České vysoké učení technické v Praze
Fakulta jaderná a fyzikálně inženýrská

REŠERŠNÍ PRÁCE

Posluchač: Aleš Černý

Vedoucí práce: prof. RNDr. Ladislav Hlavatý, DrSc.

20. 9. 2004

Klasifikace a využití Lieových algeber

pro řešení Einsteinových rovnic

Aleš Černý

OBSAH

1 Kosmologické modely

Když v roce 1916 Albert Einstein uveřejnil svoji obecnou teorii relativity, lidstvo získalo prostředek ke studiu vlastností vesmíru v kosmickém měřítku, dokonce i vlastností vesmíru jako celku, což Newtonova teorie gravitace vůbec neumožňovala (neboť hmota ve statickém Newtonově vesmíru by se musela pod vlivem gravitace stáhnout do jednoho kompaktního tělesa v případě konečného vesmíru a v případě nekonečného vesmíru dokonce Newtonova gravitační teorie implikuje nulovost hustoty hmoty v celém vesmíru). Zejména pak naprosto nová myšlenka, že prostor kolem nás je zakřivený a náš vesmír jistě není plochý, vybízela ke konstrukci různých kosmologických modelů, vznikajících vždy na základě nějakých předpokladů, které přisuzují vesmíru určité vlastnosti.

K nejpřirozenějším předpokladům o vesmíru patří nepochybně homogenita a izotropie vesmíru jako celku. Odhlédneme-li od lokálních (v astronomickém měřítku ovšem) nehomogenit a fluktuací hmoty ve formě hvězd a galaxií, lze předpokládat, že je vesmír vyplněn hmotou poměrně stejnorodě a vlastnosti prostoru by tak měly být stejné v každém místě ve vesmíru a neměl by být privilegován ani žádný specifický směr. Tomu zatím odpovídají veškeré experimentální údaje, jako pozorované rozložení hvězd a galaxií v našem okolí a zejména pak reliktní záření.

Obecně je za kosmologický model považována trojice — prostoročas, teorie gravitace a hmotné pole. Jinými slovy, musíme si zvolit charakter prostoročasu (např. izotropní a homogenní, pouze homogenní nebo třeba zcela obecný), pak musíme říci, jakými zákony se řídí hmota v takovém prostoročase (je známo, že ostatní síly oproti gravitaci velmi rychle ubývají se vzdáleností, a tak se gravitace stává rozhodující silou ve velkých měřítkách), a potom je také třeba říci, jak je v tomto prostoru hmota rozložena (můžeme mít model pro vakuum, prostor spojitě vyplněný zářením nebo ideální kapalinou).

Co se týče teorie gravitace, již bylo naznačeno, že se budeme zabývat výhradně Einsteinovou obecnou teorií relativity (OTR). Vzhledem k tomu, že od jejích stých narozenin nás dělí jen pár let, byly o ní sepsány již stovky, ne-li tisíce knih, a proto považuji za poměrně zbytečné zde líčit další „Úvod do obecné teorie relativity“, nehledě na to, že by se tím rozsah celého textu přibližně ztrojnásobil. Jako vhodnou literaturu na úvod doporučuji [MF], pro pokročilejší studium potom [TF].

Přesto zde uvedu alespoň ty nejzákladnější prvky OTR, na které se dále v textu odkazuji, a které jsou ve výpočtech hojně používány. Samozřejmě základ tvoří *Einsteinovy gravitační rovnice* pro neznámou g_{ik} — *metrický tenzor:*

$$R_{ik} - \frac{1}{2} R g_{ik} = \frac{8\pi G}{c^4} T_{ik} \,. \tag{1.1}$$

Tenzor g_{ik} plní stejnou roli jako ve speciální teorii relativity, tj. určuje interval (a tím tedy metrické vlastnosti prostoročasu) vztahem

$$\mathrm{d}s^2 = g_{ik}\, \mathrm{d}x^i\, \mathrm{d}x^k \,, \tag{1.2}$$

ale narozdíl STR, v obecné relativitě nemá pevně daný, diagonální tvar odpovídající Minkowskiho metrice, nýbrž zcela obecný, pouze s omezením na jeho symetričnost. Vzhledem k libovolnosti znaménka intervalu vidíme, že ve vztahu (1.2) vystupuje g_{ik} jako *indefinitní forma.*

Levá strana Einsteinových rovnic je čistě geometrická a k definici veličin, které se v ní vyskytují se používají tzv. koeficienty afinní konexe, v OTR nazývané *Christoffelovy symboly*, které se dají vyjádřit pomocí metrického tenzoru a jeho derivací:

$$\Gamma^i{}_{kl} = \frac{1}{2} g^{im} (g_{mk,l} + g_{lm,k} - g_{kl,m}) \,. \tag{1.3}$$

Jen pro úplnost: zde i ve zbytku textu je užíváno Einsteinova sumačního pravidla, tj. opakování indexu znamená sčítání přes všechny jeho hodnoty. Všechny latinské indexy nabývají hodnot 0 až 3. Čárka v dolním indexu značí derivaci podle příslušné souřadnice, tedy například

$$g_{mk,l} = \frac{\partial g_{mk}}{\partial x^l} \,.$$

Pomocí Christoffelových symbolů můžeme dále definovat tenzor čtvrtého řádu, *Riemannův tenzor křivosti*

$$R^i{}_{klm} = \frac{\partial \Gamma^i{}_{km}}{\partial x^l} - \frac{\partial \Gamma^i{}_{kl}}{\partial x^m} + \Gamma^i{}_{nl}\Gamma^n{}_{km} - \Gamma^i{}_{nm}\Gamma^n{}_{kl} \,, \tag{1.4}$$

popisující geometrii prostoročasu. Později použijeme některé jeho vlastnosti, jako symetrie a antisymetrie v některých indexech, které jsou vyjádřeny vztahy

$$R_{iklm} = -R_{kilm} = -R_{ikml} = R_{lmik} \tag{1.5}$$

a

$$R_{iklm} + R_{imkl} + R_{ilmk} = 0 \,. \tag{1.6}$$

Zúžením Rimannova tenzoru křivosti získáme *Ricciho tenzor*

$$R_{ik} = R_{ki} = R^l{}_{ilk} \tag{1.7}$$

a dalším úžením potom *skalární křivost*

$$R = R^i_i = g^{ik} R_{ik} \,. \tag{1.8}$$

Pravá strana Einsteinových rovnic osahuje kromě známých konstant (c — rychlost světla ve vakuu, G — gravitační konstanta) tenzor energie a hybnosti, který odráží rozložení hmoty a energie v prostoročase a zřejmě se tedy bude lišit pro různé kosmologické modely popisující různé možnosti takového rozložení. Později použijeme model popisující hmotu jako ideální kapalinu, kterého se dá využít i k modelování již poměrně realistického případu — homogenního prachu. Potřebný vztah pro tenzor energie a hybnosti ideální kapaliny (p je tlak, ε hustota energie a u^i čtyřrychlost) zní:

$$T^k_i = (p + \varepsilon) u_i u^k - p\delta^k_i \,. \tag{1.9}$$

Rovnice (1.1) tedy představují deset nelineárních parciálních diferenciálních rovnic pro deset složek metrického tenzoru (tenzory g_{ik}, R_{ik} i T_{ik} mají díky symetričnosti jen deset nezávislých komponent). Jejich řešení je obecně značně obtížné, takže dodnes je známo jen několik exaktních řešení pro několik konkrétních, zidealizovaných případů (jako např. gravitační pole sféricky symetrického hmotného tělesa).

Pro studium vesmíru je třeba na prostoročas uvalit nějaké omezující předpoklady, které by nám umožnily Einsteinovy rovnice vůbec vyřešit. Neboli, je třeba zvolit poslední zbývající člen trojice našeho kosmologického modelu — charakter prostoročasu. V následujících kapitolách probereme postupně modely s prostorem homogenním a izotropním a s prostorem pouze homogenním. Použitelnost a oprávněnost takových modelů byla diskutována už na začátku kapitoly. Jen bych chtěl ještě upozornit na to, že pokud zde mluvíme o izotropii či homogennitě, jedná se vždy o příslušné symetrie prostoru, nikoliv o symetrie fyzikálních zákonů, o kterých např. hovoří teorém E. Noetherové jako o ekvivalentech různých zákonů zachování.

K tomu, abychom mohli s pojmy izotropie a homogenity prostoru pracovat, je třeba je matematicky interpretovat, tedy zformulovat podmínky, které musí splňovat metrický tenzor prostoročasu (protože právě tento tenzor určuje jeho vlastnosti), má-li být prostor izotropní nebo homogenní. Podrobné odvození takových podmínek lze najít v [GC]. Zde uvedeme pouze několik důležitých myšlenek a výsledků bez jejich dokazování.

Metrika $g_{ik}(x)$ je podle definice *tvarově invariantní* vzhledem k dané transformaci souřadnic $x \to x'$, když transformovaná metrika $g'_{ik}(x')$ je stejnou funkcí svého argumentu x'^i, jako je původní metrika $g_{ik}(x)$ funkcí svého argumentu x^i. Tvarově invariantní metrika tedy splňuje

$$\forall x\,, \qquad g'_{ik}(x) = g_{ik}(x)\,. \tag{1.10}$$

Transformovaná a původní metrika spolu souvisí vztahem

$$g_{ik}(x) = \frac{\partial x'^m}{\partial x^i}\,\frac{\partial x'^n}{\partial x^k}\,g'_{mn}(x')\,,$$

do kterého když dosadíme (1.10), získáme podmínku pro tvarovou invarianci metriky vzhledem k transformaci $x \to x'$

$$g_{ik}(x) = \frac{\partial x'^m}{\partial x^i}\,\frac{\partial x'^n}{\partial x^k}\,g_{mn}(x')\,. \tag{1.11}$$

Transformace $x \to x'$, která pro danou metriku splňuje tuto podmínku se nazývá *izometrie*. Problém nalezení všech izometrií pro danou metriku je ale velmi obtížný, protože vztah (1.11) představuje poměrně složitou podmínku pro funkci $x'^i(x)$. Situace se ale značně zjednoduší, pokud budeme uvažovat pouze prostorové infinitezimální transformace souřadnic, tedy budeme hledat *infinitezimální izometrie* ve tvaru

$$x'^i = x^i + \varepsilon\,\xi^i(x)\,, \tag{1.12}$$

kde ε je malý parametr. Pokud teď rozepíšeme podmínku (1.11) do prvního řádu v ε a ještě ji přepíšeme pomocí kovariantních komponent $\xi_k \equiv g_{ik}\,\xi^i$, obdržíme podmínku

$$\frac{\partial \xi_k}{\partial x^i} + \frac{\partial \xi_i}{\partial x^k} - 2\xi_l\,\Gamma^l{}_{ik} = 0\,.$$

Každé čtyřvektorové pole $\xi_k(x)$, které tuto podmínku splňuje, se nazývá *Killingův vektor* metriky $g_{ik}(x)$. Problém nalezení všech infinitezimálních izometrií dané metriky je tedy převeden na problém nalezení všech Killingových vektorů této metriky.

Prostor nazveme *homogenním*, pokud existují infinitezimální izometrie (1.12), které zobrazí jakýkoli bod X do bodu v jeho okolí. Metrika takového prostoru musí připouštět Killingovy vektory, které v jakémkoli bodě mohou nabývat všech možných hodnot. Pro N-rozměrný prostor lze vybrat N nezávislých Killingových vektorů. Podobně nazveme prostor *izotropním* kolem daného bodu X, pokud existují infinitezimální izometrie (1.12), které ponechávají bod X na místě (tj. $\xi^k(X) = 0$), a pro které první derivace Killingových vektorů nabývají jakýchkoli hodnot (omezeny jsou pouze podmínkou (1.11)). V N-rozměrném prostoru lze vybrat $N(N-1)/2$ nezávislých Killingových vektorů.

Dále jsou pro nás důležité pouze některé výsledky plynoucí z podrobného studia Killingových vektorů. Zejména pak to, že izotropie prostoru kolem všech bodů automaticky implikuje i jeho homogenitu. Hovoří-li se dále v textu o izotropním prostoru, myslí se izotropie kolem každého bodu a z toho plynoucí homogenita prostoru se již nezmiňuje. Dalším důsledkem použitým v textu je platnost vztahu (2.1) vyjadřujícího tvar Riemannova tenzoru pro izotropní prostor, který se dá odvodit ze vztahů (1.5) a (1.6). Všechny důkazy lze najít v [GC] v kapitole o symetrických prostorech.

2 Izotropní prostory

Než se pustíme přímo do zkoumání metriky časoprostoru, prostudujeme nejdříve metriku samotného (třírozměrného) prostoru, bez uvažování časové závislosti. Metrický tenzor tohoto prostoru, který budeme značit $\gamma_{\alpha\beta}$, je třírozměrný a jeho komponenty získáme z příslušných komponent g_{ik}:

$$\gamma_{\alpha\beta} = -g_{\alpha\beta}\,,$$

kde indexy α i β (a všechny řecké indexy použité dále v textu) probíhají hodnoty 1 až 3. Čtverec délkového intervalu v prostoru můžeme psát jako

$$\mathrm{d}l^2 = \gamma_{\alpha\beta}\,\mathrm{d}x^\alpha\,\mathrm{d}x^\beta\,,$$

a protože délka v třírozměrném prostoru je vždy kladná, vidíme, že zde metrický tenzor $\gamma_{\alpha\beta}$ vystupuje jako *pozitivně definitní forma.*

Christoffelovy symboly $\lambda^\alpha{}_{\beta\gamma}$ obdržíme z $\gamma_{\alpha\beta}$ stejně jako v (1.3). Jediným rozdílem je, že se sčítá jen přes tři hodnoty indexů. Třírozměrný tenzor křivosti budeme značit $P^\alpha{}_{\beta\gamma\delta}$ a získáme ho z Christoffelových symbolů stejně jako v definici (1.4).

Z vlastností symetrií tenzoru křivosti (1.5) a (1.6) plyne, že tenzor $P^\alpha{}_{\beta\gamma\delta}$ musí mít pro izotropní prostor tvar

$$P_{\alpha\beta\gamma\delta} = \lambda(\gamma_{\alpha\gamma}\gamma_{\beta\delta} - \gamma_{\alpha\delta}\gamma_{\gamma\beta})\,, \tag{2.1}$$

kde λ je konstanta. Analogicky se čtyřrozměrným časoprostorem definujeme třírozměrný Ricciho tenzor zúžením tenzoru křivosti:

$$P_{\alpha\beta} = P^\gamma{}_{\alpha\gamma\beta}\,.$$

Protože $P^\alpha{}_{\beta\gamma\delta} = \gamma^{\alpha\xi}P_{\xi\beta\gamma\delta}$, je

$$P_{\alpha\beta} = \lambda\gamma^{\gamma\mu}(\gamma_{\mu\gamma}\gamma_{\alpha\beta} - \gamma_{\mu\beta}\gamma_{\gamma\alpha}) = \lambda(\delta^\gamma_\gamma\gamma_{\alpha\beta} - \delta^\gamma_\beta\gamma_{\gamma\alpha}) = 2\lambda\gamma_{\alpha\beta}\,. \tag{2.2}$$

Dalším úžením potom získáme skalární křivost

$$P = P^\alpha_\alpha = \gamma^{\alpha\beta}P_{\alpha\beta} = 2\lambda\gamma^{\alpha\beta}\gamma_{\alpha\beta} = 6\lambda\,.$$

Vidíme tedy, že křivost izotropního prostoru je určena jedinou konstantou, podle jejíž hodnoty rozlišujeme tři odlišné případy: tzv. *prostor s kladnou konstantní křivostí* pro kladnou hodnotu λ, *prostor se zápornou konstantní křivostí* pro $\lambda < 0$ a *prostor s nulovou křivostí* pro $\lambda = 0$, což je plochý, euklidovský prostor.

K vyjádření metriky si vypomůžeme geometrickou analogií — podíváme se na tvar metriky třírozměrného prostoru, o němž víme, že je izotropní, a na který budeme pohlížet jako na nadplochu ve čtyřrozměrném (plochém) prostoru. Takovým izotropním prostorem může být třírozměrná sféra, která je určená rovnicí

$$x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 + x_4^2 = a^2\,, \tag{2.3}$$

kde konstanta a je poloměr sféry a x_1, x_2, x_3 a x_4 jsou souřadnice ve čtyřrozměrném prostoru, na kterém má délkový element tvar

$$\mathrm{d}l^2 = \mathrm{d}x_1^2 + \mathrm{d}x_2^2 + \mathrm{d}x_3^2 + \mathrm{d}x_4^2\,. \tag{2.4}$$

Z tohoto výrazu můžeme pomocí (2.3) vyloučit souřadnici x_4 a délkový element na třírozměrné sféře tak psát jako

$$\mathrm{d}l^2 = \mathrm{d}x_1^2 + \mathrm{d}x_2^2 + \mathrm{d}x_3^2 + \frac{(x_1\,\mathrm{d}x_1 + x_2\,\mathrm{d}x_2 + x_3\,\mathrm{d}x_3)^2}{a^2 - x_1^2 - x_2^2 - x_3^2}\,. \tag{2.5}$$

Metrický tenzor má tedy tvar

$$\gamma_{\alpha\beta} = \delta_{\alpha\beta} + \frac{x_\alpha x_\beta}{a^2 - x_1^2 - x_2^2 - x_3^2}\,.$$

Teď už dokážeme určit konstantu λ z (2.1). Využijeme toho, že $P_{\alpha\beta\gamma\delta}$ má stejný tvar v každém bodě prostoru (homogenita), a proto ho stačí spočítat jen v okolí počátku, kde je

$$\gamma_{\alpha\beta} = \delta_{\alpha\beta} + \frac{x_\alpha x_\beta}{a^2}\,. \tag{2.6}$$

Spočítáme první derivace metrického tenzoru:

$$\gamma_{\alpha\beta,\xi} = \frac{\partial\Big(\delta_{\alpha\beta} + \dfrac{x_\alpha x_\beta}{a^2}\Big)}{\partial x^\xi} = \frac{1}{a^2}(\delta_{\beta\xi}x_\alpha + \delta_{\alpha\xi}x_\beta)\,.$$

V počátku jsou zřejmě nulové, stejně jako Christoffelovy symboly $\lambda^\alpha{}_{\beta\gamma}$, což je patrné z definice (1.3). Díky tomu se výpočet tenzoru křivosti podle (1.4) značně zjednodušuje. Dopočítáme ještě druhé derivace metrického tenzoru a první derivace Christoffelových symbolů v počátku:

$$\frac{\partial(\gamma_{\alpha\beta,\xi})}{\partial x^\eta} = \frac{1}{a^2}(\delta_{\beta\xi}\delta_{\alpha\eta} + \delta_{\alpha\xi}\delta_{\beta\eta})\,,$$
$$\frac{\partial\lambda^\alpha{}_{\beta\gamma}}{\partial x^\eta} = \frac{1}{2}\gamma^{\alpha\xi}\left(\frac{\partial(\gamma_{\xi\beta,\gamma})}{\partial x^\eta} + \frac{\partial(\gamma_{\gamma\xi,\beta})}{\partial x^\eta} - \frac{\partial(\gamma_{\beta\gamma,\xi})}{\partial x^\eta}\right) = \frac{1}{a^2}\gamma^{\alpha\xi}\delta_{\beta\gamma}\delta_{\xi\eta}\,.$$

Po dosazení do definice (1.4) dostáváme pro tenzor křivosti v počátku vztah

$$P^\alpha{}_{\beta\gamma\delta} = \frac{1}{a^2}\gamma^{\alpha\xi}(\delta_{\beta\delta}\delta_{\xi\gamma} - \delta_{\beta\gamma}\delta_{\xi\delta})\,,$$

z kterého po porovnání s vyjádřením $P^\alpha{}_{\beta\gamma\delta}$ z (2.1) s metrikou (2.6) plyne, že

$$\lambda = \frac{1}{a^2}\,. \tag{2.7}$$

Veličinu a můžeme nazývat *poloměrem křivosti* prostoru. Předpokládejme nyní, že λ je kladná, tj. že $a^2 > 0$. Přejdeme od souřadnic x_1, x_2, x_3 ke sférickým souřadnicím r, φ, ϑ:

$$x_1 = r\cos\varphi\sin\vartheta\,,$$
$$x_2 = r\sin\varphi\sin\vartheta\,,$$
$$x_3 = r\cos\vartheta\,,$$

kde ovšem $r < a$, jak plyne z (2.3). V těchto souřadnicích teď vyjádříme délkový element (2.5). Protože víme, že

$$\mathrm{d}x_1^2 + \mathrm{d}x_2^2 + \mathrm{d}x_3^2 = \mathrm{d}r^2 + r^2(\sin^2\vartheta\,\mathrm{d}\varphi^2 + \mathrm{d}\vartheta^2)\,,$$

stačí, když si dopočítáme

$$x_1\,\mathrm{d}x_1 + x_2\,\mathrm{d}x_2 + x_3\,\mathrm{d}x_3 = r\,\mathrm{d}r$$

a hned můžeme psát, že

$$\mathrm{d}l^2 = \frac{\mathrm{d}r^2}{1 - \dfrac{r^2}{a^2}} + r^2(\sin^2\vartheta\,\mathrm{d}\varphi^2 + \mathrm{d}\vartheta^2)\,. \tag{2.8}$$

Počátek souřadnic můžeme samozřejmě zvolit v kterémkoli bodě prostoru. Pomocí tohoto vyjádření délkového elementu můžeme spočítat integrál přes úhel φ, tedy to, co bychom mohli nazvat „obvod kruhu“

$$l = \int_0^{2\pi} r\,\mathrm{d}\varphi = 2\pi r\,,$$

a stejně tak „povrch koule“ jako integrál

$$S = \int_0^{2\pi}\int_0^{\pi} r^2 \sin\vartheta\,\mathrm{d}\varphi\,\mathrm{d}\vartheta = 4\pi r^2\,.$$

„Poloměr“ takového kruhu či koule ale není roven r, jak se můžeme přesvědčit integrací:

$$\int_0^r \frac{\mathrm{d}r}{\sqrt{1-\frac{r^2}{a^2}}} = a\,\arcsin\frac{r}{a}\,.$$

Tento výraz je větší než r (pokud $r < a$), a tak podíl „obvodu kruhu“ a jeho „poloměru“ je menší než 2π.

Další možný tvar elementu $\mathrm{d}l^2$ dostaneme, zavedeme-li místo souřadnice r souřadnici χ vztahem

$$r = a\,\sin\chi\,, \qquad \chi \in (0,\pi)\,.$$

Znamená to vlastně přejít od x_1, x_2, x_3, x_4 ke „čtyřrozměrným sférickým souřadnicím“ a, χ, φ, ϑ:

$$x_1 = a\,\sin\chi\cos\varphi\sin\vartheta\,, \qquad x_3 = a\,\sin\chi\cos\vartheta\,,$$
$$x_2 = a\,\sin\chi\sin\varphi\sin\vartheta\,, \qquad x_4 = a\,\cos\chi\,.$$

Dosazením do (2.8) nebo přímo do (2.4) dostáváme

$$\mathrm{d}l^2 = a^2\left[\mathrm{d}\chi^2 + \sin^2\chi(\sin^2\vartheta\,\mathrm{d}\varphi^2 + \mathrm{d}\vartheta^2)\right], \tag{2.9}$$

tedy souřadnice χ určuje vzdálenost od počátku, která je rovna $a\,\chi$. Povrch koule je v těchto souřadnicích roven

$$S = \int_0^{2\pi}\int_0^{\pi} a^2\sin^2\chi\sin\vartheta\,\mathrm{d}\varphi\,\mathrm{d}\vartheta = 4\pi a^2\sin^2\chi\,.$$

S rostoucí vzdáleností od počátku se nejprve povrch koule zvětšuje, až při vzdálenosti $\frac{\pi}{2}a$ dosáhne maxima a začne se zmenšovat. Nakonec dosáhne nuly ve vzdálensti πa od počátku, což je největší vzdálenost, která může v tomto prostoru vůbec existovat.

Pro celkový objem prostoru platí:

$$V = \int_0^{\pi}\int_0^{2\pi}\int_0^{\pi} a^3\sin^2\chi\sin\vartheta\,\mathrm{d}\chi\,\mathrm{d}\varphi\,\mathrm{d}\vartheta = 2\pi^2 a^3\,.$$

Můžeme říci, že prostor s kladnou křivostí se „uzavírá do sebe“ — ačkoli nemá žádné hranice, jeho objem je konečný!

Podíváme se ještě na prostor se zápornou křivostí. Z (2.7) vidíme, že λ je záporná, pokud je a imaginární. Jestliže v předchozích vzorcích, popisujících prostor s kladnou křivostí, zaměníme a za $\mathrm{i}a$, získáme velmi snadno příslušné vzorce pro prostor s křivostí zápornou. Délkový element má v souřadnicích r, φ, ϑ tvar

$$\mathrm{d}l^2 = \frac{\mathrm{d}r^2}{1+\dfrac{r^2}{a^2}} + r^2(\sin^2\vartheta\,\mathrm{d}\varphi^2 + \mathrm{d}\vartheta^2)\,,$$

kde $r \in (0,\infty)$ a poloměr kruhu s obvodem $2\pi r$ či koule s povrchem $4\pi r^2$ je teď

$$\int_0^r \frac{\mathrm{d}r}{\sqrt{1+\frac{r^2}{a^2}}} = a\,\operatorname{arg\,sinh}\frac{r}{a}\,,$$

což je výraz menší než r a poměr obvodu kruhu ku jeho poloměru je tedy v tomto případě větší než 2π!

Zavedením nové souřadnice χ vztahem

$$r = a\sinh\chi\,, \qquad \chi \in (0,\infty)$$

můžeme vyjádřit $\mathrm{d}l^2$ ve čtyřrozměrných sférických souřadnicích:

$$\mathrm{d}l^2 = a^2\left[\mathrm{d}\chi^2 + \sinh^2\chi(\sin^2\vartheta\,\mathrm{d}\varphi^2 + \mathrm{d}\vartheta^2)\right]. \tag{2.10}$$

Vzdálenost od počátku je opět rovna $a\,\chi$, ale χ teď nabývá hodnot 0 až ∞. Povrch koule s poloměrem $a\,\chi$ je $4\pi a^2\sinh^2\chi$ a s rostoucím χ roste bez jakéhokoli omezení. Objem prostoru se zápornou křivostí je tedy zřejmě nekonečný.

3 Uzavřený a otevřený izotropní model

Pokud chceme studovat metriku časoprostoru, musíme nejprve vhodně zvolit vztažnou soustavu. Požadavku izotropie zřejmě vyhoví soustava, jejíž každý bod se pohybuje spolu s hmotou, která se v tomto bodě právě nachází. Jinými slovy, vztažnou soustavu bude tvořit sama hmota vyplňující prostor. Rychlost hmoty v takové soustavě je už z definice nulová. Kdyby tomu tak nebylo, pak by všechny směry v prostoru jistě nebyly ekvivalentní, neboť by existoval význačný směr — směr rychlosti hmoty v daném bodě. Časovou souřadnici je třeba zvolit tak, aby v každém okamžiku byla metrika stejná ve všech bodech prostoru.

V [TF] a [GC] můžeme najít vysvětlení toho, že pokud mají být všechny směry v prostoru rovnocenné, jak vyžaduje předpoklad izotropie, je nutné, aby komponenty $g_{0\alpha}$ metrického tenzoru byly nulové. Pro interval tedy platí

$$\mathrm{d}s^2 = g_{00}(\mathrm{d}x^0)^2 - \mathrm{d}l^2\,,$$

kde složka g_{00} je funkcí pouze x^0. To znamená, že lze vždy zvolit časovou osu tak, aby $g_{00} = 1$, a pokud takto zvolenou souřadnici x^0 označíme ct, interval můžeme psát ve tvaru

$$\mathrm{d}s^2 = c^2\,\mathrm{d}t^2 - \mathrm{d}l^2\,.$$

Nejprve prostudujeme izotropní prostor s kladnou křivostí. Příslušné řešení Einsteinových rovnic bývá označováno jako *uzavřený izotropní model* (prostor se uzavírá do sebe). Délkový element $\mathrm{d}l^2$ má v tomto případě tvar (2.9). Poloměr křivosti, který teď označíme K, teď ale může být funkcí času. Máme tedy interval

$$\mathrm{d}s^2 = c^2\,\mathrm{d}t^2 - K^2(t)\big[\,\mathrm{d}\chi^2 + \sin^2\chi(\sin^2\vartheta\,\mathrm{d}\varphi^2 + \mathrm{d}\vartheta^2)\big]\,,$$

kde je potřeba určit funkci $K(t)$ pomocí Einsteinových gravitačních rovnic. Pro jejich řešení je vhodné si místo času t zavést souřadnici η vztahem

$$c\,\mathrm{d}t = K\,\mathrm{d}\eta\,.$$

Pokud funkci $K(t)$ v souřadnici η označíme a, tj. $a(\eta) = K(t)$, pak můžeme interval zapsat jako

$$\mathrm{d}s^2 = a^2(\eta)\big[\,\mathrm{d}\eta^2 - \mathrm{d}\chi^2 - \sin^2\chi(\sin^2\vartheta\,\mathrm{d}\varphi^2 + \mathrm{d}\vartheta^2)\big]\,. \tag{3.1}$$

Vypočítáme komponenty Ricciho tenzoru R_{ik}. Metrický tenzor má nenulové jen diagonální složky (souřadnicím x^0, x^1, x^2, x^3 odpovídají souřadnice η, χ, φ, ϑ):

$$\begin{aligned} g_{00} &= a^2\,, & g_{22} &= -a^2\sin^2\chi\sin^2\vartheta\,,\\ g_{11} &= -a^2\,, & g_{33} &= -a^2\sin^2\chi\,, \end{aligned}$$

což značně ulehčí výpočet Christoffelových symbolů $\Gamma^i{}_{kl}$ z definice (1.3). Nejprve

$$\Gamma^0{}_{00} = \frac{1}{2}\,g^{00}(g_{00,0} + g_{00,0} - g_{00,0}) = \frac{1}{2a^2}\,\frac{\partial(a^2)}{\partial\eta} = \frac{a'}{a}\,,$$

kde čárka značí derivaci podle η. Při výpočtu dalších složek využijeme toho, že $\forall i \in \{0, 1, 2, 3\}$ platí

$$g_{ii,0} = \frac{\partial g_{ii}}{\partial\eta} = 2\frac{a'}{a}g_{ii}\,. \tag{3.2}$$

Takže

$$\begin{aligned} \Gamma^0{}_{\alpha\beta} &= \frac{1}{2a^2}(-g_{\alpha\beta,0}) = -\frac{a'}{a^3}g_{\alpha\beta}\,,\\ \Gamma^\alpha{}_{\beta 0} &= \frac{1}{2}g^{\alpha\alpha}\,g_{\alpha\beta,0} = \frac{1}{2g_{\alpha\alpha}}\delta^\alpha_\beta\,g_{\alpha\alpha,0} = \delta^\alpha_\beta\,\frac{a'}{a}\,,\\ \Gamma^0{}_{\alpha 0} &= \Gamma^\alpha{}_{00} = 0\,. \end{aligned}$$

To nám stačí k výpočtu první složky Ricciho tenzoru z definice (1.7):

$$\begin{aligned} R^0_0 = g^{00}R^l{}_{0l0} &= g^{00}\left(\frac{\partial\Gamma^l{}_{00}}{\partial x^l} - \frac{\partial\Gamma^l{}_{0l}}{\partial x^0} + \Gamma^l{}_{nl}\Gamma^n{}_{00} - \Gamma^l{}_{n0}\Gamma^n{}_{0l}\right) =\\ &= g^{00}\left(-\frac{\partial\Gamma^\alpha{}_{\alpha 0}}{\partial x^0} + \Gamma^0{}_{00}\Gamma^\alpha{}_{\alpha 0} - \big(\Gamma^\alpha{}_{\alpha 0}\big)^2\right) = -\frac{3}{a^2}\frac{\partial\left(\dfrac{a'}{a}\right)}{\partial\eta} =\\ &= \frac{3}{a^4}\big(a'^2 - aa''\big)\,. \end{aligned}$$

Stejně, jako tomu bylo u metrického tenzoru, musí i složky $R_{0\alpha}$ Ricciho tenzoru být nulové, má-li být splněna rovnocennost všech směrů v prostoru. Zbývá tedy ještě spočítat složky R^β_α. Při výpočtu Christoffelových symbolů jsme vynechali symboly $\Gamma^\alpha{}_{\beta\gamma}$, které nebudeme potřebovat, protože složky R^β_α nebudeme počítat z definice (1.7) přímo.

Výhodnější je uvědomit si, že pokud v R^β_α separujeme členy obsahující pouze složky $g_{\alpha\beta}$ metrického tenzoru (tj. pouze symboly $\Gamma^\alpha{}_{\beta\gamma}$), pak budou právě tyto členy tvořit složky třírozměrného tenzoru $-P^\beta_\alpha$, které už známe z (2.2) a (2.7). Složky R^β_α tedy mají tvar:

$$R^\beta_\alpha = -P^\beta_\alpha + \ldots = -2\lambda g^{\beta\gamma} g_{\gamma\alpha} + \ldots = -\frac{2}{a^2}\delta^\beta_\alpha + \ldots ,$$

kde zbytek je tvořen členy, které obsahují kromě $g_{\alpha\beta}$ i složky g_{00}. Proto nemusíme počítat symboly $\Gamma^\alpha{}_{\beta\gamma}$ — stačí dopočítat jen zbylé členy, které už ovšem obsahují jenom ty Christoffelovy symboly, které už máme spočítané.

Pro výpočet R^β_α si tedy nejdříve najdeme příslušný rozklad a tím i členy, které je potřeba spočítat:

$$R^\beta_\alpha = g^{\beta\beta} R^l{}_{\beta l\alpha} = \frac{1}{g_{\beta\beta}}\left(\frac{\partial \Gamma^l{}_{\beta\alpha}}{\partial x^l} - \frac{\partial \Gamma^l{}_{\beta l}}{\partial x^\alpha} + \Gamma^l{}_{nl}\Gamma^n{}_{\beta\alpha} - \Gamma^l{}_{n\alpha}\Gamma^n{}_{\beta l}\right) =$$
$$= -P^\beta_\alpha + \frac{1}{g_{\beta\beta}}\left(\frac{\partial \Gamma^0{}_{\beta\alpha}}{\partial x^0} + \Gamma^l{}_{0l}\Gamma^0{}_{\beta\alpha} - \Gamma^\gamma{}_{0\alpha}\Gamma^0{}_{\beta\gamma} - \Gamma^0{}_{\gamma\alpha}\Gamma^\gamma{}_{\beta 0}\right).$$

Dále pomocí již spočítaných Christoffelových symbolů a vlastnosti (3.2) vyjádříme potřebné členy:

$$\frac{\partial \Gamma^0{}_{\beta\alpha}}{\partial x^0} = \frac{\partial\left(-\frac{a'}{a^3} g_{\alpha\beta}\right)}{\partial \eta} = \frac{a'^2 - a\,a''}{a^4} g_{\beta\beta}\,\delta^\beta_\alpha ,$$
$$\Gamma^l{}_{0l}\Gamma^0{}_{\beta\alpha} = -4\frac{a'^2}{a^4} g_{\beta\beta}\,\delta^\beta_\alpha ,$$
$$\Gamma^\gamma{}_{0\alpha}\Gamma^0{}_{\beta\gamma} = \Gamma^0{}_{\gamma\alpha}\Gamma^\gamma{}_{\beta 0} = -\frac{a'^2}{a^4} g_{\beta\beta}\,\delta^\beta_\alpha .$$

Takže výsledkem je

$$R^\beta_\alpha = -P^\beta_\alpha + \frac{1}{a^4}\left(-a'^2 - a\,a''\right)\delta^\beta_\alpha = -\frac{1}{a^4}\left(2a^2 + a'^2 + a\,a''\right)\delta^\beta_\alpha .$$

Nakonec ještě spočítáme skalární křivost, což už je snadné:

$$R = R^0_0 + R^\alpha_\alpha = -\frac{6}{a^3}(a + a'') .$$

Jak už bylo řečeno, veškerá hmota je v naší soustavě v klidu, takže pro čtyřrychlost platí:

$$u^\alpha = 0\,,\ u^0 = \frac{1}{a} .$$

Použijeme-li vzorec (1.9) pro výpočet tenzoru energie a hybnosti, dostaneme potřebnou složku

$$T^0_0 = \varepsilon ,$$

kde ε je hustota energie hmoty.

Pro dosazení si Einsteinovy rovnice ještě upravíme na tvar

$$g_{ij}R^j_k - \frac{1}{2}Rg_{ik} = \frac{8\pi G}{c^4}g_{ij}T^j_k\,,$$

kde vystupují smíšené komponenty tenzorů. Pro $i = k = 0$ pak máme rovnici

$$R^0_0 - \frac{1}{2}R = \frac{8\pi G}{c^4}T^0_0\,,$$

kam už můžeme pohodlně dosadit a upravit na

$$\frac{3}{a^4}(a^2 + a'^2) = \frac{8\pi G}{c^4}\varepsilon\,. \tag{3.3}$$

V této rovnici vystupují dvě neznámé funkce a a ε, což znamená, že musíme použít ještě alespoň jednu další rovnici. Tu můžeme odvodit čistě pomocí pojmů z termodynamiky. Totiž, ve chvíli, kdy jsme použili vzorec (1.9) pro tenzor energie a hybnosti, jsme zanedbali veškeré procesy spojené s disipací energie (uvedený vzorec je platný pro ideální tekutinu). V našem případě je to ale naprosto v pořádku, protože případné členy, které by bylo potřeba přidat k T^k_i kvůli těmto procesům, jsou zanedbatelně malé v porovnání s hustotou ε, která zahrnuje veškerou energii obsaženou v hmotě.

Z tohoto důvodu můžeme dále považovat celkovou entropii za konstantní a použít známý termodynamický vztah $\mathrm{d}\mathcal{E} = T\,\mathrm{d}S - p\,\mathrm{d}V$, kde vystupující veličiny jsou po řadě energie, teplota, entropie, tlak a objem systému. Je-li entropie konstantní, pak se tento vztah redukuje na

$$\mathrm{d}\mathcal{E} = -p\,\mathrm{d}V\,,$$

což můžeme ještě dále upravit, pokud zavedeme hustotu energie jako $\varepsilon = \mathcal{E}/V$:

$$\mathrm{d}\varepsilon = -(\varepsilon + p)\frac{\mathrm{d}V}{V}\,.$$

Protože objem izotropního prostoru s kladnou křivostí je $V = 2\pi^2 a^3$, platí $\mathrm{d}V/V = 3\,\mathrm{d}a/a = 3\,\mathrm{d}(\ln a)$. Po dosazení pak dostáváme

$$-\frac{\mathrm{d}\varepsilon}{\varepsilon + p} = 3\,\mathrm{d}(\ln a)\,,$$

což můžeme ještě integrovat na

$$3\ln a = -\int \frac{\mathrm{d}\varepsilon}{\varepsilon + p} + C\,. \tag{3.4}$$

Pokud známe vztah mezi ε a p (stavovou rovnici hmoty), potom poslední rovnice určuje ε jako funkci a.

Teď se můžeme vrátit k rovnici (3.3), ze které plyne

$$\left(\frac{\mathrm{d}a}{\mathrm{d}\eta}\right)^2 = \frac{8\pi G}{3c^4}\varepsilon a^4 - a^2\,.$$

Jednoduchou úpravou a integrací pak získáme vztah pro η jako funkci a:

$$\eta = \pm\int \frac{\mathrm{d}a}{a\sqrt{\frac{8\pi G}{3c^4}\varepsilon a^2 - 1}}\,. \tag{3.5}$$

Do výrazu (3.1) pak můžeme dosadit za $a(\eta)$ (po nalezení inverzního vztahu), a tím získat konečný tvar metriky. Rovnice (3.4) a (3.5) tedy obecně řeší problém nalezení metriky uzavřeného izotropního modelu.

Co se týče zmiňované stavové rovnice hmoty, tj. vztahu mezi p a ε, její podoba závisí už na konkrétním problému, který chceme modelovat. Předpoklady a zanedbání, které musíme učinit, se budou lišit, budeme-li chtít řešit model, kde prostor vyplňuje ideální tekutina nebo model, kde hmota tvoří oddělená makroskopická tělesa. Například pro druhý zmiňovaný případ má stavová rovnice tvar

$$\varepsilon = \mu c^2 \,, \quad p = 0 \,,$$

kde μ je součet hmotností všech těles v jednotce objemu. Rovněž se předpokládá, že rychlosti všech těles jsou malé v porovnání s c. Pokud tyto vztahy dosadíme do rovnic, které jsme právě odvodili, můžeme spočítat již zcela konkrétní tvar metriky. Podrobný popis izotropního modelu, kde je hmota v prostoru rozložená ve formě samostatných těles (což je model nejlépe popisující náš vesmír) lze najít v [TF]. My se jím zde dále zabývat nebudeme.

Raději se podíváme na případ, kdy má prostor zápornou křivost, tedy na tzv. *otevřený izotropní model*. Takový prostor má metriku tvaru

$$\mathrm{d}s^2 = c^2\,\mathrm{d}t^2 - K^2(t)\big[\,\mathrm{d}\chi^2 + \sinh^2\chi(\sin^2\vartheta\,\mathrm{d}\varphi^2 + \mathrm{d}\vartheta^2)\big] \,,$$

kde $K(t)$ je poloměr křivosti závisející na čase. Pokud opět zavedeme novou souřadnici η vztahem $c\,\mathrm{d}t = a\,\mathrm{d}\eta$ a označíme $a(\eta) = K(t)$, můžeme tento tvar přepsat na

$$\mathrm{d}s^2 = a^2(\eta)\big[\,\mathrm{d}\eta^2 - \mathrm{d}\chi^2 - \sinh^2\chi(\sin^2\vartheta\,\mathrm{d}\varphi^2 + \mathrm{d}\vartheta^2)\big] \,,$$

což je vztah, který můžeme získat z (3.1) záměnou η, χ, a za $\mathrm{i}\eta$, $\mathrm{i}\chi$ a $\mathrm{i}a$. Takto lze získat i potřebné rovnice pro otevřený model — provedeme záměnu v rovnicích (3.3) a (3.4):

$$\frac{3}{a^4}(a'^2 - a^2) = \frac{8\pi G}{c^4}\varepsilon \,, \tag{3.6}$$

$$3\ln a = -\int \frac{\mathrm{d}\varepsilon}{\varepsilon + p} + C \,.$$

Rovnice (3.4) tvar nezměnila, ale z rovnice (3.6) nyní získáme

$$\eta = \pm\int \frac{\mathrm{d}a}{a\sqrt{\dfrac{8\pi G}{3c^4}\varepsilon a^2 + 1}} \,. \tag{3.7}$$

To je tedy obecné řešení otevřeného izotropního modelu. Pro podrobnější rozbor řešení se stavovou rovnicí pro oddělená makroskopická tělesa opět odkazuji na [TF].

Základní vlastností izotropních modelů s makroskopickými tělesy (uzavřeného i otevřeného) je jejich nestacionarita — vesmír popsaný tímto modelem se nutně musí rozpínat nebo smršťovat. To je důvod, který donutil Einsteina přidat do svých rovnic člen s kosmologickou konstantou, zaručující existenci stacionárního řešení, čehož později Einstein hluboce litoval a prohlásil, že to byla největší chyba v jeho životě. Model rozpínajícího se vesmíru totiž skvěle vysvětluje pozorovaný rudý posuv vzdálených hvězd a galaxií a dnes již málokdo pochybuje o tom, že náš vesmír není statický.

Ještě je vhodné poznamenat, že zajímavá řešení nalezneme pouze pokud je hustota hmoty nenulová. Pro prázdný prostor ($\varepsilon = 0$) totiž ze vztahu (3.7) zjistíme, že $a = a_0\mathrm{e}^\eta = ct$ a substitucí

$$r = ct\,\sinh\chi \,, \quad \tau = t\,\cosh\chi$$

upravíme metriku na tvar

$$\begin{aligned}
\mathrm{d}s^2 &= c^2\,\mathrm{d}t^2 - c^2t^2\big[\,\mathrm{d}\chi^2 + \sinh^2\chi(\sin^2\vartheta\,\mathrm{d}\varphi^2 + \,\mathrm{d}\vartheta^2)\big] = \\
&= c^2\,\mathrm{d}\tau^2 - \,\mathrm{d}r^2 - r^2(\sin^2\vartheta\,\mathrm{d}\varphi^2 + \,\mathrm{d}\vartheta^2)\,,
\end{aligned}$$

což je metrika plochého prostoru.

4 Homogenní prostory I

Jak jsme už zjistili, předpoklad homogenity a izotropie (třírozměrného) prostoru určuje jeho metriku jednoznačně až na znaménko λ — jediná možnost volby je mezi kladnou a zápornou křivostí prostoru. Podstatně více volnosti získáme, budeme-li uvažovat prostor pouze homogenní, bez jakékoliv další symetrie, tj. vypustíme předpoklad izotropie. Časovou závislost opět nebudeme uvažovat a zkoumat tedy budeme vlastnosti metriky homogenního prostoru v daném okamžiku t.

Jak už víme z úvodní kapitoly, prostor je homogenní, pokud připouští množinu souřadnicových transformací s jistými vlastnostmi (zobrazení jakéhokoli bodu do jakéhokoli jiného bodu) takovými, že metrika při těchto tranformacích nezmění svůj tvar. Také jsme už uvedli, že tato množina transformací (tzv. grupa pohybů) je parametrizována N nezávislými parametry pro N-rozměrný prostor.

Protože námi zkoumaný fyzikální prostor je třírozměrný, bude grupa pohybů tříparametrická — každé transformaci lze přiřadit trojici nezávislých čísel. Například homogenita plochého Euklidova prostoru je vyjadřována invariancí metriky vůči translacím kartézského souřadného systému. A každou translaci je možné popsat trojicí čísel — složkami vektoru posunutí.

Je také známo, že všechna taková posunutí v Euklidově prostoru nemění tři nezávislé diferenciály $\mathrm{d}x$, $\mathrm{d}y$ a $\mathrm{d}z$, z kterých se konstruuje délkový interval. V obecném případě neeuklidovského homogenního prostoru transformace z jeho grupy pohybů také zachovávají tři nezávislé diferenciální formy, které už ovšem nemusí být totálními diferenciály žádné souřadnicové funkce. Zapišme tyto diferenciální formy jako

$$e^{(a)}_{\alpha}\,\mathrm{d}x^{\alpha}\,, \tag{4.1}$$

kde latinský index (a) označuje tři nezávislé vektory — funkce souřadnic. Invariance těchto forem vzhledem k transformacím souřadnic znamená, že platí

$$e^{(a)}_{\alpha}(x)\,\mathrm{d}x^{\alpha} = e^{(a)}_{\alpha}(x')\,\mathrm{d}x'^{\alpha}\,, \tag{4.2}$$

přičemž $e^{(a)}_{\alpha}$ je na obou stranách rovnosti stejnou funkcí příslušných souřadnic (starých nebo nových).

Diferenciálních forem (4.1) nyní můžeme využít ke konstrukci metriky tvarově invariantní vzhledem k transformacím z grupy pohybů:

$$\mathrm{d}l^2 = \eta_{ab}\left(e^{(a)}_{\alpha}\,\mathrm{d}x^{\alpha}\right)\left(e^{(b)}_{\beta}\,\mathrm{d}x^{\beta}\right).$$

Pokud jsou η_{ab} pouze funkcemi času, je tento výraz zjevně invariantní. Metrický tenzor má tedy tvar

$$\gamma_{\alpha\beta} = \eta_{ab} e^{(a)}_{\alpha} e^{(b)}_{\beta}$$

a má-li být symetrický, musí být i koeficienty η_{ab} ve svém spodním indexu symetrické.

K trojici vektorů $e^{(a)}_{\alpha}$ zavedeme k nim „převrácenou“ trojici vektorů $e^{\alpha}_{(a)}$ takto:

$$e^{\alpha}_{(a)}\, e^{(b)}_{\alpha} = \delta^{b}_{a}\,, \qquad e^{\alpha}_{(a)}\, e^{(a)}_{\beta} = \delta^{\alpha}_{\beta}\,. \tag{4.3}$$

Vraťme se teď ke vztahu (4.2), jenž vyjadřuje invarianci formy (4.1). Pokud ho vynásobíme $e^{\beta}_{(a)}(x')$, můžeme s pomocí relací (4.3) psát

$$e^{(a)}_{\alpha}(x)\, e^{\beta}_{(a)}(x')\,\mathrm{d}x^{\alpha} = e^{(a)}_{\alpha}(x')\, e^{\beta}_{(a)}(x')\,\mathrm{d}x'^{\alpha} = \mathrm{d}x'^{\beta}\,.$$

Dosadíme-li do této rovnosti

$$\mathrm{d}x'^{\beta} = \frac{\partial x'^{\beta}}{\partial x^{\alpha}}\,\mathrm{d}x^{\alpha}$$

a porovnáme-li koeficienty u $\mathrm{d}x^{\alpha}$, dostaneme systém diferenciálních rovnic, určující funkce $x'^{\beta}(x)$:

$$\frac{\partial x'^{\beta}}{\partial x^{\alpha}} = e^{(a)}_{\alpha}(x)\, e^{\beta}_{(a)}(x')\,. \tag{4.4}$$

Aby tyto rovnice byly integrovatelné, musí být identicky splněna podmínka

$$\frac{\partial^2 x'^{\beta}}{\partial x^{\alpha}\partial x^{\gamma}} = \frac{\partial^2 x'^{\beta}}{\partial x^{\gamma}\partial x^{\alpha}}\,. \tag{4.5}$$

Z (4.4) spočítáme potřebné druhé derivace. Nejprve tu na levé straně rovnosti:

$$\begin{aligned}
\frac{\partial^2 x'^{\beta}}{\partial x^{\alpha}\partial x^{\gamma}} &= e^{\beta}_{(a)}(x')\,\frac{\partial e^{(a)}_{\alpha}(x)}{\partial x^{\gamma}} + e^{(a)}_{\alpha}(x)\,\frac{\partial e^{\beta}_{(a)}(x')}{\partial x^{\gamma}} = \\
&= e^{\beta}_{(a)}(x')\,\frac{\partial e^{(a)}_{\alpha}(x)}{\partial x^{\gamma}} + e^{(a)}_{\alpha}(x)\,\frac{\partial e^{\beta}_{(a)}(x')}{\partial x'^{\delta}}\,\frac{\partial x'^{\delta}}{\partial x^{\gamma}} = \\
&= e^{\beta}_{(a)}(x')\,\frac{\partial e^{(a)}_{\alpha}(x)}{\partial x^{\gamma}} + e^{(a)}_{\alpha}(x)\, e^{(b)}_{\gamma}(x)\, e^{\delta}_{(b)}(x')\,\frac{\partial e^{\beta}_{(a)}(x')}{\partial x'^{\delta}}
\end{aligned}$$

a obdobně pak i derivaci na pravé straně:

$$\frac{\partial^2 x'^{\beta}}{\partial x^{\gamma}\partial x^{\alpha}} = e^{\beta}_{(a)}(x')\,\frac{\partial e^{(a)}_{\gamma}(x)}{\partial x^{\alpha}} + e^{(a)}_{\gamma}(x)\, e^{(b)}_{\alpha}(x)\, e^{\delta}_{(b)}(x')\,\frac{\partial e^{\beta}_{(a)}(x')}{\partial x'^{\delta}}\,.$$

Když ještě ve druhém členu tohoto výrazu zaměníme indexy a a b (což můžeme, neboť jsou to volné sčítací indexy, které takto pouze přejmenujeme), tak už snadno povytýkáme a upravíme podmínku (4.5) na tvar

$$e^{\beta}_{(a)}(x')\left[\frac{\partial e^{(a)}_{\gamma}(x)}{\partial x^{\alpha}} - \frac{\partial e^{(a)}_{\alpha}(x)}{\partial x^{\gamma}}\right] = e^{(a)}_{\alpha}(x)\, e^{(b)}_{\gamma}(x)\left[e^{\delta}_{(b)}(x')\,\frac{\partial e^{\beta}_{(a)}(x')}{\partial x'^{\delta}} - e^{\delta}_{(a)}(x')\,\frac{\partial e^{\beta}_{(b)}(x')}{\partial x'^{\delta}}\right].$$

Obě strany této rovnosti teď vynásobíme výrazem $e^{\alpha}_{(d)}(x)\, e^{\gamma}_{(c)}(x)\, e^{(f)}_{\beta}(x')$ a s použitím vztahů (4.3) vhodně upravíme. Pro levou stranu tak dostaneme

$$\begin{aligned}
\mathrm{L} &= e^{\alpha}_{(d)}(x)\, e^{\gamma}_{(c)}(x)\, e^{(f)}_{\beta}(x')\, e^{\beta}_{(a)}(x')\left[\frac{\partial e^{(a)}_{\gamma}(x)}{\partial x^{\alpha}} - \frac{\partial e^{(a)}_{\alpha}(x)}{\partial x^{\gamma}}\right] = \\
&= e^{\gamma}_{(c)}(x)\, e^{\alpha}_{(d)}(x)\left[\frac{\partial e^{(f)}_{\gamma}(x)}{\partial x^{\alpha}} - \frac{\partial e^{(f)}_{\alpha}(x)}{\partial x^{\gamma}}\right]
\end{aligned}$$

a pro stranu pravou si ještě odvodíme malý pomocný vztah. Zderivujeme identitu

$$e^{\beta}_{(d)}(x')\, e^{(f)}_{\beta}(x') = \delta^f_d \,,$$

což je jedna z relací (4.3), podle x'^{δ}. Získáme tak rovnost

$$e^{(f)}_{\beta}(x')\, \frac{\partial e^{\beta}_{(d)}(x')}{\partial x'^{\delta}} = -e^{\beta}_{(d)}(x')\, \frac{\partial e^{(f)}_{\beta}(x')}{\partial x'^{\delta}} \,,$$

která umožňuje přejít od derivací $e^{\alpha}_{(a)}$ k derivacím $e^{(\alpha)}_{a}$, čehož využijeme při úpravě pravé strany:

$$\begin{aligned}
\mathrm{P} &= e^{\alpha}_{(d)}(x)\, e^{\gamma}_{(c)}(x)\, e^{(f)}_{\beta}(x')\, e^{(a)}_{\alpha}(x)\, e^{(b)}_{\gamma}(x) \left[e^{\delta}_{(b)}(x')\, \frac{\partial e^{\beta}_{(a)}(x')}{\partial x'^{\delta}} - e^{\delta}_{(a)}(x')\, \frac{\partial e^{\beta}_{(b)}(x')}{\partial x'^{\delta}} \right] = \\
&= e^{(f)}_{\beta}(x') \left[e^{\delta}_{(b)}(x')\, \frac{\partial e^{\beta}_{(a)}(x')}{\partial x'^{\delta}} - e^{\delta}_{(a)}(x')\, \frac{\partial e^{\beta}_{(b)}(x')}{\partial x'^{\delta}} \right] = \\
&= e^{\beta}_{(c)}(x')\, e^{\delta}_{(d)}(x') \left[\frac{\partial e^{(f)}_{\beta}(x')}{\partial x'^{\delta}} - \frac{\partial e^{(f)}_{\delta}(x')}{\partial x'^{\beta}} \right] .
\end{aligned}$$

Jak si můžeme všimnout, levá a pravá strana se liší pouze v tom, že funkce na pravé straně je v čárkovaných proměnných. Všechny řecké indexy zde totiž vystupují jako sčítací indexy, a ty lze libovolně přejmenovat, takže můžeme místo β a δ na pravé straně psát γ a α a funkční předpis je potom přesně tentýž na obou stranách rovnosti. Protože tato podmínka musí platit pro jakékoli x a x', a protože platí $\big(\forall x, x'; f(x) = f(x')\big) \Rightarrow \big(f \equiv$ konst.$\big)$, musí být funkce vyskytující se na obou stranách konstantní a můžeme tedy psát

$$e^{\alpha}_{(a)}\, e^{\beta}_{(b)} \left[\frac{\partial e^{(c)}_{\alpha}}{\partial x^{\beta}} - \frac{\partial e^{(c)}_{\beta}}{\partial x^{\alpha}} \right] = C_{ab}{}^{c} \,. \tag{4.6}$$

Funkce je sice konstantní, ale pro různé $e^{\alpha}_{(a)}$, $e^{\beta}_{(b)}$ a $e^{(c)}_{\gamma}$ může mít jinou hodnotu, proto jsou konstanty označeny třemi indexy.

Když vztah (4.6) ještě vynásobíme $e^{\gamma}_{(c)}$ a poté vhodně upravíme, získáme poměrně klíčový vztah:

$$e^{\alpha}_{(a)}\, \frac{\partial e^{\gamma}_{(b)}}{\partial x^{\alpha}} - e^{\beta}_{(b)}\, \frac{\partial e^{\gamma}_{(a)}}{\partial x^{\beta}} = C_{ab}{}^{c}\, e^{\gamma}_{(c)} \,. \tag{4.7}$$

K oněm zmiňovaným vhodným úpravám využijeme malé pomůcky, kterou si můžeme odvodit derivací druhého ze vztahů (4.3). Platí totiž, že

$$e^{\gamma}_{(c)}\, \frac{\partial e^{(c)}_{\alpha}}{\partial x^{\beta}} = -e^{(c)}_{\alpha}\, \frac{\partial e^{\gamma}_{(c)}}{\partial x^{\beta}} \,.$$

Vztah (4.7) hraje v popisu homogenních prostorů velmi důležitou roli — představuje podmínku pro homogenitu prostoru, neboť jsme vyšli ze vztahu (4.2), který vyjadřuje invarianci forem (4.1) vzhledem k transformacím z grupy pohybů a zkoumali jsme, za jakých podmínek existuje řešení. Různou volbou konstant $C_{ab}{}^{c}$ tak můžeme získat různé homogenní prostory, ovšem stejně tak dobře můžeme různou volbou konstant získat i dva prostory totožné.

Dalším úkolem je tedy najít třídy takových kombinací konstant ${C_{ab}}^c$, které vedou na homogenní prostory stejných vlastností, abychom mohli určit, kolik různých typů homogenních prostorů existuje. K tomu nám poslouží část matematiky zabývající se Lieovými algebrami. Přesněji řečeno nám tato část nejen poslouží, ale úlohu zcela vyřeší, a proto je Lieovým algebrám věnována zvláštní kapitola.

5 Klasifikace třírozměrných Lieových algeber

Lieovou algebrou nazýváme každý vektorový prostor L, na kterém je definováno bilineární zobrazení $[\,.\,,.\,] : L \times L \to L$, které je antisymetrické, tj. $\forall x, y \in L \quad [x,y] = -[y,x]$ a splňuje Jacobiho identitu:

$$\forall x, y, z \in L \qquad \big[x,[y,z]\big] + \big[y,[z,x]\big] + \big[z,[x,y]\big] = 0\,.$$

Zobrazení $[\,.\,,.\,]$ se nazývá *Lieova závorka* nebo *komutátor*.

Najdeme nyní třídy všech shodných (izomorfních) reálných Lieových algeber dimenze tři. Protože každé dva konečnědimenzionální vektorové prostory stejné dimenze jsou izomorfní, budou dvě algebry odlišovat pouze vlastnosti Lieovy závorky $[\,.\,,.\,]$, která tak zcela určuje strukturu dané Lieovy algebry. O konkrétní volbu vektorového prostoru se proto nebudeme vůbec zajímat a Lieovu algebru budeme pokládat za jednoznačně určenou, pokud bude určeno zobrazení $[\,.\,,.\,]$.

Protože se jedná o zobrazení lineární, stačí znát jeho působení na prvky báze — působení na ostatní vektory se získá ze vztahů linearity a zobrazení je tak definováno jednoznačně. Nechť tedy tři lineárně nezávislé vektory x_1, x_2 a x_3 tvoří bázi vektorového prostoru L. Obraz jakýchkoli dvou vektorů z L (tedy i vektorů báze) při zobrazení $[\,.\,,.\,]$ je opět vektor z L, a lze ho proto zapsat jako jistou lineární kombinaci bázových vektorů:

$$[x_i, x_j] = {c_{ij}}^k x_k\,.$$

Koeficienty lineární kombinace označené ${c_{ij}}^k$ se nazývají *strukturní konstanty*. Jejich hodnoty jednoznačně určují působení Lieovy závorky $[\,.\,,.\,]$, protože zadávají obrazy bazických vektorů, a lze je proto použít k zadání Lieovy algebry, a tudíž i k vzájemnému odlišení dvou algeber.

Strukturních konstant je celkem 27 (jejich indexy nabývají hodnot 1 až 3), ale devět z nich je nulových a zbylých 18 tvoří dvojice lišící se jen ve znaménku, což obojí vyplývá z antisymetričnosti Lieovy závorky. To znamená, že Lieovu algebru lze jednoznačně zadat devíti nezávislými konstantami. Tedy přesněji řečeno téměř nezávislými, neboť je nutné kromě antisymetrie Lieovy závorky začlenit ještě její další vlastnost, a to Jacobiho identitu. Má-li totiž platit, že

$$\big[x_i,[x_j,x_k]\big] + \big[x_j,[x_k,x_i]\big] + \big[x_k,[x_i,x_j]\big] =$$
$$= [x_i, {c_{jk}}^m x_m] + [x_j, {c_{ki}}^m x_m] + [x_k, {c_{ij}}^m x_m] = 0\,,$$

pak musí strukturní konstanty splňovat podmínku:

$${c_{jk}}^m {c_{im}}^l + {c_{ki}}^m {c_{jm}}^l + {c_{ij}}^m {c_{km}}^l = 0\,. \tag{5.1}$$

Podívejme se tedy, jaké možnosti nám nabízí popis Lieových algeber pomocí devíti strukturních konstant. Budeme-li se zajímat o obrazy tří vybraných dvojic bazických vektorů, jejichž znalost stačí k určení algebry, můžeme působení Lieovy závorky zapsat jako maticový součin

$$\begin{pmatrix} [x_2, x_3] & [x_3, x_1] & [x_1, x_2] \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x_1 & x_2 & x_3 \end{pmatrix} \cdot C\,, \tag{5.2}$$

kde matice C je sestavena takto:

$$C = \begin{pmatrix} {c_{23}}^1 & {c_{31}}^1 & {c_{12}}^1 \\ {c_{23}}^2 & {c_{31}}^2 & {c_{12}}^2 \\ {c_{23}}^3 & {c_{31}}^3 & {c_{12}}^3 \end{pmatrix} .$$

Dvě různé matice C ale ještě nemusí zadávat dvě různé Lieovy algebry. Můžeme si totiž vzít jinou bázi y_1, y_2, y_3 prostoru L a z příslušných strukturních konstant sestavit matici C'. Ta samozřejmě nemusí být rovna matici C, ale přitom je to matice strukturních konstant té samé algebry, pouze pro jinou bázi. Dalším krokem proto nutně musí být určení podmínky, kdy dvě dané matice C a C', sestavené ze strukturních konstant, určují tutéž algebru.

Předpokládejme, že provedeme přechod od báze $\{x_i\}$ k bázi $\{y_j\}$ působením nějakého regulárního operátoru, což znamená, že můžeme napsat

$$\begin{pmatrix} y_1 & y_2 & y_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x_1 & x_2 & x_3 \end{pmatrix} \cdot A\,, \tag{5.3}$$

kde matice $A \in GL(3, \mathbb{R})$. Přepíšeme Lieovu závorku vektorů z báze $\{y_j\}$ pomocí vektorů báze $\{x_i\}$ a prvků matice A. Nejprve

$$\begin{aligned} [y_2, y_3] = \sum_{ij,=1}^{3} A_{i2} A_{j3} [x_i, x_j] &= [x_2, x_3] \cdot \big(A_{22}A_{33} - A_{23}A_{32}\big) + \\ &+ [x_3, x_1] \cdot \big(A_{13}A_{32} - A_{12}A_{33}\big) + [x_1, x_2] \cdot \big(A_{12}A_{23} - A_{13}A_{22}\big) = \\ &= [x_2, x_3] \cdot A^{adj}_{11} + [x_3, x_1] \cdot A^{adj}_{21} + [x_1, x_2] \cdot A^{adj}_{31}\,, \end{aligned}$$

kde A^{adj} značí matici adjungovanou k A:

$$A^{adj}_{kl} = (-1)^{k+l} \cdot \det A(k, l)\,.$$

Podobně dopočítáme i vztahy pro $[y_3, y_1]$ a $[y_1, y_2]$ a zjistíme, že

$$\begin{pmatrix} [y_2, y_3] & [y_3, y_1] & [y_1, y_2] \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} [x_2, x_3] & [x_3, x_1] & [x_1, x_2] \end{pmatrix} \cdot A^{adj}\,. \tag{5.4}$$

Pokud má tedy být

$$\begin{pmatrix} [y_2, y_3] & [y_3, y_1] & [y_1, y_2] \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} y_1 & y_2 & y_3 \end{pmatrix} \cdot C'\,,$$

a přitom platí (5.2), (5.3) a (5.4), potom můžeme matici C' vyjádřit jako

$$C' = A^{-1} C A^{adj} = \det A \cdot A^{-1} C (A^{-1})^T\,, \tag{5.5}$$

kde jsme ještě využili známý vztah

$$A^{-1} = \frac{1}{\det A}(A^{adj})^T \, .$$

Výsledkem tedy je, že pokud jsou dvě matice C a C' svázány vztahem (5.5), kde matice A je regulární, potom tyto dvě matice zadávají stejnou Lieovu algebru.

Každou matici můžeme zapsat jakou součet matice symetrické a antisymetrické (stačí si zapsat její komponenty jako $M_{ij} = \frac{M_{ij}+M_{ji}}{2} + \frac{M_{ij}-M_{ji}}{2}$). Napišme tedy

$$C = S + \widehat{a}\, ,$$

kde S je symetrická matice 3×3 a

$$\widehat{a} = \begin{pmatrix} 0 & -a_3 & a_2 \\ a_3 & 0 & -a_1 \\ -a_2 & a_1 & 0 \end{pmatrix} , \qquad a = \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ a_3 \end{pmatrix} .$$

Pokud rozepíšeme i matici C' na součet $C' = S' + \widehat{a'}$, pak ze vztahu (5.5) získáme transformační vztahy pro její symetrickou a antisymetrickou část:

$$S' = \det A \cdot A^{-1} S (A^{-1})^T \, , \qquad a' = A^T a \, . \tag{5.6}$$

Symetrická a antisymetrická část (resp. vektor a) každé matice strukturních konstant splňují vztah plynoucí z Jacobiho identity, který snadno odvodíme. Několika úpravami získáme

$$\begin{aligned} 0 &= \big[x_1, [x_2, x_3]\big] + \big[x_2, [x_3, x_1]\big] + \big[x_3, [x_1, x_2]\big] = \\ &= (C_{32} - C_{23})[x_2, x_3] + (C_{13} - C_{31})[x_3, x_1] + (C_{21} - C_{12})[x_1, x_2] = \\ &= 2a_1[x_2, x_3] + 2a_2[x_3, x_1] + 2a_3[x_1, x_2] = \\ &= 2\begin{pmatrix} x_1 & x_2 & x_3 \end{pmatrix} \cdot Ca \, , \end{aligned}$$

z čehož vyplývá, že $Ca = 0$, neboť x_i jsou lineárně nezávislé. Protože ale $\widehat{a}a = 0$, tak $Ca = (S + \widehat{a})a = Sa$ a oním zmiňovaným vztahem je

$$Sa = 0 \, . \tag{5.7}$$

Tento vztah skutečně musí platit pro každou matici strukturních konstant, protože při přechodu (5.3) k jiné bázi pomocí regulární matice platí

$$\big[y_1, [y_2, y_3]\big] + \big[y_2, [y_3, y_1]\big] + \big[y_3, [y_1, y_2]\big] =$$

$$= \det A \cdot \Big(\big[x_1, [x_2, x_3]\big] + \big[x_2, [x_3, x_1]\big] + \big[x_3, [x_1, x_2]\big]\Big) .$$

Z toho plyne, že vtah (5.7) je ekvivalentní Jacobiho identitě.

Vzhledem k tomu, že nezáleží, v jaké bázi vyjádříme strukturní vztahy Lieovy algebry, můžeme se dále zabývat pouze případem, kdy je matice S diagonální a vektor a má nenulovou pouze jednu složku — toho totiž můžeme dosáhnout vhodnou volbou matice A, neboli přechodem k vhodné bázi. Ukážeme, že vždy můžeme zvolit cílovou bázi tak, aby toto platilo.

Mějme libovolnou symetrickou matici S s vlastními hodnotami λ_k a (vzájemně ortogonálními) vlastními vektory $\vec{u}_k$. Zvolíme-li matici A jako

$$A = \left(\sqrt{d_2 d_3}\,\vec{u}_1,\ \sqrt{d_1 d_3}\,\vec{u}_2,\ \sqrt{d_1 d_2}\,\vec{u}_3 \right), \tag{5.8}$$

kde d_k jsou libovolná nenulová čísla splňující

$$\mathrm{sgn}(d_1) = \mathrm{sgn}(d_2) = \mathrm{sgn}(d_3)\,,$$

pak se po bázovém přechodu (5.3) matice S transformuje dle vztahu (5.6) na

$$S' = \mathrm{diag}(\, d_1\lambda_1,\ d_2\lambda_2,\ d_3\lambda_3\,)\,.$$

Podle hodnosti matice S teď můžeme rozlišit čtyři případy.

1.) Pokud je hodnost S tři, pak všechny složky vektoru a musí být nulové v důsledku Jacobiho identity (5.7). A pokud parametry d_k zvolíme jako $d_k = \pm\frac{1}{|\lambda_k|}$, potom po přechodu (5.3) získáme

$$S' = \pm\,\mathrm{diag}\big(\,\mathrm{sgn}(\lambda_1),\ \mathrm{sgn}(\lambda_2),\ \mathrm{sgn}(\lambda_3)\,\big)\,, \qquad (a')^T = (\,0,\ 0,\ 0\,)\,.$$

2.) Pokud je hodnost S dva, pak jedna její vlastní hodnota je nulová. Předpokládejme, že to je λ_1. Můžeme potom zvolit $d_i = \pm\frac{1}{|\lambda_i|}$, $i = 2, 3$, čímž získáme

$$S' = \pm\,\mathrm{diag}\big(\,0,\ \mathrm{sgn}(\lambda_2),\ \mathrm{sgn}(\lambda_3)\,\big)\,.$$

Z Jacobiho identity (5.7) pak plyne, že $(a')^T = (\,a,\ 0,\ 0\,)$. Pokud $a \neq 0$, pak by se nám jistě líbilo využít dosud neurčené konstanty d_1 a docílit toho, aby $a = 1$. To ale není možné, protože jak je vidět z transformačního vztahu (5.6) pro vektor a a z tvaru (5.8) transformační matice A, tak první složka vektoru a' je úměrná $\sqrt{d_2 d_3}$ a parametry d_2 a d_3 jsme již zvolili. V případě nenulového vektoru a' tedy máme jednoparametrickou množinu Lieových algeber a celkově pro S s hodností dva:

$$S' = \pm\,\mathrm{diag}\big(\,0,\ \mathrm{sgn}(\lambda_2),\ \mathrm{sgn}(\lambda_3)\,\big)\,, \qquad \begin{cases} (a')^T = (\,0,\ 0,\ 0\,)\,, \\[2ex] (a')^T = (\,a,\ 0,\ 0\,)\,. \end{cases}$$

3.) Jestliže je hodnost S jedna, potom má dvě nulové vlastní hodnoty. Položme tedy $\lambda_1 = \lambda_2 = 0$. Volbou $d_3 = \pm\frac{1}{|\lambda_3|}$ obdržíme $S' = \pm\,\mathrm{diag}\big(\,0,\ 0,\ \mathrm{sgn}(\lambda_3)\,\big)$ a v případě nenulového vektoru a' máme obecně vektor $(a')^T = (\,a_1,\ a_2,\ 0\,)$, kde $a_1 \sim \sqrt{d_2 d_3}$ a $a_2 \sim \sqrt{d_1 d_3}$. Vhodnou volbou koeficientů d_1 a d_2 lze vždy docílit toho, aby vektor a' byl jednotkový a další transformací, tentokráte pomocí matice z $O(3)$, zachovávající třetí souřadnici, můžeme tento vektor transformovat na $(\,1,\ 0,\ 0\,)$, aniž by se změnila matice S' (jednotkový vektor a' jen „otočíme“ vhodnou rotací kolem třetí souřadnicové osy do směru první souřadnice). Můžeme proto shrnout, že pro matici S s hodností jedna se lze přechodem k jiné bázi dostat k

$$S' = \pm\,\mathrm{diag}\big(\,0,\ 0,\ \mathrm{sgn}(\lambda_3)\,\big)\,, \qquad \begin{cases} (a')^T = (\,0,\ 0,\ 0\,)\,, \\[2ex] (a')^T = (\,1,\ 0,\ 0\,)\,. \end{cases}$$

4.) Konečně, pokud má S hodnost nula, potom se potýkáme s nulovou maticí, a proto nemá smysl provádět transformaci pomocí (5.8). V případě nenulového vektoru a

můžeme provést takovou transformaci, abychom nejprve vektor a učinili jednotkovým a poté transformací z $O(3)$ ho opět otočit do směru první souřadnice, takže celkově máme

$$S' = \mathrm{diag}(\,0,\,0,\,0\,)\,, \qquad \begin{cases} (a')^T = (\,0,\,0,\,0\,)\,, \\ \\ (a')^T = (\,1,\,0,\,0\,)\,. \end{cases}$$

Tím jsme ukázali, že jakoukoli Lieovu algebru lze popsat diagonální maticí a vektorem s nulovou druhou a třetí složkou:

$$S = \mathrm{diag}(s_1,\,s_2,\,s_3\,)\,, \qquad a^T = (\,a,\,0,\,0\,)\,.$$

V příslušné bázi mají tedy komutační relace (vztahy určující hodnoty Lieových závorek bazických vektorů) tvar

$$\begin{aligned}[]
[x_1, x_2] &= s_3 x_3 - a x_2\,,\\
[x_2, x_3] &= s_1 x_1\,,\\
[x_3, x_1] &= s_2 x_2 + a x_3\,.
\end{aligned}$$

Různé Lieovy algebry lze získat různými volbami signatury S. Vzhledem k uvedeným podpřípadům s různým a to je celkem deset možností. Jak se ale ukazuje, je ještě nutné brát zvlášť případ, kdy hodnost S je dva a $a = 1/2$. Podrobné vysvětlení lze najít v [BC].

Celkem tedy máme jedenáct různých typů třírozměrných reálných Lieových algeber, přičemž dva z nich jsou jednoparametrické množiny. Právě popsané rozdělení je známé jako *Bianchiho klasifikace Lieových algeber* (i když přesně tento postup vlastně není původní Bianchiho, z r. 1918, ale jeho úprava, o kterou se zasloužili Schücking a Behr v roce 1962).

Následující tabulka přehledně shrnuje Bianchiho klasifikaci. Označení různých typů algeber římskými čísly (s indexy) zavedl Bianchi a je již velmi ustálené a hojně používané (a známé jako *Bianchiho typ*).

Bianchiho klasifikace

Typ	a	s_1	s_2	s_3
I	0	0	0	0
II	0	0	0	1
III	1/2	0	-1	1
IV	1	0	0	1
V	1	0	0	0
VI_0	0	0	-1	1
VI_a	a	0	-1	1
VII_0	0	0	1	1
VII_a	a	0	1	1
VIII	0	1	-1	1
IX	0	1	1	1

6 Homogenní prostory II

Po této matematické vsuvce je již jasné, proč má vztah (4.7) tak důležitou roli pro klasifikaci homogenních prostorů. Konstanty $C_{ab}{}^{c}$ jsou zjevně strukturní konstanty třírozměrné Lieovy algebry nad prostorem vektorů

$$X_a \equiv e^{\alpha}_{(a)} \frac{\partial}{\partial x^{\alpha}}$$

s komutátorem $[X_a, X_b] \equiv X_a X_b - X_b X_a$. Lze se o tom poměrně snadno přesvědčit:

$$\begin{aligned}
[X_a, X_b] &= e^{\alpha}_{(a)} \frac{\partial}{\partial x^{\alpha}} \left(e^{\beta}_{(b)} \frac{\partial}{\partial x^{\beta}} \right) - e^{\beta}_{(b)} \frac{\partial}{\partial x^{\beta}} \left(e^{\alpha}_{(a)} \frac{\partial}{\partial x^{\alpha}} \right) = \\
&= e^{\alpha}_{(a)} e^{\beta}_{(b)} \frac{\partial^2}{\partial x^{\alpha} \partial x^{\beta}} - e^{\beta}_{(b)} e^{\alpha}_{(a)} \frac{\partial^2}{\partial x^{\beta} \partial x^{\alpha}} + e^{\alpha}_{(a)} \frac{\partial e^{\beta}_{(b)}}{\partial x^{\alpha}} \frac{\partial}{\partial x^{\beta}} - e^{\beta}_{(b)} \frac{\partial e^{\alpha}_{(a)}}{\partial x^{\beta}} \frac{\partial}{\partial x^{\alpha}} = \\
&= \left[e^{\alpha}_{(a)} \frac{\partial e^{\gamma}_{(b)}}{\partial x^{\alpha}} - e^{\beta}_{(b)} \frac{\partial e^{\gamma}_{(a)}}{\partial x^{\beta}} \right] \cdot \frac{\partial}{\partial x^{\gamma}} = C_{ab}{}^{c} e^{\gamma}_{(c)} \frac{\partial}{\partial x^{\gamma}} \\
&= C_{ab}{}^{c} X_c \,.
\end{aligned}$$

Volba vektorů $e^{(a)}_{\alpha}$ v diferenciálních formách (4.1) není samozřejmě jednoznačná, což odpovídá možnosti volby jiné báze vektorového prostoru operátorů X_a.

Operátory X_a tedy tvoří třírozměrnou reálnou Lieovu algebru a vztah (4.7), který je podmínkou selektující homogenní prostory, představuje komutační relace v této algebře. Celou poslední kapitolu proto můžeme vpodstatě beze změny využít ke klasifikaci homogenních třírozměrných prostorů! To tedy znamená, že tak, jako existuje jedenáct typů neizomorfních Liových algeber, existuje i jedenáct typů neizomorfních homogenních prostorů.

Protože izotropní prostor je jen zvláštním případem homogenního prostoru, musí být v této klasifikaci místo i pro výsledky z kapitol o izotropních prostorech. V knize [TF] se můžeme dočíst, jak pro daný typ homogenního prostoru vyjádřit Riemannův tenzor, a že plochý Euklidův prostor odpovídá Bianchiho typu I, prostor s kladnou konstantní křivostí λ odpovídá speciálnímu případu typu IX pro $\eta_{ab} = \delta_{ab}/4\lambda$, a že prostor se zápornou konstantní křivostí odpovídá speciálnímu případu typu V pro $\eta_{ab} = \delta_{ab}/\lambda$. Navíc se dá dokázat (viz. [TF]), že Einsteinovy gravitační rovnice pro vesmír s homogenním prostorem se redukují na soustavu obyčejných diferenciálních rovnic, obsahující pouze funkce času. Vzhledem k tomu, že pro jejich řešení jsou známé matematické postupy, můžeme tak prohlásit, že otázka kosmologických modelů s homogenními prostory je tak zcela vyřešena.

Poděkování

Rád bych poděkoval všem, kteří mi při mé práci jakkoliv pomohli a především pak svému školiteli, prof. RNDr. Ladislavu Hlavatému, DrSc., bez jehož cenných rad a připomínek bych tuto práci jen stěží dokončil. Ještě jednou děkuji.

LITERATURA

[TF] L. D. LANDAU, E. M. LIFSHITZ: *The Classical Theory of Fields.* 4th rev. english edition, Butterworth–Heinemann, Oxford 2001.

[MF] J. HORSKÝ, J. NOVOTNÝ, M. ŠTEFANÍK: *Mechanika ve fyzice.* Academia, Praha 2001.

[GC] S. WEINBERG: *Gravitation and Cosmology.* John Wiley & Sons, Inc., 1972.

[LA] R. L. BRYANT: *Lie Groups and Symplectic Geometry,* in D. S. FREED, K. K. UHLENBECK: *Geometry and Quantum Field Theory.* American Mathematical Society, Park City 1995.

[BC] E. BERGSHOEFF, U. GRAN, R. LINARES, M. NIELSEN, T. ORTÍN, D. ROEST: *The Bianchi Classification of Maximal $D = 8$ Gauged Supergravities.* Class. Quant. Grav. 20 (2003) 3997-4014 `[hep-th/0306179]`