_{\rho\beta,\alpha} + F_{\alpha\rho,\beta} - F_{\alpha\beta,\rho}).$$

3.1.1 Varieta

Máme-li σ-model z předchozí sekce, v každém bodě $(m,v) \in T^\# M$ lze ztotožnit $T_{(m,v)} T^\# M$ s $T_m M \times T^\#_m M$, kde je možné zavést bilinearní formu $\langle\,|\,\rangle$ pomocí kanonické formy párování $(\,|\,)$ následujícím způsobem:

$$\forall (u,u'), (v,v') \in T_m M \times T^\#_m M \; \big(\langle (u,u') \mid (v,v') \rangle := (u \mid v') + (v \mid u')\big)$$

Dále definujeme podprostory dimenze $n := \dim M$ v $T_m M \times T^\#_m M$ $(m = x(\tau,\sigma))$

$$\mathcal{E}^+ := Span\big[(y_\alpha + F(x)_{\alpha\beta} \widetilde{y}^\beta)_{\alpha \in \hat{n}}\big] \quad \& \quad \mathcal{E}^- := Span\big[(y_\alpha - F(x)_{\beta\alpha} \widetilde{y}^\beta)_{\alpha \in \hat{n}}\big].$$

Zde y_α resp. $\widetilde{y}^\beta$ označuje bazické vektory prostoru $T_m M$ resp. $T^\#_m M$, pro které $(y_\alpha \mid \widetilde{y}^\beta) = \delta^\beta_\alpha$. Pro tyto prostory zjevně platí, že jsou vzhledem k formě $\langle\,|\,\rangle$ ortogonalní.

Budeme-li nyní chtít element

$$(\partial_\tau x, p^{(\sigma)}) \in T_m M \times T^\#_m M \tag{3.1}$$

rozložit na dvě části

$$(\frac{1}{2} \partial_\pm x, p^{(\sigma)(\pm)}) \in \mathcal{E}^\mp, \text{ kde } p^{(\sigma)} = p^{(\sigma)(+)} + p^{(\sigma)(-)} \tag{3.2}$$

a podíváme-li se, co to znamená, obdržíme

$$p^{(\sigma)}_\mu = \frac{1}{2} F_{\nu\mu} \partial_- x^\nu - \frac{1}{2} F_{\mu\nu} \partial_+ x^\nu = \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial(\partial_\sigma x^\mu)}.$$

Krása tohoto je v tom, že ve vztahu (3.1) se vyskytuje jakýsi naprosto neznámý element $p^{(\sigma)} \in T^\#_m M$ a to, že se chová jako hybnost určuje plně požadavek (3.2).

Analogickým postupem pro element

$$(\partial_\sigma x, -p^{(\tau)}) \in T_m M \times T^\#_m M$$

z požadavku

$$(\pm\frac{1}{2} \partial_\pm x, -p^{(\tau)(\pm)}) \in \mathcal{E}^\mp, \text{ kde } p^{(\tau)} = p^{(\tau)(+)} + p^{(\tau)(-)}$$

plyne vztah

$$p_\mu^{(\tau)} = \frac{1}{2}F_{\nu\mu}\partial_- x^\nu + \frac{1}{2}F_{\mu\nu}\partial_+ x^\nu = \frac{\partial\mathcal{L}}{\partial(\partial_\tau x^\mu)}$$

a pohybové rovnice se tedy dají zapsat ve tvaru

$$\partial_\tau p_\mu^{(\tau)} + \partial_\sigma p_\mu^{(\sigma)} - \frac{\partial\mathcal{L}}{\partial x^\mu} = 0.$$

3.1.2 Lieova Grupa

Buď nyní D Drinfeľdův double dimenze $2m$, $\mathfrak{d}$ jeho Lieova algebra, $G, \widetilde{G}$ příslušné podgrupy s příslušnými algebrami $\mathfrak{g}, \widetilde{\mathfrak{g}}$. Dále $(T_a)_{a\in\widehat{m}}$ resp. $(\widetilde{T}^b)_{b\in\widehat{m}}$ buďte baze algebry $\mathfrak{g}$ resp. $\widetilde{\mathfrak{g}}$ takové, že platí

$$\langle T_a \mid \widetilde{T}^b\rangle_{\mathfrak{d}} = \delta_a^b\,, \quad \langle T_a \mid T_b\rangle_{\mathfrak{d}} = 0 = \langle \widetilde{T}^a \mid \widetilde{T}^b\rangle_{\mathfrak{d}}\,,$$

$$[T^a, T^b] = f_c^{ab} T^c\,, \quad [\widetilde{T}^a, \widetilde{T}^b] = \widetilde{f}_c^{ab}\widetilde{T}^c.$$

$$Ad_{g^{-1}} = \begin{pmatrix} a^t(g) & b^t(g) \\ 0 & d^t(g) \end{pmatrix}, \quad Ad_{\widetilde{g}^{-1}} = \begin{pmatrix} \widetilde{a}^t(\widetilde{g}) & \widetilde{b}^t(\widetilde{g}) \\ 0 & \widetilde{d}^t(\widetilde{g}) \end{pmatrix}$$

nechť jsou matice adjungované reprezentace grupy G resp. $\widetilde{G}$ na $\mathfrak{d}$ v bazi $(T_a, \widetilde{T}^b)$ resp. $(\widetilde{T}^b, T_a)$. Dále definujme

$$\mathbf{e}(g) := T_g L_{g^{-1}}, \text{kde } L_{g^{-1}} : G \to G,$$

$$\widetilde{\mathbf{e}}(\widetilde{g}) := T_{\widetilde{g}} L_{\widetilde{g}^{-1}}, \text{kde } L_{\widetilde{g}^{-1}} : \widetilde{G} \to \widetilde{G},$$

$$v_a(g) := \big(T_e L_g\big) T_a, \text{kde } L_g : G \to G,$$

$$\widetilde{v}_a(\widetilde{g}) = \big(T_e L_{\widetilde{g}}\big)\widetilde{T}^a, \text{kde } L_{\widetilde{g}} : \widetilde{G} \to \widetilde{G}.$$

(Tj. v_a resp. $\widetilde{v}_a$ jsou levoinvariantní vektorová pole na G resp. $\widetilde{G}$.) Dále mějme dva σ-modely

$$x : \Sigma \to G \quad \text{resp.} \quad \widetilde{x} : \Sigma \to \widetilde{G}$$

s hustotou lagranžiánu

$$\mathcal{L} = \frac{1}{2}F_{ab}\partial_- x^a \partial_+ x^b \quad \text{resp.} \quad \widetilde{\mathcal{L}} = \frac{1}{2}\widetilde{F}_{ab}\partial_- \widetilde{x}^a \partial_+ \widetilde{x}^b.$$

Potom pokud platí

$$F(x) = \mathbf{e}^t(x)\big(a(x) + F(e)b(x)\big)^{-1} F(e) d(x)\mathbf{e}(x), \tag{3.3}$$

$$\widetilde{F}(\widetilde{x}) = \widetilde{\mathbf{e}}^t(\widetilde{x})\big(\widetilde{a}(\widetilde{x}) + F^{-1}(e)\widetilde{b}(\widetilde{x})\big)^{-1} F^{-1}(e)\widetilde{d}(\widetilde{x})\widetilde{\mathbf{e}}(\widetilde{x}), \tag{3.4}$$

kde $F(e)$ je konstantní matice a symboly $\mathbf{e}$, $\widetilde{\mathbf{e}}$ označují matice lineárních zobrazení výše definovaných stejnými písmenky, pak řešení pohybových rovnic jednoho σ-modelu je převeditelné na řešení pohybových rovnic druhého a naopak. Oba tenzory $F, \widetilde{F}$ pak splňují podmínky

$$(\mathfrak{L}_{v_c} F)_{ab} = F_{ad} v_e^d \widetilde{f}_c^{ef} v_f^g F_{gb} \tag{3.5}$$

$$(\mathfrak{L}_{\widetilde{v}_c}\widetilde{F})_{ab} = \widetilde{F}_{ad}\widetilde{v}_e^d f_c^{ef}\widetilde{v}_f^g\widetilde{F}_{gb}. \tag{3.6}$$

Tyto výsledky ([3], [4]) lze obdržet takto: Definujeme dva podprostory dimense m v $\mathfrak{d}$

$$\mathcal{E}^+ := Span\big[(T_a + F(e)_{ab}\widetilde{T}^b)_{a\in\widehat{m}}\big] \quad \& \quad \mathcal{E}^- := Span\big[(T_a - F(e)_{ba}\widetilde{T}^b)_{a\in\widehat{m}}\big]$$

a předstírejme, že máme zobrazení $l : \Sigma \to D$. Budeme-li nyní chtít element $\partial_\tau l \cdot l^{-1} \in \mathfrak{d}$ rozložit na dvě části $\partial_\pm l \cdot l^{-1} \in \mathcal{E}^\mp$ a využijeme-li toho, že l lze rozložit na $l = g\widetilde{h}$, obdržíme následující vztahy:

$$\begin{aligned} A_{-,c}(g) &:= -(\partial_-\widetilde{h}\cdot\widetilde{h}^{-1})_c = -E_{ac}(g)(g^{-1}\cdot\partial_- g)^a, \\ A_{+,c}(g) &:= -(\partial_+\widetilde{h}\cdot\widetilde{h}^{-1})_c = +E_{ca}(g)(g^{-1}\cdot\partial_+ g)^a, \\ &\partial_+ A_{-,c} - \partial_- A_{+,c} - \widetilde{f}_c^{ab} A_{-,a}A_{+,b} = 0, \end{aligned} \tag{3.7}$$

kde

$$E(g) = \big(a(g) + F(e)b(g)\big)^{-1}F(e)d(g).$$

A vztah (3.7) představuje přesně pohybové rovnice σ-modelu $x : \Sigma \to G$, pokud E a F jsou ve vztahu $F(x) = \mathbf{e}^t(x)E(x)\mathbf{e}(x)$.

Pokud použijeme rozklad $l = \widetilde{g}h$ a podprostory $\mathcal{E}^\pm$ vyjádříme ve tvaru

$$\mathcal{E}^+ := Span\big[(\widetilde{T}_a + \widetilde{F}(e)_{ab}T^b)_{a\in\widehat{m}}\big] \quad \& \quad \mathcal{E}^- := Span\big[(\widetilde{T}_a - \widetilde{F}(e)_{ba}T^b)_{a\in\widehat{m}}\big]$$

dostaneme naprosto stejné vztahy pouze se záměnou (vlnka $\leftrightarrow$ nevlnka) a pohybové rovnice σ-modelu $\widetilde{x} : \Sigma \to \widetilde{G}$, pokud $F(e) = \widetilde{F}^{-1}(e)$ a pokud $\widetilde{E}$ a $\widetilde{F}$ budou ve vztahu $\widetilde{F}(\widetilde{x}) = \widetilde{\mathbf{e}}^t(\widetilde{x})\widetilde{E}(\widetilde{x})\widetilde{\mathbf{e}}(\widetilde{x})$.

3.1.3 Něco mezi

Něco mezi znamená, že se podíváme, co se stane, když se pokusíme skloubit postupy vedoucí k výsledkům z předchozích sekcí v případě σ-modelů s cílovými varietami $N \times G$, resp. $N \times \widetilde{G}$, kde N je varieta a G, $\widetilde{G}$ grupy z rozkladu Drinfeľdova doublu D. Děláme to proto, že chováme naději, že takto nalezneme vztahy popisující dualitu dvou různých σ-modelů. A to takovou, která je zajištěna právě grupovou strukturou a strukturou Drinfeľdova doublu, zatímco proměnné na varietě sedí a koukají, čili veškeré práci jen přihlíží. ([3], [4])

Mějme dva σ-modely

$$x : \Sigma \to N \times G \quad \text{resp.} \quad \widetilde{x} : \Sigma \to N \times \widetilde{G}$$

s hustotou lagranžiánu

$$\mathcal{L} = \frac{1}{2}F_{ij}\partial_- x^i\partial_+ x^j \quad \text{resp.} \quad \widetilde{\mathcal{L}} = \frac{1}{2}\widetilde{F}_{ij}\partial_-\widetilde{x}^i\partial_+\widetilde{x}^j.$$

Definujeme na $T_nN \times T_n^\# N \times \mathfrak{d}$ pro všechna $n \in N$ bilineární formu $\langle\,|\,\rangle$ způsobem

$$\forall\,(u, u', p), (v, v', q) \in T_nN \times T_n^\# N \times \mathfrak{d}$$

$$\big(\langle(u, u', p) \mid (v, v', q)\rangle := (u \mid v') + (v \mid u') + \langle p \mid q\rangle_{\mathfrak{d}}\big).$$

Označíme y_α resp. $\widetilde{y}^\beta$ bazické vektory prostoru T_nN resp. $T_n^\# N$, T_a resp. $\widetilde{T}^b$ bazické vektory $\mathfrak{g}$ resp. $\widetilde{\mathfrak{g}}$ tak že platí $(y_\alpha \mid \widetilde{y}^\beta) = \delta_\alpha^\beta$, $\langle T_a \mid \widetilde{T}^b\rangle = \langle T_a \mid \widetilde{T}^b\rangle_{\mathfrak{d}} = \delta_a^b$.

Zavedeme konvenci v indexech: Indexy z Řecké abecedy označují souřadnice a vektory týkající se variety N, indexy z počátku Latinské abecedy se vztahují ke grupě G či $\widetilde{G}$ a $i,j,k,\ldots = (\alpha,a),\ldots$ Nechť dále $X_i = (y_\alpha, T_a)$, $\widetilde{X}^j = (\widetilde{y}^\beta, \widetilde{T}^b)$. Potom platí $\langle X_i \mid \widetilde{X}^j\rangle = \delta_i^j$.

Předstírejme, že máme zobrazení $x' : \Sigma \to N$ a zobrazení $l : \Sigma \to D$. Opět definujme dva prostory

$$\mathcal{E}^+ := Span\big[(X_i + F(x',e)_{ij}\widetilde{X}^j)_{i\in\widehat{m}}\big] \quad \& \quad \mathcal{E}^- := Span\big[(X_i - F(x',e)_{ji}\widetilde{X}^j)_{i\in\widehat{m}}\big],$$

kde $m := \dim N + \dim G$. Tyto prostory jsou vzhledem k formě $\langle\,|\,\rangle$ opět ortogonalní.

Podíváme se, zda pro elementy

$$(\partial_\tau x', p^{(\sigma)}, \partial_\tau l\cdot l^{-1}) \in T_nN \times T_n^\# N \times \mathfrak{d}$$

$$(\partial_\sigma x', -p^{(\tau)}, \partial_\sigma l\cdot l^{-1}) \in T_nN \times T_n^\# N \times \mathfrak{d},$$

kde $n = x'(\tau,\sigma)$, z požadavků

$$(\frac{1}{2}\partial_\pm x', p^{(\sigma)(\pm)}, \frac{1}{2}\partial_\pm l\cdot l^{-1}) \in \mathcal{E}^\mp \text{ kde } p^{(\sigma)} = p^{(\sigma)(+)} + p^{(\sigma)(-)} \tag{3.8}$$

$$(\pm\frac{1}{2}\partial_\pm x', -p^{(\tau)(\pm)}, \pm\frac{1}{2}\partial_\pm l\cdot l^{-1}) \in \mathcal{E}^\mp \text{ kde } p^{(\tau)} = p^{(\tau)(+)} + p^{(\tau)(-)} \tag{3.9}$$

nepoplynou náhodou vztahy, které by nějak nepřipomínaly pohybové rovnice některého z našich σ-modelů, nejlépe obou.

Zjistíme, co to znamená při $l = g\widetilde{h}$:

$$p_\mu^{(\sigma)} = \frac{1}{2}E_{\nu\mu}(x',e)\partial_- x'^\nu + \frac{1}{2}E_{a\mu}(x',g)(g^{-1}\cdot\partial_- g)^a -$$

$$-\frac{1}{2}E_{\mu\nu}(x',e)\partial_+ x'^\nu - \frac{1}{2}E_{\mu a}(x',g)(g^{-1}\cdot\partial_+ g)^a \tag{3.10}$$

$$p_\mu^{(\tau)} = \frac{1}{2}E_{\nu\mu}(x',e)\partial_- x'^\nu + \frac{1}{2}E_{a\mu}(x',g)(g^{-1}\cdot\partial_- g)^a +$$

$$+\frac{1}{2}E_{\mu\nu}(x',e)\partial_+ x'^\nu + \frac{1}{2}E_{\mu a}(x',g)(g^{-1}\cdot\partial_+ g)^a \tag{3.11}$$

$$A_{-,c}(x',g) := -(\partial_-\widetilde{h}\cdot\widetilde{h}^{-1})_c = -E_{\alpha c}(x',g)\partial_- x'^\alpha - E_{ac}(x',g)(g^{-1}\cdot\partial_- g)^a \tag{3.12}$$

$$A_{+,c}(x',g) := -(\partial_+\widetilde{h}\cdot\widetilde{h}^{-1})_c = E_{c\alpha}(x',g)\partial_+ x'^\alpha + E_{ca}(x',g)(g^{-1}\cdot\partial_+ g)^a \tag{3.13}$$

$$\partial_+ A_{-,c} - \partial_- A_{+,c} - \widetilde{f}_c^{ab} A_{-,a}A_{+,b} = 0, \tag{3.14}$$

kde

$$E(x',g) = \big(A(g) + F(x',e)B(g)\big)^{-1} F(x',e)D(g), \tag{3.15}$$

kde

$$A(g) = \begin{pmatrix} id & 0 \\ 0 & a(g)\end{pmatrix}, \quad B(g) = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & b(g)\end{pmatrix}, \quad D(g) = \begin{pmatrix} id & 0 \\ 0 & d(g)\end{pmatrix}.$$

A skutečně se ukazuje, že pokud platí

$$\begin{pmatrix} E_{\alpha\beta} & E_{\alpha b} \\ E_{a\beta} & E_{ab} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} F_{\alpha\beta} & F_{\alpha c} v_b^c \\ F_{c\beta} v_a^c & F_{cd} v_a^c v_b^d \end{pmatrix}, \tag{3.16}$$

pak vztahy (3.10), (3.11) přecházejí v

$$p_\mu^{(\sigma)} = \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial(\partial_\sigma x'^\mu)} \quad \& \quad p_\mu^{(\tau)} = \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial(\partial_\tau x'^\mu)}$$

a rovnice

$$\partial_\sigma p_\mu^{(\sigma)} + \partial_\tau p_\mu^{(\tau)} - \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial x'^\mu} = 0$$

spolu s rovnicemi (3.14) představují úplnou sadu pohybových rovnic σ-modelu $x : \Sigma \to N \times G$ při označení $g = \mathrm{pr}_G \circ x$, $x' = \mathrm{pr}_N \circ x$ a podmínka (3.16) vlastně znamená, že hustota lagranžiánu $\mathcal{L}$ se dá napsat

$$\mathcal{L} = \frac{1}{2} E_{\mu\nu}(x) \partial_- x'^\mu \partial_+ x'^\nu + \frac{1}{2} E_{\mu b}(x) \partial_- x'^\mu (g^{-1} \cdot \partial_+ g)^b +$$

$$+ \frac{1}{2} E_{a\nu}(x)(g^{-1} \cdot \partial_- g)^a \partial_+ x'^\nu + \frac{1}{2} E_{ab}(x)(g^{-1} \cdot \partial_- g)^a (g^{-1} \cdot \partial_+ g)^b$$

Jakkoli je při této proceduře v případě bez přihlížejících proměnných (v předchozí sekci) pro vyjádření baze podprostorů $\mathcal{E}^\pm$ použito pouze vektorů $T_a, \widetilde{T}^b$, nyní již není možné[2] při postupu s rozkladem $l = \widetilde{g}h$ použít vektory $X_i, \widetilde{X}^j$. Je třeba definovat $Y^a := X_a$, $Y^\alpha := \widetilde{y}^\alpha$, $\widetilde{Y}_b = \widetilde{T}^b$, $\widetilde{Y}_\alpha = y_\alpha$. Jinými slovy: $Y^j := (\widetilde{y}^\alpha, T_a)$, $\widetilde{Y}_i := (y_\beta, \widetilde{T}^b)$. Potom i nadále platí $\langle \widetilde{Y}_i \mid Y^j \rangle = \delta_i^j$. Dále

$$\mathcal{E}^+ := Span\big[(\widetilde{Y}_i + \widetilde{F}(x', e)_{ij} Y^j)_{i \in \widehat{m}}\big] \quad \& \quad \mathcal{E}^- := Span\big[(\widetilde{Y}_i - \widetilde{F}(x', e)_{ji} Y^j)_{i \in \widehat{m}}\big].$$

A pro rozklad $l = \widetilde{g}h$ pak z požadavků (3.8), (3.9) plyne:

$$p_\mu^{(\sigma)} = \frac{1}{2} \widetilde{E}(x', e)_{\nu\mu} \partial_- x'^\nu + \frac{1}{2} \widetilde{E}(x', \widetilde{g})_{a\mu} (\widetilde{g}^{-1} \cdot \partial_- \widetilde{g})^a$$

$$- \frac{1}{2} \widetilde{E}(x', e)_{\mu\nu} \partial_+ x'^\nu - \frac{1}{2} \widetilde{E}(x', \widetilde{g})_{\mu a} (\widetilde{g}^{-1} \cdot \partial_- \widetilde{g})^a$$

$$p_\mu^{(\tau)} = \frac{1}{2} \widetilde{E}(x', e)_{\nu\mu} \partial_- x'^\nu + \frac{1}{2} \widetilde{E}(x', \widetilde{g})_{a\mu} (\widetilde{g}^{-1} \cdot \partial_- \widetilde{g})^a$$

$$+ \frac{1}{2} \widetilde{E}(x', e)_{\mu\nu} \partial_+ x'^\nu + \frac{1}{2} \widetilde{E}(x', \widetilde{g})_{\mu a} (\widetilde{g}^{-1} \cdot \partial_- \widetilde{g})^a$$

$$\widetilde{A}_{-,c}(x', \widetilde{g}) := -(\partial_- h \cdot h^{-1})_c = -\widetilde{E}(x', \widetilde{g})_{\alpha c} \partial_- x'^\alpha - \widetilde{E}(x', \widetilde{g})_{ac} (\widetilde{g}^{-1} \cdot \partial_- \widetilde{g})^a$$

$$\widetilde{A}_{+,c}(x', \widetilde{g}) := -(\partial_+ h \cdot h^{-1})_c = \widetilde{E}(x', \widetilde{g})_{c\alpha} \partial_+ x'^\alpha + \widetilde{E}(x', \widetilde{g})_{ca} (\widetilde{g}^{-1} \cdot \partial_+ \widetilde{g})^a$$

$$\partial_+ \widetilde{A}_{-,c} - \partial_- \widetilde{A}_{+,c} - f_c^{ab} \widetilde{A}_{-,a} \widetilde{A}_{+,b} = 0, \tag{3.17}$$

kde

$$\widetilde{E}(x', g) = \big(\widetilde{A}(\widetilde{g}) + \widetilde{F}(x', e) \widetilde{B}(\widetilde{g})\big)^{-1} \widetilde{F}(x', e) \widetilde{D}(\widetilde{g}),$$

[2] Tedy možné to samozřejmě je, ale výsledky to nedává... Musí být jedno od kterého σ-modelu začínáme, což znamená invarianci (vlnka $\leftrightarrow$ nevlnka).

kde

$$\widetilde{A}(\widetilde{g}) = \begin{pmatrix} id & 0 \\ 0 & \widetilde{a}(\widetilde{g}) \end{pmatrix}, \quad \widetilde{B}(\widetilde{g}) = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & \widetilde{b}(\widetilde{g}) \end{pmatrix}, \quad \widetilde{D}(\widetilde{g}) = \begin{pmatrix} id & 0 \\ 0 & \widetilde{d}(\widetilde{g}) \end{pmatrix}$$

a

$$\widetilde{F}(x', e) = \big(A + F(x', e)B\big)^{-1}\big(C + F(x', e)D\big),$$

kde

$$A = D = \begin{pmatrix} id & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad B = C = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & id \end{pmatrix},$$

kterýžto vztah plyne z vyjádření týchž prostorů $\mathcal{E}^{\pm}$ v různých bazích $(X_i, \widetilde{X}^j)$, $\widetilde{Y}_i, Y^j$. Nu, a pokud platí

$$\begin{pmatrix} \widetilde{E}_{\alpha\beta} & \widetilde{E}_{\alpha b} \\ \widetilde{E}_{a\beta} & \widetilde{E}_{ab} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \widetilde{F}_{\alpha\beta} & \widetilde{F}_{\alpha c}\widetilde{v}_b^c \\ \widetilde{F}_{c\beta}\widetilde{v}_a^c & \widetilde{F}_{cd}\widetilde{v}_a^c\widetilde{v}_b^d \end{pmatrix},$$

pak rovnice

$$\partial_\tau p_\mu^{(\tau)} + \partial_\sigma p_\mu^{(\sigma)} - \frac{\partial\widetilde{\mathcal{L}}}{\partial x'^\mu} = 0$$

spolu s rovnicemi (3.17) představují pohybové rovnice σ-modelu $\widetilde{x} : \Sigma \to N \times \widetilde{G}$ při označení $x' = \mathrm{pr}_N \circ \widetilde{x}$, $\widetilde{g} = \mathrm{pr}_{\widetilde{G}} \circ \widetilde{x}$.

A opět tenzory $F, \widetilde{F}$ splňují podmínky

$$(\mathfrak{L}_{V_a}F)_{ij} = F_{ie}v_b^e\widetilde{f}_a^{bc}v_c^dF_{dj} \tag{3.18}$$

$$(\mathfrak{L}_{\widetilde{V}_a}\widetilde{F})_{ij} = \widetilde{F}_{ie}\widetilde{v}_b^e f_a^{bc}\widetilde{v}_c^d\widetilde{F}_{dj}. \tag{3.19}$$

Zde $V_a(n, g) := T_{(n,e)}L_{(n,g)}T_a$, kde

$$L_{(n,g)} : N \times G \to N \times G : (n', h) \mapsto (n', gh),$$

tj.

$$V_a^i = \big(V_a^\alpha = 0\,, V_a^b = v_a^b\big),$$

kde v_a^b jsou složky již dříve známého levoinvariantního pole v_a. Zcela analogicky je dáno vektorové pole $\widetilde{V}_a$.

3.1.4 Krok stranou

Je také možné, zabývat se σ-modely

$$x : \Sigma \to N \times G \quad \widetilde{x} : \Sigma \to \widetilde{N} \times \widetilde{G},$$

kde $\mathrm{dim}N = \mathrm{dim}\widetilde{N}$. Definovat na prostoru $T_nN \times T_{\widetilde{n}}\widetilde{N} \times \mathfrak{d}$ pro všechna $n \in N$ a pro všechna $\widetilde{n} \in \widetilde{N}$ bilineární formu obdobně jako v sekci 3.1.3 a postupovat jako v případě ze sekce 3.1.2. Takováto metoda má však jisté nevýhody...

1. Žádné proměnné by nebylo možné nazvat přihlížejícími, protože by se všechny účastnily transformace.

2. Jedna z podmínek omezujících výběr tenzoru F by zněla (ve smyslu značení ze sekce 3.1.3) $F_{ij,\alpha} = 0$, což je podmínka dosti silná.

3. Celý postup by vlastně byl už od začátku špatně, protože na algebře $\mathfrak{d}$ je forma $\langle\,|\,\rangle_{\mathfrak{d}}$ dána tím, že se jedná o Lieovu algebru Drinfeľdova doublu, a na prostoru $T_nN \times T_n^{\#}N$ je forma daná kanonicky[3], kdežto v tomto případě nic takového nemáme, tedy forma by buď byla degenerovaná (Což by znamenalo, že bychom se nic nedověděli.), nebo by její definice silně závisela na výběru baze (Což je nežádoucí.).

3.1.5 Cesta zpět

Realizace všech těchto postupů již není tak elegantní a přímočará, jako jejich odvození. Máme-li pouze σ-model

$$x : (\Sigma, \eta, \omega) \to (M, \mathbf{g}, B)$$

a chceme k němu najít σ-model dualní, musíme udělat spoustu věcí. A úspěch není zaručen. Především je třeba zjistit, co má M společného s nějakou grupou, která by mohla možná být jednou ze dvou podgrup, na které se rozkládá nějaký Drinfeľdův double.

Dejme tomu, že existuje Lieova grupa G mající na varietě M akci

$$G \times M \to M : (g, m) \mapsto gm.$$

Je-li tato akce volná[4] a transitivní[5], potom je G diffeomorfní M a na M lze zavést pomocí tohoto diffeomorfismu strukturu Lieovy grupy. Tedy se jedná o případ sekce 3.1.2 a dále viz [6].

Pokud tato akce není transitivní, ale alespoň je volná, je to také dobré. ([1])

Věta 3.1 *Buď $G \times M \to M \in C^\infty$ volná akce taková, že varieta $G\backslash M$ existuje*[6]*, $\pi : M \to G\backslash M$ kanonická submersion. Potom $(M, G\backslash M, \pi)$ je diferencovatelná fibrace a pro každý bod v $G\backslash M$ existuje jeho otevřené okolí U, existuje zobrazení $\sigma : U \to M \in C^\infty$ tak, že $\pi \circ \sigma = id_U$ a zobrazení*

$$U \times G \to \pi^{-1}(U) : (u, g) \mapsto g\sigma(u)$$

je diffeomorfismus.

To vlastně znamená, že v takovém případě je M hlavním fibrovaným prostorem se strukturní grupou G, což je velmi silné tvrzení. Ve skutečnosti by stačilo slabší ([1]):

Věta 3.2 *Buď $G \times M \to M \in C^\infty$ akce taková, že varieta $G\backslash M$ existuje. Potom $\forall m \in M \; \exists$ mapa (U, φ, q) v bodě m na M taková, že $\varphi(m) = 0$, $\varphi(U) = V \times W$, kde $V \subseteq \mathbb{R}^p$, $W \subseteq \mathbb{R}^{q-p}$ jsou otevřené množiny a*

$$\forall z, z' \in U \left(z, z' \text{ patří do stejné orbity} \iff pr_2(\varphi(z)) = pr_2(\varphi(z')) \right)$$

To jest: Každá orbita je podvarietou[7]. A je-li akce volná, je také každá orbita diffeomorfní G. Tedy je-li akce volná a varieta $G\backslash M$ existuje, lze varietu M lokálně nahradit varietou $U \times G$, kde $U \subseteq G\backslash M$ je otevřená podmnožina v prostoru orbit, a použít sekci 3.1.3. To znamená

[3] Dokonce se podle toho i jmenuje.

[4] $\forall m \in M \left(\{g \in G | gm = m\} = \{e\}\right)$

[5] Množina $G\backslash M$ je jednoprvková $\iff \forall m, m' \in M \, \exists g \in G \, (m = gm')$

[6] Tzn.: Na prostoru orbit $G\backslash M$ existuje diferencovatelná struktura kompatibilní s běžnou topologií tohoto prostoru taková, že kanonická projekce $M \to G\backslash M$ je submersion.

[7] Viz odstavec pod definicí 2.1 na straně 7.

1. najít ke grupě G, ještě grupy $\widetilde{G}$ a D,
2. zjistit, zda je splněna podmínka (3.18) (str 15)[8].
3. vyřešit pohybové rovnice původního sigma modelu $x : \Sigma \to M$,
4. vyřešit rovnice (3.12), (3.13) (str 13) (Tj. najít $\widetilde{h}$.),
5. najít $\widetilde{g}$ a h, tak aby $g\widetilde{h} = \widetilde{g}h$ (Najít rozklad.).

Což je ve skutečnosti také skoro přesně postup uvedený v [6], jen zde je použit pro obecnější situaci.

3.2 Praxe

Mějme Drinfeľdův double D dimenze 4 na jehož Lieově algebře

$$\mathfrak{d} = Span(T_1, T_2, \widetilde{T}_1, \widetilde{T}_2), \quad [T_1, T_2] = T_2 \quad [\widetilde{T}_1, \widetilde{T}_2] = 0$$

má forma $\langle \, | \, \rangle_{\mathfrak{d}}$ tvar

$$\langle T_a \mid \widetilde{T}_a \rangle_{\mathfrak{d}} = \delta_{ab} \quad \langle T_a \mid T_b \rangle_{\mathfrak{d}} = \langle \widetilde{T}_a \mid \widetilde{T}_b \rangle_{\mathfrak{d}} = 0.$$

Ostatní komutační relace

$$[\widetilde{T}_1, T_1] = [\widetilde{T}_1, T_2] = 0, \quad [\widetilde{T}_2, T_1] = \widetilde{T}_2, \quad [\widetilde{T}_2, T_2] = -\widetilde{T}_1$$

pak již plynou z ad-invariance formy $\langle \, | \, \rangle_{\mathfrak{d}}$. Příslušný rozklad algebry $\mathfrak{d}$ na podalgebry $\mathfrak{g} = Span(T_1, T_2)$, $\widetilde{\mathfrak{g}} = Span(\widetilde{T}_1, \widetilde{T}_2)$ je očividný.

Algebru $\mathfrak{g}$ lze reprezentovat například takto

$$T_1 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad T_2 = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$$

a příslušnou grupu G takto

$$G = \left\{ \begin{pmatrix} e^\alpha & \beta \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \mid \alpha, \beta \in \mathbb{R} \right\}.$$

Cílem je sestrojit nějaké dva σ-modely s cílovými varietami $\mathbb{R}^2[x, y] \times G[\alpha, \beta]$ a $\mathbb{R}^2[x, y] \times \widetilde{G}[\varphi, \vartheta]$, vyřešit přímo pohybové rovnice (alespoň) jednoho z nich a ukázat, že v této práci popsaná dualita skutečně umí převést řešení pohybových rovnic jednoho σ-modelu na řešení pohybových rovnic druhého.

Nabízí se parametrizovat element $g \in G$ způsobem $g = g_2 g_1 := e^{\beta T_2} e^{\alpha T_1}$. Tedy matice adjungované reprezentace G na $\mathfrak{d}$ v bazi $(T_1, T_2, \widetilde{T}_1, \widetilde{T}_2)$

$$Ad_{g^{-1}} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ \beta e^{-\alpha} & e^{-\alpha} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -\beta \\ 0 & 0 & 0 & e^\alpha \end{pmatrix}.$$

[8] Zjistili jsme, že má-li tenzor F tvar daný rovnicemi (3.15) a (3.16), pak podmínku (3.18) splňuje automaticky. Platí ale i obrácené tvrzení: Splňuje-li tenzor F podmínku (3.18), pak má tvar daný vztahy (3.15) a (3.16). Viz například [3]. Tímto se neodvolávám na publikaci, kde by bylo toto tvrzení dokázáno, ale pouze na publikaci, kde je vysloveno.

Z čehož plynou vztahy

$$A(g) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \beta e^{-\alpha} \\ 0 & 0 & 0 & e^{-\alpha} \end{pmatrix}, \quad A^{-1}(g) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -\beta \\ 0 & 0 & 0 & e^{\alpha} \end{pmatrix},$$

$$B(g) \equiv 0, \quad D(g) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -\beta & e^{\alpha} \end{pmatrix}.$$

Zvolíme matici

$$F(x, y; e) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

(Obecně by mohla záviset na proměnných x, y.), což znamená ((3.15), (3.16) str. 13)

$$E(x, y; g) = A^{-1}(g) F(x, y; e) D(g) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -2\beta & e^{\alpha} \\ 0 & 0 & e^{\alpha} & 0 \end{pmatrix},$$

$$F(x, y; g) = \mathbf{g} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -2\beta e^{-2\alpha} & e^{-\alpha} \\ 0 & 0 & e^{-\alpha} & 0 \end{pmatrix}, \quad \mathbf{g}^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & e^{\alpha} \\ 0 & 0 & e^{\alpha} & 2\beta \end{pmatrix},$$

protože v dané reprezentaci platí

$$\mathbf{e}(g) = v^{-1}(g) = \begin{pmatrix} e^{-\alpha} & 0 \\ 0 & e^{-\alpha} \end{pmatrix}.$$

Jediné nenulové složky konexe budou[9]

$$\Gamma^4_{33} = 2\beta e^{-2\alpha}, \quad \Gamma^4_{34} = \Gamma^4_{43} = -e^{-\alpha}$$

a pohybové rovnice dualizovatelného σ-modelu $(x, y, e^{\alpha}, \beta) : \Sigma \to \mathbb{R}^2 \times G$ budou mít tvar

$$\partial_+ \partial_- x = 0, \quad \partial_+ \partial_- y = 0, \tag{3.20}$$

$$\partial_+ \partial_- e^{\alpha} = 0, \quad \partial_+ \partial_- (\beta e^{-\alpha}) = 0. \tag{3.21}$$

Snadno je vyřešíme

$$x = f^x(t_+) + g^x(t_-), \quad y = f^y(t_+) + g^y(t_-),$$

$$e^{\alpha} = f^{\alpha}(t_+) + g^{\alpha}(t_-), \quad \beta = e^{\alpha}\big(f^{\beta}(t_+) + g^{\beta}(t_-)\big).$$

[9]Indexy $1, 2, 3, 4$ odpovídají postupně proměnným x, y, e^{α}, β.

Zcela analogicky získáme σ-model dualní: Komutativní algebru $\widetilde{\mathfrak{g}}$ a komutativní grupu $\widetilde{G}$ je možné reprezentovat

$$\widetilde{T}_1 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad \widetilde{T}_2 = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad \widetilde{G} = \left\{ \begin{pmatrix} e^{\varphi} & 0 \\ 0 & e^{\vartheta} \end{pmatrix} \mid \varphi, \vartheta \in \mathbb{R} \right\}.$$

Element $\widetilde{g} \in \widetilde{G}$ lze parametrizovat $\widetilde{g} = \widetilde{g}_1 \widetilde{g}_2 := e^{\varphi \widetilde{T}_1} e^{\vartheta \widetilde{T}_2}$. A platí

$$\widetilde{\mathbf{e}}(\widetilde{g}) = \widetilde{v}^{-1}(\widetilde{g}) = \begin{pmatrix} e^{-\varphi} & 0 \\ 0 & e^{-\vartheta} \end{pmatrix}.$$

Matice adjungované reprezentace $\widetilde{G}$ na $\mathfrak{d}$ v bazi $(\widetilde{T}_1, \widetilde{T}_2, T_1, T_2)$

$$Ad_{\widetilde{g}^{-1}} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & \vartheta & 1 & 0 \\ -\vartheta & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix},$$

odkud plyne

$$\widetilde{A}(\widetilde{g}) = \widetilde{D}(\widetilde{g}) = id, \quad \widetilde{B}(\widetilde{g}) = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -\vartheta \\ 0 & 0 & \vartheta & 0 \end{pmatrix},$$

dále pak

$$\widetilde{E}(x, y; \widetilde{g}) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \frac{1}{1+\vartheta} \\ 0 & 0 & \frac{1}{1-\vartheta} & 0 \end{pmatrix},$$

$$\widetilde{F}(x, y; \widetilde{g}) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \frac{e^{-(\vartheta+\varphi)}}{1+\vartheta} \\ 0 & 0 & \frac{e^{-(\vartheta+\varphi)}}{1-\vartheta} & 0 \end{pmatrix},$$

$$\widetilde{\mathbf{g}} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \frac{e^{-(\vartheta+\varphi)}}{1-\vartheta^2} \\ 0 & 0 & \frac{e^{-(\vartheta+\varphi)}}{1-\vartheta^2} & 0 \end{pmatrix},$$

$$\widetilde{\mathbf{g}}^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & e^{\vartheta+\varphi}(1-\vartheta^2) \\ 0 & 0 & e^{\vartheta+\varphi}(1-\vartheta^2) & 0 \end{pmatrix}.$$

jediné nenulové složky konexe jsou[10]

$$\widetilde{\Gamma}^3_{33} = -e^{-\varphi}, \quad \widetilde{\Gamma}^4_{44} = \frac{e^{-\vartheta}(\vartheta^2 + 2\vartheta - 1)}{1 - \vartheta^2}$$

[10]Indexy $1, 2, 3, 4$ odpovídají postupně proměnným x, y, e^{φ}, e^{ϑ}.

a pohybové rovnice σ-modelu $(x, y, e^{\varphi}, e^{\vartheta}) : \Sigma \to \mathbb{R}^2 \times \widetilde{G}$ zní

$$\partial_+\partial_- x = 0, \quad \partial_+\partial_- y = 0, \tag{3.22}$$

$$\partial_+\partial_-\varphi = 0, \quad \partial_+\partial_-\vartheta + \frac{2\vartheta}{1-\vartheta^2}\partial_+\vartheta\partial_-\vartheta = 0. \tag{3.23}$$

Tedy

$$x = f^x(t_+) + g^x(t_-), \quad y = f^y(t_+) + g^y(t_-), \quad \varphi = f^{\varphi}(t_+) + g^{\varphi}(t_-)$$

a řešení ϑ již lehce nalezneme pomocí duality:

$$l = g\widetilde{h} = e^{\beta T_2} e^{\alpha T_1} e^{\widehat{\varphi}\widetilde{T}_1} e^{\widehat{\vartheta}\widetilde{T}_2} = \widetilde{g}h = e^{(\widehat{\varphi}+\beta\widehat{\vartheta}e^{-\alpha})\widetilde{T}_1} e^{\widehat{\vartheta}e^{-\alpha}\widetilde{T}_2} e^{\beta T_2} e^{\alpha T1}.$$

Tedy x, y, $\varphi = \widehat{\varphi} + \beta\widehat{\vartheta}e^{-\alpha}$, $\vartheta = \widehat{\vartheta}e^{-\alpha}$ je řešení pohybových rovnic (3.22), (3.23), pokud x, y, α, β je řešení rovnic (3.20), (3.21) a $\widehat{\varphi}$, $\widehat{\vartheta}$ řeší rovnice ((3.12), (3.13), str. 13)

$$\partial_-\widehat{\varphi} = -2\beta\partial_-\alpha + \partial_-\beta \quad \partial_-\widehat{\vartheta} = \partial_- e^{\alpha} \tag{3.24}$$

$$\partial_+\widehat{\varphi} = 2\beta\partial_+\alpha - \partial_+\beta \qquad \partial_+\widehat{\vartheta} = -\partial_+ e^{\alpha}, \tag{3.25}$$

což lze snadno ověřit přímým výpočtem bez znalosti řešení $\widehat{\varphi}$, $\widehat{\vartheta}$ posledního systému rovnic. Nám ovšem stačí znát jen část:

$$\widehat{\vartheta} = g^{\alpha}(t_-) - f^{\alpha}(t_+) + const.$$

To tedy znamená, že jsme našli zbývající řešení pohybových rovnic druhého σ-modelu, a sice

$$\vartheta = \frac{g^{\alpha}(t_-) - f^{\alpha}(t_+) + const.}{g^{\alpha}(t_-) + f^{\alpha}(t_+)}.$$

Tento příklad je opravdu velice jednoduchý: Metrika (na $\mathbb{R}^2 \times G$ i na $\mathbb{R}^2 \times \widetilde{G}$) na přihlížejících proměnných vůbec nezávisí a tenzor křivosti obou prostorů je nulový, což znamená, že pohybové rovnice obou σ-modelů (v principu) umíme řešit (viz [10]), tedy nepotřebujeme dualitu a příklad je nezajímavý. Nejlepší by bylo najít dualní σ-modely, z nichž jeden by měl tenzor křivosti nulový a druhý nikoli. Pokusil jsem se tedy příklad v několika krocích zesložitit s tímto cílem a rovnou hlásím, že cíle není dosaženo. Následují tedy příklady.

Prvním krokem může být výběr matice $F(x, y; e)$ ve tvaru

$$F(x, y; e) = \begin{pmatrix} e^{2x}e^{2y} & \chi(x,y) & 0 & 0 \\ -\chi(x,y) & e^{2x}e^{2y} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix},$$

kde $\chi(x, y)$ jsou (téměř) libovolné funkce. Potom (při zachování parametrizace, reprezentace i označení)

$$F(x, y; g) = \begin{pmatrix} e^{2x}e^{2y} & \chi(x,y) & 0 & 0 \\ -\chi(x,y) & e^{2x}e^{2y} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -2\beta e^{-2\alpha} & e^{-\alpha} \\ 0 & 0 & e^{-\alpha} & 0 \end{pmatrix},$$

$$\mathbf{g}(x,y;g) = \begin{pmatrix} e^{2x}e^{2y} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & e^{2x}e^{2y} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -2\beta e^{-2\alpha} & e^{-\alpha} \\ 0 & 0 & e^{-\alpha} & 0 \end{pmatrix}$$

a pohybové rovnice mají tvar

$$\partial_+\partial_-\xi^\pm = 0, \quad \partial_+\partial_- e^\alpha = 0, \quad \partial_+\partial_-(\beta e^{-\alpha}) = 0,$$

kde

$$\xi^\pm := e^x e^y cos(x-y) \pm e^x e^y sin(x-y).$$

Duální σ-model pak bude dán tenzorem

$$\widetilde{F}(x,y;\widetilde{g}) = \begin{pmatrix} e^{2x}e^{2y} & \chi(x,y) & 0 & 0 \\ -\chi(x,y) & e^{2x}e^{2y} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \frac{e^{-(\vartheta+\varphi)}}{1+\vartheta} \\ 0 & 0 & \frac{e^{-(\vartheta+\varphi)}}{1-\vartheta} & 0 \end{pmatrix}$$

a jeho pohybové rovnice budou

$$\partial_+\partial_-\xi^\pm = 0, \quad \partial_+\partial_-\varphi = 0, \quad \partial_+\partial_-\vartheta + \frac{2\vartheta}{1-\vartheta^2}\partial_+\vartheta\partial_-\vartheta = 0.$$

Oba tenzory křivosti jsou i nadále nulové. Nic podstatného se tedy nezměnilo (ani transformace duality (3.24), (3.25)), ale závislost metrik na přihlížejících proměnných je již netriviální.

Dalším nabízejícím se krokem by mohl být výběr

$$F(x,y;e) = \begin{pmatrix} e^{2x}e^{2y} & \chi(x,y) & 0 & 0 \\ -\chi(x,y) & e^{2x}e^{2y} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & e^{2x}e^{2y} \\ 0 & 0 & e^{2x}e^{2y} & 0 \end{pmatrix}.$$

Potom

$$F(x,y;g) = \begin{pmatrix} e^{2x}e^{2y} & \chi(x,y) & 0 & 0 \\ -\chi(x,y) & e^{2x}e^{2y} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -2e^{2x}e^{2y}\beta e^{-2\alpha} & e^{2x}e^{2y}e^{-\alpha} \\ 0 & 0 & e^{2x}e^{2y}e^{-\alpha} & 0 \end{pmatrix},$$

$$\widetilde{F}(x,y;\widetilde{g}) = \begin{pmatrix} e^{2x}e^{2y} & \chi(x,y) & 0 & 0 \\ -\chi(x,y) & e^{2x}e^{2y} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \frac{e^{-(\vartheta+\varphi)}}{1+\vartheta}e^{-2x}e^{-2y} \\ 0 & 0 & \frac{e^{-(\vartheta+\varphi)}}{1-\vartheta}e^{-2x}e^{-2y} & 0 \end{pmatrix}.$$

Ale, přestože metriky „vypadají poměrně hezky“, ani jeden z tenzorů křivosti není nulový a dokonce se mi nepodařilo nalézt ani jednu transformaci souřadnic takovou, aby pohybové rovnice alespoň pro jednu ze složek ξ^i nových souřadnic přecházely ve vlnovou rovnici (tj. rovnici $\partial_+\partial_-\xi^i = 0$). Jinými slovy: nevyřešil jsem pohybové rovnice ani jednoho ze σ-modelů.

Ani transformace duality již nemají svůj poměrně jednoduchý tvar (3.24), (3.25), ale

$$\partial_-\widehat{\varphi} = e^{2x}e^{2y}\big(-2\beta\partial_-\alpha + \partial_-\beta\big) \quad \partial_-\widehat{\vartheta} = e^{2x}e^{2y}\partial_- e^\alpha$$

$$\partial_+\widehat{\varphi} = e^{2x}e^{2y}\big(2\beta\partial_+\alpha - \partial_+\beta\big) \qquad \partial_+\widehat{\vartheta} = -e^{2x}e^{2y}\partial_+ e^\alpha.$$

Kapitola 4

Závěr

První část práce se povedla jen částečně. Podařilo se ukázat, že má dobrý smysl mluvit o Lieově podgrupě příslušející nějaké Lieově podalgebře dané Lieovy grupy, protože tato existuje a je určena (až na isomorfismus) jednoznačně. Podařilo se také najít důkazy pro tvrzení, že rozklad elementu Drinfeľdova doublu existuje a je jednoznačný. Co se ale nepodařilo, je zjistit na jak veliké množině tento rozklad existuje v závislosti na vlastnostech doublu popřípadě vlastnostech jeho podgrup. Mám na mysli vlastnosti jak topologické jako je např. kompaktnost či jednoduchá souvislost, tak vlastnosti algebraické jako třeba řešitelnost. Tato otázka tedy zůstává (alespoň pro mne) otevřenou. (Protože kvůli ní nemohu po nocích spát:)

Druhá část se povedla již trošku více. Zobecnění duality máme. A to zobecnění dobré. To znamená, že se nic nemění při záměně (vlnka $\leftrightarrow$ nevlnka), tj. že je jedno, zda konstruujeme duální σ-model k σ-modelu x nebo k σ-modelu $\widetilde{x}$. Dále ve specialním případě, kdy cílovými varietami σ-modelů jsou pouze grupy, jedná se o dualitu původní. Ve druhém specialním případě, kdy vůbec nikde žádná grupa není, také nikde není žádná dualita, protože máme jen jeden σ-model, ale kdybychom si toho náhodou nevšimli a oháněli se jakousi bilinearní formou, alespoň bychom obdrželi jeho pohybové rovnice.

Poděkování

Za cenné rady, připomínky a trpělivost děkuji zejména vedoucímu této práce Prof. RNDr. Ladislavu Hlavatému, DrSc. Dále si poděkování zaslouží ing. Miroslav Turek, především za plodné diskuse.

Příloha A

Poznámky k souvislosti aneb `Kde se vzaly matice` a, b, d?

V závěru je řeč o tom, že některé topologické vlastnosti Drinfeľdova doublu D a jeho podgrup G, $\widetilde{G}$ by možná mohly ovlivnit velikost množiny, na které existuje rozklad $l = g\widetilde{h} = \widetilde{g}h \in D$. Konkrétně jsou zmíněny kompaktnost a jednoduchá souvislost. Souvislost nikoli a cílem této přílohy je vyjasnit, že to není náhodou a že souvislost je vlastnost v tomto smyslu zcela nezajímavá, v jiném smyslu naopak vlastnost veliké důležitosti.

V úvodu je napsáno, co znamená ad-invariance bilineární formy $\langle\,|\,\rangle_{\mathfrak{d}}$. Označíme $exp^G : \mathfrak{g} \to G$ exponencialní zobrazení. Pak platí

$$\forall g \in Ran\,(exp^G)\, \forall X, Y \in \mathfrak{g}\big(\langle Ad_g X \mid Ad_g Y\rangle_{\mathfrak{d}} = \langle X \mid Y\rangle_{\mathfrak{d}}\big).$$

a v tomto tvaru se zde také ad-invariance používá.

Ze sekce 3.1.2 víme, že vztah $\partial_\pm l \cdot l^{-1} \in \mathcal{E}^\mp$ obsahuje pohybové rovnice dvou dualních σ-modelů. Tento vztah vlastně znamená

$$\langle \partial_\pm l \cdot l^{-1} \mid \mathcal{E}^\pm\rangle_{\mathfrak{d}} = 0.$$

Při jeho zpracování, použije-li se rozklad $l = g\widetilde{h}$, se objeví rovnice

$$\langle \partial_\pm g \cdot g^{-1} + g \cdot \partial_\pm \widetilde{h} \cdot \widetilde{h}^{-1} \cdot g^{-1} \mid \mathcal{E}^\pm\rangle_{\mathfrak{d}} = 0.$$

Toto se podle předchozího odstavce dá upravit na

$$\langle g^{-1} \cdot \partial_\pm g + \partial_\pm \widetilde{h} \cdot \widetilde{h}^{-1} \mid g^{-1} \cdot \mathcal{E}^\pm \cdot g\rangle_{\mathfrak{d}} = 0,$$

kde

$$g^{-1} \cdot \mathcal{E}^\pm \cdot g = Span[(T_a + E_{ab}(g)\widetilde{T}^b)_{a\in\widehat{m}}].$$

A platí

$$g^{-1} \cdot T_a \cdot g = a_{ab}(g)\, T^b, \quad g^{-1} \cdot \widetilde{T}^b \cdot g = b_{bc}(g)\, T^c + d_{bc}(g)\, \widetilde{T}^c.$$

Odtud se tedy mimochodem vzaly matice a, b, d...

Buď H naprosto libovolná topologická grupa. Pak písmenkem H^e označíme komponentu souvislosti grupy H obsahující jednotkový prvek $e \in H$. Tato množina je otevřená i uzavřená v H a navíc je podgrupou (dokonce normalní) v H.

Co to znamená, je-li H navíc Lieova? Jako v H otevřená podmnožina, je H^e podvarietou variety H a to podvarietou stejné dimenze jako H. Je tedy Lieovou podgrupou a navíc $T_eH^e = T_eH$, tj. Lieova algebra těchto grup je stejná. Z toho také plyne, že $Ran\,(exp^H) \subseteq H^e$. (A to aplikací tvrzení „Pro každé dvě Lieovy grupy K, L a pro každý homomorfismus Lieových grup $\psi : K \to L$ platí $\psi \circ exp^K = exp^L \circ T_e\psi$." na kanonickou injekci $i : H^e \to H$.)

A co to tedy znamená pro nás? Je-li kterákoli z grup G, $\widetilde{G}$, D nesouvislá, můžeme s klidem a čistým svědomím nesouvislé části ignorovat nebo zahodit, protože na nich naše konstrukce stejně není povolena nezávisle na tom, jestli tam existuje rozklad $l = g\widetilde{h} = \widetilde{g}h$ nebo ne. Věta 2 o existenci a jednoznačnosti Lieovy podgrupy na straně 7 stejně požaduje její souvislost a alespoň vidíme smysl tohoto požadavku: Pokud je H nesouvislá, pak (jako Lieovy grupy) H a H^e rozhodně nemohou být isomorfní.

Ilustrujme si to rozšířením příkladu z úvodu:

$$G = \left\{ \left(\begin{array}{cc} g^1 & g^2 \\ 0 & 1 \end{array} \right) | g^1 \in \mathbb{R} \setminus \{0\}, g^2 \in \mathbb{R} \right\},$$

$$\widetilde{G} = \left\{ \left(\begin{array}{cc} 1 & 0 \\ \widetilde{h}^2 & \widetilde{h}^1 \end{array} \right) | \widetilde{h}^1 \in \mathbb{R} \setminus \{0\}, \widetilde{h}^2 \in \mathbb{R} \right\}$$

jsou opět podgrupy grupy $D := GL(\mathbb{R}^2)$. Grupy, o kterých je řeč v úvodu, jsou v nynějším označení grupy G^e, $\widetilde{G}^e$, D^e. Na úrovni algeber se nezměnilo nic a postupy při případné konstrukci duálních σ-modelů by se také vůbec nijak nelišily. Z tohoto příkladu je také vidět, že souvislost žádnou podstatnou roli v otázce rozkladu $l = g\widetilde{h} = \widetilde{g}h$ nehraje.

Literatura

[1] Jean Dieudonné: Éléments d'Analyse, Tome 1, Tome 2 et Tome 3, Gauthier–Villars, Paris 1969, 1969 et 1970

[2] Jean Dieudonné: Treatise on Analysis, Volume 4, Academic Press, New York and London 1974

[3] C. Klimčík: Poisson-Lie T-duality, hep-th/9509095

[4] C. Klimčík & P. Ševera: Poisson-Lie T-duality and Loop Groups of Drinfeld Double, hep-th/9512040

[5] Orlando Alvarez: Classical Geometry and Target Space Duality, hep-th/9511024

[6] Ladislav Hlavatý: Classical solution of a sigma model in curved background, Physics Letters B 625 (2005) 285-290

[7] Svend E. Hjelmeland & Ulf Lindström: Duality for the Non-Specialist, hep-th/9705122

[8] Ladislav Hlavatý & Libor Šnobl: Poisson-Lie T-plurality as canonical transformation, hep-th/0608133

[9] Marián Fecko: Diferenciálna geometria a Lieove grupy pre fyzikov, Vydavateľstvo IRIS

[10] Miroslav Turek: Hledání plochých souřadnic σ-modelů, diplomová práce, http://ssmf.fjfi.cvut.cz/2005/Turek_thesis.pdf

[11] Ladislav Hlavatý & Libor Šnobl: Poisson-Lie T-dual models with two-dimensional targets, hep-th/0110139