České vysoké učení technické v Praze
Fakulta jaderná a fyzikálně inženýrská

DIPLOMOVÁ PRÁCE

Posluchač: Aleš Černý

Vedoucí práce: Prof. RNDr. Ladislav Hlavatý, DrSc.

Katedra fyziky
Akademický rok 2006/2007
V Praze, 11. května 2007

Homogenní rovinné vlny jako pozadí dualizovatelného sigma modelu

Aleš Černý

Poděkování

Rád bych tímto poděkoval všem, kteří mi při mé práci jakkoliv pomáhali, podporovali mě a nebo mě ji alespoň nestěžovali. Určitě musím jmenovat kolegu Vojtu Štěpána, jehož „úvod do sigma modelů pro nezasvěcené“ mi dal mnoho, určitě víc než sám tuší. Zvláštní dík si ovšem zaslouží vedoucí diplomové práce, Prof. RNDr. Ladislav Hlavatý, DrSc., který trpělivě naslouchal mým často triviálním otázkám a ochotně na ně odpovídal a pomohl mi vyřešit mnohé „neřešitelné“ problémy.

Název práce: **Homogenní rovinné vlny jako pozadí dualizovatelného sigma modelu**

Autor: Aleš Černý

Obor: Matematické inženýrství

Vedoucí práce: Prof. RNDr. Ladislav Hlavatý, DrSc., Katedra fyziky, Fakulta jaderná a fyzikálně inženýrská, České vysoké učení technické v Praze

Abstrakt: Nalezneme dualizovatelný sigma model s třírozměrnou homogenní rovinnou vlnou jako pozadím. Jako dualitní grupu použijeme vybranou podgrupu grupy isometrií a identifikujeme příslušný Drinfeldův double. Najdeme vhodný tvar matice E_0 pro konstrukci dualizovatelného modelu. Pomocí této matice pak zkonstruujeme duální model a nalezneme příslušnou duální metriku.

Klíčová slova: sigma model, Poisson-Lieova T-dualita, Drinfeldův double, homogenní rovinná vlna.

Title: **Homogeneous plane waves as a background of a dualizable sigma model**

Author: Aleš Černý

Abstract: We have found an explicit form of dualizable sigma model with three dimensional homogeneous plane wave as a background. We have found the isometry group of this space and have taken its subgroup as a duality group. Then the Drinfeld double could be identified and by finding suitable matrix E_0 the dualizable model can be constructed. Finally, taking this matrix E_0 we have constructed the dual model and found the dual metric.

Key words: sigma model, Poisson-Lie T-duality, Drinfeld double, homogeneous plane wave.

OBSAH

Úvod **4**

1 Homogenní rovinná vlna **5**

1.1 Definice, vlastnosti 5

1.2 Grupa isometrií 6

1.3 Killingovy vektory homogenní vlny 7

2 Algebraická struktura grupy isometrií pro dimenzi 3 **9**

2.1 Případ "k je menší než 1/4" 9

2.2 Případ "k je rovno 1/4" 12

2.3 Případ "k je větší než 1/4" 13

3 Poisson-Lieova T-dualita **15**

3.1 Drinfeldův double 16

3.2 Konstrukce duálních modelů 18

4 Model s vlnovým pozadím **22**

4.1 Volba Drinfeldova doublu 23

4.2 Příprava potřebných objektů 25

4.3 Sestavení dualizovatelného modelu 29

4.4 Duální model 34

Závěr **38**

Literatura **40**

Úvod

Strunové teorie se v posledních letech těší velké pozornosti mnoha teoretických fyziků. Klíčovým objektem pro jejich studium je dvourozměrný nelineární σ-model, kterému se zde budeme podrobně věnovat. Potíž je v tom, že řešení pohybových rovnic σ-modelu obvykle umíme najít jen v případě, když má model *ploché* pozadí, tzn. že je zkonstruován na varietě s nulovým Riemannovým tenzorem. Pohybové rovnice σ-modelu se zakřiveným pozadím se totiž stávají neskutečně komplikovanými, přitom právě tyto modely jsou fyzikálně zajímavé.

Jedním z řešením problému se ukázaly být duality σ-modelů, které umožňují získat řešení daného σ-modelu z řešení modelu k němu duálního. Snadno tak můžeme přijít k řešení zakřiveného modelu, pokud zjistíme, že je duální k nějakému plochému modelu a tento model najdeme. To je ovšem další netriviální úloha — byla sice objevena Poisson-Lieova dualita, která nevylučuje existenci duálních protějšků ani k velmi obecným σ-modelům (dříve byly známy pouze duality umožňující dualizovat σ-modely mající nějaké symetrie), ale zatím neznáme žádný obecný způsob, jak zjistit, zda je zadaný σ-model dualizovatelný a jak případně nalézt model k němu duální. V současnosti se proto řeší speciální, nejlépe nějaké fyzikálně zajímavé případy, přičemž je třeba ke každému přistupovat individuálně.

V této práci předvedeme postup, jak zkonstruovat *dualizovatelný* σ-model, jehož pozadím je *třírozměrná homogenní rovinná vlna* a nalezneme model k němu duální. Rovinné vlny jsou poměrně častým předmětem zájmu strunových fyziků, protože se jedná o relativně jednoduchý případ zakřiveného a navíc časově závislého pozadí, u kterého je navíc známé tzv. *dilatonové pole*, důležité pro kvantovou verzi. Dimenzi tři jsme zvolili jednak jako nejjednodušší případ pro začátek, dalším důvodem je to, že pro konstrukci σ-modelu na n-rozměrném pozadí, je potřeba určit $2n$-rozměrnou grupu s jistými vlastnostmi (tzv. Drinfeldův double), která modelu přísluší. A v současnosti jsou Drinfeldovy doubly klasifikovány nejvýše pro dimenzi šest.

1 Homogenní rovinná vlna

1.1 Definice, vlastnosti

Ještě předtím, než se pustíme do problematiky σ-modelů, budeme se chvíli zabývat vlastnostmi prostoru, který budeme chtít za pozadí našeho hledaného modelu, tedy homogenních rovinných vln, speciálně pro dimenzi tři.

Obecně se rovinnou vlnou rozumí metrika tvaru

$$\mathrm{d}s^2 = 2\,\mathrm{d}u\,\mathrm{d}v + A_{ij}(u)x^i x^j\,\mathrm{d}u^2 + \,\mathrm{d}x^2\,,$$

kde $\mathrm{d}x^2$ značí standardní metriku na Euklidovském prostoru $\mathbb{E}^d$ a $x \in \mathbb{E}^d$. Jedná se tedy o metriku na $(d+2)$-rozměrném prostoru.

I přes její poměrně jednoduchý tvar se explicitní výpočet příslušejících strunových modelů ukazuje jako velmi obtížný. Proto se strunoví fyzici zaměřili nejprve na studium speciálních případů této metriky, jako např. rovinné vlny s konstantní negativně semidefinitní maticí A_{ij} a nebo isotropní ($A_{ij}(u) = -\lambda(u)\delta_{ij}$) rovinné vlny

$$\begin{aligned} \mathrm{d}s^2 &= 2\,\mathrm{d}u\,\mathrm{d}v - \lambda(u)x^2\,\mathrm{d}u^2 + \,\mathrm{d}x^2\,, \\ \lambda(u) &= \frac{k}{u^2}\,,\ k = \text{konst.} > 0\,, \end{aligned} \tag{1.1}$$

která bude i předmětem našeho zájmu. Prostor s takovouto metrikou má několik zajímavých vlastností.

Předně je to zřejmá přítomnost singularity pro $u = 0$, což je samo o sobě dost velké lákadlo pro studium strunových modelů s tímto pozadím. Dále bude pro nás poměrně důležité, že je to *homogenní prostor*, tzn. že ho lze považovat za faktorgrupu G/H, pro nějakou grupu G a její uzavřenou podgrupu H (viz. [1]), a že existuje $(d+2)$ rozměrná podgrupa jeho grupy isometrií, která na něm má transitivní akci.

Symetriím tohoto prostoru se budeme věnovat trochu podrobněji. Chceme-li totiž zkonstruovat dualizovatelný sigma model na pozadí třírozměrné homogenní rovinné vlny (1.1), potřebujeme najít její grupu isometrií, určit její Lieovu algebru a nalézt její třírozměrné podalgebry a identifikovat je podle Bianchiho klasifikace (všechny třírozměrné Lieovy algebry jsou klasifikovány, viz. např. [3]). Důvody pro tento postup prozatím ponechme stranou, objasníme je na začátku čtvrté kapitoly.

1.2 Grupa isometrií

Začneme lehce obecnějším případem, který si následně zkonkretizujeme. Řešením Killingových rovnic zjistíme, že každá metrika tvaru

$$\mathrm{d}s^2 = 2\,\mathrm{d}u\,\mathrm{d}v - \lambda(u)x^2\,\mathrm{d}u^2 + \,\mathrm{d}x^2\,, \tag{1.2}$$

kde λ může být libovolná funkce u, má tyto nezávislé Killingovy vektory:

$$\begin{aligned} T &\equiv \partial_v \\ X_i &\equiv a\partial_i - \partial_u a x_i \partial_v \\ R_{ij} &\equiv x_i\partial_j - x_j\partial_i \end{aligned}$$

přičemž funkce $a(u)$, vystupující ve vyjádření X_i, je určena rovnicí

$$\partial_u^2 a(u) + \lambda(u)a(u) = 0\,. \tag{1.3}$$

Protože to je diferenciální rovnice druhého řádu, která má dvě nezávislá řešení a, $\tilde{a}$, existují pro každé $i = 1, \ldots, d$ dva nezávislé Killingovy vektory $a \to X_i$, $\tilde{a} \to \tilde{X}_i$. Všimneme si ještě, že vektory R_{ij} generují rotace v prostoru $\mathbb{E}^d$ a již bez problémů určíme celkový počet isometrií metriky (1.2) jako $1 + 2d + \frac{1}{2}d(d-1)$.

Naše speciální volba

$$\lambda(u) = \frac{k}{u^2} \tag{1.4}$$

obohatí metriku o symetrii vzhledem k současnému přeškálování proměnných u a v

$$u \to lu\,, \quad v \to l^{-1}v\,.$$

Přibude nám tedy navíc nový Killingův vektor

$$D \equiv u\partial_u - v\partial_v\,.$$

V případě *třírozměrné homogenní vlny* tak zjišťujeme, že její grupa isometrií je *čtyřrozměrná*, generovaná vektory $T, X, \tilde{X}$ a D. Vektory R_{ij} v tomto případě ztrácí smysl, protože jsme zvolili $d = 1$ a máme pouze souřadnice (u, v, x).

Dále, díky konkrétní volbě (1.4) funkce $\lambda(u)$ můžeme bez potíží vyřešit rovnici (1.3), protože se v takovém případě jedná o tzv. *Euler-Cauchyho rovnici*, kterou lze převést na lineární diferenciální rovnici s konstatními koeficienty substitucí $u = \mathrm{e}^t$ a poté zpětným dosazením $t = \ln u$ do nalezeného řešení získat řešení v původní proměnné. Rovnice (1.3) po substituci $u = \mathrm{e}^t$

$$\frac{\mathrm{d}^2 a}{\mathrm{d}t^2} - \frac{\mathrm{d}a}{\mathrm{d}t} + ka = 0$$

má charekteristický polynom

$$\nu^2 - \nu + k = 0 \tag{1.5}$$

a její řešení tak mohou být *kvalitativně odlišná* v závislosti na hodnotě konstanty k.

1.3 Killingovy vektory homogenní vlny

V případě, že $0 < k < \frac{1}{4}$, má obecné řešení rovnice (1.3) tvar

$$a(u) = C_1 u^\nu + C_2 u^{1-\nu}\,,$$

kde

$$\nu = \frac{1+\sqrt{1-4k}}{2} \tag{1.6}$$

a explicitní vyjádření vektorů $X, \tilde{X}$ je

$$\begin{aligned} X &\equiv u^{\nu}\partial_x - \nu u^{\nu-1}x\partial_v \\ \tilde{X} &\equiv u^{1-\nu}\partial_x - (1-\nu)u^{-\nu}x\partial_v \,. \end{aligned} \tag{1.7}$$

V případě, že $k = \frac{1}{4}$, má obecné řešení (1.3) tvar

$$a(u) = C_1 u^{\frac{1}{2}} + C_2 u^{\frac{1}{2}} \ln u$$

a vektory $X, \tilde{X}$ jsou

$$\begin{aligned} X &\equiv u^{\frac{1}{2}}\partial_x - \frac{1}{2}xu^{-\frac{1}{2}}\partial_v \\ \tilde{X} &\equiv u^{\frac{1}{2}}\ln u\,\partial_x - xu^{-\frac{1}{2}}\Big(\frac{1}{2}\ln u + 1\Big)\partial_v \,. \end{aligned} \tag{1.8}$$

A v případě, že $k > \frac{1}{4}$, má obecné řešení (1.3) tvar

$$a(u) = C_1 u^{\frac{1}{2}}\cos(\gamma \ln u) + C_2 u^{\frac{1}{2}}\sin(\gamma \ln u)\,,$$

kde

$$\gamma = \sqrt{k - \frac{1}{4}} \tag{1.9}$$

a vektory $X, \tilde{X}$ jsou

$$\begin{aligned} X &\equiv u^{\frac{1}{2}}\cos(\gamma \ln u)\partial_x - xu^{-\frac{1}{2}}\Big(\frac{1}{2}\cos(\gamma \ln u) - \gamma\sin(\gamma \ln u)\Big)\partial_v \\ \tilde{X} &\equiv u^{\frac{1}{2}}\sin(\gamma \ln u)\partial_x - xu^{-\frac{1}{2}}\Big(\frac{1}{2}\sin(\gamma \ln u) + \gamma\cos(\gamma \ln u)\Big)\partial_v \,. \end{aligned} \tag{1.10}$$

2 Algebraická struktura grupy isometrií pro dimenzi 3

Jak už bylo řečeno, zatím jsou dualizovatelné modely klasifikovány maximálně pro dimenzi tři (máme klasifikaci maximálně šestirozměrných Drinfeldových doublů). Chceme tedy najít *třírozměrné podalgebry* Lieovy algebry grupy isometrií, (která je v našem případě čtyřrozměrná). Musíme ale vyšetřit každý případ zvlášť, protože pro různé hodnoty konstanty k mohou komutátory vektorů X, resp. $\tilde{X}$ s ostatními Killingovými vektory vypadat jinak.

2.1 Případ "k je menší než 1/4"

Začneme případem, kdy $0 < k < \frac{1}{4}$. Použijeme explicitní tvar (1.7) vektorů X a $\tilde{X}$ a po nenáročném výpočtu určíme komutační relace Lieovy algebry (uvádíme pouze nenulové komutátory, konstanta ν je určena vztahem (1.6))

$$\begin{aligned}
[D,T] &= T \\
[X,\tilde{X}] &= (2\nu-1)T \\
[D,X] &= \nu X \\
[D,\tilde{X}] &= (1-\nu)\tilde{X}\,.
\end{aligned}$$

Asi první, co nás napadne, máme-li najít třírozměrnou podalgebru takového algebry, bude zahodit jeden vektor a podívat se, jestli zbylé tři tvoří bázi nějaké algebry, tj. jestli lze jejich komutátory vyjádřit jako jejich lineární kombinace. Na první pohled je vidět, že se nám právě tohle *nepodaří*, pokud bychom vyhodili vektor T — komutátor $[X,\tilde{X}]$ vše zkazí.

U ostatních vektorů už ale budeme úspěšnější a k prvním podalgebrám tak dojdeme téměř bez práce. Zapomeneme-li na vektor D, pak zbylé tři tvoří Lieovu algebru Bianchiho typu II, která je určena komutačními relacemi

$$[X_1, X_2] = 0, \quad [X_2, X_3] = X_1, \quad [X_3, X_1] = 0$$

pro vhodnou volbu báze X_1, X_2, X_3. (Kompletní přehled Bianchiho klasifikace lze nalézt např. v [3].) V našem případě je takovou vhodnou bází $\{\tilde{T}, X, \tilde{X}\}$, kde $\tilde{T} = (2\nu - 1)T$.

Pokud vynecháme vektor $\tilde{X}$, pak zbylé vektory tvoří Lieovu algebru určenou komutačními relacemi

$$[D, T] = T, \quad [D, X] = \nu X, \quad [T, X] = 0\,. \tag{2.1}$$

Ukážeme, že to je algebra Bianchiho typu VI_a, kde

$$a = \frac{1+\nu}{1-\nu}\,. \tag{2.2}$$

Bianchiho algebra VI_a, $a > 0,\ a \neq 1$ je určena komutačními relacemi

$$[X_1, X_2] = -aX_2 - X_3, \quad [X_2, X_3] = 0, \quad [X_3, X_1] = X_2 + aX_3\,. \tag{2.3}$$

Po chvilce zkoušení zjistíme, že

$$\begin{aligned} [X_1, X_3 + X_2] &= -(a+1)(X_3 + X_2) \\ [X_1, X_3 - X_2] &= (1-a)(X_3 - X_2) \\ [X_3 + X_2, X_3 - X_2] &= 0\,. \end{aligned}$$

Přejdeme-li proto k bázi

$$Y_1 = -\frac{1}{a+1} X_1, \quad Y_2 = X_3 + X_2, \quad Y_3 = X_3 - X_2\,,$$

přejdou komutační relace této algebry na

$$[Y_1, Y_2] = Y_2, \quad [Y_1, Y_3] = \frac{a-1}{a+1}\, Y_3, \quad [Y_2, Y_3] = 0\,,$$

což přesně odpovídá relacím (2.1). Porovnáním vidíme, že

$$\nu = \frac{a-1}{a+1}\,, \text{ tj.} \qquad a = \frac{1+\nu}{1-\nu}\,.$$

Protože $0 < k < \frac{1}{4}$, platí pro ν nerovnost $\frac{1}{2} < \nu < 1$ a parametr a tak nabývá skutečně pouze povolených hodnot.

Zcela analogicky můžeme postupovat i v případě, kdy vynecháme vektor X. Zbylé vektory $D, T, \tilde{X}$ tvoří Lieovu algebru

$$[D, T] = T, \quad [D, \tilde{X}] = (1-\nu)\tilde{X}, \quad [T, \tilde{X}] = 0\,,$$

která odpovídá Bianchiho typu VI_a pro $a = \frac{2-\nu}{\nu}$. I v tomto případě parametr a splňuje $a > 0,\ a \neq 1$.

Tím jsme vyčerpali všechny možnosti, jak získat podalgebru pouhým *vynecháním jednoho z generátorů* grupy isometrií. Pokud chceme najít nějakou další třírozměrnou podalgebru, musíme už nakombinovat její bazické vektory *ze všech čtyř vektorů* $T, D, X, \tilde{X}$.

Vcelku rychle se přesvědčíme, že podalgebru můžeme získat volbou bazických vektorů

$$A = D + \alpha\tilde{X}, \quad B = -\alpha(2\nu - 1)T, \quad X\,,$$

kde parametr α může být libovolné nenulové reálné číslo. Příslušné komutační relace pak mají velice jednoduchý tvar

$$[A, B] = B, \quad [A, X] = \nu X + B, \quad [B, X] = 0\,. \tag{2.4}$$

Tato algebra je opět Bianchiho algebrou VI_a. Z komutačních relací (2.3) totiž zjistíme, že

$$\begin{aligned}
\Big[-\frac{1}{a+1}X_1, X_2 + X_3\Big] &= X_2 + X_3 \\
\Big[-\frac{1}{a+1}X_1, (a+1)X_2\Big] &= \frac{a-1}{a+1}(a+1)X_2 + (X_2 + X_3) \\
[(a+1)X_2, X_2 + X_3] &= 0\,,
\end{aligned}$$

což jsou tytéž relace jako (2.4), navíc porovnáním opět určíme parametr algebry jako $a = \frac{1+\nu}{1-\nu}$. Tato podalgebra je tedy *isomorfní již nalezené podalgebře* $\{D, T, X\}$.

Vpodstatě stejným způsobem zjistíme, že výběrem báze

$$A' = D + \alpha' X, \quad B' = \alpha'(2\nu - 1)T, \quad \tilde{X}$$

získáme Lieovu algebru s komutačními relacemi

$$[A', B'] = B', \quad [A', \tilde{X}] = (1-\nu)\tilde{X} + B', \quad [B', \tilde{X}] = 0\,.$$

To je opět Bianchiho algebra VI_a, kde $a = \frac{2-\nu}{\nu}$, a je proto isomorfní již dříve nalezené algebře $\{D, T, \tilde{X}\}$.

Po krátké úvaze nad možnými tvary bazických vektorů třírozměrné podalgebry se ujistíme, že žádnou další Lieovu podalgebru zkoumané čtyřrozměrné algebry, která by nebyla isomorfní s již nalezenými, už *nenajdeme*. Takže se pustíme do rozboru další možnosti.

2.2 Případ "k je rovno 1/4"

Pro případ $k = \frac{1}{4}$ použijeme k výpočtu komutátorů Killingových vektorů explicitní tvar (1.8) X a $\tilde{X}$, čímž získáme následující komutační relace:

$$\begin{aligned}
[D, T] &= T \\
[X, \tilde{X}] &= -T \\
[D, X] &= \frac{1}{2}X \\
[D, \tilde{X}] &= \frac{1}{2}\tilde{X} + X\,.
\end{aligned}$$

Jak postupovat už víme, takže okamžitě odhalíme první podalgebru, kterou získáme vynecháním vektoru D:

$$\tilde{T} = -T, X, \tilde{X}\ : \qquad [\tilde{T}, X] = [\tilde{T}, \tilde{X}] = 0, \quad [X, \tilde{X}] = \tilde{T}\,.$$

To je, stejně jako v předešlém případě, Bianchiho algebra typu II. Vynecháme-li vektor $\tilde{X}$, dostaneme algebru

$$D, T, X \ : \qquad [D,T] = T, \quad [D,X] = \frac{1}{2}X, \quad [T,X] = 0\,,$$

což je Bianchiho algebra VI_3, tedy opět stejný výsledek, jako v předešlém případě (pro $\nu = \frac{1}{2}$).

Ale narozdíl od předchozího případu, vynecháním vektoru X už *nezískáme* podalgebru — stačí se podívat na komutátor $[D, \tilde{X}]$. Lehce ověříme, že vlastně žádná trojice $D, T, Y = \alpha X + \beta\tilde{X}$ s nenulovým β nemůže tvořit bázi třírozměrné algebry, protože pak by komutátor $[D, Y]$ musel být nějakým násobkem Y, což lze ovšem splnit pouze pokud $\beta = 0$.

Podobně tomu je i s další dvojicí podalgeber — zatímco vektory $A = D + \alpha\tilde{X}$, $B = \alpha T$, X tvoří pro libovolné nenulové α Lieovu algebru s komutačními relacemi

$$[A,B] = B, \quad [A,X] = \frac{1}{2}X + B, \quad [B,X] = 0\,,$$

což odpovídá Bianchiho algebře VI_3, tedy znovu tentýž výsledek jako v předchozím případě, vektory $A' = D + \alpha' X$, $B' = \alpha' T$, $\tilde{X}$ už algebru tvořit nemohou pro žádnou hodnotu α'.

Žádnou další neisomorfní podalgebru se nám již najít nepodaří, a tak *jediné třírozměrné podalgebry, které tato algebra má, jsou typu II a VI_3.* (V předchozím případě měla algebra vždy tři třírozměrné podalgebry pro dané ν — typu II, VI_a a $VI_{a'}$, kde $a = \frac{1+\nu}{1-\nu}$ a $a' = \frac{2-\nu}{\nu}$. Je totiž třeba si uvědomit, že algebry VI_a jsou pro různá $a > 0$ neisomorfní.)

2.3 Případ "k je větší než 1/4"

Pro $k > \frac{1}{4}$ dosadíme za $X, \tilde{X}$ explicitní tvar (1.10) a spočteme komutační relace Lieovy algebry pro tento případ:

$$
\begin{aligned}
[D,T] &= T \\
[X,\tilde{X}] &= \gamma T \\
[D,X] &= \frac{1}{2}X - \gamma\tilde{X} \\
[D,\tilde{X}] &= \frac{1}{2}\tilde{X} + \gamma X\,.
\end{aligned}
$$

Na první pohled je vidět, že vynecháním vektoru D opět získáme podalgebru

$$\tilde{T} = \gamma T, X, \tilde{X}\ : \qquad [\tilde{T}, X] = [\tilde{T}, \tilde{X}] = 0, \quad [X, \tilde{X}] = \tilde{T}\,,$$

což je už známá Bianchiho algebra typu II. Tím jsme ale skončili, protože žádnou další podalgebru se nám už najít nepodaří. Algebru v tomto případě netvoří ani trojice $\{D, T, Y = \alpha X + \beta\tilde{X}\}$, ani $\{D + \alpha\tilde{X}, T, X\}$, resp. $\{D + \alpha' X, T, \tilde{X}\}$. Počet podalgeber se tedy opět snížil, tentokrát už jen na *jedinou*.

3 Poisson-Lieova T-dualita

Vše potřebné ohledně homogenní rovinné vlny již máme připraveno a můžeme se tak pustit do studia Poisson-Lieovy T-duality sigma modelů. V této kapitole podáme stručný úvod do problematiky, jež by měl i čtenářům, kteří se σ-modely přímo nezabývají, umožnit pochopení dalšího textu.

Klasický nelineární sigma model je definován jako zobrazení $x : \Sigma \to M$ z variety Σ (tzv. *world sheet*), s Lorentzovskou metrikou η, do cílové variety M (tzv. *target space*), na které je zadána metrika $\mathrm{d}s^2 = g_{\mu\nu}\, \mathrm{d}x^\mu \otimes \mathrm{d}x^\nu$ a 2-forma $B = \frac{1}{2} B_{\mu\nu}\, \mathrm{d}x^\mu \wedge \mathrm{d}x^\nu$. Hustota Lagrangiánu takového σ-modelu je

$$\mathscr{L} = \frac{1}{2}\eta^{ab} g_{\mu\nu}(x)\partial_a x^\mu \partial_b x^\nu - \frac{1}{2}\epsilon^{ab} B_{\mu\nu}(x)\partial_a x^\mu \partial_b x^\nu \,.$$

I když může být podle této definice dimenze variety Σ obecně jakákoli, v praxi se téměř výhradně zkoumají σ-modely s dimenzí *dva*, kvůli jejich přímé souvislosti se strunovými modely. Souřadnice na Σ pak většinou značíme (τ, σ). Přechodem k souřadnicím světelného kužele $\xi^\pm = \tau \pm \sigma$ získáme akci σ-modelu ve tvaru

$$\begin{aligned} S &= \int \mathrm{d}\xi^+ \, \mathrm{d}\xi^- \Big(g_{\mu\nu}(x) + B_{\mu\nu}(x) \Big) \partial_- x^\mu \partial_+ x^\nu = \\ &= \int \mathrm{d}\xi^+ \, \mathrm{d}\xi^- F_{\mu\nu}(x) \partial_- x^\mu \partial_+ x^\nu \,. \end{aligned} \tag{3.1}$$

Funkce $x^\mu : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$, $\mu = 1, \ldots, \dim M$ získáme složením $x^\mu = y^\mu \circ x$ zobrazení $x : \mathbb{R}^2 \to M$ a souřadnicové mapy $y : U_x \to \mathbb{R}^n$, $n = \dim M$ okolí prvku $x(\xi^+, \xi^-) \in M$.

3.1 Drinfeldův double

Dualita cílových prostorů nebo též T-dualita (od *target-space duality*) σ-modelů spolu svazuje dva modely, které popisují tutéž fyziku, i když explicitní forma jejich pohybových rovnic je jiná. Jako první byla objevena *abelovská T-dualita* umožňující najít duální σ-model k modelu, jehož cílová varieta má *abelovskou* grupu isometrií. Sympatická vlastnost, bohužel ne příliš prakticky užitečná, neboť se nedá použít pro většinu fyzikálně zajímavých případů.

Dalším krokem byl objev *neabelovské T-duality*, která umožňuje nalézt duální model i k modelu, jehož grupa isometrií *není* abelovská. Tento pokrok je ale vykoupen tím, že grupa isometrií příslušného duálního modelu je vždy menší než grupa isometrií původního modelu a provedením dualitní transformace na duální model nezískáme model původní, takže je otázka, zda lze v takovém případě vůbec hovořit o *dualitě*.

Zobecněním abelovské i neabelovské T-duality je *Poisson-Lieova T-dualita*, která už nevychází z grupy isometrií cílového prostoru (ten dokonce nemusí mít *žádnou* symetrii), ale je založena na koncepci *Drinfeldova doublu*. To je taková souvislá Lieova grupa D, jejíž Lieovu algebru $\mathcal{D}$ lze rozložit na dvě maximálně isotropní podalgebry $\mathcal{G}, \tilde{\mathcal{G}}$ vzhledem k symetrické ad-invariantní nedegenerované bilineární formě $\langle\, . \,,\, . \,\rangle$ na $\mathcal{D}$. (Podprostor $\mathcal{D}$ je *isotropní*, pokud je hodnota formy $\langle\, . \,,\, . \,\rangle$ na jakékoli dva jeho vektory nulová. *Maximálně isotropní* je tehdy, když ho není možné zvětšit a zachovat přitom isotropii podprostoru.) Vektorový prostor $\mathcal{D}$ je pak direktním součtem $\mathcal{G} \oplus \tilde{\mathcal{G}}$ a trojici algeber $(\mathcal{D}, \mathcal{G}, \tilde{\mathcal{G}})$ nazýváme *Maninova trojice*. Pro jeden Drinfeldův double (Lieovu grupu D) samozřejmě může existovat několik různých Maninových trojic (rozkladů $\mathcal{D} = \mathcal{G} \oplus \tilde{\mathcal{G}}$), minimálně však vždy dvě — $(\mathcal{D}, \mathcal{G}, \tilde{\mathcal{G}})$ a $(\mathcal{D}, \tilde{\mathcal{G}}, \mathcal{G})$.

Dimenze obou maximálně isotropních podalgeber musí být stejné a Drinfeldův double tak může být pouze Lieova grupa *sudé dimenze*. Báze $\{X_i\}, \{\tilde{X}^j\}$ podalgeber $\mathcal{G}, \tilde{\mathcal{G}}$ přitom mohou být vždy zvoleny tak, aby platilo

$$\langle X_i, X_j \rangle = \langle \tilde{X}^i, \tilde{X}^j \rangle = 0, \quad \langle X_i, \tilde{X}^j \rangle = \langle \tilde{X}^j, X_i \rangle = \delta_i^j \,. \tag{3.2}$$

Algebraická struktura $\mathcal{D}$ je díky ad-invarianci formy $\langle\, . \,,\, . \,\rangle$ plně určena strukturou svých maximálně isotropních podalgeber: nechť jsou ${c_{ij}}^k$, resp.

$\tilde{c}^{ij}{}_k$ strukturní konstanty algeber $\mathcal{G}$, resp. $\tilde{\mathcal{G}}$, tj.

$$[X_i, X_j] = c_{ij}{}^k X_k, \qquad [\tilde{X}^i, \tilde{X}^j] = \tilde{c}^{ij}{}_k \tilde{X}^k \,. \tag{3.3}$$

ad-invariance formy $\langle\,.\,,.\,\rangle$ znamená, že pro všechna $X, Y, Z \in \mathcal{D}$ platí rovnost

$$\langle \mathrm{ad}_X Y, Z\rangle + \langle Y, \mathrm{ad}_X Z\rangle = \langle [X,Y], Z\rangle + \langle Y, [X,Z]\rangle = 0\,.$$

Platí tedy jistě i pro trojici vektorů $X_i, \tilde{X}^j, X_k$, takže

$$\langle [X_i, \tilde{X}^j], X_k\rangle + \langle \tilde{X}^j, [X_i, X_k]\rangle = 0\,. \tag{3.4}$$

Komutátor $[X_i, \tilde{X}^j]$ přitom musí být nějakou lineární kombinací bazických vektorů, takže ho můžeme napsat jako

$$[X_i, \tilde{X}^j] = a_i{}^{jm} X_m + b_i{}^j{}_m \tilde{X}^m\,. \tag{3.5}$$

Dosadíme-li toto vyjádření do (3.4), za $[X_i, X_k]$ dosadíme z (3.3) a využijeme bilinearity formy $\langle\,.\,,.\,\rangle$ a rovností (3.2), dostaneme

$$b_i{}^j{}_m \delta_k^m + c_{ik}{}^l \delta_l^j = 0$$

$$b_i{}^j{}_k = -c_{ik}{}^j = c_{ki}{}^j\,.$$

Podobně, pro trojici vektorů $\tilde{X}^j, X_i, \tilde{X}^k$ díky ad-invarianci formy $\langle\,.\,,.\,\rangle$ platí

$$\langle [\tilde{X}^j, X_i], \tilde{X}^k\rangle + \langle X_i, [\tilde{X}^j, \tilde{X}^k]\rangle = 0\,.$$

Dosazením do této rovnosti z (3.5), (3.3) a s využitím vlastností formy $\langle\,.\,,.\,\rangle$ pak určíme koeficienty stojící u X_m:

$$-a_i{}^{jm} \delta_m^k + \tilde{c}^{jk}{}_m \delta_i^m = 0$$

$$a_i{}^{jk} = \tilde{c}^{jk}{}_i\,.$$

Vidíme tedy, že komutátory vektorů $X_i, \tilde{X}^j$, potřebné k úplnému určení komutačních relací mezi bazickými vektory algebry $\mathcal{D}$, můžeme získat pomocí $c_{ij}{}^k$ a $\tilde{c}^{ij}{}_k$ jako

$$[X_i, \tilde{X}^j] = c_{ki}{}^j \tilde{X}^k + \tilde{c}^{jk}{}_i X_k\,. \tag{3.6}$$

Potřeba Drinfeldova doublu k popisu Poisson-Lieovy duality vyplyne z odpovědi na otázku, kdy existuje k σ-modelu s volnou akcí grupy G na jeho cílovém prostoru M Poisson-Lie duální σ-model s grupou $\tilde{G}$. V práci [6] autoři ukázali, že potřebnou podmínkou je tzv. G-Poisson-Lie symetrie σ-modelu vzhledem ke grupě $\tilde{G}$. Tuto podmínku lze formulovat na úrovni Lagrangiánu σ-modelu jako

$$\mathcal{L}_{v_i} F_{\mu\nu} = F_{\mu\kappa}\, v_j^\kappa\, \tilde{c}^{jk}{}_i\, v_k^\lambda\, F_{\lambda\nu}\,, \tag{3.7}$$

kde $\mathcal{L}_v$ značí Lieovu derivaci vzhledem k vektoru v, $\tilde{c}^{jk}{}_i$ jsou strukturní konstanty Lieovy algebry $\tilde{\mathcal{G}}$ Lieovy grupy $\tilde{G}$ a $v_i(x)$ jsou levoinvariantní vektorová pole příslušející pravé akci grupy G na M, jejíž algebra $\mathcal{G}$ má strukturní konstanty $c_{ij}{}^k$.

Podmínka integrability poslední rovnice vyžaduje, aby strukturní konstanty $c_{ij}{}^k$ a $\tilde{c}^{ij}{}_k$ splňovaly

$$\tilde{c}^{jk}{}_l c_{mi}{}^l + \tilde{c}^{kl}{}_m c_{li}{}^j + \tilde{c}^{jl}{}_i c_{lm}{}^k + \tilde{c}^{jl}{}_m c_{il}{}^k + \tilde{c}^{kl}{}_i c_{lm}{}^j = 0\,.$$

To je ale standardní vztah, který splňují strukturní konstanty Lieovy bialgebry $(\mathcal{G}, \tilde{\mathcal{G}})$, a kterému vyhovují i maximálně isotropní podalgebry libovolného rozkladu jakéhokoli Drinfeldova doublu.

Odpověď na otázku, kdy lze k danému σ-modelu a grupě G nalézt Poisson-Lie duální model s grupou $\tilde{G}$, zní: *je to možné tehdy, pokud existuje Drinfeldův double D takový, že má rozklad $(\mathcal{D}, \mathcal{G}, \tilde{\mathcal{G}})$, kde $\mathcal{G}$ je Lieova algebra grupy G a $\tilde{\mathcal{G}}$ je Lieova algebra grupy $\tilde{G}$ a navíc pole $F_{\mu\nu}$, určující Lagrangián σ-modelu, splňuje podmínku* (3.7). O takovém modelu pak říkáme, že má *zobecněné isometrie*, protože jde skutečně o jisté zobecnění klasických isometrií, pro které je Lieova derivace $\mathcal{L}_{v_i}$ rovna nule (v_i je v tomto případě přímo Killingův vektor).

3.2 Konstrukce duálních modelů

Pro libovolný rozklad Drinfeldova doublu existují σ-modely, na jejichž cílových varietách má grupa G volnou akci, a které jsou Poisson-Lie symetrické vzhledem ke grupě $\tilde{G}$. Každý takový model má potom duální protějšek, pro nějž mají grupy G a $\tilde{G}$ prohozenou úlohu.

Uvedeme zde postup konstrukce takovýchto σ-modelů pro daný Drinfeldův double D. Výsledkem budou pole F, resp. $\tilde{F}$, která *automaticky splní* podmínku (3.7), resp. její „ovlnkovanou" verzi. Odvození těchto výsledků najdeme v [6] nebo [2].

Mějme tedy grupy G (jejíž Lieova algebra $\mathcal{G}$ má bázi X_i) a $\tilde{G}$ (jejíž Lieova algebra $\tilde{\mathcal{G}}$ má bázi $\tilde{X}^j$) dimenze n, příslušné Drinfeldovu doublu D (dimenze $2n$) a d-rozměrnou varietu M ($d \geq n$), na níž má G volnou akci. Pokud je akce G na M navíc i transitivní, je $d = n$ a můžeme ztotožnit varietu M s grupou G a vzorce definující σ-model se značně zjednoduší, což nám bude později velice příjemné, protože právě takovýto případ nastane v naší úloze. Existenci potřebné grupy s transitivní akcí zajišťuje homogenita prostoru s metrikou (1.1), na kterou jsme upozorňovali v první kapitole.

Začneme tedy tím, že sestavíme matice $a(g), b(g), d(g)$ adjungované representace grupy G na $\mathcal{D}$ ($g \in G$)

$$g^{-1}X_i g \equiv a(g)_i^{\ l} X_l, \qquad g^{-1}\tilde{X}^j g \equiv b(g)^{jl} X_l + d(g)^j_{\ l} \tilde{X}^l \tag{3.8}$$

s vlastnostmi

$$d^T(g) = a^{-1}(g) = a(g^{-1}), \quad b^T(g) = b(g^{-1})\,.$$

Pomocí nich definujeme $n \times n$ matici $\Pi(g)$

$$\Pi(g) = b(g)a^{-1}(g), \qquad \Pi^T(g) = -\Pi(g)\,.$$

Stejným způsobem pak můžeme získat i matice $\tilde{a}(\tilde{g}), \tilde{b}(\tilde{g}), \tilde{d}(\tilde{g})$ a $\tilde{\Pi}(\tilde{g})$ příslušné grupě $\tilde{G}$, stačí jen zaměnit $\mathcal{G}$ a $\tilde{\mathcal{G}}$ v rovnicích (3.8).

Pokud G nepůsobí na M transitivně, pak souřadnice na M/G označíme y^α, $\alpha = 1, \ldots, (d - \dim G)$. Hustotu Lagrangiánu dualizovatelného σ-modelu s cílovou varietou M potom definujeme jako

$$\begin{aligned}\mathscr{L} = {} & E_{ij}(\partial_+ g g^{-1})^i (\partial_- g g^{-1})^j + \Phi^{(1)}_{i\alpha}(\partial_+ g g^{-1})^i \partial_- y^\alpha + \\ & + \Phi^{(2)}_{\alpha i}\partial_+ y^\alpha (\partial_- g g^{-1})^i + \Phi_{\alpha\beta}\partial_+ y^\alpha \partial_- y^\beta\,,\end{aligned}$$

kde vystupující matice E, $\Phi^{(1)}$, $\Phi^{(2)}$, Φ jsou určeny maticemi E_0^{-1}, $F^{(1)}$, $F^{(2)}$, F, což mohou být libovolné funkce v y^α, následujícími vztahy:

$$E = (E_0^{-1} + \Pi)^{-1}\,, \qquad \Phi^{(1)} = E E_0^{-1} F^{(1)}\,,$$

$$\Phi^{(2)} = F^{(2)} E_0^{-1} E\,, \qquad \Phi = F - F^{(2)} \Pi E E_0^{-1} F^{(1)}\,.$$

Cílový prostor duálního modelu je d-rozměrná varieta $\tilde{M}$, na níž má $\tilde{G}$ volnou akci. Hustota Lagrangiánu duálního modelu je

$$\tilde{\mathscr{L}} = \tilde{E}^{ij}(\partial_+ \tilde{g}\tilde{g}^{-1})_i(\partial_- \tilde{g}\tilde{g}^{-1})_j + \tilde{\Phi}^{(1)i}{}_\alpha(\partial_+ \tilde{g}\tilde{g}^{-1})_i \partial_- y^\alpha + \\ + \tilde{\Phi}^{(2)}{}_\alpha{}^i \partial_+ y^\alpha(\partial_- \tilde{g}\tilde{g}^{-1})_i + \tilde{\Phi}_{\alpha\beta}\partial_+ y^\alpha \partial_- y^\beta\,,$$

kde matice

$$\tilde{E} = (E_0 + \tilde{\Pi})^{-1}\,, \qquad \tilde{\Phi}^{(1)} = \tilde{E} F^{(1)}\,,$$
$$\tilde{\Phi}^{(2)} = -F^{(2)}\tilde{E}\,, \qquad \tilde{\Phi} = F - F^{(2)}\tilde{E}F^{(1)}\,.$$

Pokud ale konstruujeme sigma model na Lieově grupě G, což může být i případ, kdy grupa G má na cílové varietě M transitivní akci, díky čemuž můžeme M a G ztotožnit, získáme hustotu Lagrangiánu dualizovatelného modelu snadno jako

$$\mathscr{L} = E_{ab}(g)(\partial_- g g^{-1})^a(\partial_+ g g^{-1})^b\,, \tag{3.9}$$

kde

$$E(g) = \left(E_0^{-1} + \Pi(g)\right)^{-1}.$$

Matice E_0 je v tomto případě konstantní. Duální model získáme opět prakticky pouze ovlnkováním vztahu (3.9) spolu s definicí

$$\tilde{E}(\tilde{g}) = \left(E_0 + \tilde{\Pi}(\tilde{g})\right)^{-1}.$$

Chceme-li hustotu Lagrangiánu našeho σ-modelu vyjádřit pomocí lokálních proměnných na cílovém prostoru

$$\mathscr{L} = F_{ij}(x)\partial_- x^i \partial_+ x^j\,, \qquad i,j = 1,\ldots,\dim G\,,$$

budeme potřebovat ještě spočítat komponenty pravoinvariantních forem (vielbeinů) $e_i^a\big(g(x)\big) = \big((\,\mathrm{d}g)_i \cdot g^{-1}\big)^a$. Pro pole F_{ij} pak platí

$$F_{ij}(x) = e_i^a\big(g(x)\big)E_{ab}\big(g(x)\big)e_j^b\big(g(x)\big)\,. \tag{3.10}$$

Celá konstrukce je přitom sestavena tak, aby *získané pole F splňovalo podmínku* (3.7) *pro předem daný Drinfeldův double.*

Rozklad $(\mathcal{D}, \mathcal{G}, \tilde{\mathcal{G}})$ Drinfeldova doublu D spolu s konstantní maticí E_0 tak na G zadávají kovariantní tenzorové pole F (tzv. *pozadí*), jehož symetrickou část

$$G_{ij} = \frac{1}{2}(F_{ij} + F_{ji})$$

můžeme chápat jako *metriku* na G a jehož antisymetrickou část

$$B_{ij} = \frac{1}{2}(F_{ij} - F_{ji})$$

považujeme za *torzní potenciál.* Poisson-Lieova dualita pak určuje na $\tilde{G}$ duální pole $\tilde{F}$, které automaticky splňuje „ovlnkovanou“ verzi podmínky (3.7).

4 Model s vlnovým pozadím

Naším úkolem teď je nalézt dualizovatelný σ-model s třírozměrnou homogenní rovinnou vlnou jako pozadím, tj. aby jeho cílová varieta byl prostor $\mathbb{R}^3$ s metrikou (1.1). Budeme předpokládat *nulový torzní potenciál*, takže pole F bude symetrické a $F_{ij} = g_{ij}$. Pak musíme sestavit model k tomuto duální a nalézt tak pole $\tilde{F}_{ij}$, které bude duálním obrazem pole F. To už obecně *nemusí* být symetrické, a tak *duální metrikou* nazveme pouze jeho symetrickou část.

Zadání zní velmi jednoduše, ovšem má to jeden háček. Universální postup pro konstrukci dvojice vzájemně duálních σ-modelů, popsaný v předešlé kapitole, vychází z toho, že *máme daný rozklad Drinfeldova doublu a matici* E_0. K nim jsme pak schopni zkonstruovat dva duální σ-modely, tj. pole F_{ij} a $\tilde{F}_{ij}$. Naše situace je ale jiná — máme pole F a chceme nalézt duální pole $\tilde{F}$, aniž bychom ale měli zadaný Drinfeldův double. Pro řešení takovéto úlohy zatím *neznáme* žádný obecně platný postup, dokonce ani obecně nedovedeme říci, zda je zadaný σ-model dualizovatelný. Máme sice podmínku pro zobecněné isometrie

$$\mathcal{L}_{v_a} F_{ij} = F_{ik}\, v_b^k\, \tilde{c}^{bc}{}_a\, v_c^l\, F_{lj}\,, \tag{4.1}$$

která zaručuje dualizovatelnost pole F v případě jejího splnění, ale ta předpokládá, že už máme danou grupovou strukturu modelu, tj. známe levoinvariantní pole v_a. Žádné vodítko pro volbu vhodné grupy k zadanému modelu a její vyjádření v daných souřadnicích, ale zatím nemáme.

V současnosti je asi nejlepším použitelným algoritmem (dle [4]) najít algebru klasických isometrií zadané metriky, tj. Killingovy vektory, a jí odpovídající grupu a nalézt její podgrupu G, která má na cílové varietě volnou akci. Pak určíme Drinfeldův double umožňující rozklad $\mathcal{D} = \mathcal{G} \oplus I$, tedy takový, že duální grupa $\tilde{G}$ je abelovská. Takto vybraný Drinfeldův double pak jistě vyhoví podmínce (4.1), neboť na levé straně bude vždy Lieova derivace metriky podle Killingova vektoru čili nula a na pravé straně bude nula díky strukturním konstantnám $\tilde{c}^{bc}{}_a$, které jsou pro abelovský případ všechny nulové.

Jakmile máme vhodný Drinfeldův double, můžeme postupovat podle návodu z předchozí kapitoly — najít matice $a(g), b(g), \Pi(g)$ a $e(g(x))$ a matici E_0 zvolit tak, aby po sestavení matic $E(g)$ a následně pak $F(x)$ odpovídalo pole F zadané metrice (i když třeba v jiných souřadnicích, než v jakých jsme ji měli původně zadanou).

I když se použitím takovéhoto algoritmu omezujeme na velmi úzký okruh možných duálních modelů, protože předem víme, že grupa $\tilde{G}$ bude v tomto případě vždy abelovská, určitě se vyplatí zjistit, jaký výsledek nám jeho aplikace přinese, mimo jiné třeba proto, že jakmile se nám podaří najít pár duálních σ-modelů, je možné k němu najít další duální pár, který lze získat jiným rozkladem stejného Drinfeldova doublu (pokud takový rozklad existuje, samozřejmě). Tato vlastnost se nazývá *Poisson-Lieova T-pluralita* (více např. v [4]). Pokusme se tedy provést popsané kroky pro případ třírozměrné homogenní rovinné vlny.

4.1 Volba Drinfeldova doublu

V první kapitole jsme si připravili vše potřebné pro identifikaci vhodného Drinfeldova doublu pro naši metriku. Zjistili jsme, že *algebra isometrií může mít třírozměrné podalgebry Bianchiho typu II nebo VI_a* (v případě, že $k \leq \frac{1}{4}$). Odpovídá nějaké z těchto algeber třírozměrná grupa, která by měla na M (naší cílovou varietou je $\mathbb{R}^3$ s metrikou (1.1)) volnou a transitivní akci?

Na první pohled je vidět, že můžeme hned zapomenout na případ Bianchiho algebry II. Tato podalgebra je ve všech třech případech obalem Killingových vektorů $T, X, \tilde{X}$, které generují grupu transformací, jejíž akce na naší varietě nemůže být transitivní, protože žádný z těchto generátorů neobsahuje člen úměrný ∂_u. Každý Killingův vektor ξ představuje infinitesimální bodovou transformaci

$$x^\mu \to x'^\mu = x^\mu + \varepsilon \xi^\mu (x^\mu)$$

a pokud je některá jeho složka nulová, pak příslušná transformace ponechává tuto složku u všech bodů beze změny. A libovolná lineární kombinace vektorů T, X a $\tilde{X}$ bude mít vždy nulovou „u“-tou složku, takže příslušná grupa transformací neobsahuje žádnou takovou transformaci, která by zobrazila bod (u, v, x) na (u', v, x) pro $u \neq u'$.

Podíváme se tedy blíže na podalgebru typu VI_a. Ta v každém z probíraných případů obsahuje vektor $D \equiv u\partial_u - v\partial_v$, čímž se vyhýbáme problému, který vyřadil ze hry podalbegru typu II. To ale ještě *nemusí znamenat, že je tato algebra použitelná*. Skutečně, můžeme se přesvědčit, že žádná z podgrup příslušných podalgebrám VI_a, které jsme nalezli ve druhé kapitole, nepůsobí na $\mathbb{R}^3$ volně. Všechny totiž mají jako jeden z generátorů vektor tvaru $\xi(u, v, x) \equiv u^{C_1}\partial_x + C_2 u^{C_3} x \partial_v$, kde C_i jsou nějaké konstanty. Ten odpovídá infinitesimální transformaci souřadnic $(u, v, x) \to (u', v', x')$ dané rovnicemi

$$
\begin{aligned}
u' &= u \\
v' &= v + \varepsilon C_2 x u^{C_3} \\
x' &= x + \varepsilon u^{C_1} .
\end{aligned}
$$

Z nich je vidět, že bod $(0, v, x)$ se pro *libovolné* ε vždy transformuje opět na $(0, v, x)$. Grupa transformací generovaná Killingovými vektory, tvořícími podalgebru typu VI_a, tak obsahuje neidentické transformace, které ponechávají na místě nějaké body variety, což znamená, že akce takové grupy není volná.

V tuto chvíli je ale důležité si uvědomit, že tento fakt ještě *nemusí znamenat, že je tato algebra nepoužitelná*. Obecný postup pro konstrukci dvojice duálních σ-modelů popsaný v předchozí kapitole, a který chceme použít, sice má jako jeden z předpokladů, že grupa G musí mít na varietě M volnou akci, ale zamysleme se nad tím, proč vůbec chceme toto požadovat. Fakt, že je akce grupy na varietě volná, zajišťuje vzájemně jednoznačný přechod od souřadnic na varietě ke grupovým souřadnicím (a naopak) — každý bod m variety můžeme určit tak, že zadáme prvek grupy g, který na tento bod přenese nějaký výchozí, předem zvolený bod m_0 (v případě, že je akce i transitivní; pokud transitivní není, použijeme nejprve souřadnice y^α k výběru vhodné orbity). A to je skutečná vlastnost, kterou potřebujeme — abychom varietu mohli ekvivalentně popsat i v grupových souřadnicích.

Problém grupy transformací příslušející Bianchiho algebře VI_a je v tom, že po přechodu ke grupovým souřadnicím *nebudeme schopni rozlišit body variety ležící v rovině* $u = 0$. Ale copak jsme schopni takové body rozlišit už v původních souřadnicích? Jakou hodnotu intervalu mezi body $(0, v, x)$ a

$(\mathrm{d}u, v + \mathrm{d}v, x + \mathrm{d}x)$ získáme z metriky (1.1)? Krátce, když už původní metrika má v $u = 0$ *singularitu*, tak proč se pozastavovat nad tím, že provedeme transformaci souřadnic, která body s $u = 0$ nezobrazuje prostě.

Akce diskutované grupy tedy sice není volná, ale i tak ji *můžeme* pro naše účely použít, protože přechodem ke grupovým souřadnicím nepřijdeme o žádnou potřebnou informaci. Nebo jinak, zvolíme-li si za naši cílovou varietu M prostor $(\mathbb{R} \setminus \{0\}) \times \mathbb{R}^2$ s metrikou (1.1), pak podgrupa grupy isometrií, generovaná Killingovými vektory tvořícími Bianchiho algebru VI_a, *má* na této varietě volnou akci. Každopádně to pro nás znamená, že můžeme vzít za výchozí bod našeho snažení algebru VI_a. Pro jednoduchost předpokládejme případ, kdy $0 < k < \frac{1}{4}$ a $a = \frac{1+\nu}{1-\nu}$, $\nu = (1 + \sqrt{1 - 4k})/2$.

4.2 Příprava potřebných objektů

Ze všeho nejdříve si vypíšeme komutační relace algebry $\mathcal{D} = \mathcal{G} \oplus \tilde{\mathcal{G}} = VI_a \oplus I$. Připomeneme, že komutační relace Bianchiho algebry VI_a jsou

$$[X_1, X_2] = -aX_2 - X_3, \quad [X_2, X_3] = 0, \quad [X_3, X_1] = X_2 + aX_3 \tag{4.2}$$

a Bianchiho algebra I je abelovská, tj. $[\tilde{X}^i, \tilde{X}^j] = 0$, $\forall i, j$. Komutátory $[X_i, \tilde{X}^j]$ vypočítáme z rovnosti (3.6). Nenulové jsou pouze tyto:

$$\begin{aligned} &[X_1, \tilde{X}^2] = a\tilde{X}^2 + \tilde{X}^3, \quad [X_2, \tilde{X}^2] = -a\tilde{X}^1, \quad [X_3, \tilde{X}^2] = -\tilde{X}^1\,, \\ &[X_1, \tilde{X}^3] = \tilde{X}^2 + a\tilde{X}^3, \quad [X_2, \tilde{X}^3] = -\tilde{X}^1, \quad [X_3, \tilde{X}^3] = -a\tilde{X}^1\,. \end{aligned} \tag{4.3}$$

Protože jsou v našem případě grupy G i $\tilde{G}$ řešitelné, můžeme jejich libovolný prvek zapsat jako součin jednoparametrických podgrup odpovídajících jednotlivým generátorům

$$\begin{aligned} g &= \mathrm{e}^{x_1 X_1} \mathrm{e}^{x_2 X_2} \mathrm{e}^{x_3 X_3}\,, \\ \tilde{g} &= \mathrm{e}^{y_1 \tilde{X}^1} \mathrm{e}^{y_2 \tilde{X}^2} \mathrm{e}^{y_3 \tilde{X}^3}\,. \end{aligned}$$

Pokud tuto parametrizaci dosadíme do rovnic (3.8), vidíme, že pro nalezení matic $(a), b(g), d(g)$ je třeba umět upravit výrazy typu $\mathrm{e}^{-x_i X_i} X_j \mathrm{e}^{x_i X_i}$. Začněme s vektorem X_1:

$$g^{-1} X_1 g = \mathrm{e}^{-x_3 X_3} \mathrm{e}^{-x_2 X_2} \mathrm{e}^{-x_1 X_1} X_1 \mathrm{e}^{x_1 X_1} \mathrm{e}^{x_2 X_2} \mathrm{e}^{x_3 X_3} .$$

Vnitřní exponenciály $\mathrm{e}^{\pm x_1 X_1}$ s X_1 samozřejmě komutují, zbylé ale nikoliv, protože X_1 nekomutuje ani s X_2 ani s X_3. Chceme-li upravit

$$X_1 \mathrm{e}^{x_2 X_2} = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{x_2^k}{k!} X_1 X_2^k$$

tak, aby vektor X_1 stál zcela vpravo, musíme si indukcí najít vztah pro komutátor X_1 a X_2^k:

$$\begin{aligned} X_1 X_2 &= X_2 X_1 - a X_2 - X_3 \\ X_1 X_2^2 &= X_2^2 X_1 - 2a X_2^2 - 2 X_2 X_3 \\ &\vdots \\ X_1 X_2^k &= X_2^k X_1 - ka X_2^k - k X_2^{k-1} X_3 . \end{aligned}$$

Dosazením a jednoduchou úpravou pak získáme

$$X_1 \mathrm{e}^{x_2 X_2} = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{x_2^k}{k!} (X_2^k X_1 - ka X_2^k - k X_2^{k-1} X_3) = \mathrm{e}^{x_2 X_2} (X_1 - a x_2 X_2 - x_2 X_3) .$$

Výraz v závorce je pak potřeba dál prokomutovat přes $\mathrm{e}^{x_3 X_3}$. Vektor X_2 ale s X_3 komutuje a díky stejnému tvaru komutátorů $[X_1, X_3]$ a $[X_1, X_2]$ odvodíme, že

$$X_1 X_3^k = X_3^k X_1 - ka X_3^k - k X_3^{k-1} X_2$$

a následně pak

$$X_1 \mathrm{e}^{x_3 X_3} = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{x_3^k}{k!} (X_3^k X_1 - ka X_3^k - k X_3^{k-1} X_2) = \mathrm{e}^{x_3 X_3} (X_1 - a x_3 X_3 - x_3 X_2) .$$

Ve výsledku je tedy

$$g^{-1} X_1 g = X_1 + (-a x_2 - x_3) X_2 + (-a x_3 - x_2) X_3 ,$$

čímž jsme určili první řádek matice $a(g)$:

$$a(g) = \begin{pmatrix} 1 & -ax_2 - x_3 & -ax_3 - x_2 \\ . & . & . \\ . & . & . \end{pmatrix} \tag{4.4}$$

Výpočet $g^{-1}X_j g,\ j = 2, 3$ stejným způsobem se už ale značně komplikuje, protože komutátory X_2, resp. X_3 s X_1^k nabývají velice složitých tvarů, protože s každou jednou komutací $X_{2,3}$ přes X_1 nám přibudou další členy úměrné X_2 a X_3, které je pak třeba opět prokomutovávat. Adjungovanou akci Lieovy grupy ale můžeme získat také *exponenciálou* adjungované representace Lieovy algebry, a tu určíme pohodlně ze strukturních konstant. Nalézt pak maticovou exponenciálu už je jen otázka násobení matic, kterou můžeme přenechat výpočetní technice. Výsledek (4.4) si tak schováme „pro kontrolu" a výpočet provedeme pomocí exponenciály.

Nejprve, abychom se vyhnuli problémům s nešikovným značením, zavedeme pro bázi algebry $\mathcal{D}$ jednotné označení $T_A,\ A = 1, \ldots, 6$

$$T_i = X_i, \quad T_{i+3} = \tilde{X}^i, \quad i = 1, \ldots, 3$$

a její strukturní konstanty budeme značit ${f_{ij}}^k$, takže

$$[T_i, T_j] = {f_{ij}}^k T_k\,.$$

Matice $\mathcal{T}_i$ adjungované representace Lieovy algebry $\mathcal{D}$ sestavíme ze strukturních konstant jako ${(\mathcal{T}_i)_j}^k = {f_{ji}}^k$. Pro získání matice adjungované akce grupy příslušné algebře VI_a budeme potřebovat matice

$$\mathcal{T}_1 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & a & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & a & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -a & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & -a \end{pmatrix},$$

$$\mathcal{T}_2 = \begin{pmatrix} 0 & -a & -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & a & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad \mathcal{T}_3 = \begin{pmatrix} 0 & -1 & -a & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & a & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Spočteme exponenciály $\mathrm{e}^{x_1\mathcal{T}_1}$, $\mathrm{e}^{x_2\mathcal{T}_2}$ a $\mathrm{e}^{x_3\mathcal{T}_3}$ a pak už jen vynásobením (tyto úlohy můžeme beze strachu svěřit svému oblíbenému matematickému softwaru) dostaneme hledanou matici adjungované akce

$$\mathrm{Ad}^T(g) = \mathrm{e}^{x_1\mathcal{T}_1} \cdot \mathrm{e}^{x_2\mathcal{T}_2} \cdot \mathrm{e}^{x_3\mathcal{T}_3} =$$

$$= \begin{pmatrix} 1 & -x_3 - ax_2 & -ax_3 - x_2 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \mathrm{e}^{ax_1}\cosh x_1 & \mathrm{e}^{ax_1}\sinh x_1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \mathrm{e}^{ax_1}\sinh x_1 & \mathrm{e}^{ax_1}\cosh x_1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & A & \mathrm{e}^{-ax_1}\cosh x_1 & -\mathrm{e}^{-ax_1}\sinh x_1 \\ 0 & 0 & 0 & B & -\mathrm{e}^{-ax_1}\sinh x_1 & \mathrm{e}^{-ax_1}\cosh x_1 \end{pmatrix},$$

kde

$$A = \mathrm{e}^{-ax_1}\Big[(ax_2 + x_3)\cosh x_1 - (ax_3 + x_2)\sinh x_1\Big],$$
$$B = \mathrm{e}^{-ax_1}\Big[(ax_3 + x_2)\cosh x_1 - (ax_2 + x_3)\sinh x_1\Big].$$

Jak vidíme, tato matice má blokový tvar, který jsme očekávali, protože přepsáním rovnic (3.8) do maticového zápisu máme

$$g^{-1}\begin{pmatrix} T_1 \\ \vdots \\ T_6 \end{pmatrix} g = \begin{pmatrix} a(g) & 0 \\ b(g) & d(g) \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} T_1 \\ \vdots \\ T_6 \end{pmatrix}.$$

Levý horní 3×3 blok je tedy matice $a(g)$, jejíž první řádek opravdu souhlasí s naším výsledkem (4.4). Matice $b(g)$ je nulová, nic jiného jsme ani čekat nemohli, když jsme zvolili grupu $\tilde{G}$ abelovskou.

To nám ale značně ulehčuje výpočet dualizovatelného pole F_{ij}, protože matice $\Pi(g) = b(g)a^{-1}(g)$ je potom nulová a matice σ-modelu $E(g)$ je tak přímo rovna matici E_0, a tudíž *konstantní*. Přepíšeme-li si rovnost (3.10) do maticového zápisu

$$F(x) = e(x) \cdot E_0 \cdot e^T(x)\,, \tag{4.5}$$

vidíme, že nám zbývá už jen nalézt matici $e(x) \equiv e_i^a(g(x))$ tvořenou složkami pravoinvariantních forem.

Dosadíme $g = \mathrm{e}^{x_1 T_1}\mathrm{e}^{x_2 T_2}\mathrm{e}^{x_3 T_3}$ na pravou stranu rovnosti

$$\mathrm{d}g = \frac{\partial g}{\partial x_1}\,\mathrm{d}x_1 + \frac{\partial g}{\partial x_2}\,\mathrm{d}x_2 + \frac{\partial g}{\partial x_3}\,\mathrm{d}x_3\,,$$

provedeme příslušné derivace a ve výrazu $\mathrm{d}g \cdot g^{-1}$ prokomutujeme, co se dá a zjistíme, že

$$\mathrm{d}g \cdot g^{-1} = T_1\,\mathrm{d}x_1 + \mathrm{e}^{x_1 T_1} T_2 \mathrm{e}^{-x_1 T_1}\,\mathrm{d}x_2 + \mathrm{e}^{x_1 T_1}\mathrm{e}^{x_2 T_2} T_3 \mathrm{e}^{-x_2 T_2}\mathrm{e}^{-x_1 T_1}\,\mathrm{d}x_3\,.$$

K výpočtu přítomných „obložení“ exponenciálami využijeme toho, že už známe matici $a\big(g(x_1, x_2, x_3)\big)$, takže např.

$$\mathrm{e}^{x_1 T_1} T_2 \mathrm{e}^{-x_1 T_1} = a\big(g(-x_1, 0, 0)\big)_2{}^l T_l\,.$$

Takto obdržíme konečný tvar

$$\begin{aligned} \mathrm{d}g \cdot g^{-1} = T_1\,\mathrm{d}x_1 &+ (\mathrm{e}^{-ax_1}\cosh x_1 T_2 - \mathrm{e}^{-ax_1}\sinh x_1 T_3)\,\mathrm{d}x_2 + \\ &+ (-\mathrm{e}^{-ax_1}\sinh x_1 T_2 + \mathrm{e}^{-ax_1}\cosh x_1 T_3)\,\mathrm{d}x_3\,, \end{aligned}$$

ze kterého už můžeme sestavit matici $e(x)$

$$e(x) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \mathrm{e}^{-ax_1}\cosh x_1 & -\mathrm{e}^{-ax_1}\sinh x_1 \\ 0 & -\mathrm{e}^{-ax_1}\sinh x_1 & \mathrm{e}^{-ax_1}\cosh x_1 \end{pmatrix}.$$

4.3 Sestavení dualizovatelného modelu

Jako poslední krok je potřeba najít takový tvar matice E_0, aby výsledkem součinu $e(x) \cdot E_0 \cdot e^T(x)$ byla metrika homogenní rovinné vlny, tj. metrika (1.1), pouze napsaná v jiných souřadnicích. Není totiž důvodu, proč by naše zvolená parametrizace x_1, x_2, x_3 prvku $g \in G$ měla být totožná se souřadnicemi u, v, x, ve kterých má homogenní rovinná vlna tvar (1.1). Tento fakt nám cestu k výsledku ještě malinko zkomplikuje.

Hledání matice E_0 začneme povšimnutím, že je matice $e(x)$ symetrická. Proto, aby levá strana (4.5) byla také symetrická (má to být přece metrika), musí být symetrická i matice E_0. Zapišme si ji jako

$$E_0 = \begin{pmatrix} m & n & p \\ n & q & r \\ p & r & s \end{pmatrix} . \tag{4.6}$$

Vynásobením $e(x) \cdot E_0 \cdot e(x)$ určíme složky pole $F(x)$:

$$\begin{aligned} F_{11} &= m \\ F_{12} &= \mathrm{e}^{-ax_1}(n \cosh x_1 - p \sinh x_1) \\ F_{13} &= \mathrm{e}^{-ax_1}(p \cosh x_1 - n \sinh x_1) \\ F_{22} &= \mathrm{e}^{-2ax_1}(q \cosh^2 x_1 - 2r \cosh x_1 \sinh x_1 + s \sinh^2 x_1) \\ F_{23} &= \mathrm{e}^{-2ax_1}(r \cosh^2 x_1 - (q+s) \cosh x_1 \sinh x_1 + r \sinh^2 x_1) \\ F_{33} &= \mathrm{e}^{-2ax_1}(s \cosh^2 x_1 - 2r \cosh x_1 \sinh x_1 + q \sinh^2 x_1) \end{aligned} \tag{4.7}$$

Ptáme se, pro která čísla m, n, p, q, r, s je F v jiných souřadnicích zapsaná metrika (1.1), tj.

$$G(u,v,x) = \begin{pmatrix} -k\frac{x^2}{u^2} & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} , \tag{4.8}$$

kde

$$-k = \frac{2-2a}{(1+a)^2} , \tag{4.9}$$

protože z (1.5) víme, že $-k = \nu(\nu - 1)$ a uvažujeme případ, kdy $a = \frac{1+\nu}{1-\nu}$, tedy $\nu = \frac{a-1}{a+1}$. Jestliže přecházíme k novým souřadnicím $x^i \to x'^i(x^j)$, pak se metrika transformuje podle vztahu

$$g'_{ij} = \frac{\partial x^k}{\partial x'^i} \frac{\partial k^l}{\partial x'^j} g_{kl} . \tag{4.10}$$

Otázka tedy zní, pro které hodnoty šesti parametrů m, n, p, q, r, s je řešením soustavy rovnic (4.10) pro $g'(x'^i) \equiv G(u, v, x)$ a $g(x^i) \equiv F(x_1, x_2, x_3)$ trojice invertibilních (mají to být transformace souřadnic) funkcí

$$x_1 = U(u, v, x), \quad x_2 = V(u, v, x), \quad x_3 = W(u, v, x)\,. \tag{4.11}$$

Takováto úloha je ale, jak se zdá, příliš obecná — rovnice jsou značně komplikované a nalézt správnou odpověď se nám nepodaří.

Ve skutečnosti ale přece vůbec nemusíme takovou úlohu řešit — nemusíme znát *všechny* možné tvary matice E_0, které vyhoví naší podmínce. Chceme-li najít nějaký dualizovatelný model s vlnovým pozadím, stačí nám najít jakoukoliv *jednu* vhodnou matici E_0. Pokusme se tedy nějakou „kvalifikovaně uhodnout“.

Z vyjádření (4.7) složek pole F vidíme, že by se například mnohé zjednodušilo, pokud by platilo, že $p = n$. Není pro to sice žádný důvod, ale také to nic nezakazuje, takže si zvolíme $p = n$ a pokud dalšími úvahami dojdeme k závěru, že v takovém případě nemůže být F homogenní rovinná vlna, pak od tohoto předpokladu upustíme. Pokud tedy $p = n$, pak použitím vztahu

$$\cosh z \pm \sinh z = \mathrm{e}^{\pm z} \tag{4.12}$$

zjistíme, že

$$F_{12} = F_{13} = n\,\mathrm{e}^{-(a+1)x_1}\,.$$

Ze zbývajících složek zase vidíme, že pokud by bylo $s = q$ a ještě $r = \pm q$, pak by se výrazy opět znatelně zjednodušily a všechny $\cosh x_1$ a $\sinh x_1$ bychom pomocí rovnosti (4.12) převedli na $\mathrm{e}^{\pm x_1}$. Uděláme proto druhý předpoklad: $s = q$. To, že v takovém případě musí být $r = -q$, už je potom odůvodnitelné — spočítáme-li ze známých vzorců Christoffelovy symboly, Riemannův tenzor, Ricciho tenzor a Gaussovu křivost metriky (4.8), ujistíme se, že se jedná o metriku zakřiveného prostoročasu, tedy že její Riemannův tenzor je nenulový, dále že její Ricciho tenzor má velmi jednoduchý tvar

$$R_{ij}(u, v, x) = \begin{pmatrix} -\frac{k}{u^2} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \tag{4.13}$$

a konečně, že její Gaussova křivost je nulová

$$R^i_i(u, v, x) = 0\,.$$

Tato její vlastnost se ale nemůže změnit přechodem k jiným souřadnicím, a proto, má-li být $F(x)$ homogenní rovinná vlna v jakýchkoli souřadnicích, musí mít *nulovou Gaussovu křivost.* Přímočarým výpočtem Gaussovy křivosti metriky $F(x)$ o složkách (4.7) dostaneme

$$R^i_i(x_1, x_2, x_3) = \frac{s^2 + 12a^2qs + 2qs + q^2 - 4r^2 - 12a^2r^2}{mqs - mr^2 + 2pnr - p^2q - n^2s}\,.$$

V čitateli dosadíme $s = q$ a položíme ho rovný nule. Získáme rovnici

$$(3a^2 + 1)(q^2 - r^2) = 0\,,$$

jejíž řešení je opravdu $r = \pm q$. Ve slušné společnosti také nedělíme nulou, takže budeme požadovat nenulovost jmenovatele. Dosadíme do něj $s = q$ a $p = n$ a využijeme toho, že $q^2 - r^2 = 0$ a dostaneme nerovnost

$$2n^2(r - q) \neq 0\,,$$

která nám říká nejen, že $r \neq q$, čímžto musí platit $r = -q$, ale také že n musí být nenulové číslo.

Protože jakýkoli nenulový násobek matice E_0 dá ve výsledku stejnou metriku, můžeme se tvářit, že jsme vyjádřili r a s pomocí q, celou matici E_0 vydělili q a $m/q, n/q$ přejmenovali zpátky na m, n a nadále budeme uvažovat matici E_0 tvaru

$$E_0 = \begin{pmatrix} m & n & n \\ n & 1 & -1 \\ n & -1 & 1 \end{pmatrix}.$$

Příslušná metrika F pak má tvar

$$F(x_1, x_2, x_3) = \begin{pmatrix} m & n\,\mathrm{e}^{-(a+1)x_1} & n\,\mathrm{e}^{-(a+1)x_1} \\ n\,\mathrm{e}^{-(a+1)x_1} & \mathrm{e}^{-2(a-1)x_1} & -\mathrm{e}^{-2(a-1)x_1} \\ n\,\mathrm{e}^{-(a+1)x_1} & -\mathrm{e}^{-2(a-1)x_1} & \mathrm{e}^{-2(a-1)x_1} \end{pmatrix}. \tag{4.14}$$

Ricciho tenzor této metriky se stává velmi jednoduchým

$$R_{ij}(x_1, x_2, x_3) = \begin{pmatrix} 2-2a & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

a nabízí se možnost získat první podmínku na podobu transformačních funkcí U, V, W z (4.11) požadavkem, aby se tento Ricciho tenzor jimi transformoval na tenzor (4.13), kam je třeba za k dosadit z (4.9). Díky nulovosti všech složek, kromě R_{11}, klade tento požadavek podmínky pouze na funkci $U(u, v, x)$, a to konkrétně

$$\frac{\partial U}{\partial v} = \frac{\partial U}{\partial x} = 0$$

$$(2-2a)\left(\frac{\partial U}{\partial u}\right)^2 = \frac{2-2a}{(a+1)^2 u^2},$$

což znamená, že

$$U(u, v, x) = \pm \frac{1}{a+1} \ln u\,. \tag{4.15}$$

Tyto znalosti už nám umožní odvodit z rovnic (4.10) tvar funkcí V a W. Zjistíme, že pokud zvolíme $m = 0$, pak pro každé $n \neq 0$ najdeme funkce V, W převádějící společně s funkcí U, danou (4.15), metriku (4.14) na tvar (4.8). Vhodnou volbou n přitom přitom můžeme funkce V, W získat v poměrně jednoduchém tvaru, konkrétně: volbou matice

$$E_0 = \begin{pmatrix} 0 & -1-a & -1-a \\ -1-a & 1 & -1 \\ -1-a & -1 & 1 \end{pmatrix} \tag{4.16}$$

dostaneme ze vztahu (4.5) metriku

$$F(x_1, x_2, x_3) = \begin{pmatrix} 0 & b\,\mathrm{e}^{bx_1} & b\,\mathrm{e}^{bx_1} \\ b\,\mathrm{e}^{bx_1} & \mathrm{e}^{2cx_1} & -\mathrm{e}^{2cx_1} \\ b\,\mathrm{e}^{bx_1} & -\mathrm{e}^{2cx_1} & \mathrm{e}^{2cx_1} \end{pmatrix}, \tag{4.17}$$

kde $b = -1 - a$ a $c = 1 - a$. Ta přechodem k souřadnicím (u, v, x) daným předpisem (pro jednodušší formu přejdeme od a k $\nu = \frac{a-1}{a+1}$)

$$
\begin{aligned}
x_1 &= \frac{\nu - 1}{2} \ln u \\
x_2 &= \frac{v}{2} + \frac{u^{-\nu} x}{2} + \nu \frac{x^2}{4u} \\
x_3 &= \frac{v}{2} - \frac{u^{-\nu} x}{2} + \nu \frac{x^2}{4u}
\end{aligned}
$$

přejde na metriku

$$
G(u, v, x) = \begin{pmatrix} \frac{\nu(\nu-1)x^2}{u^2} & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} ,
$$

což jsme požadovali.

Podařilo se nám tedy najít dualizovatelný σ-model s homogenní rovinnou vlnou jako pozadím a můžeme se tak dále ptát, jak vypadá model k němu duální a jaké vlastnosti má duální metrika.

4.4 Duální model

Na konstrukci duálního modelu není už ale potřeba nic vymýšlet — postupujeme podle návodu ze třetí kapitoly, přičemž použijeme matici E_0 tvaru (4.16). Nejprve najdeme matice $\tilde{a}(\tilde{g}), \tilde{b}(\tilde{g}), \tilde{d}(\tilde{d})$ dané adjungovanou akcí grupy $\tilde{G}$ na $\mathcal{D}$

$$
\tilde{g}^{-1} \begin{pmatrix} T_1 \\ \vdots \\ T_6 \end{pmatrix} \tilde{g} = \begin{pmatrix} \tilde{d}(\tilde{g}) & \tilde{b}(\tilde{g}) \\ 0 & \tilde{a}(\tilde{g}) \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} T_1 \\ \vdots \\ T_6 \end{pmatrix} .
$$

Využijeme opět toho, že adjungovanou akci Lieovy grupy můžeme získat exponenciálou adjungované representace její Lieovy algebry. Sestavíme proto matice adjungované representace $\mathcal{D}$ příslušné generátorům T_4, T_5, T_6:

$$
\mathcal{T}_4 = (0) ,
$$

$$\mathcal{T}_5 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & a & 1 \\ 0 & 0 & 0 & -a & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad \mathcal{T}_6 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & a \\ 0 & 0 & 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -a & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Pokud parametrizujeme prvek $\tilde{g} \in \tilde{G}$ jako $\tilde{g} = \mathrm{e}^{y_1 T_4} \mathrm{e}^{y_2 T_5} \mathrm{e}^{y_3 T_6}$, pak matice adjungované akce

$$\mathrm{Ad}^T(\tilde{g}) = \mathrm{e}^{y_1 \mathcal{T}_4} \cdot \mathrm{e}^{y_2 \mathcal{T}_5} \cdot \mathrm{e}^{y_3 \mathcal{T}_6} =$$

$$= \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & ay_2 + y_3 & y_2 + ay_3 \\ 0 & 1 & 0 & -ay_2 - y_3 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -y_2 - ay_3 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Matice $\tilde{a}(\tilde{g})$ je tedy jednotková, což jsme ostatně očekávali, neboť $\tilde{G}$ je abelovská grupa. Matice $\tilde{b}(\tilde{g})$ je ale tentokrát *netriviální*, takže $\tilde{\Pi}(\tilde{g}) \neq 0$ a

$$\tilde{E}(\tilde{g}) = \big(E_0 + \tilde{b}(\tilde{g})\big)^{-1}.$$

Duální pole $\tilde{F}$ v souřadnicích y_1, y_2, y_3 pak dostaneme součinem matic

$$\tilde{F}(y) = \tilde{e}(y) \cdot \tilde{E}\big(\tilde{g}(y)\big) \cdot \tilde{e}^T(y).$$

Díky komutativitě $\tilde{G}$ je

$$\mathrm{d}\tilde{g} \cdot \tilde{g}^{-1} = T_4\,\mathrm{d}y_1 + T_5\,\mathrm{d}y_2 + T_6\,\mathrm{d}y_3,$$

takže $\tilde{e}(y)$ je jednotková matice a pole $\tilde{F}(y)$ tak dostaneme přímo inverzí

$$\tilde{F}(y) = \big(E_0 + \tilde{b}(\tilde{g})\big)^{-1} =$$

$$= \begin{pmatrix} 0 & -1 - a + ay_2 + y_3 & -1 - a + y_2 + ay_3 \\ -1 - a - ay_2 - y_3 & 1 & -1 \\ -1 - a - y_2 - ay_3 & -1 & 1 \end{pmatrix}^{-1}.$$

Výsledkem je matice o složkách

$$
\begin{aligned}
\tilde{F}_{11} &= 0 \\
\tilde{F}_{12} &= -\frac{1}{(y_2+y_3+2)(1+a)} \\
\tilde{F}_{13} &= -\frac{1}{(y_2+y_3+2)(1+a)} \\
\tilde{F}_{21} &= \frac{1}{(y_2+y_3-2)(1+a)} \\
\tilde{F}_{22} &= \frac{(1+a+y_2+ay_3)(-1-a+y_2+ay_3)}{(y_2+y_3+2)(y_2+y_3-2)(1+a)^2} \\
\tilde{F}_{23} &= -\frac{(1+a+ay_2+y_3)(-1-a+y_2+ay_3)}{(y_2+y_3+2)(y_2+y_3-2)(1+a)^2} \\
\tilde{F}_{31} &= \frac{1}{(y_2+y_3-2)(1+a)} \\
\tilde{F}_{32} &= -\frac{(1+a+y_2+ay_3)(-1-a+ay_2+y_3)}{(y_2+y_3+2)(y_2+y_3-2)(1+a)^2} \\
\tilde{F}_{33} &= \frac{(1+a+ay_2+y_3)(-1-a+ay_2+y_3)}{(y_2+y_3+2)(y_2+y_3-2)(1+a)^2}
\end{aligned}
\tag{4.18}
$$

To je tedy duální pole k $F(x)$, které je dáno (4.17). Pro lepší přehlednost můžeme zkusit převést $\tilde{F}(y)$ do nějakých jiných souřadnic, ve kterých nabyde jednoduššího tvaru (i když nám to samozřejmě nepřinese nic nového). Vodítkem nám může být to, že se ve vyjádření (4.18) vyskytuje vždy součet $y_2 + y_3$. Snadno přijdeme na to, že přechodem k souřadnicím (z_1, z_2, z_3) pomocí transformačních rovnic (opět přitom přejdeme od a k ν)

$$
\begin{aligned}
y_1 &= \frac{z_1}{\nu} \\
y_2 &= z_2 + z_3 \\
y_3 &= z_2 - z_3
\end{aligned}
$$

přejde $\tilde{F}$ na mnohem jednodušší tvar

$$
\tilde{F}(z_1, z_2, z_3) = \begin{pmatrix} 0 & -\frac{1-\nu}{2\nu(z_2+1)} & 0 \\ \frac{1-\nu}{2\nu(z_2-1)} & \frac{\nu^2 z_3^2}{z_2^2-1} & -\frac{\nu z_3}{z_2-1} \\ 0 & -\frac{\nu z_3}{z_2+1} & 1 \end{pmatrix} .
$$

Povšimněme si, že pole $\tilde{F}$ duálního modelu už *není symetrické*. Chceme-li tedy opravdu duální *metriku* k homogenní rovinné vlně, musíme vzít pouze symetrickou část $\tilde{F}$

$$\tilde{G}(z_1, z_2, z_3) = \begin{pmatrix} 0 & \frac{1-\nu}{2\nu(z_2^2-1)} & 0 \\ \frac{1-\nu}{2\nu(z_2^2-1)} & \frac{\nu^2 z_3^2}{z_2^2-1} & -\frac{\nu z_2 z_3}{z_2^2-1} \\ 0 & -\frac{\nu z_2 z_3}{z_2^2-1} & 1 \end{pmatrix}. \tag{4.19}$$

Tato metrika má velmi podobné vlastnosti jako metrika homogenní rovinné vlny — je to metrika zakřiveného prostoročasu, protože její Riemannův tenzor je obecně nenulový, její Ricciho tenzor má přitom jednoduchý tvar

$$\tilde{R}_{ij}(z_1, z_2, z_3) = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{\nu(\nu+1)}{z_2^2-1} & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \tag{4.20}$$

a její Gaussova křivost je nulová

$$\tilde{R}^i_i = 0\,.$$

Závěr

Výsledkem této práce je tedy potvrzení, že skutečně *je* možné nalézt σ-model, jehož pozadím je homogenní rovinná vlna, a který je přitom Poisson-Lie symetrický, tedy *dualizovatelný*. Zkonstruovali jsme takový model pro Drinfeldův double s rozkladem $\mathcal{D} = VI_a \oplus I$ a za pomoci nalezené matice E_0 pak už lehce sestrojili i model k němu duální a nalezli tak Poisson-Lie *duální metriku* k homogenní rovinné vlně dimenze tři.

Zajímavé je, že pro $\nu = -1$, tj. $a = 0$ je Ricciho tenzor duální metriky nulový, jak je vidět z tvaru (4.20). Totéž platí i pro Riemannův tenzor, neboť ten je ve třech rozměrech zcela určen pouze Ricciho tenzorem. Duální metrika je pak tedy *plochá* a pro takovýto případ je možno nalézt řešení pohybových rovnic příslušného σ-modelu. Poisson-Lie dualita by pak mohla být použita k získání řešení původního modelu se zakřiveným a časově závislým pozadím!

Skutečně, i když jsme nejprve v celém postupu předpokládali $0 < k < 1/4$, díky čemuž ja pak $a > 0, a \neq 1$, nic ve skutečnosti nebrání tomu, vzít metriku s $a = 0$, tj. $k = -2$ a sestrojit na ní dualizovatelný model pomocí Drinfeldova doublu $\mathcal{D} = VI_0 \oplus I$, který získáme dosazením $a = 0$ do (4.17) a následně sestrojit duální model, který pak bude plochý. Proto je na místě se ptát, proč autoři v [1] požadují, aby $k > 0$.

Odpovědí je, že tento požadavek má příčinu v možnosti použití homogenní rovinné vlny jako pozadí strunového modelu. Chceme totiž, aby strunová vazbová konstanta e^{ϕ}, kde ϕ je dilatonové pole, byla nulová pro $u = 0$. Dilatonové pole $\phi(u)$ $(d+2)$-rozměrné metriky (1.2) přitom musí splňovat

$$\phi''(u) = -\frac{d}{2}\lambda(u)\,.$$

Pro $\lambda(u) = \frac{k}{u^2}$ má dilatonové pole tvar

$$\phi = \phi_0 + cu + \frac{1}{2}dk \ln u$$

a vazbová konstanta je tedy

$$\mathrm{e}^{\phi_0+cu+\frac{1}{2}dk\ln u}=g_0\mathrm{e}^{cu}u^{\frac{1}{2}dk}\,.$$

Proto, pokud požadujeme její nulovost v $u=0$, musí být $k>0$.

Výsledkem tedy je, že sice můžeme sestrojit dualizovatelný model pro $k=-2, a=0$ a k němu plochý duální model, ale takovéto σ-modely pak nebudou mít žádnou fyzikální interpretaci.

LITERATURA

[1] PAPADOPOULOS G., RUSSO J.G., TSEYTLIN A.A.: *Solvable model of strings in a time-dependent plane-wave background.* Class. Quant. Grav. 20 (2003) 969-1016 `[hep-th/0211289v2]`

[2] KLIMČÍK C.: *Poisson-Lie T-duality.* Nucl. Phys. Proc. Suppl. 46 (1996) 116-121 `[hep-th/9509095]`

[3] HLAVATÝ L., ŠNOBL L.: *Classification of 6-dimensional real Drinfeld doubles.* Int. J. Mod. Phys. A 17 (2002) 4043-4068 `[math/0202210]`

[4] HLAVATÝ L., ŠNOBL L.: *Poisson-Lie T-plurality of three-dimensional conformally invariant sigma models II: Nondiagonal metrics and dilaton puzzle.* JHEP 0410 (2004) 045 `[hep-th/0408126v2]`

[5] HLAVATÝ L.: *Classical solution of a sigma-model in curved background.* Phys. Lett. B 625 (2005) 285-290 `[hep-th/0506188]`

[6] KLIMČÍK C., ŠEVERA P.: *Dual Non-Abelian Duality and the Drinfeld Double.* Phys. Lett. B 351 (1995) 455-462 `[hep-th/9502122v3]`

[7] JAFARIZADEH M.A., REZAEI-AGHDAM A.: *Poisson-Lie T-Duality and Bianchi Type Algebras.* Phys. Lett. B 458 (1999) 477-490 `[hep-th/9903152v2]`

[8] RIKARD VON UNGE: *Poisson-Lie T-plurality.* JHEP 0207 (2002) 014 `[hep-th/0205245v2]`

[9] HJELMELAND S.E., LINDSTRÖM U.: *Duality for the Non-Specialist.* UIO/PHYS/97-03 `[hep-th/9705122v2]`

Prohlášení

Prohlašuji, že jsem svou diplomovou práci vypracoval samostatně a použil jsem pouze podklady (literaturu, projekty, SW atd.) uvedené v přiloženém seznamu.

Nemám závažný důvod proti užití tohoto školního díla ve smyslu § 60 Zákona č.121/2000 Sb., o právu autorském, o právech souvisejících s právem autorským a o změně některých zákonů (autorský zákon).

V Praze dne ....

podpis