

České vysoké učení technické v Praze
Fakulta jaderná a fyzikálně inženýrská

Rešeršní práce

Emil Doležal

České vysoké učení technické v Praze
Fakulta jaderná a fyzikálně inženýrská

Úvod do teorie náhodných matic a její aplikace

Katedra fyziky

Akademický rok: 2004/2005

Školitel: Prof. RNDr. Petr Šeba, DrSc.

Rád bych poděkovat prof. RNDr. Petru Šebovi, DrSc. za poskytnuté konzultace,
cenné rady a připomínky.

Obsah

1	Základy teorie náhodných matic	7
1.1	Úvod	7
1.2	Třídy systémů	7
1.3	Integrační míra na prostoru matic	8
1.4	Gaussovské soubory náhodných matic	10
1.5	Rozdělení vázaných vlastních hodnot energie	12
1.6	Charakteristiky spektrálních sekvencí	12
1.7	Metoda ortogonálních polynomů	14
2	Předpovědi teorie náhodných matic	17
2.1	Střední hustota stavů	17
2.2	Průměrná vzdálenost mezi nejbližšími sousedy	20
2.3	Vlastnosti Hermitových polynomů	22
3	Příklady chaotických systémů	25
3.1	Mikrovlné experimenty	25
3.2	Anharmonický oscilátor	29
3.3	Lidský mozek	30

Kapitola 1

Základy teorie náhodných matic

1.1 Úvod

Teorie náhodných matic se vyvíjela hlavně v padesátých a šedesátých letech 20. století. Mezi zakladatele a průkopníky patřili Wigner, Dyson, Mehta a další. Původně měla přinést jistý řád do popisu spekter složitých atomových jader. Zájem o teorii však prudce vzrostl, když Bohigas, Giannoni a Schmit vyslovili předpoklad, že předpovědi teorie je možné použít při zkoumání spekter libovolného chaotického systému (přesněji systémů, které jsou z hlediska klasické fyziky chaotické, a jež jsou popisovány kvantovou mechanikou). Tento předpoklad se ukázal být oprávněný, neboť bylo získáno mnoho důkazu pro jeho platnost.

1.2 Třídy systémů

Časový vývoj kvantově mechanického systému je určen Schrödingerovou rovnicí

$$i\hbar \frac{\partial \psi}{\partial t} = \mathcal{H}\psi. \quad (1.1)$$

Hamiltonian \mathcal{H} tohoto systému můžeme zapsat pomocí souboru bazických funkcí ϕ_n v maticové reprezentaci

$$H_{mn} = \langle \phi_m | \mathcal{H} | \phi_n \rangle. \quad (1.2)$$

Pro popis systému je důležité znát jeho symetrie. V klasické mechanice jsou symetrie spojené s konstantami pohybu, v kvantové mechanice je každá symetrie spojena se samozdruženým operátorem R , který komutuje s Hamiltonianem $[\mathcal{H}, R] = 0$. Určíme-li vlastní funkce $\psi_{n,\alpha}$ operátoru R , příslušející vlastním číslu r_n (α čísluje jednotlivé funkce odpovídající tomuto vlastním číslu) a nahradíme-li jimi původní bázi ϕ_n , dostáváme mnohem jednodušší tvar maticové reprezentace (1.2) v blokové formě

$$H = \begin{pmatrix} H^{(1,1)} & 0 & \dots \\ 0 & H^{(2,2)} & \dots \\ \vdots & \vdots & \ddots \end{pmatrix}, \quad (1.3)$$

kde

$$H_{\alpha\beta}^{(m,n)} = \langle \phi_{m,\alpha} | \mathcal{H} | \phi_{n,\beta} \rangle. \quad (1.4)$$

Bloky mimo hlavní diagonálu jsou nulové, protože

$$0 = \langle \phi_{m,\alpha} | [\mathcal{H}, R] | \phi_{n,\beta} \rangle = (r_n - r_m) H_{\alpha\beta}^{(m,n)}. \quad (1.5)$$

Analogicky můžeme využít další symetrie systému a zmenšovat bloky (ideálně až na jednotkové).

Většina reálných systémů takovéto krásné symetrie nemá, třídu systému u nich určují diskrétní symetrie, vyznačující se tím, že operátor R , příslušející dané symetrii komutující s Hamiltoniánem (viz výše), splňuje pro jisté n , relaci

$$R^n = I, \quad (1.6)$$

kde I je identita. Nejdůležitější jsou "time-reversal symmetry" (symetrie vůči změně znaménka času) a "spin-orbital symmetry" (Hamiltonián takového systému musí komutovat s operátorem $C\tau_y$, kde C je definován na funkci jako $C\phi = \phi^*$, význam operátoru τ_y na prostoru spinu bude objasněn níže viz definice 1.9).

Hermitovské operátory mají vlastnosti

$$H = H^\dagger, \quad H_{mn} = H_{nm}^*, \quad (1.7)$$

kteřé se zachovávají při unitárních transformacích. O systémech, jejichž Hamiltonian může být reprezentován pomocí hermitovských matic, říkáme, že patří do unitární třídy. Jedná se hlavně o systémy bez "time-reversal" symetrie. Je-li možné Hamiltonian reprezentovat dokonce pomocí symetrických matic, říkáme, že systém patří do ortogonální třídy, protože reálnost matic zůstane zachována při ortogonálních transformacích. Tyto systémy typicky mají "time-reversal" symetrii ale nemají "spin-orbital" symetrii.

Matici A , která má na místě prvku A_{ij} matici 2×2 tvaru

$$A_{ij} = (A_0)_{ij} I_2 + (A_x)_{ij} \tau_x + (A_y)_{ij} \tau_y + (A_z)_{ij} \tau_z, \quad (1.8)$$

kde A_0, A_x, A_y, A_z jsou symetrické a

$$I_2 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad \tau_x = \begin{pmatrix} 0 & i \\ i & 0 \end{pmatrix}, \quad \tau_y = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}, \quad \tau_z = \begin{pmatrix} i & 0 \\ 0 & -i \end{pmatrix}, \quad (1.9)$$

nazýváme "quaternion real" (mají tedy rozměr $2N$). Transformace, které nechávají těmto maticím tvar (1.8), nazýváme symplektické a pro transformovanou matici H' platí

$$H' = SHS^R, \quad SS^R = 1, \quad (1.10)$$

přičemž matici S^R dostaneme ze vztahu

$$S^R = ZS^T Z^{-1} = -ZSZ, \quad Z_{mn} = \delta_{mn} \tau_y. \quad (1.11)$$

Systém, který je možné reprezentovat maticemi "quaternion real", patří do symplektické třídy. Její zástupci mají obě zmiňované diskrétní symetrie.

1.3 Integrační míra na prostoru matic

Každá komplexní matice Z rozměru $N \times N$ může být považována za bod v $2N^2$ -rozměrném Eukleidovském prostoru s kartézskými souřadnicemi x_{ij}, y_{ij} , které odpovídají prvkům matice

$$z_{ij} = x_{ij} + iy_{ij}, \quad 1 \leq i, j \leq N. \quad (1.12)$$

Délkový element ds v tomto prostoru je dán výrazem

$$(ds)^2 = \sum_{i,j=1}^N (dx_{ij})^2 + (dy_{ij})^2 = \sum_{i,j=1}^N dz_{ij} \overline{dz_{ij}} = \text{Tr}(dZdZ^*). \quad (1.13)$$

Na každém k -rozměrném povrchu parametrizovaném souřadnicemi q_i

$$x_i = x_i(q_1, \dots, q_k), \quad i = 1, \dots, N \quad (1.14)$$

v Eukleidovkém prostoru můžeme definovat Riemannovu metriku ($g_{mn} = g_{nm}$) pomocí délkového elementu (1.13)

$$(ds)^2 = \sum_{i=1}^N (dx_i)^2 = \sum_{i=1}^N \left(\sum_{m=1}^k \frac{\partial x_i}{\partial q_m} dq_m \right)^2 = \sum_{m,n=1}^k g_{mn} dq_m dq_n. \quad (1.15)$$

Riemannova metrika potom určuje odpovídající integrační míru na daném povrchu

$$d\mu = \sqrt{|g|} dq_1 \dots dq_k, \quad g = \det(g_{mn}). \quad (1.16)$$

Množina hermitovských, symetrických i "quaternion real" matic tvoří podprostor prostoru komplexních matic, lze ji proto považovat za povrch v Eukleidovském prostoru a určit pro něho délkový a objemový element. Postup je podobný ve všech třech případech. V N^2 -rozměrném podprostoru, který odpovídá hermitovským maticím ($x_{ij} = x_{ji}$, $y_{ij} = -y_{ji}$), dostáváme

$$(ds(H))^2 = \text{Tr}(dHdH^*) = \sum_{i=1}^N (dx_{ii})^2 + 2 \sum_{i<j} (dx_{ij})^2 + (dy_{ij})^2 \quad (1.17)$$

$$d\mu(H) = 2^{\frac{N(N-1)}{4}} \prod_{i=1}^N dx_{ii} \prod_{i<j} dx_{ij} dy_{ij}. \quad (1.18)$$

Z výrazu (1.17) je patrné, že délkový element v bodě H je stejný jako v bodě H' , spojeném s původním unitární transformací, neboť

$$\text{Tr}(dH'dH'^*) = \text{Tr}(UdHdH^*U^{-1}) = \text{Tr}(UU^{-1}dHdH^*) = \text{Tr}(dHdH^*), \quad (1.19)$$

a v důsledku toho je stejný i objemový element (1.18).

Každou hermitovskou matici je možné rozložit na tvar

$$H = U\Lambda U^{-1}, \quad \Lambda = \text{diag}(\lambda_1, \dots, \lambda_N), \quad U^*U = I, \quad (1.20)$$

kde λ_i jsou reálná vlastní čísla matice H a sloupce unitární matice U jsou příslušné vlastní vektory. Množina matic, jejichž vlastní čísla jsou nedegenerovaná, je otevřená a hustá v prostoru hermitovských matic, množina matic s degenerovanými vlastními čísly má míru 0. V dalším odvozování budeme z tohoto důvodu předpokládat, že vlastní čísla matice H jsou nedegenerovaná. Matice U a Λ nejsou výrazem (1.20) určeny jednoznačně, protože

$$U_1\Lambda U_1^{-1} = U_2\Lambda U_2^{-1}, \quad U_1^{-1}U_2 = \text{diag}(e^{i\phi_1}, \dots, e^{i\phi_N}) \quad (1.21)$$

pro libovolnou volbu fází ϕ_i . Abychom dostali jednoznačný vztah mezi H a (U, Λ) budeme U brát jako prvek faktor-prostoru $U(N)|_{U(1)\otimes\dots\otimes U(1)}$ a po matici Λ budeme požadovat, aby její prvky byly uspořádány podle velikosti $\lambda_1 < \dots < \lambda_N$.

Délkový element (1.17) je možné pomocí spektrálního rozkladu (1.20) zapsat v proměnných λ_i matice Λ a $N(N-1)$ nezávislých proměnných matice U (počet nezávislých proměnných plyne z podmínky ortogonalit sloupců), dostáváme tedy

$$(ds)^2 = \text{Tr}(dHdH^*) = \text{Tr}[U(d\Lambda + U^{-1}dU\Lambda + \Lambda dU^{-1}U)^2U^{-1}]. \quad (1.22)$$

Dále budeme používat zkrácený zápis $\delta U = U^{-1}dU$. Z unitarity matice U a faktu, že Λ je diagonální, plynou rovnice

$$d(U^{-1}U) = 0 = dU^{-1}U + U^{-1}dU, \quad (1.23)$$

$$\delta U\Lambda - \Lambda\delta U = 0, \quad (1.24)$$

pomocí nichž upravíme výraz

$$(ds)^2 = \text{Tr}[(d\Lambda)^2 + 2d\Lambda(\delta U\Lambda - \Lambda\delta U) + (\delta U\Lambda)^2 + (\Lambda\delta U)^2 - 2\delta U\Lambda^2\delta U], \quad (1.25)$$

ze kterého zbude první člen a poslední tři, které dají dohromady

$$\begin{aligned} 2\text{Tr}(\delta U\Lambda\delta U\Lambda - \delta U^2\Lambda^2) &= 2\sum_{i,j=1}^N [\delta U_{ij}\lambda_j\delta U_{ji}\lambda_i - \lambda_i^2\delta U_{ij}\delta U_{ji}] = \\ &= -\sum_{i<j}(\lambda_j - \lambda_i)^2\delta U_{ij}\delta U_{ji} \end{aligned} \quad (1.26)$$

Výsledný vzorec pro délkový element je

$$(ds)^2 = \sum_{i=1}^N (d\lambda_i)^2 + \sum_{i<j}(\lambda_j - \lambda_i)^2\overline{\delta U_{ij}}\delta U_{ij}. \quad (1.27)$$

Po dalších úpravách a zpětném dosazení za symbol δU dostáváme také vzorec pro objemový element

$$d\mu(H) = \prod_{i<j}(\lambda_j - \lambda_i)^2 \prod_{i=1}^N d\lambda_i \times d\mu(U), \quad (1.28)$$

kde $d\mu(U)$ je míra na prostoru unitárních matic.

Dosažené výsledky platí pro podprostor hermitovských matic, obdobných výsledků bychom dosáhli i pro podprostor symetrických matic a "quaternion real". Výraz

$$d\mu(H) = \prod_{i<j}(\lambda_j - \lambda_i)^\nu \prod_{i=1}^N d\lambda_i \times dM \quad (1.29)$$

již udává objemové elementy pro symetrické ($\nu = 1$), hermitovské ($\nu = 2$) a "quaternion real" ($\nu = 4$) matice, kde dM nezávisí na λ_i .

1.4 Gaussovské soubory náhodných matic

Při studiu plně chaotických systémů pomocí teorie náhodných matic se předpokládá, že přesný popis interakce systému není důležitý, podstatné je pouze, do které z tříd uvedených v odstavci (1.2) patří. Chceme-li určit hustotu pravděpodobnosti $P(H)$, udávající pravděpodobnost nalezení náhodné matice v elementu $d\mu(H)$, je přirozené předpokládat, že funkce $P(H)$ bude invariantní při transformacích zachovávajících třídu systému. V případě hermitovských matic to znamená

$$P(H) = P(UHU^{-1}) = P(H'). \quad (1.30)$$

Požadavek (1.30) velmi zužuje paletu vhodných kandidátů, plyne z něho, že funkce $P(H)$ může záviset pouze na vlastních číslech, jak je vidět ze speciální transformace (1.20). Stopy mocnin matice H jsou funkce invariantní při unitárních transformacích

$$\mathrm{Tr}((H')^n) = \mathrm{Tr}(UH^nU^{-1}) = \mathrm{Tr}(UU^{-1}H^n) = \mathrm{Tr}(H^n). \quad (1.31)$$

Ze znalosti $\mathrm{Tr}(H^n)$ pro $n = 1, \dots, N$ můžeme určit vlastní čísla λ_i , neboť platí

$$\mathrm{Tr}(H^n) = \mathrm{Tr}(U\Lambda^nU^{-1}) = \mathrm{Tr}(\Lambda^n) = \sum_{i=1}^N \lambda_i^n. \quad (1.32)$$

Rozdělovací funkce tedy závisí pouze na stopách prvních N mocnin matice H

$$P(H) = P(\mathrm{Tr}(H), \dots, \mathrm{Tr}(H^N)), \quad (1.33)$$

k podobným závěrům bychom dospěli i u ostatních tříd.

Další vlastnost, kterou musí $P(H)$ mít, se týká nezávislosti N^2 proměnných hermitovské matice H . Aby proměnné x_{ii} , $x_{i<j}$ a $y_{i<j}$ byly statisticky nezávislé, musí existovat rozklad rozdělovací funkce na faktorizovaný tvar

$$P(H) = \prod_{i=1}^N f_i(x_{ii}) \prod_{i<j} f_{ij}^{(1)}(x_{ij}) f_{ij}^{(2)}(y_{ij}). \quad (1.34)$$

Podmínkám (1.33) a (1.34) vyhovuje pouze funkce

$$P(H) = C e^{-A\mathrm{Tr}(H^2) - B\mathrm{Tr}(H)}, \quad (1.35)$$

kde $A > 0$ a B můžeme bez újmy na obecnosti položit $B = 0$, protože je vždy možné posunout průměrnou energii $\frac{1}{N}\mathrm{Tr}(H)$ k nule. Konstanta C je určena normalizační podmínkou

$$\int P(x_{ii}, x_{i<j}, y_{i<j}) dx_{ii} dx_{i<j} dy_{i<j} = 1. \quad (1.36)$$

Množinu všech náhodných matic, jejichž maticové elementy popisuje rozdělovací funkce

$$P(H) = \left(\frac{A}{\pi}\right)^{\frac{N}{2}} \left(\frac{2A}{\pi}\right)^{N(N-1)} \exp\left[-A \sum_{i,j=1}^N |H_{ij}|^2\right], \quad (1.37)$$

nazýváme Gaussovský unitární soubor, rozdělovací funkce

$$P(H) = \left(\frac{A}{\pi}\right)^{\frac{N}{2}} \left(\frac{2A}{\pi}\right)^{\frac{N(N-1)}{2}} \exp\left[-A \sum_{i,j=1}^N (H_{ij})^2\right] \quad (1.38)$$

definuje Gaussovský ortogonální soubor a rozdělovací funkce

$$P(H) = \left(\frac{A}{\pi}\right)^{\frac{N}{2}} \left(\frac{2A}{\pi}\right)^{2N(N-1)} \exp\left[-A \sum_{i,j=1}^N (H_0)_{ij}^2 + (H_x)_{ij}^2 + (H_y)_{ij}^2 + (H_z)_{ij}^2\right] \quad (1.39)$$

definuje Gaussovský symplektický soubor.

1.5 Rozdělení vázaných vlastních hodnot energie

Rozdělovací funkce maticových elementů Gaussovských souborů neumožňuje přímé srovnání s experimentem. Obvykle je možné experimentálně určovat pouze vlastní hodnoty λ_i Hamiltonianu. Z hlediska praktického využití je proto důležité nalézt rozdělovací funkci pro λ_i . V předchozích odstavcích jsme dospěli k závěru, že jak integrační míra (1.29), tak i hustoty pravděpodobnosti (1.37 - 1.39) jsou invariantní při transformaci zachovávající třídu systému. Důsledkem je rozdělovací funkce λ_i ve tvaru

$$P(\lambda_1, \dots, \lambda_N) d\lambda_1 \dots d\lambda_N \sim \prod_{i < j} (\lambda_j - \lambda_i)^\nu \exp\left(-A \sum_{i=1}^N \lambda_i^2\right) d\lambda_1 \dots d\lambda_N, \quad (1.40)$$

která obsahuje všechny důležité informace o Gaussovských ortogonálních souborech ($\nu = 1$), Gaussovských unitárních souborech ($\nu = 2$) a Gaussovských symplektických souborech ($\nu = 4$).

Pro lepší pochopení souvislostí a významu jednotlivých členů (1.40) je vhodné diskutovat případ, kdy čísla λ_i nejsou navzájem propojena žádným vztahem (v předchozím se jednalo o vlastní čísla speciálních matic). Rozdělovací funkci je v tomto případě možné rozložit na součin nezávislých pravděpodobností

$$P(\lambda_1, \dots, \lambda_N) = p(\lambda_1) \dots p(\lambda_N), \quad (1.41)$$

kde $p(\lambda_i)$ nese význam pravděpodobnosti nalezení čísla λ_i v intervalu $d\lambda_i$ a splňuje normalizační podmínku $\int p(\lambda) d\lambda = 1$. Pro libovolnou náhodnou veličinu splňující výše uvedené charakteristiky se předpokládá Gaussovo rozdělení

$$p(\lambda) \sim e^{-A\lambda^2}. \quad (1.42)$$

Vidíme, že funkce (1.41) je vlastně speciálním případem (1.40) pro $\nu = 0$. Soubor náhodných matic, který je popsán touto rozdělovací funkcí nazýváme Poissonův. Dále je zřejmý význam prvního členu na pravé straně (1.40). Faktor

$$\prod_{i < j} (\lambda_j - \lambda_i)^\nu \quad (1.43)$$

je zodpovědný za netriviální vzájemnou provázanost čísel λ_i .

1.6 Charakteristiky spektrálních sekvencí

Nechť $-\infty < \lambda_1, \dots, \lambda_N < \infty$ jsou pozice N bodů na reálné přímce, charakterizované hustotou pravděpodobností (1.40). Mnohé statistické vlastnosti sekvence $\lambda_1, \dots, \lambda_N$ můžeme snadno vyjádřit pomocí n -bodových vazbových funkcí, definovaných integrálem

$$\mathcal{R}_n(\lambda_1, \dots, \lambda_n) = \frac{N!}{(N-n)!} \int P(\lambda_1, \dots, \lambda_N) d\lambda_{n+1} \dots d\lambda_N. \quad (1.44)$$

Snadno nalezneme rekurzivní vztah mezi nimi

$$\mathcal{R}_n(\lambda_1, \dots, \lambda_n) = \frac{1}{(N-n)} \int \mathcal{R}_{n+1}(\lambda_1, \dots, \lambda_{n+1}) d\lambda_{n+1}. \quad (1.45)$$

Pravý obsah těchto funkcí vyjde najevo, když se budeme zabývat statistickými vlastnostmi počtu bodu N_B z množiny $\{\lambda_i\}$, ležících ve zvoleném intervalu $B \subset \mathbb{R}$.

Nechť $\chi_B(x)$ je charakteristická funkce intervalu B . Zvolíme-li N reálných čísel λ_i , můžeme pravděpodobnost p_i nalezení λ_i v intervalu $d\lambda$ zapsat pomocí δ -funkce $p_i(\lambda) = \delta(\lambda - \lambda_i)$. Počet bodů v intervalu $d\lambda$ můžeme vyjádřit pravděpodobností

$$\varrho_N(\lambda) = \sum_{i=1}^N p_i(\lambda) = \sum_{i=1}^N \delta(\lambda - \lambda_i). \quad (1.46)$$

Při této volbě ϱ_N a p_i se vlastně nejedná o pravděpodobnosti, protože výraz

$$N_B = \int \chi_B(\lambda) \varrho_N(\lambda) d\lambda \quad (1.47)$$

udává přesný počet bodů v intervalu B , podobně jako integrál

$$\int \chi_B(\lambda) p_i(\lambda) d\lambda \quad (1.48)$$

informuje, zdali bod λ_i je, nebo není v intervalu B .

Na druhé straně, nahradíme-li funkci ϱ_N funkcí \mathcal{R}_1 a upravíme integrál v (1.47), dostáváme rovnost

$$\begin{aligned} \int_B \mathcal{R}_1(\lambda_1) d\lambda_1 &= N \int \chi_B(\lambda_1) P(\lambda_1, \dots, \lambda_N) d\lambda_1 \dots d\lambda_N = \\ &= \int \sum_{i=1}^N \chi_B(\lambda_i) P(\lambda_1, \dots, \lambda_N) d\lambda_1 \dots d\lambda_N = \overline{N_B}, \end{aligned} \quad (1.49)$$

kde $\overline{N_B}$ udává očekávaný počet bodů v intervalu B . Ze stejného výrazu také vidíme, že $\mathcal{R}_1(\lambda)$ je hustota pravděpodobnosti počtu bodů $\{\lambda_i\}$ v okolí λ . Podobně se spočtením integrálu

$$\begin{aligned} \int_{B \times B} \mathcal{R}_2(\lambda_1, \lambda_2) d\lambda_1 d\lambda_2 &= N(N-1) \int \chi_B(\lambda_i) \chi_B(\lambda_j) P(\lambda_1, \dots, \lambda_N) d\lambda_1 \dots d\lambda_N \\ &= \int \sum_{i \neq j} \chi_B(\lambda_i) \chi_B(\lambda_j) P(\lambda_1, \dots, \lambda_N) d\lambda_1 \dots d\lambda_N \end{aligned} \quad (1.50)$$

dovídané očekávaný počet dvojic bodů $\{\lambda_i, \lambda_j\}$ v intervalu B , do kterého jsou započteny obě permutace dvoubodové množiny, tedy $\{1,2\}$ i $\{2,1\}$ jsou započteny.

V aplikacích se nejvíce používá statistická funkce Σ_2 , k jejíž definici potřebuje vyšetřit veličinu $\overline{N_B^2}$. Kvadrát počtu bodů v intervalu B je podle (1.47) roven

$$N_B^2 = \int \chi_B(\lambda) \chi_B(\lambda') \varrho_N(\lambda) \varrho_N(\lambda') d\lambda d\lambda'. \quad (1.51)$$

Součin $\varrho_N(\lambda) \varrho_N(\lambda')$ můžeme dále upravit a určit jeho střední hodnotu při rozdělovací funkci (1.40)

$$\overline{\varrho_N(\lambda) \varrho_N(\lambda')} = \delta(\lambda - \lambda') \sum_i \overline{\delta(\lambda - \lambda_i)} + \sum_{i \neq j} \overline{\delta(\lambda - \lambda_i) \delta(\lambda - \lambda_j)}. \quad (1.52)$$

Z předchozích úvah víme, že

$$\mathcal{R}_1(\lambda) = \sum_i \overline{\delta(\lambda - \lambda_i)}, \quad \mathcal{R}_2(\lambda, \lambda') = \sum_{i \neq j} \overline{\delta(\lambda - \lambda_i) \delta(\lambda - \lambda_j)}. \quad (1.53)$$

A je zřejmé, že $\overline{N_B^2}$ lze vyjádřit

$$\overline{N_B^2} = \overline{N_B} + \int_{B \times B} \mathcal{R}_2(\lambda, \lambda') d\lambda d\lambda'. \quad (1.54)$$

Nyní můžeme definovat funkci Σ_2

$$\Sigma_2 = \overline{N_B^2} - (\overline{N_B})^2 = \overline{N_B} - \int_{B \times B} Y_2(\lambda, \lambda') d\lambda d\lambda', \quad (1.55)$$

popisující střední kvadratickou odchylku počtu bodů sekvence $\{\lambda_i\}$ uvnitř intervalu B . Integrand Y_2 je definován funkcemi \mathcal{R}_1 a \mathcal{R}_2

$$Y_2(\lambda, \lambda') = \mathcal{R}_1(\lambda)\mathcal{R}_1(\lambda') - \mathcal{R}_2(\lambda, \lambda') \quad (1.56)$$

a nazývá se "cluster funkce".

1.7 Metoda ortogonálních polynomů

Metodou ortogonálních polynomů můžeme jednoduchým a přehledným způsobem zapsat výsledky obsažené v předcházejících odstavcích. Nejdříve však vyslovíme a dokážeme lemma, na kterém stojí tato metoda.

1.7.1 Lemma. Bud' $J_n = J_n(x) = (J_{ij})_{1 \leq i, j \leq n}$ matice $n \times n$, jejíž maticové elementy závisí na reálném vektoru $\mathbf{x} = (x_1, \dots, x_n)$ a mají formu $J_{ij} = f(x_i, x_j)$, kde f je obecně komplexní funkce, splňující pro danou míru $d\mu$ podmínku "reprodukce jádra":

$$\int f(x, y)f(y, z)d\mu(y) = f(x, z). \quad (1.57)$$

Potom

$$\int \det J_n(x_1, \dots, x_n) d\mu(x_n) = [q - (n - 1)] \det J_{n-1}(x_1, \dots, x_{n-1}), \quad (1.58)$$

kde $q = \int f(x, x) d\mu(x)$ a matice $(J_{n-1})_{ij} = f(x_i, x_j)$ pro $i, j = 1, \dots, n - 1$.

Důkaz. Pro zvolené n rozložíme determinant na levé straně rovnosti (1.58) na sumu jednotlivých permutací z množiny všech permutací P_n indexů $1, \dots, n$

$$\int \det J(x_1, \dots, x_n) d\mu(x_n) = \sum_{\sigma \in P_n} (-1)^{\text{sgn}(\sigma)} \int f(x_1, x_{\sigma_1}) \dots f(x_n, x_{\sigma_n}) d\mu(x_n). \quad (1.59)$$

Nejprve se budeme zabývat permutacemi, které splňují $\sigma_n = n$. V tomto případě na integrační proměnné x_n závisí pouze poslední faktor $f(x_n, x_n)$. Tuto část sumy (1.59) proto můžeme zapsat jako

$$q \sum_{\sigma' \in P_{n-1}} (-1)^{\text{sgn}(\sigma')} f(x_1, x_{\sigma'_1}) \dots f(x_{n-1}, x_{\sigma'_{n-1}}) = q \det J_{n-1}, \quad (1.60)$$

kde permutace σ' vznikne z permutace σ uříznutím posledního členu σ_n , který je ale rovný n , takže znaménka permutací σ' a σ jsou stejná.

Předpokládejme, že $\sigma_n = k < n \wedge \sigma_j = n$ pro $j < n$. Využijeme-li vlastnosti (1.57), dostaneme po integraci

$$\begin{aligned} & \int f(x_1, x_{\sigma_1}) \dots f(x_j, x_n) \dots f(x_n, x_k) d\mu(x_n) = \\ & = f(x_1, x_{\sigma_1}) \dots f(x_j, x_k) \dots f(x_{n-1}, x_{\sigma_{n-1}}) = f(x_1, x_{\sigma'_1}) \dots f(x_{n-1}, x_{\sigma'_{n-1}}) \end{aligned} \quad (1.61)$$

kde permutace σ' vznikne z σ prohozením prvků σ_n a σ_j a uříznutím posledního členu, který je po prohození roven n . Permutace σ' má proto opačné znaménko než permutace σ . Zobrazení množiny $\{\sigma \in P_n | \sigma_n = k\}$ na množinu permutací P_{n-1}

definované předpisem (1.61) je vzájemně jednoznačné, součet členů sumy (1.59), které vyhovují podmínce $\sigma_n = k$, proto můžeme zapsat

$$\begin{aligned} & \sum_{\sigma \in P_n, \sigma_n = k} (-1)^{\text{sgn}(\sigma)} \int f(x_1, x_{\sigma_1}) \dots f(x_n, x_{\sigma_n}) d\mu(x_n) = \\ & = - \sum_{\sigma' \in P_{n-1}} (-1)^{\text{sgn}(\sigma')} f(x_1, x_{\sigma'_1}) \dots f(x_{n-1}, x_{\sigma'_{n-1}}) = - \det J_{n-1} \end{aligned} \quad (1.62)$$

Je zřejmé, že tyto součty nezávisí na k a je jich $n-1$. Tím je důkaz dokončen. \square

Abychom mohli lemma využít v dalším studiu náhodných matic, je nutné si všimnout, že faktor (1.43) má pro $\nu = 1$ stejnou hodnotu jako van der Mondeův determinant

$$\prod_{i < j} (\lambda_j - \lambda_i) = \det \begin{pmatrix} 1 & \dots & 1 \\ \lambda_1 & \dots & \lambda_N \\ \vdots & \vdots & \vdots \\ \lambda_1^{N-1} & \dots & \lambda_N^{N-1} \end{pmatrix}. \quad (1.63)$$

Hodnota determinantu se nezmění, přičteme-li k libovolnému řádku lineární kombinaci ostatních; vynásobíme-li řádek libovolným číslem, násobí se hodnota determinantu také tímto číslem. Těchto známých a jednoduchých pravidel o úpravě determinantu uijeme k získání vztahu

$$\prod_{i < j} (\lambda_j - \lambda_i) = \frac{1}{a_0 \dots a_{N-1}} \det \begin{pmatrix} \pi_0(\lambda_1) & \dots & \pi_0(\lambda_N) \\ \pi_1(\lambda_1) & \dots & \pi_1(\lambda_N) \\ \vdots & \vdots & \vdots \\ \pi_{N-1}(\lambda_1) & \dots & \pi_{N-1}(\lambda_N) \end{pmatrix} \quad (1.64)$$

kde π_i jsou libovolné polynomy stupně i , konstanty a_i jsou koeficienty π_i u nejvyšší mocniny. Vynásobíme ještě sloupce faktory $e^{-\frac{1}{2}A\lambda_j^2}$ a dostáváme nový zápis funkce (1.40) v případě Gaussova unitárního souboru

$$P(\lambda_1, \dots, \lambda_N) \sim \left[\det \left(e^{-\frac{1}{2}A\lambda_j^2} \pi_{i-1}(\lambda_j) \right)_{1 \leq i, j \leq N} \right]^2 = [\det(\phi_{i-1}(\lambda_j))]^2. \quad (1.65)$$

Nechť A je matice, jejíž elementy jsou rovny $A_{ij} = \phi_{i-1}(\lambda_j)$, potom platí

$$(\det A)^2 = \det(A^T A) = \det \left(\sum_{j=1}^N A_{ji} A_{jk} \right). \quad (1.66)$$

Poslední rovnost nám pomůže zjednodušit vyraz (1.65)

$$P(\lambda_1, \dots, \lambda_N) \sim \det \left(\sum_{j=1}^N \phi_{j-1}(\lambda_i) \phi_{j-1}(\lambda_k) \right) = \det(K_N(\lambda_i, \lambda_k))_{1 \leq i, k \leq N}, \quad (1.67)$$

kde funkce K_N se obvykle nazývá jádro, v našem případě má tvar

$$K_N(\lambda, \lambda') = e^{-\frac{1}{2}A(\lambda^2 + \lambda'^2)} \sum_{j=0}^{N-1} \pi_j(\lambda) \pi_j(\lambda'). \quad (1.68)$$

Je zřejmé, že když zvolíme polynomy π_i , tak aby funkce ϕ_i tvořily ortonormální systém ve smyslu

$$\int e^{-Ax^2} \pi_i(x) \pi_j(x) dx = \delta_{ij}, \quad (1.69)$$

bude se jádro K_N reprodukovat při zvolené míře $d\mu(x) = dx$, tak jak to požadují předpoklady lemmatu (1.7.1), protože

$$\begin{aligned} \int K_N(x, y)K_N(y, z)dy &= \sum_{j,k=0}^{N-1} e^{-\frac{1}{2}A(x^2+z^2)} \pi_j(x)\pi_k(z) \int \pi_j(y)\pi_k(y)e^{-Ay^2} dy = \\ &= \sum_{j=0}^{N-1} e^{-\frac{1}{2}A(x^2+z^2)} \pi_j(x)\pi_j(z) = K_N(x, z) \end{aligned} \quad (1.70)$$

Parametr q_N (pro přehlednost jsme přidali dolní index, určující rozměr matice) je roven

$$q_N = \int K_N(x, x)dx = \sum_{j=0}^{N-1} \int e^{-Ax^2} \pi_j(x)\pi_j(x)dx = N. \quad (1.71)$$

Všechny požadavky jsou splněny, můžeme tedy použít lemmatu (1.7.1) na jádro K_N a dostáváme ze vztahu (1.58) rovnost

$$\int \det(K_N(x_i, x_j))_{1 \leq i, j \leq N} dx_N = [N - (N - 1)] \det(K_N(x_i, x_j))_{1 \leq i, j \leq N-1}, \quad (1.72)$$

navíc, použijeme-li na výsledný determinant rekurzivně toto pravidlo, dostáváme

$$\int \dots \int \det(K_N(x_i, x_j))_{1 \leq i, j \leq N} dx_{k+1} \dots dx_N = (N - k)! \det(K_N(x_i, x_j))_{1 \leq i, j \leq k}. \quad (1.73)$$

Připomeneme-li si definiční vztah n -bodových vazbových funkcí \mathcal{R}_n (1.44) a spojíme-li ho s rovnicí (1.67), najdeme nový zápis statistických funkcí \mathcal{R}_n

$$\mathcal{R}_n(\lambda_1, \dots, \lambda_n) = \det(K_N(\lambda_i, \lambda_j))_{1 \leq i, j \leq n}, \quad (1.74)$$

speciálně

$$\begin{aligned} \mathcal{R}_1(\lambda) &= K_N(\lambda, \lambda), \\ Y_2(\lambda_1, \lambda_2) &= [K_N(\lambda_1, \lambda_2)]^2 \end{aligned} \quad (1.75)$$

Kapitola 2

Předpovědi teorie náhodných matic

V předcházející kapitole jsme odvodili několik statistických vlastností Gaussovských souborů náhodných matic. Funkce, které jsme obdrželi, nicméně nemají zatím tvar vhodný pro srovnání s experimentem. Abychom mohli konfrontovat data získaná měřením chaotických systémů s předpovědmi, musíme nejprve nalézt limity jednotlivých hustot pravděpodobnosti pro velké N , nebo zvolit vhodnou aproximaci, případně se omezit na vlastnosti matic malých rozměrů. Uvidíme, že takto získané vztahy budou přehledné a snadno fyzikálně interpretovatelné.

2.1 Střední hustota stavů

Mezi základní vlastnosti kvantově mechanického systému patří hustota stavů

$$\varrho(\lambda) = \sum_{i=1}^N \delta(\lambda - \lambda_i). \quad (2.1)$$

V teorii náhodných matic není důležitá hustota stavů jedné náhodné matice, ale její průměr přes celý soubor, který budeme značit $\varrho(\lambda)$, případně $\langle \varrho(\lambda) \rangle$. V minulé kapitole jsme pro střední hodnotu (2.1) používali také označení \mathcal{R}_1 a dostali jsme konečný výsledek (1.75). Nyní se pokusíme nalézt limitu $\langle \varrho(\lambda) \rangle$ pro $N \rightarrow \infty$. Začneme zápisem δ -funkce jako limity na prostoru zobecněných funkcí

$$\delta(\lambda) = \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \frac{\varepsilon}{\pi} \frac{1}{\lambda^2 + \varepsilon^2}, \quad (2.2)$$

podobně zapíšeme a upravíme také hustotu stavů

$$\varrho(\lambda) = \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \frac{\varepsilon}{\pi} \sum_{n=1}^N \frac{1}{(\lambda - \lambda_n)^2 + \varepsilon^2} = - \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \frac{1}{\pi} \operatorname{Im} \left(\sum_{n=1}^N \frac{1}{\lambda - \lambda_n + i\varepsilon} \right). \quad (2.3)$$

Nadále již nebudeme zapisovat limitní přechod, namísto toho budeme λ považovat za komplexní proměnnou, jejíž imaginární část je rovna $i\varepsilon$, a až ve výsledku provedeme limitu. Abychom se zbavili explicitní závislosti hustoty stavů na vlastních hodnotách λ_i matice H , přepíšeme ji na tvar

$$\varrho(\lambda) = -\frac{1}{\pi} \operatorname{Im} \left(\operatorname{Tr} \left(\frac{1}{\lambda - H} \right) \right), \quad (2.4)$$

který je možný díky relaci

$$\sum_{i=1}^N \frac{1}{\lambda - \lambda_i} = \text{Tr} \left(\frac{1}{\lambda - H} \right). \quad (2.5)$$

Operátor $(\lambda - H)^{-1}$ rozložíme do řady

$$\frac{1}{\lambda - H} = \frac{1}{\lambda} \frac{1}{1 - \frac{H}{\lambda}} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{\lambda^{n+1}} H^n, \quad (2.6)$$

která konverguje pouze v případě, že $|\lambda|$ je větší než velikost všech vlastních hodnot operátoru H .

Pro určení střední hodnoty $\langle \varrho(\lambda) \rangle$ potřebujeme znát střední hodnotu

$$\left\langle \text{Tr} (\lambda - H)^{-1} \right\rangle. \quad (2.7)$$

V dalším kroku proto budeme vyšetřovat funkci

$$S(\lambda) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{\lambda^{n+1}} \langle \text{Tr} H^n \rangle, \quad (2.8)$$

o které víme, že v oblasti konvergence (2.6) je rovna průměru (2.7). Nás však zajímá hodnota průměru (2.7) ve všech oblastech, v tomto případě je vhodné ignorovat fakt, že rozvoj (2.6) nekonverguje a pokusit se nalézt tvar funkce $S(\lambda)$. Ukáže-li se potom, že funkce $S(\lambda)$ je analytická, je výraz (2.8) správný všude díky principu analytické spojitosti.

S tímto záměrem se pokusíme spočítat střední hodnoty stop mocnin matice H pro Gaussův unitární soubor, k tomu budeme potřebovat znát střední hodnoty součinnů

$$\langle H_{\alpha\beta} H_{\beta\alpha} \rangle = \int H_{\alpha\beta} H_{\beta\alpha} P(H) dH = \frac{1}{2A} \quad (2.9)$$

$$\langle H_{\alpha\beta} H_{\gamma\delta} \rangle = 0, \quad (\alpha, \beta) \neq (\delta, \gamma). \quad (2.10)$$

Odtud je zřejmé, že $\langle \text{Tr} H^2 \rangle = N^2/(2A)$ a všechny střední hodnoty stop lichých mocnin H jsou nulové (obsahují totiž integrály z lichých funkcí). V souborovém průměru se navíc uplatní jen ty členy, ve kterých jednotlivé maticové elementy $H_{\alpha\beta}$ vystupují v sudých mocninách, přesněji $|H_{\alpha\beta}|^{2n}$. První netriviální dosud nevyřešený průměr je pro $n = 4$

$$\langle \text{Tr} H^4 \rangle = \left\langle \sum_{\alpha\beta\gamma\delta} H_{\alpha\beta} H_{\beta\gamma} H_{\gamma\delta} H_{\delta\alpha} \right\rangle, \quad (2.11)$$

u kterého můžeme jednotlivé nenulové sčítance rozložit na čtyři části. Do první zahrneme členy, pro které $\alpha = \gamma$

$$\left\langle \sum_{\alpha,\beta,\delta=1}^N H_{\alpha\beta} H_{\beta\alpha} H_{\alpha\delta} H_{\delta\alpha} \right\rangle \approx O(N^3), \quad (2.12)$$

kde zápis $\approx O(N^3)$ značí počet výrazů, přes který se průměruje, do druhé části zahrneme členy splňující $\beta = \delta$

$$\left\langle \sum_{\alpha,\beta,\gamma=1}^N H_{\alpha\beta} H_{\beta\gamma} H_{\gamma\beta} H_{\beta\alpha} \right\rangle \approx O(N^3), \quad (2.13)$$

třetí a čtvrtou část vytvoříme z členů, pro které platí $\alpha = \gamma$, $\beta = \delta$ respektive $\alpha = \delta$, $\beta = \gamma \Rightarrow \alpha = \beta$

$$\left\langle \sum_{\alpha, \beta=1}^N H_{\alpha\beta} H_{\beta\alpha} H_{\alpha\beta} H_{\beta\alpha} \right\rangle = \left\langle \sum_{\alpha, \beta=1}^N |H_{\alpha\beta}^4| \right\rangle \approx O(N^2), \quad (2.14)$$

respektive

$$\left\langle \sum_{\alpha, \beta=1}^N H_{\alpha\beta} H_{\beta\beta} H_{\beta\alpha} H_{\alpha\alpha} \right\rangle = \left\langle \sum_{\alpha=1}^N H_{\alpha\alpha}^4 \right\rangle \approx O(N). \quad (2.15)$$

V limitě $N \rightarrow \infty$ jsou významné pouze první dvě části, zbylé dvě zanedbáme. Zavedeme-li zkrácené označení

$$M_n = \langle \text{Tr} H^{2n} \rangle, \quad (2.16)$$

můžeme funkci (2.8) zapsat ve tvaru

$$S(\lambda) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{\lambda^{2n+1}} M_n. \quad (2.17)$$

Pokusme se nalézt rekurzivní vztah mezi prvky posloupnosti $\{M_n\}_{n=0}^{\infty}$, nejprve uvažujme rozpis

$$M_n = \left\langle \sum_{\alpha=1}^N (H^{2n})_{\alpha\alpha} \right\rangle = \left\langle \sum_{\alpha=1}^N H_{\alpha\beta} (H^{2n-1})_{\beta\alpha} \right\rangle. \quad (2.18)$$

Aby průměr jednotlivých sčítanců na pravé straně poslední rovnosti nebyl nulový, musí být jeden z činitelů v rozkladu $(H^{2n-1})_{\beta\alpha} = \sum H_{\beta\gamma} \dots H_{\omega\alpha}$ rovný $H_{\beta\alpha}$. Takových možností je celkem $2n-1$, proto

$$M_n = \sum_{k=0}^{2n-2} \sum_{\alpha, \beta=1}^N \left\langle H_{\alpha\beta} (H^k)_{\beta\beta} H_{\beta\alpha} (H^{2n-k-2})_{\alpha\alpha} \right\rangle. \quad (2.19)$$

Při převedení posledního výrazu na tvar

$$M_n = \sum_{k=0}^{n-1} \sum_{\alpha, \beta=1}^N \left\langle |H_{\alpha\beta}|^2 \right\rangle \left\langle (H^{2k})_{\beta\beta} \right\rangle \left\langle (H^{2n-2k-2})_{\alpha\alpha} \right\rangle, \quad (2.20)$$

jsme vypustily podobně jako v případě průměru $\langle \text{Tr} H^4 \rangle$ členy, jejichž počet je menšího řádu než těch, které jsme ponechali, a dále jsme odstranili členy, které obsahovali průměr stopy z liché mocniny H . Užijeme-li rovnice (2.9), obdržíme hledaný rekurzivní vztah

$$M_n = \frac{1}{2A} \sum_{k=0}^{n-1} \langle \text{Tr} H^{2k} \rangle \langle \text{Tr} H^{2n-2k-2} \rangle = \frac{1}{2A} \sum_{k=0}^{n-1} M_k M_{n-k-1}. \quad (2.21)$$

První člen posloupnosti $\{M_n\}_{n=0}^{\infty}$ vychází rovný

$$M_0 = \text{Tr}(I) = N. \quad (2.22)$$

Dosadíme-li rekurzivní vztah (2.21) do (2.17), získáme rovnici

$$S(\lambda) = \frac{1}{\lambda} \left(N + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{\lambda^{2n}} \frac{1}{2A} \sum_{k=0}^{n-1} M_k M_{n-k-1} \right), \quad (2.23)$$

ze které záměnou pořadí sumace a malými úpravami

$$\begin{aligned}
S(\lambda) &= \frac{1}{\lambda} \left(N + \frac{1}{2A} \sum_{k=0}^{\infty} \sum_{n=k+1}^{\infty} \frac{1}{\lambda^{2n}} M_k M_{n-k-1} \right) \\
&= \frac{1}{\lambda} \left(N + \frac{1}{2A} \sum_{k=0}^{\infty} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{\lambda^{2(n+k+1)}} M_k M_n \right) \\
&= \frac{1}{\lambda} \left(N + \frac{1}{2A} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{\lambda^{2k+1}} M_k \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{\lambda^{2n+1}} M_n \right) \\
&= \frac{1}{\lambda} \left(N + \frac{1}{2A} S(\lambda)^2 \right)
\end{aligned} \tag{2.24}$$

dostaneme kvadratickou rovnici pro neznámou funkci $S(\lambda)$

$$S(\lambda)^2 - 2\lambda A S(\lambda) + 2AN = 0, \tag{2.25}$$

kterou snadno vyřešíme

$$S(\lambda)_{1,2} = \lambda A \left(1 \pm \sqrt{1 - \frac{2N}{A\lambda^2}} \right). \tag{2.26}$$

Znaménko před odmocninou zvolíme tak, aby platilo $S(\lambda) \rightarrow 0$ pro $\lambda \rightarrow \infty$, což plyne z rovnice (2.17). Sjednocení vztahů (2.4) (2.8) a (2.26) dává konečný výraz pro střední hustotu stavů

$$\langle \varrho(\lambda) \rangle = \begin{cases} \frac{A}{\pi} \sqrt{\frac{2N}{A} - \lambda^2} & |\lambda| < \frac{\sqrt{2N}}{A} \\ 0 & |\lambda| > \frac{\sqrt{2N}}{A} \end{cases}. \tag{2.27}$$

Obvykle se tato funkce ještě normalizuje k jedničce, odkud dostáváme podmínku pro konstantu $A = \frac{\pi^2}{2N}$. Výsledný tvar

$$\langle \varrho(\lambda) \rangle = \begin{cases} \sqrt{1 - \left(\frac{\pi\lambda}{2N} \right)^2} & |\lambda| < \frac{2N}{\pi} \\ 0 & |\lambda| > \frac{2N}{\pi} \end{cases}. \tag{2.28}$$

se nazývá Wiegnerův půlkruhový zákon, který obdobně platí i pro ostatní Gaussovské soubory.

2.2 Průměrná vzdálenost mezi nejbližšími sousedy

Asi nejintenzivněji studovaná spektrální vlastnost je právě rozdělovací funkce vzdálenosti mezi nejbližšími sousedy $p(s)$ (anglicky nazývaná "nearest neighbour distance distribution"). Vyjadřuje, jak již název napovídá, jaká je nejpravděpodobnější vzdálenost mezi vlastními čísly λ_i matice H na reálné ose. Je možné ji vypočítat přímo z (1.40), ale v obecném případě je výpočet velmi obtížný. Speciální případ matic 2×2 však snadno spočteme a dává již velmi dobrou představu o chování

zmiňované statistické funkce. Definici $p(s)$ pro matice 2×2 můžeme zapsat pomocí integrálu

$$p(s) = \int_{\lambda_2 - \lambda_1 = s} P(\lambda_1, \lambda_2) d\lambda_1 d\lambda_2 \quad (2.29)$$

a dvou normalizačních podmínek

$$\int_0^\infty p(s) ds = 1 \quad (2.30)$$

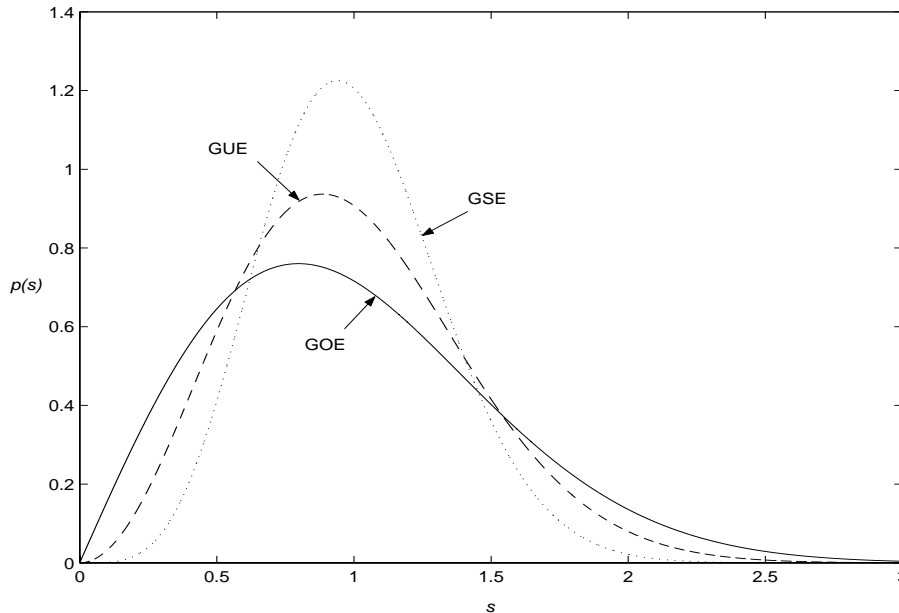
$$\int_0^\infty sp(s) ds = 1, \quad (2.31)$$

kteří fixují celkovou pravděpodobnost a střední hodnotu vzdálenosti mezi jednotlivými λ_i . V případě souborů odvozených v první kapitole můžeme za P dosadit jedinou funkci (1.40), závislou na parametru ν . Elementární integrací pak dostáváme

$$p(s) = C s^\nu \int_{-\infty}^\infty e^{-A[\lambda_1^2 + (\lambda_1 + s)^2]} d\lambda_1 = C \sqrt{\frac{\pi}{2A}} s^\nu e^{-\frac{1}{2}As^2}. \quad (2.32)$$

Z normalizační podmínky určíme konstanty A a C . Výsledky pro všechny soubory pak můžeme prezentovat v závislosti na parametru ν

$$p(s) = \begin{cases} \frac{\pi}{2} s \exp\left(-\frac{\pi}{4}s^2\right) & \nu = 1 \text{ (GOE)} \\ \frac{32}{\pi^2} s^2 \exp\left(-\frac{4}{\pi}s^2\right) & \nu = 2 \text{ (GUE)} \\ \frac{2^{18}}{3^6 \pi^3} s^4 \exp\left(-\frac{64}{9\pi}s^2\right) & \nu = 4 \text{ (GSE)} \end{cases} \quad (2.33)$$



Obrázek 2.1: Rozdělovací funkce $p(s)$

2.3 Vlastnosti Hermitových polynomů

Jeden z nejčastěji zmiňovaných a ze všech možných úhlů pohledu prozkoumaný systém je harmonický oscilátor. Při jeho řešení, jako kvantově mechanického systému, obdržíme vlnové funkce, které jsou vytvořeny právě pomocí Hermitových polynomů. V teorii náhodných matic se používají pro své ortogonální vlastnosti jako vhodní kandidáti na polynomy π_i z odstavce (1.7). Oproti standardní definici (pro harmonický oscilátor) je budeme generovat formulí

$$h_k(x) = (-1)^k e^{N\frac{x^2}{2}} \frac{d^k}{dx^k} \left(e^{-N\frac{x^2}{2}} \right), \quad (2.34)$$

která se od standardní liší volbou $h_k(x) = H_k \left(\sqrt{\frac{N}{2}}x \right)$, kde faktor $\sqrt{\frac{N}{2}}$ je motivován rozměrem náhodné matice. Z nejdůležitějších vlastností těchto polynomů uveďme Christoffel-Darbouxovu formulí

$$\sum_{k=0}^{n-1} \frac{1}{k!N^k} h_k(x)h_k(y) = \frac{1}{(n-1)!N^n} \frac{h_{n-1}(y)h_n(x) - h_{n-1}(x)h_n(y)}{x-y} \quad (2.35)$$

a její speciální případ

$$\sum_{k=0}^{n-1} \frac{1}{k!N^k} h_k^2(x) = \frac{1}{(n-2)!N^{n-1}} [h_n^2(x) - h_{n-1}(x)h_{n+1}(x)]. \quad (2.36)$$

Hermitovy polynomy závisejí na dvou parametrech, explicitně na indexu $k = 0, 1, \dots$ a implicitně na N , který odpovídá rozměru matice a určuje koeficient $A = \frac{N}{2}$ ve funkci (1.40). Vyjádříme-li střední hustotu \mathcal{R}_1 ze vztahu (1.75) a upravíme-li ji pomocí formule (2.36), dostáváme

$$\mathcal{R}_1(\lambda) = K_N(\lambda, \lambda) = e^{-\frac{N}{2}\lambda^2} \frac{1}{(N-2)!N^{N-1}} [h_N^2(\lambda) - h_{N-1}(\lambda)h_{N+1}(\lambda)]. \quad (2.37)$$

Je zřejmé, že limitní tvar funkce \mathcal{R}_1 pro náhodné matice vybrané z Gaussova unitárního souboru, je řízen Hermitovými polynomy h_{N+n} , kde N je veliké a n má rozměr jednotky. Toto chování se nazývá Plancherel-Darbouxova asymptotika. Také jádro (1.68) je řízeno touto asymptotikou, neboť použijeme-li znovu Christoffel-Darbouxovu formulí tentokrát ve tvaru (2.35), dostaneme

$$K_N(\lambda, \lambda') = e^{-\frac{N}{4}(\lambda^2 + \lambda'^2)} \frac{1}{(N-2)!N^{N-1}} \frac{h_{N-1}(\lambda')h_N(\lambda) - h_{N-1}(\lambda)h_N(\lambda')}{\lambda - \lambda'}. \quad (2.38)$$

K vyšetření Plancherel-Darbouxovy asymptotiky se používá integrální reprezentace Hermitových polynomů

$$h_{N+n}(x) = (-iN)^{N+n} \sqrt{\frac{N}{2\pi}} [I_{N+n}(x) + (-1)^{N+n} I_{N+n}(-x)], \quad (2.39)$$

kde

$$I_{N+n} = \int_0^\infty q^n e^{Nf(q)} dq, \quad f(q) = \ln q - \frac{1}{2}(q - ix)^2. \quad (2.40)$$

V dalším kroku se použije tzv. metoda "sedlového bodu" (jinak "stacionární fáze"), určující asymptotické chování integrálu

$$\int_\Gamma \phi(z) e^{NF(z)} dz, \quad (2.41)$$

kde Γ je křivka v komplexní rovině, $F(z)$ je analytická funkce s definičním oborem obsahujícím Γ a $N \rightarrow \infty$. Hlavní myšlenka metody je následující.

Nechť:

- funkce $\operatorname{Re}F$ má maximum v bodě $z_0 \in \Gamma$ a rychle ubývá podél křivky Γ
- funkce $\operatorname{Im}F$ zůstává konstantní podél křivky Γ

potom hlavní příspěvek do integrálu (2.41) je z okolí bodu z_0 . Detailně se touto metodou zabývat nebudeme, uvedeme pouze její výsledky. Pro střední hustotu stavů \mathcal{R}_1 dostaneme

$$\lim_{N \rightarrow \infty} \left(\frac{1}{N} \mathcal{R}_1(\lambda) \right) = \frac{1}{2\pi} \sqrt{4 - \lambda^2}, \quad |\lambda| < 2, \quad (2.42)$$

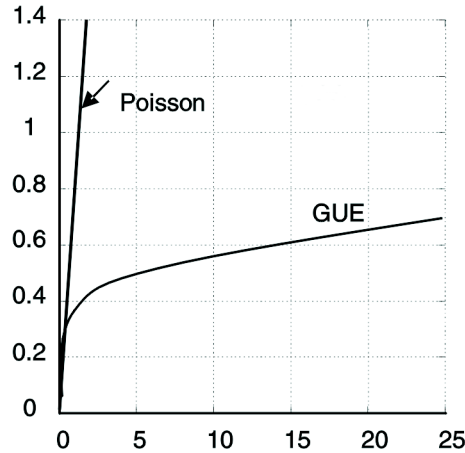
odkud je vidět shodnost s výrazem (2.27) při konstantě $A = \frac{N}{2}$, který jsme obdrželi principiálně odlišnou metodou. Jádro K_N , označené v limitním případě K_∞ , je dáno funkcí

$$K_\infty(x, y) = \frac{1}{\pi} \frac{\sin \sqrt{2N}(x - y)}{x - y}. \quad (2.43)$$

Nakonec uvedeme ještě přibližnou hodnotu statistické funkce

$$\Sigma_2(s) \doteq \frac{1}{\pi^2} [\ln 2\pi s + \gamma + 1], \quad (2.44)$$

s je definováno podílem $s = \frac{L}{\Delta}$, kde L určuje interval $B = \left[-\frac{L}{2}, \frac{L}{2}\right]$ viz odstavec (1.7) a Δ je vzdálenost mezi nejbližšími vlastními čísly λ_i v intervalu B , dále $\gamma = 0,5772\dots$ je Eulerova konstanta.



Obrázek 2.2: Statistická funkce "number variance"

Pro srovnání viz obrázek (2.2) uděláme odbočku a určíme Σ_2 pro Poissonův soubor. Uvažujme vzdálenost L srovnatelnou se vzdáleností nejbližších sousedů Δ , na této vzdálenosti zůstává $p(\lambda)$ přibližně konstantní a rovna $p(0)$. Z definice funkcí \mathcal{R}_n a použití rozdělovací funkce ve tvaru (1.41) odvodíme charakteristiky

$$\mathcal{R}_1(\lambda) = Np(\lambda) \quad (2.45)$$

$$\mathcal{R}_2(\lambda_1, \lambda_2) = N(N-1)p(\lambda_1)p(\lambda_2), \quad (2.46)$$

s jejichž pomocí snadno získáme Σ_2 v oblasti $B = \left[-\frac{L}{2}, \frac{L}{2}\right]$

$$\begin{aligned} \Sigma_2 &= \overline{N_B^2} - (\overline{N_B})^2 = \int \mathcal{R}_1(\lambda)d\lambda + \int_{B \times B} (\mathcal{R}_2(\lambda, \lambda') - \mathcal{R}_1(\lambda)\mathcal{R}_1(\lambda'))d\lambda d\lambda' \\ &= N \int_{-\frac{L}{2}}^{\frac{L}{2}} p(\lambda)d\lambda + \int_{-\frac{L}{2}}^{\frac{L}{2}} \int_{-\frac{L}{2}}^{\frac{L}{2}} [N(N-1) - N^2]p(\lambda_1)p(\lambda_2)d\lambda_1 d\lambda_2 \\ &= NLp(0) - NL^2p(0)^2 \approx NLp(0) = s. \end{aligned} \quad (2.47)$$

Kapitola 3

Příklady chaotických systémů

Teorie náhodných matic se ukazuje být univerzálním nástrojem při popisu většiny chaotických systémů. Rozdělovací funkce, odvozené v předcházejících kapitolách, popisují velmi přesně rozdělení získané měřeními systémů, které spolu kromě třídy nemají téměř nic společného. Demonstrací tohoto faktu jsou mnohá dřívější měření rozdělovací funkce nejbližších sousedů $p(s)$ pro energie stavů atomových jader, rezonanční frekvence kovových bloků atd. viz [1].

Statistické vlastnosti náhodných matic, vyjádřené charakteristickým průběhem rozdělovacích funkcí, jsou v přírodě jakýmsi vzorem, podle kterého se neuspořádané systémy chovají. Analogií je Gaussova rozdělovací funkce, která popisuje náhodnou veličinu omezenou pouze podmínkou kladenou na střední hodnotu. Také ji nacházíme u systémů, které spolu, ve své podstatě, nemusejí souviset např. rozdělení rychlostí částic v ideálním plynu nebo tvar vlnové funkce pro částici s nejmenší neurčitostí v poloze a hybnosti (minimální vlnové balíky), ale i rozdělení výšky člověka. Stejně např. Wignerova rozdělovací funkce nejbližších sousedů pro GUE popisuje statistické rozdělení délky volného prostoru mezi parkujícími auty v hustém provozu nebo vzdálenosti prvočísel na reálné ose. Důvody objasňující preferování Gaussova rozdělení jsou známy, což se nedá říci v případě předpovědi teorie náhodných matic.

Teorie chaosu tvrdí, že když úroveň složitosti systému překročí určitou mez, začne být systém, jako celek, řízen poněkud odlišnými zákony než těmi, které udávají interakci na nejnižší úrovni. To je důvod, proč v teorii náhodných matic nehraje roli znalost interakce jednotlivých částic, pouze symetrie a podobně. Jako příklad této myšlenkové abstrakce je možné uvést burzu, která představuje systém, jehož úroveň složitosti je vysoká. Ceny akcií je možné, za normálního stavu (každý obchoduje s každým), popsat Wignerovou rozdělovací funkcí $p(s)$. V okamžiku, kdy dochází k masivní výměně akcií mezi dvěma objekty (objeví se jistá vnitřní vazba) mění se Wignerovo rozdělení v Poissonovo. Jen z tvaru této rozdělovací funkce poznáme, že se se systémem něco stalo, aniž bychom věděli, kdo komu prodává, kdo od koho kupuje a podobně.

3.1 Mikrovlné experimenty

Mikrovlný biliár, tak se říká experimentu s dutinami rozličných tvarů, jenž jsou vyplněny tekutinou nebo vakuové, a do kterých se různými způsoby přivádějí vlny. Chování vln uvnitř dutin můžeme popsat Maxwellovými polními rovnicemi bez

zdrojů

$$\nabla \times \vec{E} = -\frac{\partial \vec{B}}{\partial t} \quad (3.1)$$

$$\nabla \times \vec{H} = \frac{\partial \vec{D}}{\partial t} \quad (3.2)$$

$$\nabla \vec{D} = 0 \quad (3.3)$$

$$\nabla \vec{B} = 0 \quad (3.4)$$

Ve vakuu nahradíme dvojici (\vec{D}, \vec{H}) dvojicí (\vec{E}, \vec{B}) a přidáme konstanty ε_0 resp. μ_0 nazývané dielektrická konstanta resp. permeabilita vakua, neboť v tomto případě platí

$$\vec{D} = \varepsilon_0 \vec{E}, \quad \vec{B} = \mu_0 \vec{H}. \quad (3.5)$$

Předpokládáme-li periodickou časovou závislost elektromagnetického pole, získáme pomocí standardních procedur, které zde nebudeme uvádět, Helmholtzovy rovnice pro \vec{E} a \vec{B}

$$(\Delta + k^2)\vec{E} = 0, \quad (3.6)$$

$$(\Delta + k^2)\vec{B} = 0, \quad (3.7)$$

kde $k = \frac{\omega}{c}$ je vlnové číslo a ω je úhlová frekvence. K vyřešení rovnic (3.6) a (3.7) je potřeba dodat ještě dvě hraniční podmínky

$$\vec{n} \times \vec{E} = 0, \quad \vec{n} \vec{B} = 0, \quad (3.8)$$

kde \vec{n} je jednotkový vektor, normálový k povrchu. Většina dutin (rezonátorů) má cylindrickou geometrii s různými průřezy ve směru kolmém na osu z . U těchto rezonátorů mají hraniční podmínky (3.8) tvar

$$E_z|_S = 0, \quad \nabla_{\perp} B_z|_S = 0, \quad (3.9)$$

kde ∇_{\perp} znamená derivaci ve směru normály k povrchu. První podmínka plyne přímo z rovnice (3.8), podmínka pro B_z je důsledkem druhé Maxwellovy rovnice (3.2) a vztahu (3.8). Existují dvě možnosti, jak splnit hraniční podmínky (3.9) a zároveň vyřešit rovnice (3.6) a (3.7).

Řešení zapsané ve tvaru

$$E_z(x, y, z) = E(x, y) \cos\left(\frac{n\pi z}{d}\right), \quad n = 0, 1, \dots, \quad (3.10)$$

$$B_z(x, y, z) = 0$$

kde $E(x, y)$ vyhovuje dvourozměrné Helmholtzově rovnici

$$\left[\Delta + k^2 - \left(\frac{n\pi}{d}\right)^2\right] E = 0 \quad (3.11)$$

s Dirichletovou hraniční podmínkou

$$E(x, y)|_S = 0 \quad (3.12)$$

nazýváme příčné magnetické módy (TM), zbylé složky \vec{E} a \vec{B} bychom snadno vypočetli pomocí $E(x, y)$, ale nejsou nyní důležité. Řešení nazývané příčné elektrické módy (TE) vypadá analogicky

$$E_z(x, y, z) = 0$$

$$B_z(x, y, z) = B(x, y) \sin\left(\frac{n\pi z}{d}\right), \quad n = 1, 2, \dots, \quad (3.13)$$

kde $B(x, y)$ vyhovuje dvourozměrné Helmholtzově rovnici

$$\left[\Delta + k^2 - \left(\frac{n\pi}{d} \right)^2 \right] B = 0 \quad (3.14)$$

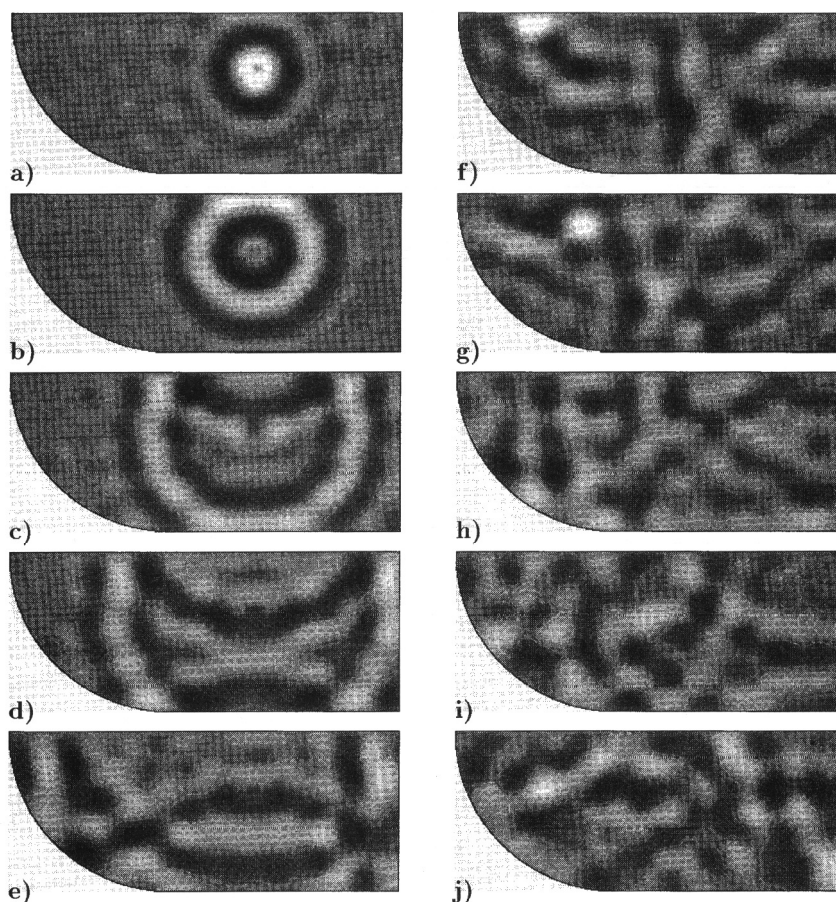
s Neumannovou hraniční podmínkou

$$\nabla_{\perp} B(x, y)|_S = 0. \quad (3.15)$$

Při frekvenci $\nu < \frac{c}{2d}$ odpovídající vlnovému číslu $k < \frac{\pi}{d}$ jsou možné pouze (TM) módy pro $n = 0$. Rovnice (3.11) se redukuje na

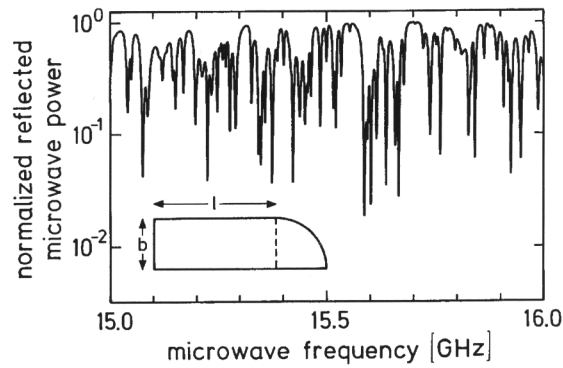
$$(\Delta + k^2)E(x, y) = 0. \quad (3.16)$$

Biliáry tohoto typu se nazývají kvazi-dvourozměrné, jejich příklad je na obrázku (3.1).



Obrázek 3.1: Časový vývoj mikrovlnného pulsu v dutině tvaru "čtvrt stadionu"

Rovnice (3.16) je ekvivalentní Schrödingerově rovnici pro dvourozměrnou částici v krabici se stěnami nekonečné výšky a hraniční podmínkou (3.12). V této analogii k^2 odpovídá vlastnímu číslu Hamiltonianu. Mikrovlny se uvnitř rezonátoru obvykle vytvářejí pomocí antény, kterou je drátek o poloměru několik desetin milimetru. Anténa se přivádí do dutiny malým otvorem.



Obrázek 3.2: Část spektra biliaru ve tvaru "čtvrt stadionu"

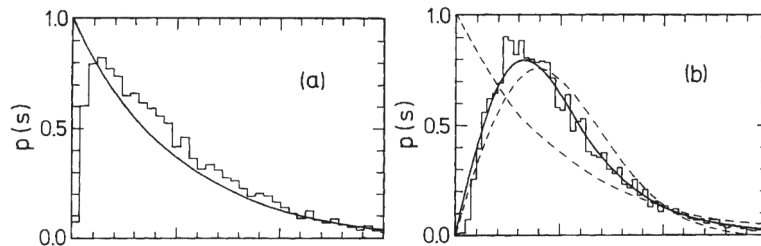
První mikrovlnný experiment, kterým se měli řešit otázky kvantového chaosu, byl proveden v roce 1990. Autoři studovali vlny uvnitř rezonátoru tvaru "čtvrtiny stadionu". Měřili, jakou silou působila odražená vlna na detektor v závislosti na frekvenci. Obrázek (3.2) ukazuje část naměřeného spektra. Každé minimum odpovídá vlastnímu módu dutiny. Tvar byl zvolen z důvodů nezávislosti spektra, protože "čtvrt stadion" nemá žádné dodatečné symetrie. "Celý stadion" má dvě zrcadlové symetrie, které způsobují superpozici čtyř nezávislých spekter. Při analýze dat pomocí teorie náhodných matic potom dostáváme další vnitřní vazby mezi vlastními čísly, které vedou k nesouhlasu teoretických křivek s naměřenými hodnotami.

U chaoticky vypadajícího spektra, jako je na obrázku (3.2), není jasné, zdali vůbec obsahuje nějakou užitečnou informaci. Nakreslíme-li rozdělovací funkci $p(s)$ vzdálenosti nejbližších sousedů viz odstavec (2.2), dostaneme pro různé druhy biliárů odlišné funkce.

Obrázek (3.3a) vykresluje $p(s)$ pro rezonátor obdélníkového průřezu, který je podle klasické dynamiky integrabilní. V tomto případě se předpokládá Poissonovo rozdělení

$$p(s) = \exp(-s). \quad (3.17)$$

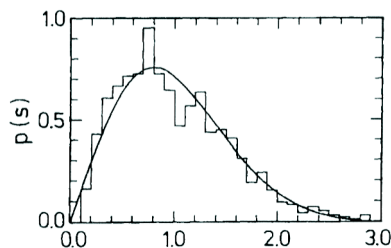
Experimentální rozdělení sleduje teoretickou křivku téměř přesně, až na dvě odchylky. Pro malá s vykazuje experimentální rozdělení znatelný pokles, zatímco teoretická křivka má v bodě 0 maximum. To je způsobeno konečnou rozlišovací schopností detektoru, který dvě velmi blízká maxima zaznamená jako jedno. Další odchylku pozorujeme naopak pro velká s , kde se projeví vliv antény, způsobující, že systém již není integrabilní, ale pseudointegrabilní.



Obrázek 3.3: Obdélníková dutina

Obrázek (3.3b) také ukazuje funkci $p(s)$ pro stejný obdélníkový rezonátor, tentokrát v oblasti vysokých frekvencí. Je zřejmé, že vymizela jakákoli podobnost s

Poissonovým rozdělením. Vliv antény v tomto případě je značný, metodou explicitně uvažující tuto okolnost byla získána funkce, která je na obrázku nakreslena plnou čarou.



Obrázek 3.4: Dutina tvaru "čtvrt stadionu"

Obrázek (3.4) je pro rezonátor tvaru "čtvrt stadionu". Plná čára nyní odpovídá Wiegnerově rozdělovací funkci, spočtené v odstavci (2.2) ve tvaru (2.33) pro Gaussův ortogonální soubor.

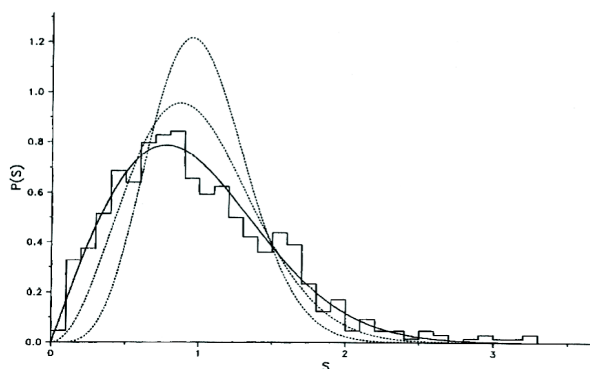
3.2 Anharmonický oscilátor

Dalším příkladem systému, který můžeme v jistém smyslu popsat teorií náhodných matic, je $\frac{1}{2}$ spinová částice pod vlivem potenciálu třírozměrného anharmonického oscilátoru, jehož hamiltonián má tvar

$$\mathcal{H} = \frac{1}{2}\vec{P}^2 + x^4 + \frac{1}{2}y^4 + \frac{1}{10}z^4 + 12x^2y^2 + 14x^2z^2 + 16y^2z^2 + r^2z(ax + by) + crLS, \quad (3.18)$$

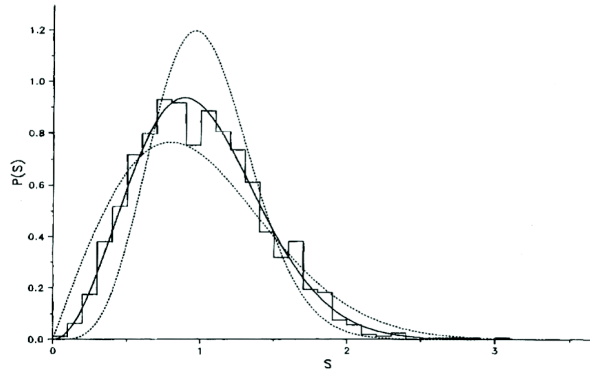
kde $r = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}$ a $crLS$ je spin-orbitální část hamiltoniánu. Třída systému závisí na parametrech a a b .

Pro $a = b = 0$ má systém tři zrcadlové symetrie na plochách xy , xz a yz . V tomto případě systém patří do ortogonální třídy, a je popsán výsledky pro Gaussův ortogonální soubor, přes existenci spin-orbitální interakce. Z funkcí, jejichž teoretický tvar je (2.33), nejlépe odpovídá právě rozdělovací funkce pro GOE naměřeným datům, jak ukazuje obrázek (3.5).



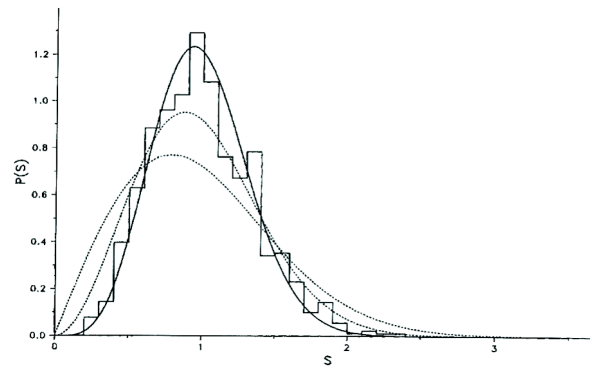
Obrázek 3.5: Anharmonický oscilátor při $a = b = 0$

Pokud právě jeden z parametrů a , b je nulový, jedna ze symetrií se poruší a systém propadne do unitární třídy. Pro tento případ graf funkce $p(s)$ podává obrázek (3.6). Také v tomto případě je zjevný soulad naměřených hodnot s teoretickou křivkou pro GUE.



Obrázek 3.6: Anharmonický oscilátor při $a = 0$, $b \neq 0$

Jsou-li oba parametry nulové, systém nemá žádnou z uvedených symetrií, ale díky spin-orbitální interakci zůstává alespoň v symplektické třídě. Tvar funkce $p(s)$ je na obrázku (3.7).



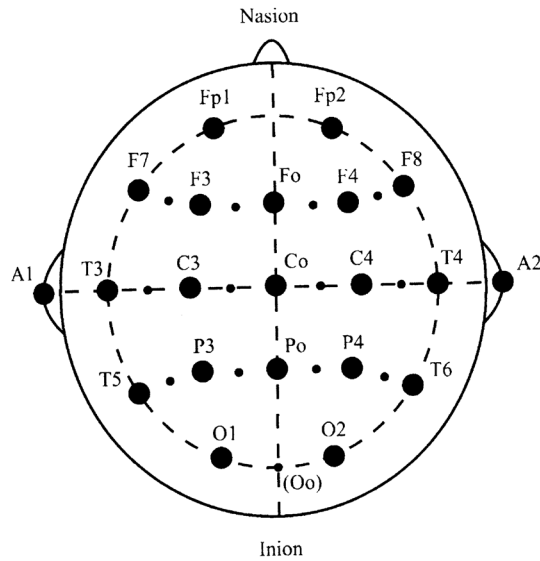
Obrázek 3.7: Anharmonický oscilátor při $a \neq 0$, $b \neq 0$

3.3 Lidský mozek

Lidský mozek vykazuje značnou elektromagnetickou aktivitu, která se měří pomocí elektrod umístěných na různých místech lebky. Jedna z možných topologií je na obrázku (3.8). Každé rozmístění elektrod má svůj význam a slouží k jiným účelům. Signál z elektrod je zpracováván přístrojem, který se nazývá elektroencefalograf.

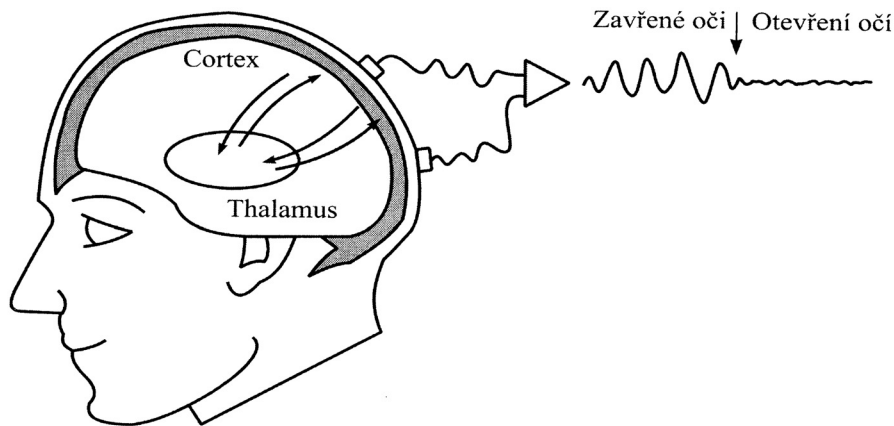
Z biologického hlediska vzniká EEG součinností neuronů thalamu a kortexu. Thalamus má funkci generátoru rytmů. Asi hlavním zdrojem EEG je elektrická aktivita synaptodendritických membrán v povrchních vrstvách kortexu. Normální aktivita je rytmická a má sinusový průběh. Základním tvarem je tzv. alfa vlna.

Alfa aktivita je vlastností mozku, který je zdravý, bdělý (při spánku a bezvědomí se rozpadá), zralý (od narození do 5 až 7 let je aktivita pomalá) a při zavřených



Obrázek 3.8: Rozmístění elektrod

očích. Při otevření očí se alfa aktivita blokuje a objevuje se nízká amplituda vln viz obrázek (3.9). Podobně i jiná činnost, ať už vnitřní (soustředění na podnět) nebo vnější (sevření pěstí), způsobuje změnu aktivity mozku. Při měření klidových vlastností je nutné se těmto vlivům vyhnout.



Obrázek 3.9: Otevření očí

Signál z mozku je také možné zpracovávat metodami teorie náhodných matic. Jednotlivé výstupy elektrod budeme značit $x_i(t_j)$, kde t_j určuje okamžik odečtení hodnoty. Předpokládáme, že posloupnost $\{x_i(t_j)\}_{j=1}^N$ je náhodná a Gaussovsky rozložena na reálné ose, pro všechny kanály $i = 1, \dots, n$, které jsou navzájem statisticky nezávislé. Jednotlivé oblasti mozku spolu vzájemně komunikují, proto se dá očekávat, že data získaná měřením na elektrodách budou vnitřně provázána.

Časový vývoj systému budeme popisovat korelační maticí

$$C_{l,m}(T) = \sum_{j=N_1}^{N_2} x_l(t_j)x_m(t_j), \quad (3.19)$$

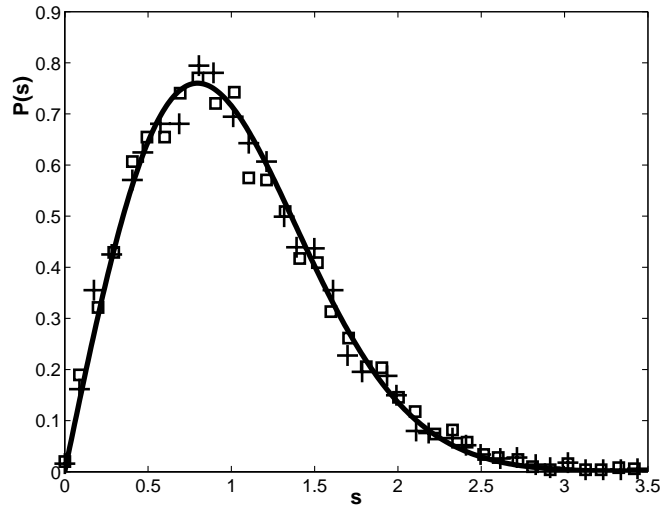
kde indexy N_1 a N_2 jsou voleny v závislosti na T , tak aby bylo splněno $t_j \in (T, T + \Delta)$. Parametr Δ určuje předpokládaný čas, po který aktivita mozku zůstává přibližně stejná. Výstupy $x_i(t_j)$ se před dosazením do (3.19) musí vynásobit konstantou a posunout, aby vyhovovaly relacím

$$\sum_{j=N_1}^{N_2} x_l(t_j) = 0, \quad \sum_{j=N_1}^{N_2} x_l(t_j)^2 = 1. \quad (3.20)$$

K vyšetření systémově nezávislé spektrální hustoty je třeba podrobit vlastní čísla transformaci

$$\lambda' = \int_0^\lambda \varrho(x) dx, \quad (3.21)$$

kde ϱ je původní hustota stavů. Popsané konstrukci se říká "unfolding the spectra" a hustota stavů po jejím provedení vychází konstantně rovna 1. Spočteme-li pro korelační matice (3.19) rozdělovací funkci $p(s)$, definovanou v odstavci (2.2), dostaneme obrázek (3.10), ze kterého je vidět, že chování korelačních matic odpovídá chování Gaussova ortogonálního souboru (GOE), jehož průběh je na obrázku vyznačen souvislou čarou.



Obrázek 3.10: Funkce $p(s)$ pro korelační matice při různých stavech mozku (křížek, čtverec)

Literatura

- [1] HANS-JÜRGEN STÖCKMANN: *Quantum Chaos: an introduction*. Cambridge University Press, 1999.
- [2] YAN V. FYODOROV: *Introduction to the Random Matrix Theory: Gaussian Unitary Ensemble and Beyond*. Brunel University, Uxbridge, 2004.
- [3] PETR ŠEBA: *Random Matrix Analysis of Human EEG Data*. Phys. Rev. Lett. 91.198104, 2003.