České vysoké učení technické v Praze
Fakulta jaderná a fyzikálně inženýrská

VÝZKUMNÝ ÚKOL

Posluchač: Aleš Černý

Vedoucí práce: prof. RNDr. Ladislav Hlavatý, DrSc.

11. 9. 2006

Prostory s konstantní křivostí

Aleš Černý

OBSAH

Úvod

Motivací k této práci byl úkol — dokázat, že metrický prostor, který je homogenní, má konstantní skalární křivost. V případě prostorů dimenze tři se o tom lze přesvědčit přímým výpočtem, protože třídimenzionální homogenní prostory jsou klasifikovány (viz. [1]) a příslušné metriky jsou známé (viz. [2]). Otázkou ale bylo, jak odůvodnit konstantnost skalární křivosti, aniž by se musela konkrétně počítat. Z takového důkazu by pak také mohlo vyplynout, zda je toto tvrzení pravdivé i pro prostory vyšších dimenzí.

I když se nakonec samotný důkaz ukázal být velmi jednoduchý (ještě o něco silnější tvrzení pro libovolnou dimenzi lze dokázat vpodstatě na několika řádcích), cesta k němu rozhodně jednoduchá nebyla. Díky tomu jsem si alespoň ujasnil mnoho pojmů, osvojil si oblasti diferenciální geometrie zabývající se popisem a prací s prostory, které mají nějaké druhy symetrií a vlastními silami dokázal i několik pomocných tvrzení, z nichž, jak jsem zjistil později, byla většina již dávno známá, další část byly jen triviální přepisy již dávno známých tvrzení a ten zbytek byl úplně k ničemu.

V následujícím textu bych si tak kromě pouhého předvedení hledaného důkazu dovolil i lehce přiblížit svůj (zprvu marný) postup, čímžto prosím čtenáře, aby se nepozastavoval nad tím, že celá první kapitola je vpodstatě věnována ukázce, jak se konstantnost skalární křivosti homogenního prostoru dokázat nedá.

1 Maximálně symetrické prostory

Narozdíl od homogenních prostorů, je o tzv. *maximálně symetrických prostorech* všeobecně známo, že mají konstantní skalární křivost a důkaz této vlastnosti lze nalézt v každé slušné publikaci zabývající se obecnou teorií relativity nebo Riemannovskou geometrií. Přirozeně se tak nabízí možnost, jak bychom mohli dospět k důkazu, že homogenní prostor má konstantní křivost: nahlédneme do jedné ze zmiňovaných slušných publikací a prostudujeme již hotový důkaz téhož tvrzení pro maximálně symetrické prostory. Když budeme mít štěstí, podaří se nám ho modifikovat pro prostory homogenní a k výsledku tak dojdeme téměř bez práce.

Onou modifikací je zeslabení podmínek, neboť maximálně symetrický prostor je prostor izotropní kolem všech bodů a tedy i homogenní. V důkazu je tak třeba najít místo, ve kterém do něj vstupuje požadavek izotropie prostoru a nahradit ho požadavkem pouze homogenity. A pak samozřejmě doufat, že i tyto slabší podmínky budou stačit k implikaci konstantní křivosti. Předvedu zde proto podrobně onen vzorový důkaz pro maximálně symetrické prostory.

Jak už jsem zmínil, maximálně symetrický prostor je nutně izotropní kolem všech bodů a také homogenní (důkaz, pro naši věc nepodstatný, lze nalézt v [1], jakož i úvod do problematiky symetrických prostorů, který zde nebudu reprodukovat). O prostoru přitom řekneme, že je izotropní kolem daného bodu X, pokud metrika takového prostoru připouští existenci infinitezimálních izometrií

$$x'^{\mu} = x^{\mu} + \varepsilon \cdot \xi^{\mu}(x)\,,$$

které ponechávají bod X na místě, tj. $\xi^{\mu}(X) = 0$ a přitom první derivace $\xi_{\mu;\nu}(X)$ probíhají všechny hodnoty, omezené pouze podmínkou (tzv. Killingovou rovnicí)

$$\xi_{\nu;\mu} + \xi_{\mu;\nu} = 0\,, \tag{1.1}$$

kterou musí, jak praví definice, splňovat každý Killingův vektor $\xi^{\mu}(x)$.

Pokud má prostor nějaké symetrie, odrazí se to na struktuře jeho Riemannova tenzoru křivosti. Podívejme se na podmínky, kterým musí tenzor křivosti vyhovovat, aby měla metrika Killingův vektor ξ^{μ}. Vyjdeme ze vztahu pro komutátor kovariantních derivací vektoru

$$A_{\mu;\nu;\sigma} - A_{\mu;\sigma;\nu} = -R^{\kappa}{}_{\mu\nu\sigma}A_{\kappa}\,. \tag{1.2}$$

Přičteme k němu dvě jeho cyklické permutace a využijeme vlastnosti Riemannova tenzoru

$$R^{\kappa}{}_{\mu\nu\sigma} + R^{\kappa}{}_{\sigma\mu\nu} + R^{\kappa}{}_{\nu\sigma\mu} = 0\,,$$

díky které získáme na pravé straně nulu. Pro libovolný vektor A_{μ} tak platí

$$A_{\mu;\nu;\sigma} - A_{\mu;\sigma;\nu} + A_{\sigma;\mu;\nu} - A_{\sigma;\nu;\mu} + A_{\nu;\sigma;\mu} - A_{\nu;\mu;\sigma} = 0\,,$$

což pro Killingův vektor můžeme díky (1.1) dále upravit na

$$\xi_{\mu;\nu;\sigma} - \xi_{\mu;\sigma;\nu} - \xi_{\sigma;\nu;\mu} = 0$$

a použitím vzorce (1.2) pak dostaneme vztah, který platí pro každý Killingův vektor

$$\xi_{\sigma;\nu;\mu} = -R^{\kappa}{}_{\mu\nu\sigma}\xi_{\kappa}\,. \tag{1.3}$$

Dále použijeme vzorec pro komutátor kovariantních derivací tenzoru druhého řádu

$$A_{\sigma\nu;\mu;\lambda} - A_{\sigma\nu;\lambda;\mu} = -R^{\kappa}{}_{\sigma\mu\lambda}A_{\kappa\nu} - R^{\kappa}{}_{\nu\mu\lambda}A_{\sigma\kappa}\,,$$

pro tenzor $A_{\mu\nu} \equiv \xi_{\mu;\nu}$. Do levé strany dosadíme za použití vztahu (1.3)

$$\begin{aligned} \xi_{\sigma;\nu;\mu;\lambda} &= \left(-R^{\kappa}{}_{\mu\nu\sigma}\xi_{\kappa}\right)_{;\lambda} = -R^{\kappa}{}_{\mu\nu\sigma;\lambda}\xi_{\kappa} - R^{\kappa}{}_{\mu\nu\sigma}\xi_{\kappa;\lambda} \\ -\xi_{\sigma;\nu;\lambda;\mu} &= \left(R^{\kappa}{}_{\lambda\nu\sigma}\xi_{\kappa}\right)_{;\mu} = R^{\kappa}{}_{\lambda\nu\sigma;\mu}\xi_{\kappa} + R^{\kappa}{}_{\lambda\nu\sigma}\xi_{\kappa;\mu} \end{aligned}$$

a získanou rovnost ještě upravíme vhodným vytknutím na tvar

$$\left(-R^{\kappa}{}_{\sigma\mu\lambda}\delta^{\rho}_{\nu} + R^{\kappa}{}_{\nu\mu\lambda}\delta^{\rho}_{\sigma} - R^{\kappa}{}_{\lambda\nu\sigma}\delta^{\rho}_{\mu} + R^{\kappa}{}_{\mu\nu\sigma}\delta^{\rho}_{\lambda}\right)\xi_{\kappa;\rho} = \left(R^{\kappa}{}_{\lambda\nu\sigma;\mu} - R^{\kappa}{}_{\mu\nu\sigma;\lambda}\right)\xi_{\kappa}\,. \tag{1.4}$$

To je podmínka, které musí vyhovovat každý Killingův vektor ξ^{μ} prostoru s tenzorem křivosti $R^{\kappa}{}_{\mu\nu\lambda}$.

V tomto místě vstupuje do hry typ prostoru. Druh symetrie totiž určuje vlastnosti Killingových vektorů daného prostoru a rovnice (1.4) tak při požadavku jejího splnění pro vektory určitých vlastností klade podmínky na Riemannův tenzor křivosti tohoto prostoru. Konkrétně, pokud uvažujeme maximálně symetrický prostor, tedy prostor izotropní kolem všech bodů, musí pro každý bod x existovat Killingův vektor, pro který $\forall\kappa = 1, \ldots, n:\ \xi_{\kappa}(x) = 0$ a přitom jeho první derivace může být libovolný antisymetrický tenzor $\xi_{\kappa;\rho}(x) = \xi_{\rho;\kappa}(x)$ (libovolnost je důsledek izotropie, antisymetrie zase Killingovy rovnice).

Pro každý bod x lze tedy zvolit Killingův vektor tak, aby pravá strana rovnice (1.4) byla nulová. Aby byla nulová i levá strana, musí být výraz v závorce symetrický v indexech κ a ρ (součin symetrického a antisymetrického tenzoru je nula). Pro každé x tudíž platí

$$\begin{aligned} &- R^{\kappa}{}_{\sigma\mu\lambda}\delta^{\rho}_{\nu} + R^{\kappa}{}_{\nu\mu\lambda}\delta^{\rho}_{\sigma} - R^{\kappa}{}_{\lambda\nu\sigma}\delta^{\rho}_{\mu} + R^{\kappa}{}_{\mu\nu\sigma}\delta^{\rho}_{\lambda} = \\ =&- R^{\rho}{}_{\sigma\mu\lambda}\delta^{\kappa}_{\nu} + R^{\rho}{}_{\nu\mu\lambda}\delta^{\kappa}_{\sigma} - R^{\rho}{}_{\lambda\nu\sigma}\delta^{\kappa}_{\mu} + R^{\rho}{}_{\mu\nu\sigma}\delta^{\kappa}_{\lambda}\,. \end{aligned} \tag{1.5}$$

Rovnici zúžíme přes ρ a ν a využijeme vlastností Riemannova tenzoru a toho, že v n-dimenzionálním prostoru je $\delta^{\rho}_{\rho} = n$

$$-nR^{\kappa}{}_{\sigma\mu\lambda} + \underbrace{R^{\kappa}{}_{\sigma\mu\lambda} - R^{\kappa}{}_{\lambda\mu\sigma} + R^{\kappa}{}_{\mu\lambda\sigma}}_{=0} = R^{\kappa}{}_{\sigma\mu\lambda} - R_{\lambda\sigma}\delta^{\kappa}_{\mu} + R_{\mu\sigma}\delta^{\kappa}_{\lambda}\,.$$

Zjišťujeme tak, že Riemannův tenzor izotropního prostoru je funkcí Ricciho tenzoru a metriky

$$(n-1)\,R_{\kappa\sigma\mu\lambda} = R_{\lambda\sigma}g_{\kappa\mu} - R_{\mu\sigma}g_{\kappa\lambda}\,. \tag{1.6}$$

Levá strana této rovnice je antisymetrická v indexech κ a σ, a proto musí mít stejnou vlastnost i strana levá

$$R_{\lambda\sigma}g_{\kappa\mu} - R_{\mu\sigma}g_{\kappa\lambda} = -R_{\lambda\kappa}g_{\sigma\mu} + R_{\mu\kappa}g_{\sigma\lambda}\,.$$

Zvednutím indexu κ a zúžením přes κ a μ získáme vztah mezi Ricciho tenzorem a skalární křivostí R

$$R_{\lambda\sigma} = \frac{R}{n}g_{\lambda\sigma}\,, \tag{1.7}$$

který když dosadíme do (1.6), zjistíme, že Riemannův tenzor křivosti izotropního prostoru má velmi jednoduchou strukturu a je funkcí pouze skalární křivosti a metriky

$$R_{\kappa\sigma\mu\lambda} = \frac{R}{n(n-1)}\left(g_{\lambda\sigma}g_{\kappa\mu} - g_{\mu\sigma}g_{\kappa\lambda}\right). \tag{1.8}$$

Teď se podíváme na skalární křivost R. Zúžením Bianchiho identity

$$R^{\kappa}{}_{\mu\nu\lambda;\sigma} + R^{\kappa}{}_{\mu\sigma\nu;\lambda} + R^{\kappa}{}_{\mu\lambda\sigma;\nu} = 0$$

přes $\kappa\nu$ a $\mu\lambda$ dostaneme obecně platnou rovnost

$$R^{\mu}{}_{\sigma;\mu} - \frac{1}{2}R_{;\sigma} = 0\,. \tag{1.9}$$

Pro izotropní prostory díky jejich vlastnosti (1.7) pak tato rovnost nabývá tvaru

$$\frac{R_{;\mu}}{n}\delta^{\mu}_{\sigma} - \frac{1}{2}R_{;\sigma} = \left(\frac{1}{n} - \frac{1}{2}\right)R_{;\sigma} = 0\,.$$

Odtud je patrné, že maximálně symetrický prostor dimenze alespoň tři má konstantní skalární křivost. Po zavedení tzv. konstanty křivosti

$$K = \frac{R}{n(n-1)}\,,$$

tak můžeme Riemannův tenzor takového prostoru psát ve tvaru

$$R_{\kappa\sigma\mu\lambda} = K\left(g_{\lambda\sigma}g_{\kappa\mu} - g_{\mu\sigma}g_{\kappa\lambda}\right)\,. \tag{1.10}$$

V literatuře (např. [3]) se prostory, jejichž tenzor křivosti má právě takovýto tvar, nazývají *prostory s konstantní křivostí*. Rozhodně to ale neznamená, že by všechny prostory, které mají konstantní *skalární křivost*, musely splňovat podmínku (1.10). K tomuto se ještě vrátím v poslední kapitole.

2 Křivost homogenních prostorů

Podívejme se teď, jak je to s homogenními prostory. Metrický prostor dimenze n se nazývá homogenní, pokud má n-dimenzionální grupu izometrií, která na něm působí tranzitivně. To znamená, že pro libovolné dva body prostoru musí existovat nějaká izometrie zobrazující jeden bod na druhý. Nebo jinak, pro jakýkoliv bod x homogenního prostoru lze vybrat takový Killingův vektor ξ^{μ}, aby $\xi^{\mu}(x) \neq 0$ pro všechna $\mu = 1, \ldots, n$.

První myšlenka samozřejmě putuje k podmínce (1.4) a k tomu, co z ní vyplyne po nahrazení předpokladu izotropie prostoru pouze homogenitou. Zatímco u izotropních prostorů jsme těžili z toho, že existence vhodných Killingových vektorů nuluje pravou stranu této podmínky, u prostorů homogenních už to tak lehké nemáme. Pro daný bod x totiž nemusí existovat Killingův vektor nulový v tomto bodě na pravé straně tak obecně může být cokoliv. Stejně tak i na levé straně už nemusí být nula pro všechna x, výraz v závorce už nemusí být symetrický v κ a ρ. Zkrátka, zatímco pro izotropní prostory nás předvedený postup velmi dobře dovede ke kýženému výsledku díky silné podmínce (1.5), kterou získáme z rovnosti (1.4) požadováním existence vhodných Killingových vektorů, v případě homogenního prostoru už toto nefunguje a podmínka (1.4) už neklade na Riemannův tenzor žádná významná omezení.

Když tedy zklamal nápad "opsat domácí úkol" od někoho jiného a z tohoto přístupu se mi už nepodařilo nic použitelného vydolovat, bylo třeba se porozhlédnout jinde. Nakonec se ukázalo, že se na věc musí trochu od lesa a vrátit se až k samému začátku.

Homogenní prostor, to je prostor, na kterém lze najít Killingovy vektory určitých vlastností. Nic jiného homogenita prostoru neznamená. Tou jedinou vlastností je to, že pro každý bod prostoru existuje Killingův vektor, tj. vektor splňující Killingovu rovnici (1.1), který je v tomto bodě *nenulový*.

To nám ovšem umožňuje říci něco více o skalárních funkcích na homogenních prostorech. Konkrétně, pokud má skalár $\Phi(x)$ nulovou Lieovu derivaci podél libovolného Killingova pole, potom je nutně na celém prostoru *konstantní*. Lieova derivace skaláru je přece rovna jeho směrové derivaci

$$\underset{\xi}{\mathcal{L}} \Phi = \Phi_{,\rho} \cdot \xi^{\rho} \,,$$

a pokud má být rovnost $\Phi_{,\rho}(x) \cdot \xi^{\rho}(x) = 0$ splněna pro všechna x a pro *libovolný* Killingův vektor ξ^{μ} a současně víme, že pro každý bod x existuje Killingův vektor s nenulovými složkami v tomto bodě, pak není zbytí a pro všechna x musí být nulové všechny parciální derivace skaláru

$$\Phi_{,\rho} = 0 \,, \quad \forall \rho = 1, 2, \dots, n \,.$$

Skalár Φ je tedy na celém prostoru skutečně konstantní. Tohle si samozřejmě můžeme dovolit jen v homogenním prostoru, protože jinak nemáme zaručeno, že pro daný bod x existuje nějaký Killingův vektor s nenulovými složkami a o konstantnosti skaláru Φ tak obecně nemůžeme nic tvrdit.

Tato jednoduchá úvaha může být klíčem k vyřešení našeho problému. Teď by nám totiž stačilo, kdyby Lieova derivace skalární křivosti R podél libovolného Killingova pole byla v homogenním prostoru nulová. Tím by byl důkaz hotov. Můžeme se ale přesvědčit, že $\mathcal{L}_{\xi} R$ je nula pro jakýkoli prostor (nejen homogenní) s Killingovým vektorem ξ.

Rozepíšeme R postupně pomocí Ricciho tenzoru, Riemannova tenzoru, Christoffelových symbolů a metrického tenzoru

$$\begin{aligned}
R &= g^{\mu\nu} R_{\mu\nu} = g^{\mu\nu} R^{\kappa}{}_{\mu\kappa\nu} = g^{\mu\nu} \left(\Gamma^{\kappa}{}_{\mu\nu,\kappa} - \Gamma^{\kappa}{}_{\mu\kappa,\nu} + \Gamma^{\kappa}{}_{\sigma\kappa} \Gamma^{\sigma}{}_{\mu\nu} - \Gamma^{\kappa}{}_{\sigma\nu} \Gamma^{\sigma}{}_{\mu\kappa} \right) = \\
&= g^{\mu\nu} \Bigg(\frac{1}{2} \frac{\partial}{\partial x^{\kappa}} \left[g^{\kappa\sigma} \left(g_{\sigma\mu,\nu} + g_{\sigma\nu,\mu} - g_{\mu\nu,\sigma} \right) \right] + \frac{1}{2} \frac{\partial}{\partial x^{\nu}} \left[g^{\kappa\sigma} \left(g_{\sigma\mu,\kappa} + g_{\sigma\kappa,\mu} - g_{\mu\kappa,\sigma} \right) \right] + \\
&+ \frac{1}{4} g^{\kappa\rho} \left(g_{\rho\sigma,\kappa} + g_{\rho\kappa,\sigma} - g_{\sigma\kappa,\rho} \right) \cdot g^{\sigma\lambda} \left(g_{\lambda\mu,\nu} + g_{\lambda\nu,\mu} - g_{\mu\nu,\lambda} \right) - \\
&- \frac{1}{4} g^{\kappa\rho} \left(g_{\rho\sigma,\nu} + g_{\rho\nu,\sigma} - g_{\sigma\nu,\rho} \right) \cdot g^{\sigma\lambda} \left(g_{\lambda\mu,\kappa} + g_{\lambda\kappa,\mu} - g_{\mu\kappa,\lambda} \right) \Bigg) \,.
\end{aligned}$$

Další konkrétní úpravy výrazu už nejsou potřeba. Nám postačí, když si uvědomíme, že po zderivování a roznásobení dostaneme součet několika členů, které budou tvořeny (až na násobek číslem, který nehraje roli) součiny metrického tenzoru a jeho prvních, případně druhých derivací (s různě zvednutými indexy). Velmi symbolicky tak můžeme napsat

$$R = \sum (\,\text{konst.}) \cdot g \cdot \ldots \cdot g \cdot \partial g \cdot \ldots \cdot \partial g \cdot \partial^2 g \cdot \ldots \cdot \partial^2 g\,.$$

Využijeme toho, že Lieova derivace je lineární zobrazení, že splňuje Leibnitzovo pravidlo pro derivování součinu, a že zachovává typ objektu, na který působí (Lieova derivace tenzoru je tenzor stejného typu). Při Lieovském derivování poslední rovnice tak můžeme derivaci vsunout dovnitř sumy a pak derivací součinu získat členy tvořené součiny metrického tenzoru a jeho první a druhé derivace a vždy jedné Lieovy derivace metriky, plus součiny „odpadní“, kde vystupují Lieovy derivace zbytku, což lze shrnout symbolickým zápisem

$$\underset{\xi}{\pounds} R = \sum \left[\underset{\xi}{\pounds}(g) \cdot \prod \big(g \cdot \partial g \cdot \partial^2 g \big) \right] + \sum \left[g \cdot \ldots \cdot g \cdot \underset{\xi}{\pounds} \Big(\prod \big(\partial g \cdot \partial^2 g \big) \Big) \right]. \tag{2.1}$$

Ukážeme, že Lieova derivace v první sumě je nulová. Výraz na levé straně rovnice (1.1) je totiž roven Lieově derivaci metrického tenzoru podél vektorového pole ξ^μ, o čemž se můžeme snadno přesvědčit (kovariantní derivace metrického tenzoru je vždy nula)

$$\underset{\xi}{\pounds} g_{\mu\nu} = g_{\mu\nu;\rho}\xi^\rho + g_{\rho\nu}\xi^\rho{}_{;\mu} + g_{\mu\rho}\xi^\rho{}_{;\nu} = \xi_{\nu;\mu} + \xi_{\mu;\nu}\,.$$

Killingova rovnice tedy vlastně neříká nic jiného, než že Lieova derivace metrického tenzoru podél Killigova pole je nulová

$$\underset{\xi}{\pounds} g_{\mu\nu} = 0\,. \tag{2.2}$$

To, že ve výrazu (2.1) vystupuje metrický tenzor s různě zvednutými indexy nevadí, protože $g^\nu_\mu = \delta^\nu_\mu$ a Lieova derivace konstanty je nula a Lieovou derivací identity $g_{\mu\sigma}g^{\sigma\nu} = \delta^\nu_\mu$ dostaneme i $\pounds_\xi\, g^{\mu\nu} = 0$. Pomocí metrického tenzoru tak můžeme zvedat a snižovat indexy za znamením Lieovy derivace

$$g_{\mu\sigma}g^{\nu\rho}\,\underset{\xi}{\pounds} T_{\rho\ldots}{}^{\sigma\cdots} = \underset{\xi}{\pounds} T^{\nu}{}_{\ldots\mu}{}^{\cdots}\,,$$

ovšem jen pokud je ξ Killingovo pole (pro Lieovu derivaci podél obecného vektorového pole si takto počínat nemůžeme).

Celá první suma na pravé straně (2.1) je tedy nula a druhá suma tak musí být celkově skalár, neboť skalár máme i na levé straně. Kromě přímočarého rozepsání tohoto výrazu a podrobných a velmi zdlouhavých úprav, můžeme nulovost $\pounds_\xi\, R$ dokázat i mnohem rychleji (ovšem s malým háčkem[†]).

[†] Ten malý háček tkví v tom, že se mi nepodařilo nikde najít důkaz následujícího tvrzení o záměnnosti Lieovy derivace s parciální, a to přitom není nijak na první pohled zřejmý výrok. Zde se proto silně odvolávám na uvedenou literaturu a tvrzení dále používám bez důkazu.

V knize [5] se totiž můžeme dočíst, že Lieovu derivaci lze definovat obecně pro jakýkoli lineární geometrický objekt, i netenzorového charakteru (co je třeba rozumět pod pojmem geometrický objekt je definováno tamtéž). Pak prý, jak se tvrdí v [5], Lieovu derivaci můžeme zaměnit s parciální, tj. můžeme napsat

$$\pounds_{\xi}\left(\frac{\partial}{\partial x^{\alpha}} g_{\mu\nu}\right) = \frac{\partial}{\partial x^{\alpha}}\left(\pounds_{\xi} g_{\mu\nu}\right).$$

Taková vlastnost se nám velmi hodí, protože rovnici (2.1) lze evidentně upravit na tvar součtu, kde každý sčítanec je násobkem Lieovy derivace metrického tenzoru nebo jeho první či druhé derivace, tedy symbolicky

$$\begin{aligned}\pounds_{\xi} R = \sum\left[\pounds_{\xi}(g)\cdot\prod\left(g\cdot\partial g\cdot\partial^2 g\right)\right] + \sum\left[\pounds_{\xi}(\partial g)\cdot\prod\left(g\cdot\partial g\cdot\partial^2 g\right)\right] + \\ + \sum\left[\pounds_{\xi}(\partial^2 g)\cdot\prod\left(g\cdot\partial g\cdot\partial^2 g\right)\right].\end{aligned} \tag{2.3}$$

V případě, že ξ je Killingovo pole, získáme záměnou Lieovy derivace s parciální vztahy

$$\pounds_{\xi} g_{\mu\nu,\alpha} = \pounds_{\xi} g_{\mu\nu,\alpha\beta} = 0\,.$$

Ve výrazu (2.3) jsou tak všechny Lieovy derivace rovné nule, a proto i levá strana rovnosti je nulová, neboli

$$\pounds_{\xi} R = 0\,.$$

To platí pro libovolné vektorové pole ξ splňující (1.1), neboli pro jakýkoliv prostor s Killingovým vektorem ξ. Je-li ale prostor homogenní, pak navíc (z výše popsaných důvodů) nulovost $\pounds_{\xi} R$ zajišťuje, že skalární křivost je na tomto prostoru konstantní

$$R = R(x^{\mu}) = \text{konst.}$$

Navíc z předchozího postupu je vidět, že tento výsledek vůbec nezávisí na dimenzi prostoru, proto nejen třírozměrné prostory, ale *každý homogenní prostor má konstantní skalární křivost.* Hledaný důkaz je tak hotov a můžeme být spokojeni.

3 Další důsledky

Z předvedených úvah ale můžeme získat ještě o něco významější informaci o homogenních prostorech. Jak už bylo zmíněno, nejen skalární křivost, ale obecně každý skalár, který má nulovou Lieovu derivaci podél libovolného Killingova pole, je na homogenním prostoru konstantní.

Lze ale takovéto skaláry odlišit od ostatních nějakou jejich další vlastností, kterou přitom umíme snadno ověřit? Pak bychom mohli poměrně lehce rozhodnout o tom, zda je zadaná skalární funkce na homogenním prostoru konstantní i bez jejího konkrétního vyšetřování. Bohužel se ukazuje, že samotná nulovost Lieovy derivace je příliš obecná vlastnost. Existuje ale třída skalárních funkcí, o kterých snadno rozhodneme, že mají Lieovu derivaci podél Killingova pole nulovou.

Podívejme se znovu na postup, jakým jsme ukázali nulovost Lieovy derivace skalární křivosti R. Důležité bylo pouze to, že ji bylo možné vyjádřit jako součet členů, které byly násobkem Lieovy derivace metrického tenzoru nebo jeho prvních a druhých derivací, a že právě tyto Lieovy derivace jsou nulové (což je důsledek Killingovy rovnice, potažmo tvrzení o záměnnosti Lieových a parciálních derivací dle [5]). Proto pokud nějaký skalár závisí pouze na metrickém tenzoru a jeho derivacích

$$\Phi = \Phi(g_{\mu\nu},\ g_{\mu\nu,\alpha},\ g_{\mu\nu,\alpha\beta},\ \ldots)\,,$$

musí mít nutně nulovou Lieovu derivaci *podél libovolného Killingova pole.* Tuto derivaci totiž můžeme rozepsat jako

$$\mathop{\pounds}_{\xi}\Phi = \frac{\partial\Phi}{\partial g_{\mu\nu}}\mathop{\pounds}_{\xi} g_{\mu\nu} + \frac{\partial\Phi}{\partial g_{\mu\nu,\alpha}}\mathop{\pounds}_{\xi} g_{\mu\nu,\alpha} + \frac{\partial\Phi}{\partial g_{\mu\nu,\alpha\beta}}\mathop{\pounds}_{\xi} g_{\mu\nu,\alpha\beta} + \ldots\,,$$

což je zjevně nulový výraz, protože všechny Lieovy derivace na pravé straně jsou v důsledku Killingovy rovnice nulové.

Výrok o konstantnosti skalární křivosti homogenních prostorů tak můžeme brát jako speciální případ lehce obecnějšího tvrzení: *libovolný skalár, který je funkcí pouze metrického tenzoru a jeho derivací, je na homogenním prostoru konstantní.* Při úvahách o tom, "k čemu je to ale dobré", jsem se stále nějak nemohl dobrat k oné významné a slávu přinášející aplikaci, což je mi velmi líto. Předkládám tak jen několik banalit, ke kterým lze dokázané tvrzení využít.

Například: protože Riemannův tenzor křivosti $R^{\kappa}{}_{\mu\nu\lambda}$ je funkcí metriky a jejích derivací, musí být na homogenním prostoru konstantní nejen $R = R^{\mu}_{\mu}$, ale i další skaláry které můžeme získat úžením Riemannova tenzoru, jako $R_{\mu\nu}R^{\mu\nu}$ nebo $R_{\kappa\mu\nu\lambda}R^{\kappa\mu\nu\lambda}$. Navíc můžeme i kovariantně derivovat a potom úžit a násobit jinými tenzory, díky čemuž můžeme získat velmi mnoho (většinou k ničemu nepoužitelných) výrazů typu

$$R^{\kappa}{}_{\mu\nu\lambda;\kappa}\cdot R^{\nu\lambda}\cdot R^{\mu\sigma}{}_{;\sigma}\,,$$

o kterých můžeme s nadšením prohlašovat, že jsou na homogenním prostoru konstantní.

O něco zajímavější může být fakt, že na homogenním prostoru je nulová kovariantní divergence Ricciho tenzoru. Opět použijeme zúžené Bianchiho identity

$$R^{\mu}{}_{\sigma;\mu} - \frac{1}{2}R_{;\sigma} = 0\,,$$

ze které snadno nahlédneme, že pokud je skalární křivost R konstantní, pak má Ricciho tenzor jistě nulovou kovariantní divergenci

$$R = \text{konst.} \Rightarrow R^{\mu}{}_{\sigma;\mu} = 0\,.$$

Možná jediný praktický užitek dokázaného tvrzení o homogenních prostorech by mohl být tento: skalár $R_{\kappa\mu\nu\lambda}R^{\kappa\mu\nu\lambda}$ je známý jako tzv. *Kretschmannův invariant* a je hojně používaný v relativistické fyzice (tedy popravdě řečeno nemám tu hojnost nijak ověřenou, ale na přednáškách mi byl Kretschmannův invariant takto prezentován). Pokud tedy relativisté mají napočítány tyto invarianty pro různé prostory, mohou pak lehce ověřit, zda mohou být zkoumané prostory homogenní či nikoliv — jestliže totiž Kretschmannův invariant není na celém prostoru konstantní, nemůže být tento homogenní. Naše tvrzení přeci říká, že na homogenním prostoru by takovýto skalár musel být konstantou. Relativista si pak ušetří práci s hledáním Killingových vektorů zadané metriky.

Takovým triviálním příkladem může být třeba nejstarší známé přesné řešení Einsteinových rovnic — Schwarzschildovo řešení

$$ds^2 = -\left(1 - \frac{2M}{r}\right) dt^2 + \frac{1}{1 - \dfrac{2M}{r}}\, dr^2 + r^2 \left(d\vartheta^2 + \sin^2\vartheta\, d\varphi^2\right).$$

Kretschmannův invariant této metriky je

$$R_{\kappa\mu\nu\lambda}R^{\kappa\mu\nu\lambda} = \frac{48M^2}{r^6}\,,$$

což je funce závisející na souřadnici r. Swcharzschildova metrika skutečně není homogenní, což je však jasné na první pohled vzhledem k existenci jednoho význačného bodu, a to počátku souřadnic $r = 0$. U jiných metrik ale nehomogenita tak jasná být nemusí a pak by mohl být tento postup poměrně šikovnou pomůckou.

4 Bianchiho klasifikace

Abych nezůstal čtenáři nic dlužen, uvedu ještě stručně (tj. pouze výsledky, bez odvozování) tzv. *Bianchiho klasifikaci*. Tento již ustálený termín označuje rozdělení všech homogenních prostorů dimenze tři na několik vzájemně neizomorfních typů, které autor, Luigi Bianchi, očísloval římskými číslicemi I až IX a dodnes se mluví o Bianchiho typech.

V práci [2] Bianchi odvozuje tvary metrik třírozměrných prostorů, které mají spojité r-parametrické grupy izometrií, kde r nabývá hodnot jedna až šest (šest je největší možný počet nezávislých Killingových vektorů, které může mít třírozměrný prostor — takový prostor je pak maximálně symetrický). Největší pozornost přitom věnuje prostorům s tranzitivní třírozměrnou grupou izometrií, tedy homogenním prostorům. Následující seznam stručně shrnuje jeho výsledky. Zákony skládání infinitezimálních transformací $X_1 f$, $X_2 f$, $X_3 f$ určují strukturu grupy izometrií daného typu prostorů. Všechny prostory s metrikou izomorfní uvedené reprezentující metrice patří do téhož typu.

Typ I

Grupa je určená vztahy

$$[X_1, X_2]f = [X_1, X_3]f = [X_2, X_3]f = 0\,,$$

metrika má tvar

$$ds^2 = dx_1^2 + a\,dx_2^2 + 2b\,dx_2\,dx_3 + c\,dx_3^2\,,$$

kde a, b, c jsou konstanty. Takový prostor je plochý, tedy s nulovou křivostí. Má šestirozměrnou celkovou grupu izometrií, je maximálně symetrický.

Typ II

Grupa

$$[X_1, X_2]f = [X_1, X_3]f = 0, \quad [X_2, X_3]f = X_1 f\,,$$

a příslušná metrika

$$ds^2 = dx_1^2 + dx_2^2 + 2x_1\,dx_2\,dx_3 + (x_1^2 + 1)\,dx_3^2\,.$$

Prostor s takovouto metrikou připouští třírozměrnou grupu jako svoji grupu izometrií, ale jeho celková grupa izometrií je čtyřrozměrná.

Typ III

Grupa

$$[X_1, X_2]f = [X_2, X_3]f = 0, \quad [X_1, X_3]f = X_1 f\,,$$

metrika

$$ds^2 = dx_1^2 + e^{2x_1}\,dx_2^2 + 2ne^{x_1}\,dx_2\,dx_3 + dx_3^2\,,$$

kde n je konstanta. Opět jako v předešlém případě má takovýto prostor čtyřrozměrnou celkovou grupu izometrií.

Typ IV

Grupa

$$[X_1, X_2]f = 0, \quad [X_1, X_3]f = X_1 f, \quad [X_2, X_3]f = X_1 f + X_2 f\,,$$

a metrika

$$ds^2 = dx_1^2 + e^{x_1}\left[dx_2^2 + 2x_1\,dx_2\,dx_3 + (x_1^2 + n^2)\,dx_3^2\right],$$

s konstantním n.

Typ V

Grupa

$$[X_1, X_2]f = 0, \quad [X_1, X_3]f = X_1 f, \quad [X_2, X_3]f = X_2 f\,,$$

metrika

$$ds^2 = dx_1^2 + e^{2hx_1}(dx_2^2 + dx_3^2)\,,$$

h je konstanta. To je případ prostoru se zápornou konstantní křivostí. Celková grupa izometrií je tedy šestirozměrná, jedná se o maximálně symetrický prostor.

Typ VI

Grupa

$$[X_1, X_2]f = 0, \quad [X_1, X_3]f = X_1 f, \quad [X_2, X_3]f = hX_2 f,\ h \neq 0, 1\,,$$

metrika

$$ds^2 = dx_1^2 + e^{2x_1}\,dx_2^2 + 2ne^{(h+1)x_1}\,dx_2\,dx_3 + e^{2hx_1}\,dx_3^2\,,$$

n a h opět konstanty.

Typ VII

Grupa

$$[X_1, X_2]f = 0, \quad [X_1, X_3]f = X_2 f, \quad [X_2, X_3]f = -X_1 f + hX_2 f\,,$$

metrika

$$\begin{aligned} ds^2 = dx_1^2 + e^{-hx_1}\Big[&(n + \cos\nu x_1)\,dx_2^2 + (h\cos\nu x_1 + \nu\sin x_1 + hn)\,dx_2\,dx_3 + \\ &+ \left(\frac{2-\nu^2}{2}\cos\nu x_1 + \frac{h\nu}{2}\sin\nu x_1 + n\right)dx_3^2\Big]\,, \end{aligned}$$

kde h, ν a n jsou konstanty.

Typ VIII

Grupa

$$[X_1, X_2]f = X_1 f, \quad [X_1, X_3]f = 2X_2 f, \quad [X_2, X_3]f = X_3 f\,,$$

metrika

$$
\begin{aligned}
ds^2 =& \frac{Q^{(4)}(x_1)}{24}\,dx_1^2 + Q(x_1)\,dx_2^2 + \left[Q(x_1)x_2^2 - \frac{Q'(x_1)}{2}x_2 + \frac{Q''(x_1)}{2} - \frac{h}{2}\right]dx_3^2 + \\
&+ 2\left(\frac{Q''(x_1)}{12} + h\right)dx_1\,dx_2 + 2\left[\frac{Q'''(x_1)}{24} - \left(\frac{Q''(x_1)}{12} + h\right)x_2\right]dx_1\,dx_3 + \\
&+ 2\left(\frac{Q'(x_1)}{4} - Q(x_1)x_2\right)dx_2\,dx_3\,,
\end{aligned}
$$

kde $Q(x_1)$ je polynom čtvrtého stupně s nezáporným koeficientem u x_1^4 a h je konstanta.

Typ IX

Grupa

$$[X_1, X_2]f = X_3 f, \quad [X_2, X_3]f = X_1 f, \quad [X_3, X_1]f = X_2 f\,,$$

a metrika určená

$$ds^2 = \sum_{i,k=1}^{3} g_{ik}\,dx_i\,dx_k\,,$$

kde

$$
\begin{aligned}
g_{11} &= 2e\cos 2x_3 + 2f\sin 2x_3 + \frac{a^2 + d^2}{2}\,,\\
g_{22} &= 2\sin x_1\cos x_1(b\sin x_3 - c\cos x_3) - g_{11}\sin^2 x_1 + a^2 + d\sin^2 x_1\,,\\
g_{33} &= a^2\,,\\
g_{12} &= \cos x_1(b\cos x_3 + c\sin x_3) + 2\sin x_1(e\sin 2x_3 - f\cos 2x_3)\,,\\
g_{13} &= b\cos x_3 + c\sin x_3\,,\\
g_{23} &= a^2\cos x_1 + \sin x_1(b\sin x_3 - c\cos x_3)\,.
\end{aligned}
$$

Zde jsou samozřejmě a až f konstanty. Tento typ obsahuje jako speciální případ prostor s kladnou konstantní křivostí, který je opět maximálně symetrický, s šestirozměrnou celkovou grupou izometrií.

5 Terminologický dodatek

Právě jsme dokázali, že homogenní prostory mají konstantní skalární křivost. Přitom se ale v literatuře můžeme setkat s definicí prostoru s konstantní křivostí jako prostoru, jehož tenzor křivosti má tvar (1.10). Tomu vyhovují maximálně symetrické prostory, které jistě mají skalární křivost konstantní. Ale to mají i prostory homogenní a přitom podmínku (1.10) rozhodně nesplňují.

Znamená to snad, že se autor definice domníval, že pouze prostory maximálně symetrické mají konstantní skalární křivost, a proto je zavedl právě takto, což je chybné? Odpověď zní: rozhodně ne. Ale protože já sám jsem byl o tom chvíli přesvědčen, nad čímž se nejspíš pousměje každý průměrně vzdělaný geometr, dovolil jsem si pro jistotu zařadit na konec ještě malý dodatek k názvosloví kolem křivostí prostorů, který situaci objasní i čtenářům s menším rozhledem v geometrii.

Věc se tedy má tak, že je třeba rozlišovat mezi "křivostí a křivostí", protože jich je pro metrické prostory definováno několik, ale často se použije pouze obratu "křivost" s tím, že je většinou zřejmé, kterou má autor právě a mysli. Ti, co jim to není zřejmé od přírody, pak musí nahlédnout do literatury. Já nahlížel do [6].

Prostory s konstantní křivostí. To jsou prostory, které mají konstantní tzv. *úsekovou křivost* (což je můj volný překlad angl. termínu *sectional curvature*). Ta je pro vektory ξ^μ a η^ν v bodě x definována jako

$$K(x;\xi,\eta) = \frac{R_{\mu\nu\kappa\lambda}\xi^\mu\eta^\nu\xi^\lambda\eta^\kappa}{\left(g_{\mu\lambda}g_{\nu\kappa} - g_{\mu\kappa}g_{\nu\lambda}\right)\xi^\mu\eta^\nu\xi^\lambda\eta^\kappa}\,.$$

Lze dokázat, že pokud pro každé x nezávisí $K(x;\xi,\eta)$ na volbě ξ a η, pak je také konstantní vzhledem k x. To je ekvivalentní podmínce

$$R_{\kappa\sigma\mu\lambda} = K\left(g_{\lambda\sigma}g_{\kappa\mu} - g_{\mu\sigma}g_{\kappa\lambda}\right)\,.$$

Einsteinovy prostory. Také známé jako *prostory s konstantní Ricciho křivostí*. Ricciho křivost $K(x;\xi)$ je definována jako součet

$$K(x;\xi) = \sum_m K(x;\xi,\eta_m)\,,$$

kde množina $\{\eta_m\}$ tvoří ortonormální bázi. Konstantnost Ricciho křivosti je ekvivalentní podmínce

$$R_{\mu\nu} = k g_{\mu\nu}\,.$$

Ricciho tenzor Einsteinova prostoru je tedy násobkem metrického tenzoru.

Prostory s konstantní skalární křivostí. V tomto případě je pojmenování odpovídající, jde skutečně o prostory, které mají konstantní skalární křivost R. Lze si povšimnout, že konstantní křivost implikuje konstantní Ricciho křivost a ta zase implikuje konstantní skalární křivost. Tedy

$$R_{\kappa\sigma\mu\lambda} = K\left(g_{\lambda\sigma}g_{\kappa\mu} - g_{\mu\sigma}g_{\kappa\lambda}\right) \quad\Rightarrow\quad R_{\mu\nu} = k g_{\mu\nu} \quad\Rightarrow\quad R = \text{konst.}$$

To vysvětluje, proč jsou prostory s konstantní křivostí zcela klasifikovány, Einsteinovy prostory částečně klasifikovány a prostory s konstantní skalární křivostí nejsou klasifikovány vůbec (viz. [6]). Z předcházejícího textu ale už víme, že mezi prostory s konstantní skalární křivostí patří všechny homogenní prostory.

Poděkování

Rád bych poděkoval všem, kteří mi při mé práci jakkoliv pomáhali, zejména svému školiteli, prof. RNDr. Ladislavu Hlavatému, DrSc., neboť kromě mnoha podnětných připomínek mi nakonec dal ten správný impuls, díky kterému jsem se s daným úkolem úspěšně vypořádal.

LITERATURA

[1] ČERNÝ A.: *Klasifikace a využití Lieových algeber pro řešení Einsteinových rovnic.* Rešeršní práce na FJFI ČVUT v Praze 2004.

[2] BIANCHI L.: *On three-dimensional spaces which admit a continuous group of motions.* Tomo XI, 267, 1898.

[3] WEINBERG S.: *Gravitation and Cosmology.* John Wiley & Sons, Inc. 1972.

[4] KUCHAŘ K.: *Základy obecné teorie relativity.* Academia 1968.

[5] STEPHANI H.: *Relativity: An Introduction to Special and General Relativity.* Cambridge University Press 2004.

[6] COQUEREAUX R., JADCZYK A.: *Riemannian Geometry, Fibre Bundles, Kaluza-Klein Theories and All That...* World Scientific 1988.