České Vysoké Učení Technické v Praze
Fakulta Jaderná a Fyzikalně Inženýrská

Rešeršní práce

na téma

Geometrické struktury Poissonovy Lieovy T-Duality

Vedoucí práce: Prof. RNDr. Ladislav Hlavatý, DrSc.
Autor: Vojtěch Štěpán

Obsah

Kapitola 1

Úvod s poděkováním

Úkolem této práce je prokázat jakousi míru pochopení základů diferencialní geometrie a theorie Lieových grup a algeber a seznámení s konstrukcí dualních modelů na Drinfeldově doublu s konkretním příkladem na $GL(\mathbb{R}^2)$.

Děkuji všem, kteří vyslechli mé otázky, zvláště pak těm, kteří na ně i odpovídali. Mezi nimi je skutečným číslem 1 vedoucí této práce, Prof. RNDr. Ladislav Hlavatý, DrSc., který ji dokonce četl, za což mu patří dík mimořádný.

Kapitola 2

Vektory & Vektorová pole

Buďte M, resp. N, diferencovatelné variety dimense $m \in \mathbb{N}$, resp. $n \in \mathbb{N}$, $\mathcal{M} = \{(U_\alpha, \xi_\alpha)\}_{\alpha \in A}$, resp. $\mathcal{N} = \{(V_\beta, \psi_\beta)\}_{\beta \in B}$ jejich diferencovatelné struktury. Pak řekneme, že zobrazení $\varphi : M \to N$ je třídy $C^{(p)}$ ($p \in \mathbb{N}_0$ nebo $p = +\infty$), jestliže

$$\forall x \in M \, \exists (U, \xi) \in \mathcal{M} \, \exists (V, \psi) \in \mathcal{N} \Big(x \in U \,\&\, \varphi(U) \subseteq V \,\&\, \psi \circ (\varphi \mid U) \circ \xi^{-1} \in C^{(p)} \Big).$$

Je-li $x \in U \,\& \varphi(x) \in V$, řekneme, že (U, ξ) je mapa v x a (V, ψ) je mapa v $\varphi(x)$. Nyní máme několik možností, jak definovat pojem tečného vektoru v bodě $x \in M$ a tečného prostoru v bodě x. Tečný vektor lze pojmout jako třídu ekvivalence křivek v M, jako „tečný vektor ke křivce“ v M, nebo jako linearní funkcional na jakési algebře funkcí.

1. Nechť (U, ξ) je mapa na M taková, že $x \in U$. Buď $\mathcal{Z}$ množina všech zobrazení γ třídy $C^{(1)}$ otevřeného okolí nuly v $\mathbb{R}$ do variety M takových, že $\gamma(0) = x$. Na této množině lze zavést relaci $\sim$ ekvivalence vztahem:

$$\forall \gamma, \delta \in \mathcal{Z} \Big(\gamma \sim \delta \iff (\xi \circ \gamma)'(0) = (\xi \circ \delta)'(0) \Big).$$

   Na množinu $\mathcal{Z}/\sim$ lze přenést strukturu vektorového prostoru pomocí bijektivního zobrazení

$$\theta_{(U,\xi)} : \mathcal{Z}/\sim \to \mathbb{R}^n : [\gamma] \mapsto (\xi \circ \gamma)'(0)$$

   a zobrazení k němu inversního

$$\theta^{-1}_{(U,\xi)} : \mathbb{R}^n \to \mathcal{Z}/\sim : \mathbf{r} \mapsto [t \mapsto \xi^{-1}(\xi(x) + t\mathbf{r})].$$

   (Symbol $[\varsigma]$ značí třídu ekvivalence representovanou prvkem ς.) Množinu $\mathcal{Z}/\sim$ s touto strukturou pak označíme $T_x(M) \equiv T_x M$ a nazveme tečným prostorem variety M v bodě $x \in M$. Prvky tečného prostoru nazveme tečnými vektory.

2. Uvažujme množinu $\mathcal{Z}$ z prvního případu. Dále buď $\mathcal{F}^{(1)}(x)$ algebra realných funkcí třídy $C^{(1)}$ definovaných v otevřených okolích bodu $x \in M$. Potom tečným vektorem k dráze $\gamma \in \mathcal{Z}$ v bodě $x = \gamma(0)$ nazveme linearní zobrazení

$$\mathbf{v} : \mathcal{F}^{(1)}(x) \to \mathbb{R} : f \mapsto (f \circ \gamma)'(0).$$

Toto zobrazení zřejmě má Leibnizovu vlastnost:

$$\forall f, g \in \mathcal{F}^{(1)}(x)\big(\mathbf{v}(fg) = f(x)\mathbf{v}g + g(x)\mathbf{v}f\big).$$

Tečným prostorem variety M v bodě $x \in M$ nazveme množinu všech tečných vektorů ke všem drahám ze $\mathcal{Z}$ v bodě x. Struktura vektorového prostoru na této množině je dána běžným sčítáním linearních zobrazení a jejich násobení skalárem.

3. Definujme relaci ekvivalence v prostoru $\mathcal{F}(x)$ realných funkcí třídy C^∞ definovaných v otevřených okolích bodu $x \in M$ následujícím způsobem: Funkce $f, g \in \mathcal{F}(x)$ jsou ekvivalentní právě když jsou si na nějakém okolí bodu x rovny. Prostor tříd takto ekvivalentních funkcí označme $\widetilde{\mathcal{F}}(x)$. $\forall f \in \mathcal{F}(x)$ symbol $\mathbf{f}$ označuje třídu ekvivalence representovanou funkcí f a obráceně. Operace sčítání a součin funkcí a násobení skalárem definující strukturu algebry mají smysl i na $\widetilde{\mathcal{F}}(x)$, stejně jako i symbol $\mathbf{f}(x) := f(x)$. Potom lze definovat tečný vektor $\mathbf{v}$ v bodě x jako linearní funkcional na vektorovém prostoru $\widetilde{\mathcal{F}}(x)$ mající Leibnizovu vlastnost. Tzn., že platí: $\forall \mathbf{f}, \mathbf{g} \in \widetilde{\mathcal{F}}(x)\, \forall \alpha \in \mathbb{R} \forall \mathbf{v}, \mathbf{w} \in T_xM$

   - $\mathbf{v}(\mathbf{f} + \alpha\mathbf{g}) = \mathbf{vf} + \alpha\mathbf{vg}$
   - $\mathbf{v}(\mathbf{fg}) = \mathbf{f}(x)\mathbf{vg} + \mathbf{g}(x)\mathbf{vf}$
   - $(\mathbf{v} + \mathbf{w})\mathbf{f} := \mathbf{vf} + \mathbf{wf}$
   - $(\alpha\mathbf{v})\mathbf{f} := \alpha(\mathbf{vf})$

   A nakonec položíme $\forall f \in \mathcal{F}(x)\, \forall \mathbf{v} \in T_xM\Big(\mathbf{v}f := \mathbf{vf}\Big)$

Takto jsou třemi způsoby definovány tři vektorové prostory stejné dimense $n = \dim M$. Nespornou výhodou třetího způsobu je formulace v pojmech nezávislých na mapách. Korespondenci mezi nimi zajišťuje následující fakt: [1]
$\forall f \in \mathcal{F}(x)\, \forall \mathbf{v} \in T_xM\, \exists \gamma \in \mathcal{Z}$ resp. $\forall f \in \mathcal{F}(x)\, \forall \gamma \in \mathcal{Z}\, \exists \mathbf{v} \in T_xM$

$$\mathbf{v}f = (f \circ \gamma)'(0) = (f \circ \xi^{-1} \circ \xi \circ \gamma)'(0) = (f \circ \xi^{-1})'(\xi(x))\, \theta_{(U,\xi)}([\gamma]).$$

Buď nyní $(\mathbf{e}_i)_{i \in \hat{n}}$ standardní base prostoru $\mathbb{R}^n$. Za její pomoci zavedeme dvěma ekvivalentními způsoby basi $(\partial_i|x)_{i \in \hat{n}}$ prostoru T_xM:

- $\partial_i|x := \theta^{-1}_{(U,\xi)}(\mathbf{e}_i)$
- $\forall f \in \mathcal{F}(x)\Big(\partial_i|x\, f := (f \circ \xi^{-1})'(\xi(x))\mathbf{e}_i\Big)$

Dále buď $\varphi : M \to N \in C^{(1)}$, $x \in M$. Buďte (U, ξ), (V, ψ) mapy na M v bodě x, resp. na N v bodě $\varphi(x)$, takové, že $\varphi(U) \subseteq V$. Definujeme linearní zobrazení

$$T_x\varphi := \theta^{-1}_{(V,\psi)} \circ (\psi \circ \varphi \mid U \circ \xi^{-1})'(\xi(x)) \circ \theta_{(U,\xi)}\ : T_xM \to T_{\varphi(x)}N,$$

[1] Který lze též považovat za definici $\mathbf{v}f$ pro případ (1) a funkci $f \in \mathcal{F}(x)$. Tímto způsobem lze také definovat působení vektoru $\mathbf{v} \in T_xM$ na funkce z algebry $\mathcal{F}^1(x)$. V tom případě je ale třeba dávat pozor na to, že ne všechny linearní funkcionaly na $\mathcal{F}^1(x)$, které mají Leibnizovu vlastnost, mohou být tečnými vektory.

které nazveme tečným zobrazením k zobrazení φ v bodě x. Dále platí, že je-li $\mathbf{v} \in T_x M$ tečný vektor k dráze $\gamma \in \mathcal{Z}$ v bodě x, pak $T_x\varphi\,\mathbf{v}$ je vektor tečný k dráze $\varphi \circ \gamma$ v bodě $\varphi(x) = (\varphi \circ \gamma)(0)$. A tedy

$$\forall f \in \mathcal{F}(x)\,\forall \mathbf{v} \in T_x M\Big(\big(T_x\varphi\,\mathbf{v}\big)f = \mathbf{v}(f \circ \varphi)\Big).$$

$\forall t \in \mathbb{R}$ definujeme vektor $\mathbf{r}_t \in T_t\mathbb{R}$ vztahem $\mathbf{r}_t := \theta^{-1}_{(\mathbb{R},id_{\mathbb{R}})}(1) = [s \mapsto t + s]$. Pak

$$\forall f : M \to \mathbb{R} \in C^{(1)}\,\forall \mathbf{v} \in T_x M\Big(T_x f \mathbf{v} = (\mathbf{v}f)\mathbf{r}_{f(x)}\Big).$$

Tedy je-li $\gamma : (\mathcal{J} \subseteq \mathbb{R}) \to M \in C^{(1)}$, pak tečným vektorem k dráze γ v bodě $x = \gamma(t)$ rozumíme vektor $\dot\gamma(t) := T_t\gamma\mathbf{r}_t$. Je-li K diferencovatelná varieta a $\vartheta : N \to K \in C^{(1)}$, pak

$$T_x(\vartheta \circ \varphi) = T_{\varphi(x)}\vartheta\, \circ T_x\varphi$$

Buď $\eta : M \to \mathbb{R}^p \in C^{(1)} \quad (p \in \mathbb{N})$. Pak definujeme linearní zobrazení

$$d_x\eta := (\eta \mid U \circ \xi^{-1})'(\xi(x)) \circ \theta_{(U,\xi)} : T_x M \to \mathbb{R}^p,$$

které nazýváme diferencialem zobrazení η v bodě x. Je-li $u : \mathbb{R}^p \to \mathbb{R}^q \quad (q \in \mathbb{N})$ linearní zobrazení, pak platí $d_x(u \circ \eta) = u \circ d_x\eta$, z čehož specialně plyne rovnost $d_x\eta = d_x\eta^i \otimes \mathbf{r}_i$,[2] kde $(\mathbf{r}_i)_{i\in\widehat{p}}$ je standardní base v $\mathbb{R}^p$. Dále se ukazuje, že $d_x\xi = \theta_{(U,\xi)}$, a tedy n-tice kovektorů $(d_x\xi^i)_{i\in\widehat{n}}$ tvoří basi prostoru $T^{\#}_x M$ duálního k tečnému prostoru $T_x M$ a to basi dualní k $(\partial_i|x)_{i\in\widehat{n}}$.

Mimochodem platí: $\forall f \in \mathcal{F}^1(x)\,\forall \mathbf{v} \in T_x M\,\big(d_x f\,\mathbf{v} = \mathbf{v}f\big)$.

Součin dvou diferencovatelných variet $M = M_1 \times M_2$ je též diferencovatelná varieta. Kanonické projekce $\pi_1 : M \to M_1$ a $\pi_2 : M \to M_2$ jsou třídy C^∞ a $\forall(x_1, x_2) \in M$ je zobrazení

$$\big(T_{(x_1,x_2)}\pi_1, T_{(x_1,x_2)}\pi_2\big) : T_{(x_1,x_2)}M \to T_{x_1}M_1 \times T_{x_2}M_2$$

isomorfismem vektorových prostorů. (Tedy tyto vektorové prostory ztotožníme.)

Jsou-li $\varphi_1 : N \to M_1$ a $\varphi_2 : N \to M_2$ dvě zobrazení variet, pak zobrazení $(\varphi_1, \varphi_2) : N \to M_1 \times M_2$ je zobrazení třídy $C^{(q)}$ ($q \in \mathbb{N}$ nebo $q = +\infty$) právě tehdy, když jimi jsou obě zobrazení φ_1 a φ_2.

$$\forall y \in N\Big(T_y\big((\varphi_1, \varphi_2)\big) = \big(T_y\varphi_1, T_y\varphi_2\big)\Big)$$

Jsou-li $\varphi_1 : N_1 \to M_1$ a $\varphi_2 : N_2 \to M_2$ dvě zobrazení variet třídy $C^{(q)}$ ($q \in \mathbb{N}$ nebo $q = +\infty$), pak zobrazení $\varphi_1 \times \varphi_2 : N_1 \times N_2 \to M_1 \times M_2$ je též třídy $C^{(q)}$ a

$$\forall(y_1, y_2) \in N_1 \times N_2\big(T_{(y_1,y_2)}(\varphi_1 \times \varphi_2) = T_{y_1}\varphi_1 \times T_{y_2}\varphi_2\big).$$

Buď $\varphi : M_1 \times M_2 \to N$ zobrazení variet třídy $C^{(q)}$ ($q \in \mathbb{N}$ nebo $q = +\infty$), $(a_1, a_2) \in M_1 \times M_2$. Označíme $\varphi(a_1, .) : M_2 \to N : x_2 \mapsto \varphi(a_1, x_2)$ a analogicky $\varphi(., a_2) : M_1 \to N : x_1 \mapsto \varphi(x_1, a_2)$. Potom

$$T_{(a_1,a_2)}\varphi = T_{a_1}\big(\varphi(., a_2)\big) \circ T_{(a_1,a_2)}\pi_1 + T_{a_2}\big(\varphi(a_1, .)\big) \circ T_{(a_1,a_2)}\pi_2. \tag{2.1}$$

[2] Symbolu $\otimes$ bude dán smysl ve 3.kapitole.

Ve specialním případě, kdy $N = \mathbb{R}^p$ $(p \in \mathbb{N})$, platí

$$d_{(a_1,a_2)}\varphi(\mathbf{v},\mathbf{w}) = d_{a_1}\big(\varphi(.,a_2)\big)\,\mathbf{v} + d_{a_2}\big(\varphi(a_1,.)\big)\,\mathbf{w}.$$

Nyní definujeme tečný prostor $T \equiv T(M) \equiv TM$ variety M:

$$T(M) := \bigvee_{x\in M} T_x(M) \equiv \bigcup_{x\in M} \{x\} \times T_x M$$

Definujeme projekci

$$\pi : T(M) \to M : (x,\mathbf{v}) \mapsto x.$$

Je-li $(U,\xi) \in \mathcal{M}$, pak zavedeme zobrazení

$$\tilde{\xi} : \pi^{-1}(U) \to \mathbb{R}^{2m} : (x,\mathbf{v}) \mapsto (\xi(x), d_x\xi\,\mathbf{v}).$$

Potom množina $\{\tilde{\xi}^{-1}(B) \mid B \subseteq \mathbb{R}^{2m}$ otevřená $\& \exists U \subseteq M\big((U,\xi) \in \mathcal{M}\big)\}$ je basí topologie a množina $\{(\pi^{-1}(U),\tilde{\xi}) \mid (U,\xi) \in \mathcal{M}\}$ atlasem na tečném prostoru $T(M)$. To nám umožňuje zavést na $T(M)$ diferencovatelnou strukturu.

Je-li $\varphi : M \to N \in C^{(q)}$ ($q \in \mathbb{N}$ nebo $q = +\infty$), definujeme tečné zobrazení $T\varphi : TM \to TN$ vztahem $\forall (x,\mathbf{v}) \in TM\Big(T\varphi\,(x,\mathbf{v}) := \big(\varphi(x), T_x\varphi\,\mathbf{v}\big)\Big)$.

Dále zavedeme pojem vektorového pole X na otevřené množině $U \subseteq M$ jako zobrazení $X : U \to T(M)$ takové, že $\pi \circ X = id_U$

Pro každou otevřenou množinu $U \subseteq M$ označme

$$\mathcal{F}(U) := \big\{f : U \to \mathbb{R} \mid f \in C^\infty\big\}. \quad (\mathcal{F} := \mathcal{F}(M))$$

Dále $\forall f : U \to \mathbb{R} \in C^1$ definujeme funkci $Xf : (Xf)(x) := X(x)f.$ [3] Vektorové pole X na U nazýváme diferencovatelným, [4] jestliže je diferencovatelným zobrazením $U \to T(M)$. Potom jsou následující podmínký ekvivalentní:

- X je diferencovatelné vektorové pole na M
- $\forall (U,\xi) \in \mathcal{M}\Big(X \mid U = a^i\partial_i|_. \Rightarrow \forall i \in \widehat{m}\Big(a^i \in \mathcal{F}(U)\Big)\Big)$
- $\forall U \subseteq M$ otevřená $\forall f \in \mathcal{F}(U)\Big(Xf \in \mathcal{F}(U)\Big)$

Vektorový prostor všech diferencovatelných vektorových polí na M označíme $\mathfrak{X} \equiv \mathfrak{X}(M)$. Na tomto prostoru lze zavést bilineární operaci $[\,,\,] : \mathfrak{X} \times \mathfrak{X} \to \mathfrak{X}$ vztahem

$$\forall f \in \mathcal{F}\,\forall x \in M\,\forall X,Y \in \mathfrak{X}\Big([X,Y](x)f := X(x)(Yf) - Y(x)(Xf)\Big).$$

Tato operace je dobře definována (čili je opravdu bilineární a $[X,Y] \in \mathfrak{X}$) a navíc má následující dvě vlastnosti:

- $\forall X \in \mathfrak{X}\Big([X,X] = 0\Big)$

[3] Akci prvku $(x,\mathbf{v})$ tečného prostoru na funkci f chápeme ovšem jako akci vektoru $\mathbf{v}$ a nadále budeme (když se to bude hodit) předstírat, že se jedná o totéž.

[4] Slovo diferencovatelné bude se zhusta vynechávat s tím, že všechna dále vystupující vektorová pole (někdy jen pole) jsou diferencovatelná.

- $\forall X, Y, Z \in \mathfrak{X}\Big([[X,Y],Z] + [[Z,X],Y] + [[Y,Z],X] = 0\Big)$

Buď $\varphi : M \to N \in C^\infty$ zobrazení variet, $X \in \mathfrak{X}(M) \,\&\, Y \in \mathfrak{X}(N)$. Pak řekneme, že vektorová pole $X \,\&\, Y$ jsou φ-svázána, jestliže $T\varphi \circ X = Y \circ \varphi$. Je-li φ difeomorfismem, je možné pomocí vektorového pole $X \in \mathfrak{X}(M)$ definovat vektorové pole $Y \in \mathfrak{X}(N)$ vtahem $Y := T\varphi \circ X \circ \varphi^{-1} \overset{ozn}{=} \varphi_* X$. (Takto je vlastně definováno zobrazení $\varphi_* : \mathfrak{X}(M) \to \mathfrak{X}(N)$.)

Buď $X \in \mathfrak{X}$. Pak zobrazení $\gamma : (\mathcal{J} \subseteq \mathbb{R}) \to M \in C^\infty$ nazveme integralní křivkou pole X, jestliže $\forall t \in \mathcal{J}\Big(X(\gamma(t)) = \dot{\gamma}(t) = T_t\gamma \mathbf{r}_t\Big)$. Je-li $X \in \mathfrak{X} \,\&\, x \in M$, pak $\exists_{1!}$ integralní křivka pole X definovaná na nějakém okolí nuly H_0^x taková, že prochazí bodem $x = \gamma(0)$, což plyne z theorie obyčejných diferencialních rovnic, protože podmínka $X(\gamma(t)) = \dot{\gamma}(t)$ v lokalních souřadnicích $(U, \xi) \in \mathcal{M}$ $(\gamma(H_0^x) \subseteq U \,\&\, X \mid U = f^i\,\partial_i)$ znamená $\forall i \in \widehat{m}\, \forall t \in H_0^x \Big(f^i(\gamma(t)) = (\xi^i \circ \gamma)'(t)\Big)$, což je system obyčejných diferencialních rovnic.

Jednoparametrickou grupou difeomorfismů na varietě M nazveme zobrazení $\varphi : \mathbb{R} \times M \to M : (t, x) \mapsto \varphi_t(x)$ takové, že platí

- $\forall t \in \mathbb{R}\Big(\varphi_t : x \mapsto \varphi_t(x)$ je difeomorfismus $\Big)$
- $\forall s, t \in \mathbb{R}\, \forall x \in M\Big(\varphi_{t+s}(x) = \varphi_t(\varphi_s(x))\Big)$.

Zobrazení $X : M \to TM : x \mapsto \dot{\varphi}_0(x) = T_0\varphi.(x)\mathbf{r}_0$ je pak diferencovatelným vektorovým polem a zobrazení $\varphi.(x) : \mathbb{R} \to M$ je jeho integralní křivkou procházející bodem $x = \varphi_0(x)$.

Buď $U \subseteq M$ otevřená $\&\, H_0 \subseteq \mathbb{R}$ okolí nuly, pak lokalní jednoparametrickou grupou lokalních difeomorfismů definovanou na $H_0 \times U$ rozumíme zobrazení $\varphi : H_0 \times U \to M$ takové, že

- $\forall t \in H_0\Big(\varphi_t : x \mapsto \varphi_t(x)$ je difeomorfismus otevřených množin $U \,\&\, \varphi_t(U)\Big)$
- $\forall t, s \in H_0\, \forall x \in U\Big(t + s \in H_0 \,\&\, \varphi_s(x) \in U \Rightarrow \varphi_{t+s}(x) = \varphi_t(\varphi_s(x))\Big)$.

Zobrazení $X : U \to TM : x \mapsto \dot{\varphi}_0(x)$ je zase diferencovatelným vektorovým polem.

Buď $X \in \mathfrak{X}$, pak $\forall x \in M\, \exists H_x \subseteq M\, \exists H_0 \subseteq \mathbb{R}\, \exists \varphi : H_0 \times H_x \to M$ lokalní jednoparametrická grupa lokalních difeomorfismů, která lokalně indukuje pole X. Existuje-li jednoparametrická grupa difeomorfismů (globalní) indukující pole $X \in \mathfrak{X}$, říkáme, že pole X je úplné. (Vztah pole $X \in \mathfrak{X}$ a (lokalní) jednoparametrické grupy φ (lokalních) difeomorfismů označíme $X \overset{(loc)}{\leftrightarrow} \varphi_t$.)

Velmi užitečná jsou následující tvrzení:

- $(X \overset{loc}{\leftrightarrow} \varphi_t \,\&\, \psi : M \to M$ difeomorfismus $) \Rightarrow \psi_* X \overset{loc}{\leftrightarrow} \psi \circ \varphi_t \circ \psi^{-1}$
  Z toho mj. plyne, že X je ψ-invariantní (tj. $\psi_* X = X$) právě tehdy, když $\forall t(\varphi_t$ komutuje s $\psi)$
- Buďte $X, Y \in \mathfrak{X}(M) \,\&\, X \overset{loc}{\leftrightarrow} \varphi_t$. Pak $\forall x \in M$, kde má výraz smysl, platí

$$[X, Y](x) = \lim_{t \to 0} \frac{1}{t}\Big(Y(x) - \big((\varphi_t)_* Y\big)(x)\Big),$$

což se běžně značí tak, že se prostě vynechá písmenko x. Popřípadě:

$$[X,Y] = -\frac{d}{dt}\,|_{t=0}\,\big((\varphi_t)_* Y\big)$$

- Při zachování předpokladů a označení z předchozího:

$$(\varphi_s)_*[X,Y] = \lim_{t\to 0}\frac{1}{t}\Big((\varphi_s)_* Y - \big((\varphi_{s+t})_* Y\big)\Big) = -\frac{d}{dt}\,|_{t=s}\,\big((\varphi_t)_* Y\big)$$

- Nechť $X \overset{loc}{\leftrightarrow} \varphi_s \,\&\, Y \overset{loc}{\leftrightarrow} \psi_t$
  Potom $\forall s \forall t \big(\varphi_s \circ \psi_t = \psi_t \circ \varphi_s\big) \iff [X,Y]=0$

- jestliže dvě lokalní jednoparametrické grupy $\varphi_t \,\&\, \psi_t$ lokalních difeomorfismů indukují na otevřené množině $U \subseteq M$ totéž pole, pak $\varphi_t \overset{U}{=} \psi_t$

- Buď $H_0 \subseteq \mathbb{R}$ nějaké okolí nuly. Jestliže je lokalní jednoparametrická grupa φ_t lokalních difeomorfismů definována na $H_0 \times M$, pak indukuje úplné pole.

- Buď $\varphi : M \to M \in C^\infty$. Jsou-li vektorová pole $X \,\&\, X'$ φ-svázána a rovněž tak vektorová pole $Y \,\&\, Y'$, pak vektorová pole $[X,Y] \,\&\, [X',Y']$ jsou také φ-svázána.

Nyní se na vektorová pole podíváme trošku z jiné strany:

Def 2.1 *Okruh $R = (R,+,.)$ je množina R s binarními operacemi $+ \,\&\, .$ tak, že platí*

1. *$(R,+)$ je Abelova grupa*
2. *$(R,.)$ je monoid (tj. asociativní grupoid s jednotkou)* [5]
3. $\forall x,y,z \in R \Big(\big(x(y+z) = xy + xz\big) \quad \& \quad \big((x+y)z = xz + yz\big)\Big)$
   (Oboustranný distributivní zákon)

Podle této definice je $\mathcal{F}$ ovšem okruhem. (A to komutativním.)

Def 2.2 *Buď R okruh. Potom R-modul je Abelova grupa A spolu s operací*

$$R \times A \to A : (x,a) \mapsto xa$$

takovou, že $\forall x,y \in R \,\forall a,b \in A$

1. $x(a+b) = xa + xb$
2. $(x+y)a = xa + ya$
3. $(xy)a = x(ya)$
4. $1\,a = a$ [6]

[5] Někdy se okruhem myslí obecnější objekt a v této vlastnosti se požaduje pouze grupoid, ale toho si nebudeme všímat

[6] Někdy se tento požadavek vynechává, ale to nám také nevadí.

Definujeme-li operaci

$$\mathcal{F} \times \mathfrak{X} \to \mathfrak{X} : (f, X) \mapsto fX : \forall x \in M\big((fX)(x) := f(x)X(x)\big),$$

zjistíme, že $\mathfrak{X}$ je $\mathcal{F}$-modulem, což se bude dále hodit. Platí:

$$\forall f, g \in \mathcal{F}\, \forall X, Y \in \mathfrak{X}\Big([fX, gY] = fg[X, Y] + f(Xg)Y - g(Yf)X\Big).$$

Kapitola 3

Tensory & Tensorová pole

Buďte $q \in \mathbb{N}$, $V_1, \ldots, V_q$ vektorové prostory nad $\mathbb{R}$ dimensí $n_1, \ldots, n_q \in \mathbb{N}$ s basemi $(v_{1,i})_{i \in \widehat{n}_1}, \ldots, (v_{q,i})_{i \in \widehat{n}_q}$ a $V_1^{\#}, \ldots, V_q^{\#}$ prostory k nim dualní s dualními basemi $(v^{\#1,i})_{i \in \widehat{n}_1}, \ldots, (v^{\#q,i})_{i \in \widehat{n}_q}$. Dále $\forall i \in \widehat{q}$ buďte $x_i^{\#} \in V_i^{\#}$ linearní funkcionaly. Potom zobrazení

$$V_1 \times \ldots \times V_q \to \mathbb{R} : (x_1, \ldots, x_q) \mapsto \prod_{i \in \widehat{q}} (x_i \mid x_i^{\#})$$

je q-linearní forma, kterou nazveme tensorovým součinem forem $x_1^{\#}, \ldots, x_q^{\#}$ a označíme symbolem $x_1^{\#} \otimes \ldots \otimes x_q^{\#}$. Vektorový prostor všech q-linearních forem $\mathcal{L}_q(V_1, \ldots, V_q; \mathbb{R})$ [1] nazveme tensorovým součinem prostorů $V_1^{\#}, \ldots, V_q^{\#}$ a označíme symbolem $V_1^{\#} \otimes \ldots \otimes V_q^{\#}$. Množina $\{v^{\#1,i_1} \otimes \ldots \otimes v^{\#g,i_q} \mid \forall k \in \widehat{q}\big(i_k \in \widehat{n}_k\big)\}$ je basí tohoto prostoru. Díky ztotožnění $V \leftrightarrow V^{\#\#}$ lze stejným způsobem definovat tensorový součin $V_1 \otimes \ldots \otimes V_q$ s basí. $\{v_{1,i_1} \otimes \ldots \otimes v_{g,i_q} \mid \forall k \in \widehat{q}\big(i_k \in \widehat{n}_k\big)\}$. Velmi důležitá je následující fundamentalní vlastnost: Je-li W libovolný vektorový prostor nad $\mathbb{R}$, pak $\forall A \in \mathcal{L}_q(V_1, \ldots, V_q; W)\, \exists_{1!} B \in \mathcal{L}(V_1 \otimes \ldots \otimes V_q, W)$

$$\forall (x_1, \ldots, x_q) \in V_1 \times \ldots \times V_q \Big(A(x_1, \ldots, x_q) = B(x_1 \otimes \ldots \otimes x_q) \Big)$$

a některé isomorfismy, které umožňují ztotožnění:

- $(V_1 \otimes V_2) \otimes V_3 \leftrightarrow V_1 \otimes V_2 \otimes V_3$
- $(V_1 \oplus V_2) \otimes V_3 \leftrightarrow (V_1 \otimes V_3) \oplus (V_2 \otimes V_3)$ [2]
- $\mathcal{L}(V_1 \otimes V_2, W) \leftrightarrow \mathcal{L}_2(V_1, V_2; W) \leftrightarrow \mathcal{L}(V_1, \mathcal{L}(V_2, W))$
- $\mathcal{L}(V_1, W_1) \otimes \mathcal{L}(V_2, W_2) \leftrightarrow \mathcal{L}(V_1 \otimes V_2, W_1 \otimes W_2)$
- $V_1^{\#} \otimes V_2^{\#} \leftrightarrow (V_1 \otimes V_2)^{\#}$
- $V^{\#} \otimes W \leftrightarrow \mathcal{L}(V, W)$

[1] Jsou-li $A_1, \ldots, A_q, A, B$ vektorové prostory, pak se symbolem $\mathcal{L}_q(A_1, \ldots, A_q; B)$ rozumí vektorový prostor všech q-linearních zobrazení $f : A_1 \times \ldots \times A_q \to B$. $\mathcal{L}(A, B) := \mathcal{L}_1(A, B)$.

[2] Symbol $\oplus$ značí přímý (direktní) součet vektorových prostorů.

Buď nyní V vektorový prostor dimense $n \in \mathbb{N}$ s basí $(v_i)_{i\in\widehat{n}}$, $V^{\#}$ jeho dual s basí $(v^{\# i})_{i\in\widehat{n}}$, $m \in 1+\mathbb{N}$. Potom symbolem $\mathbf{T}_0^m(V)$ označíme tensorový součin m exemplářů prostoru V a nazveme jej m-tou tensorovou mocninou tohoto prostoru. Pro $m = 1$ nebo $m = 0$ pokládáme $\mathbf{T}_0^1(V) := V$ nebo $\mathbf{T}_0^0(V) := \mathbb{R}$. Tensorový součin $m \in 1+\mathbb{N}$ exemplářů prostoru $V^{\#}$ označíme symbolem $\mathbf{T}_m^0(V)$ a pokládáme $\mathbf{T}_1^0(V) := V^{\#}$. Pro $p, q \in \mathbb{N}$ definujeme $\mathbf{T}_q^p(V) := \mathbf{T}_0^p(V) \otimes \mathbf{T}_q^0(V)$ a prvky tohoto prostoru nazveme p-krát kontravariantními a q-krát kovariantními tensory nebo tensory typu $\binom{p}{q}$. Množina

$$\left\{ v_{i_1} \otimes \ldots \otimes v_{i_p} \otimes v^{\# j_1} \otimes \ldots \otimes v^{\# j_q} \mid \forall k \in \widehat{p} \forall l \in \widehat{q} \left(i_k, j_l \in \widehat{n} \right) \right\}$$

tvoří basi prostoru $\mathbf{T}_q^p(V)$.

A nyní další užitečné isomorfismy (ztotožnění):

- $\mathbf{T}_q^p(V) \leftrightarrow \mathcal{L}\big(\mathbf{T}_0^q(V), \mathbf{T}_0^p(V)\big)$
- $\mathbf{T}_q^p(V) \otimes \mathbf{T}_s^r(V) \leftrightarrow \mathbf{T}_{q+s}^{p+r}(V)$
- $\big(\mathbf{T}_q^p(V)\big)^{\#} \leftrightarrow \mathbf{T}_p^q(V)$

Je-li $i \in \widehat{p}$, $j \in \widehat{q}$, pak existuje právě jedno linearní zobrazení

$$C_i^j : \mathbf{T}_q^p(V) \to \mathbf{T}_{q-1}^{p-1}(V) : x_1 \otimes \ldots \otimes x_p \otimes x^{\# 1} \otimes \ldots \otimes x^{\# q} \mapsto$$

$$\mapsto (x_i \mid x^{\# j})\, x_1 \otimes \ldots \otimes x_{i-1} \otimes x_{i+1} \otimes \ldots \otimes x_p \otimes x^{\# 1} \otimes \ldots \otimes x^{\# j-1} \otimes x^{\# j+1} \otimes \ldots \otimes x^{\# q},$$

které se jmenuje kontrakce.

Nyní definujeme prostor

$$\mathbf{T} \equiv \mathbf{T}(V) := \sum_{p,q\in\mathbb{N}_0} \mathbf{T}_q^p(V) :=$$

$$:= \Big\{ \sum_{p,q\in\mathbb{N}_0} u_q^p \mid u_q^p \in \mathbf{T}_q^p \,\&\, \text{nejvýše konečný počet}\, u_q^p \neq 0 \Big\}.$$

Prvky $u_q^p \in \mathbf{T}_q^p(V)$ z této definice se nazývají homogenními prvky prostoru $\mathbf{T}(V)$. Nyní na tomto prostoru zavedeme strukturu asociativní (nekomutativní) linearní algebry nad $\mathbb{R}$ pomocí součinu homogenních prvků tak, aby byl splněn oboustranný distributivní zákon:

$$\forall u, v \in \mathbf{T}\, \exists k, m \in \mathbb{N} \Big(u = \sum_{i\in\widehat{k}} u_{q_i}^{p_i} \,\&\, v = \sum_{j\in\widehat{m}} v_{s_j}^{r_j} \text{ (rozklad na homogenní prvky)} \Big)$$

$$u \otimes v := u_{q_1}^{p_1} \otimes v_{s_1}^{r_1} + \ldots + u_{q_1}^{p_1} \otimes v_{s_m}^{r_m} + \cdots + u_{q_k}^{p^k} \otimes v_{s_1}^{r_1} + \ldots + u_{q_k}^{p_k} \otimes v_{s_m}^{r_m}$$

Tuto algebru nazveme tensorovou algebrou vektorového prostoru V.

Nyní mějme množinu $Iso(U,V) = \{B \in \mathcal{L}(U,V) \mid B \text{ invertibilní } \}$ isomorfismů vektorového prostoru U na vektorový prostor V. Dále $qIso\big(\mathbf{T}(U), \mathbf{T}(V)\big)$ nechť je množina isomorfismů algebry $\mathbf{T}(U)$ na algebru $\mathbf{T}(V)$ takových, které komutují s každou kontrakcí a zachovávají typy tensorů (Tzn., že homogenní prvky zobrazují zase na homogenní prvky stejného stupně.). Potom existuje právě jedna bijekce $Iso(U,V) \to qIso\big(\mathbf{T}(U), \mathbf{T}(V)\big) : A \mapsto f_A$ taková, že

1. $f_A \mid U = A$
2. $f_A \mid U^\# = {}^tA^{-1}$.

Kde ${}^tA : V^\# \to U^\# : x^\# \mapsto x^\# \circ A$ je transponované zobrazení k zobrazení A.

Linearní zobrazení $D : \mathbf{T}(V) \to \mathbf{T}(V)$ se jmenuje derivace, jestliže zachovává typ tensorů, komutuje s každou kontrakcí a

$$\forall K, L \in \mathbf{T}(V)\big(D(K \otimes L) = DK \otimes L + K \otimes DL\big).$$

Definujeme-li na vektorovém prostoru $Der\big(\mathbf{T}(V)\big)$ všech derivací algebry $\mathbf{T}(V)$ operaci komutatoru $\forall D, D' \in Der\big(\mathbf{T}(V)\big)\ \big([D, D'] := DD' - D'D\big)$, získáme Lieovu algebru isomorfní Lieově algebře $gl(V)$, kterýžto isomorfismus má tvar

$$Der\big(\mathbf{T}(V)\big) \to gl(V) : D \mapsto D \mid V.$$

Akci inversního zobrazení označíme $A \mapsto A_T$.

Nyní buď $p \in \mathbb{N}$. Definujeme akci grupy S_p (grupy permutací množiny $\widehat{p}$) na prostoru $\mathbf{T}_0^p(V)$

$$S_p \times \mathbf{T}_0^p(V) \to \mathbf{T}_0^p(V) : (\sigma, x_1 \otimes \ldots \otimes x_p) \mapsto \sigma(x_1 \otimes \ldots \otimes x_p) := x_{\sigma(1)} \otimes \ldots \otimes x_{\sigma(p)}$$

Opravdu platí $\forall \sigma, \tau \in S_p\, \forall x \in \mathbf{T}_0^p(V)\big((\tau\,(\sigma\, x)) = (\tau\,\sigma)\,x\big)$. Tensor $x \in \mathbf{T}_0^p(V)$ se nazývá symetrickým (resp. antisymetrickým), je-li $\forall \sigma \in S_p\big(\sigma\, x = x\big)$ $\big($resp. $\sigma\, x = sgn(\sigma)\, x\big)$. Dále definujeme operaci $\mathbf{a}$ antisymetrisace a operaci $\mathbf{s}$ symetrisace na prostoru $\mathbf{T}_0^p$. $\forall x \in \mathbf{T}_0^p(V)$

$$\mathbf{s}\, x := \sum_{\sigma \in S_p} \sigma\, x \qquad \mathbf{a}\, x := \sum_{\sigma \in S_p} sgn(\sigma)(\sigma\, x)$$

$\forall x \in \mathbf{T}_0^p(V)$ je opravdu $\mathbf{a}\, x$ antisymetrický a $\mathbf{s}\, x$ symetrický. Je-li již tensor x antisymetrický (resp. symetrický), pak $\mathbf{a}\, x = p!\, x$ (resp. $\mathbf{s}\, x = p!\, x$). Vektorový prostor všech antisymetrických tensorů typu $\binom{p}{0}$ označíme symbolem $\mathbf{A}_p(V)$. Je-li $n < p$, pak $\mathbf{A}_p(V) = \{0\}$. Pro $p \leq n$ tvoří $\binom{n}{p}$-prvková množina

$$\big\{\mathbf{a}(v_{i_1} \otimes \ldots \otimes v_{i_p}) \mid \{i_1, \ldots, i_p\} \subseteq \widehat{n}\ \&\ i_1 < \ldots < i_p\big\}$$

basi prostoru $\mathbf{A}_p(V)$. $\big(\mathbf{A}_0(V) := \mathbb{R}\ \&\ \mathbf{A}_1(V) = V\big)$

Buďte $x_p \in \mathbf{A}_p(V), x_q \in \mathbf{A}_q(V)$, pak definujeme vnější součin antisymetrických tensorů $x_p\ \&\ x_q$ jako antisymetrický tensor $x_p \wedge x_q \in \mathbf{A}_{p+q}(V)$:

$$x_p \wedge x_q := \frac{1}{p!\,q!}\mathbf{a}(x_p \otimes x_q)$$

Platí: $\forall x_p \in \mathbf{A}_p(V)\, \forall x_q \in \mathbf{A}_q(V)\, \forall x_r \in \mathbf{A}_r(V)$

- $x_p \wedge x_q = (-1)^{pq} x_q \wedge x_p$
- $x_p \wedge (x_q \wedge x_r) = (x_p \wedge x_q) \wedge x_r =: x_p \wedge x_q \wedge x_r$

Dále $\forall t_p \in \mathbf{T}_0^p\, \forall t_q \in \mathbf{T}_0^q$

- $\mathbf{a}\big(\mathbf{a}(t_p) \otimes t_q\big) = p!\, \mathbf{a}(t_p \otimes t_q)$
  $\mathbf{a}\big(t_p \otimes \mathbf{a}(t_q)\big) = q!\, \mathbf{a}(t_p \otimes t_q)$

- $\mathbf{a}(t_p \otimes t_q) = (-1)^{pq}\mathbf{a}(t_q \otimes t_p)$

Protože pro vektory $x_1, \ldots, x_p \in V$ a pro $\sigma \in S_p$ platí

$$x_1 \wedge \ldots \wedge x_p = sgn(\sigma)\, x_{\sigma(1)} \wedge \ldots \wedge x_{\sigma(p)} = \mathbf{a}(x_1 \otimes \ldots \otimes x_p)$$

je prostor $\mathbf{A}_p(V)$ nazýván p-tou vnější mocnimou prostoru V a označován symbolem $\overset{p}{\bigwedge} V$. Fundamentalní vlastností tohoto prostoru je: Je-li W libovolný vektorový prostor a $u \in \mathcal{L}_p(V, \ldots, V; W)$ libovolné antisymetrické p-linearní zobrazení, pak existuje právě jedno zobrazení $v \in \mathcal{L}\big(\overset{p}{\bigwedge} V, W\big)$ takové, že

$$\forall x_1, \ldots, x_p \in V \Big(v\,(x_1 \wedge \ldots \wedge x_p) = u\,(x_1, \ldots, x_p)\Big).$$

Buď $u \in \mathcal{L}(V, W)$. Pak zobrazení

$$V^{\times p} \to \bigwedge^{p} W : (x_1, \ldots, x_p) \mapsto u(x_1) \wedge \ldots \wedge u(x_p)$$

je p-linearní a antisymetrické. Z fundamentalní vlastnosti prostoru $\overset{p}{\bigwedge} V$ plyne, že existuje právě jedno zobrazení $v \in \mathcal{L}\big(\overset{p}{\bigwedge} V, \overset{p}{\bigwedge} W\big)$ takové, že

$$\forall x_1, \ldots, x_p \in V \Big(v\,(x_1 \wedge \ldots \wedge x_p) = u(x_1) \wedge \ldots \wedge u(x_p))\Big).$$

Toto zobrazení nazveme p-tou vnější mocninou zobrazení u a označíme $\overset{p}{\bigwedge} u$.

Na množině (kterou za chviličku nazveme vnější algebrou vektorového prostoru V)

$$\bigwedge V := \bigoplus_{p=0}^{n} \bigwedge^{p} V$$

definujeme téměř stejně jako v případě tensorové algebry operaci $\wedge$ násobení a tím i stukturu asociativní linearní algebry nad $\mathbb{R}$.

Buď M diferencovatelná varieta dimense $n \in \mathbb{N}$. $\forall x \in M$ označíme

$$\mathbf{T}(x) := \sum_{p,q \in \mathbb{N}_0} \mathbf{T}^p_q(x) := \sum_{p,q \in \mathbb{N}_0} \mathbf{T}^p_q(T_x M) = \mathbf{T}(T_x M)$$

tensorovou algebru vektorového prostoru $T_x M$. Buď $V \subseteq M$ otevřená, pak zobrazení

$$K : (x \in V) \mapsto \big(K(x) \in \mathbf{T}^p_q(x)\big)$$

nazveme tensorovým polem typu $\binom{p}{q}$ na V. Je-li $(U, \xi) \in \mathcal{M}$, pak lze zapsat

$$K \mid U = K^{i_1, \ldots, i_p}_{j_1, \ldots, j_q} \partial_{i_1}|_{.} \otimes \ldots \otimes \partial_{i_p}|_{.} \otimes d.\xi^{j_1} \otimes \ldots \otimes d.\xi^{j_q},$$

kde $K^{i_1, \ldots, i_p}_{j_1, \ldots, j_q}$ jsou funkce na U, které se jmenují složky tensorového pole K vzhledem k (U, ξ). Řekneme, že tensorové pole K je třídy $C^{(q)}$ na V, jestliže jeho složky vzhledem ke každé mapě $(U, \xi) \in \mathcal{M}$ (takové, že $U \cap V \neq \emptyset$) jsou třídy $C^{(q)}$ ($q \in \mathbb{N}$ nebo $q = +\infty$). Řekneme, že tensorové pole je diferencovatelné, [3]

[3] Dále všechna tensorová pole (někdy jen pole) budou diferencovatelná, tedy opět toto slovo budeme většinou vynechávat.

jestliže je třídy C^∞. Množinu všech tensorových polí typu $\binom{p}{q}$ definovaných na M označíme symbolem $\mathcal{T}^p_q(M) \equiv \mathcal{T}^p_q$ a definujeme

$$\mathcal{T} \equiv \mathcal{T}(M) := \sum_{p,q\in\mathbb{N}_0} \mathcal{T}^p_q.$$

Potom množina $\mathcal{T}$ s bodově definovanou operací násobení $\otimes$

$$\forall K, L \in \mathcal{T}\, \forall x \in M \Big(\big(K \otimes L\big)(x) := K(x) \otimes L(x) \Big)$$

představuje algebru nad $\mathbb{R}$.

Buď $V \subseteq M$ otevřená, $r \in \mathbb{N}_0$. Pak zobrazení

$$\omega : (x \in V) \mapsto \big(\omega(x) \in \bigwedge^r T^\#_x M\big)$$

nazveme diferencialní formou stupně r, nebo prostě r-formou na V. Jestliže je $(U, \xi) \in \mathcal{M}$, pak lze psát

$$\omega \mid U = f_{i_1,\ldots,i_r}\, d.\xi^{i_1} \wedge \ldots \wedge d.\xi^{i_r},$$

kde se sčítá pouze přes indexy $i_1 < \ldots < i_r$. Funkce $f_{i_1,\ldots,i_r}$ se jmenují složky r-formy ω vzhledem k (U, ξ). Řekneme, že $\omega \in C^{(q)}$ (pro $q \in \mathbb{N}$ nebo $q = +\infty$), jestliže to platí pro všechny její složky vzhledem ke každé mapě (U, ξ) takové, že $U \cap V \neq \emptyset$. A opět řekneme, že r-forma je diferencovatelná, [4] je-li třídy C^∞. Množinu všech r-forem ($r \in \{0, \ldots, n\}$) definovaných na M označíme symbolem $\mathfrak{D}^r(M) \equiv \mathfrak{D}^r$ a definujeme

$$\mathfrak{D} \equiv \mathfrak{D}(M) := \sum_{r=0}^{n} \mathfrak{D}^r(M).$$

Potom množina $\mathfrak{D}$ s bodově definovanou operací násobení $\wedge$

$$\forall \omega, \varepsilon \in \mathfrak{D}\, \forall x \in M \Big(\big(\omega \wedge \varepsilon\big)(x) := \omega(x) \wedge \varepsilon(x) \Big)$$

představuje algebru nad $\mathbb{R}$. Mimo to lze na každé $\mathfrak{D}^r$ pohlížet jako na $\mathcal{F}$-modul, definujeme-li

$$\mathcal{F} \times \mathfrak{D}^r \to \mathfrak{D}^r : (f, \omega) \mapsto f\omega : (f\omega)(x) := f(x)\, \omega(x)$$

Díky isomorfismům uvedeným v první části této kapitoly (zejména tedy $\mathbf{T}^p_q(V) \leftrightarrow \mathcal{L}\big(\mathbf{T}^q_0(V), \mathbf{T}^p_0(V)\big)$) a díky skutečnostem uvedeným na konci kapitoly předchozí, lze na každé tensorové pole K typu $\binom{0}{q}$ (resp. $\binom{1}{q}$) pohlížet jako na q-linearní [5] zobrazení

$$\mathfrak{X}^{\times q} \to \mathcal{F}\,(\text{resp. } \mathfrak{X}) : (X_1, \ldots, X_q) \mapsto K(X_1, \ldots, X_q),$$

[4] kteréžto slovo budeme zase vynechávat, protože s jinými diferencialními formami se nebudeme setkávat.

[5] linearní ve smyslu $\mathcal{F}$-linearní, na $\mathfrak{X}$ pohlížíme jako na $\mathcal{F}$-modul: Jsou-li A, A' R-moduly, pak zobrazení $u : A \to A'$ je R-linearní $\overset{def}{\Longleftrightarrow}$

$$\forall a, b \in A\, \forall x \in R \Big(u(a+b) = u(a) + u(b) \quad \& \quad u(xa) = x\, u(a) \Big)$$

$$\text{kde } K(X_1,\ldots,X_q):(x\in M)\mapsto K(x)\big(X_1(x),\ldots,X_q(x)\big).$$

Toto se samozřejmě týká i diferencialních r-forem, protože ty jsou antisymetrickými tensorovými poli typu $\binom{0}{r}$. Tj. $\forall\omega\in\mathfrak{D}^r\,\forall X_1,\ldots,X_r\in\mathfrak{X}\,\forall\sigma\in S_r$

$$\omega(X_1,\ldots,X_r)=sgn(\sigma)\,\omega(X_{\sigma(1)},\ldots,X_{\sigma(r)})$$

Stejně tak lze definovat operaci $\mathbf{A}$ antisymetrisace a operaci $\mathbf{S}$ symetrisace na prostoru $\mathcal{T}^0_r$: $\forall K\in\mathcal{T}^0_r\,\forall X_1,\ldots,X_r$

$$(\mathbf{A}K)(X_1,\ldots,X_r)=\sum_{\sigma\in S_r}sgn(\sigma)\,K(X_{\sigma(1)},\ldots,X_{\sigma(r)})$$

$$(\mathbf{S}K)(X_1,\ldots,X_r)=\sum_{\sigma\in S_r}K(X_{\sigma(1)},\ldots,X_{\sigma(r)})$$

Na prostoru $\mathfrak{D}$ zavedeme operaci d vnějšího derivování takto:

1. $d:\mathfrak{D}\to\mathfrak{D}$ je $\mathbb{R}$-linearní zobrazení takové, že
$$\forall r\in\{0,\ldots,n\}\,\big(d(\mathfrak{D}^r)\subseteq\mathfrak{D}^{r+1}\big)$$
2. $\forall f\in\mathcal{F}$ je df to, co už známe jako $d.f$
3. $\forall r,s\in\{0,\ldots,n\}\,\forall\omega\in\mathfrak{D}^r\,\forall\varepsilon\in\mathfrak{D}^s\,\big(d(\omega\wedge\varepsilon)=d\omega\wedge\varepsilon+(-1)^r\omega\wedge d\varepsilon\big)$
4. $d^2=0$

Je-li $(U,\xi)\in\mathcal{M}$ a

$$\omega\mid U=f_{i_1,\ldots,i_r}\,d\xi^{i_1}\wedge\ldots\wedge d\xi^{i_r},\ \text{potom}$$

$$d\omega\mid U=df_{i_1,\ldots,i_r}\wedge d\xi^{i_1}\wedge\ldots\wedge d\xi^{i_r}.$$

Je-li $\varphi:M\to N\in C^{(1)}$ zobrazení variet, $x\in M$, $\omega\in\mathfrak{D}^r(N)$. Potom definujeme $\varphi^*\omega\in\mathfrak{D}^r(M)$: $\forall x\in M\,\forall\mathbf{v}_1\ldots\mathbf{v}_r\in T_xM$

$$\big(\varphi^*\omega\big)(x)(\mathbf{v}_1,\ldots,\mathbf{v}_r):=\omega(\varphi(x))\big(T_x\varphi\,\mathbf{v}_1,\ldots,T_x\varphi\,\mathbf{v}_r\big)$$

Definici lze i přeformulovat:

$$\forall X_1,\ldots,X_r\in\mathfrak{X}(M)\,\big((\varphi^*\omega)(X_1,\ldots,X_r):=(\omega\circ\varphi)(T\varphi\circ X_1,\ldots,T\varphi\circ X_r)\big)$$

Pro $f\in\mathfrak{D}^0(N)\equiv\mathcal{F}(N)$ platí $\varphi^*f=f\circ\varphi$. Vnější derivování komutuje s φ^*, tj.: $\forall\omega\in\mathfrak{D}(N)\,\big(d(\varphi^*\omega)=\varphi^*(d\omega)\big)$. Je-li φ difeomorfismem, pak

$$\forall f\in\mathcal{F}(N)\,\forall X\in\mathfrak{X}(M)\,\Big(\varphi^*\big((\varphi_*X)f\big)=X(\varphi^*f)\Big).$$

Buď $\varphi:M\to M$ difeomorfismus. Potom vzhledem k tomu, že zobrazení $T_{\varphi^{-1}(x)}\varphi:T_{\varphi^{-1}(x)}M\to T_xM$ je isomorfismem vektorových prostorů, a vzhledem k výše uvedené bijekci $Iso(U,V)\to qIso\big(\mathbf{T}(U),\mathbf{T}(V)\big):A\mapsto f_A$, lze definovat jakousi obdobu zobrazení φ_* i pro tensorová pole:

$$\widetilde{\varphi}:\mathcal{T}(M)\to\mathcal{T}(M):A\to\widetilde{\varphi}A:\big(\widetilde{\varphi}A\big)(x):=f_{T_{\varphi^{-1}(x)}\varphi}\big(A(\varphi^{-1}(x))\big)$$

Řekneme, že zobrazení $A:\mathcal{T}(M)\to\mathcal{T}(M)$ je derivací algebry $\mathcal{T}(M)$, jestliže jsou splněny následující podmínky:

1. Zobrazení A je lineární a komutuje s každou kontrakcí
2. $\forall K, L \in \mathcal{T}\Big(A(K \otimes L) = K \otimes AL + (AK) \otimes L\Big)$

Buď $X \in \mathfrak{X} \,\&\, X \overset{loc}{\leftrightarrow} \varphi_t$, potom definujeme zobrazení $\mathfrak{L}_X : \mathcal{T} \to \mathcal{T}$

$$\big(\mathfrak{L}_X A\big)(x) := \lim_{t\to 0} \frac{1}{t}\Big(A(x) - (\widetilde{\varphi}_t A)(x)\Big)$$

nazývané Lieovou derivací tensorového pole A, podle vektorového pole X. (Ve značení se většinou opět vynechává písmenko x.) Platí:

- $\mathfrak{L}_X$ je derivací algebry $\mathcal{T}$
- $\forall f \in \mathcal{F}\big(\mathfrak{L}_X f = X\, f\big)$
- $\forall Y \in \mathfrak{X}\big(\mathfrak{L}_X Y = [X, Y]\big)$

Víme, že je-li S tensorové pole typu $\binom{1}{1}$, lze $\forall x \in M$ interpretovat $S(x)$ jako prvek $gl(T_x M)$. Dále víme, že toto zobrazení lze právě jedním způsobem prodloužit na $(S(x))_T \in Der\big(\mathbf{T}(x)\big)$. Jestliže tedy definujeme

$$\forall x \in M\, \big(\widetilde{S}(x) := (S(x))_T\big) \quad \text{tj.} \quad \forall K \in \mathcal{T}\, \forall x \in M\, \Big((\widetilde{S}K)(x) := (S(x))_T K(x)\Big),$$

získáme derivaci $\widetilde{S}$ algebry $\mathcal{T}$, která se nazývá idukovanou polem S.

Každou derivaci D algebry $\mathcal{T}$ lze jednoznačně rozložit na součet $D = \mathfrak{L}_X + \widetilde{S}$, kde $X \in \mathfrak{X} \,\&\, S \in \mathcal{T}^1_1$.

Buďte D_1, D_2 derivace algebry $\mathcal{T}$. Jestliže se rovnají zúžení D_1 & D_2 na $\mathcal{F} \,\&\, \mathfrak{X}$, potom platí $D_1 = D_2$.

Definujeme-li na množině $Der(\mathcal{T})$ všech derivací algebry $\mathcal{T}$ operaci $[\,,\,]$ komutatoru

$$\forall K \in \mathcal{T}\, \forall D, D' \in Der(\mathcal{T})\, \Big([D, D']K := D(D'K) - D'(DK)\Big),$$

obdržíme Lieovu algebru nad $\mathbb{R}$. Množina $\{\widetilde{S} \mid S \in \mathcal{T}^1_1\}$ je potom v této algebře idealem. [6]

Množina $\{\mathfrak{L}_X \mid X \in \mathfrak{X}\}$ je podalgebrou algebry $Der(\mathcal{T})$, jelikož platí

$$\forall X, Y \in \mathfrak{X}\, \Big(\mathfrak{L}_{[X,Y]} = [\mathfrak{L}_X, \mathfrak{L}_Y]\Big),$$

kteroužto rovnost, díky výše uvedenému tvrzení, stačí jednoduše ověřit na $\mathfrak{X}$ a na $\mathcal{F}$.

Buď $X \in \mathfrak{X}$ a $X \overset{loc}{\leftrightarrow} \varphi_t$, potom $\forall K \in \mathcal{T}$

$$\widetilde{\varphi}_s(\mathfrak{L}_X K) = -\frac{d}{dt}|_{t=s}(\widetilde{\varphi}_t K)$$

Z toho plyne: $\Big(\forall t\, \big(\widetilde{\varphi}_t K = K\big) \iff \mathfrak{L}_X K = 0\Big)$.

Linearní zobrazení $D : \mathfrak{D} \to \mathfrak{D}$ se jmenuje derivace (resp. antiderivace) algebry $\mathfrak{D}$ jestliže platí

[6] Buď $\mathfrak{h}$ podalgebrou Lieovy algebry $\mathfrak{g}$. Pak řekneme, že $\mathfrak{h}$ je idealem algebry $\mathfrak{g}$ $\overset{def}{\iff}$

$$\forall X \in \mathfrak{g}\, \forall Y \in \mathfrak{h}\, \Big([X, Y] \in \mathfrak{h}\Big)$$

derivace: $\forall \omega, \varepsilon \in \mathfrak{D} \Big(D(\omega \wedge \varepsilon) = D\,\omega \wedge \varepsilon + \omega \wedge D\varepsilon\Big)$

antiderivace: $\forall \omega \in \mathfrak{D}^r\, \forall \varepsilon \in \mathfrak{D} \Big(D(\omega \wedge \varepsilon) = D\,\omega \wedge \varepsilon + (-1)^r \omega \wedge D\varepsilon\Big)$.

Řekneme, že derivace či antiderivace algebry $\mathfrak{D}$ je stupně $k \in \mathbb{Z}$, jestliže pro každé $r \in \{0, \dots, n\}$ zobrazuje $\mathfrak{D}^r$ do $\mathfrak{D}^{r+s}$. Platí

- Jsou-li D, D' derivace stupně k, k', pak $[D, D']$ je derivace stupně $k + k'$.
- Je-li D derivace stupně k, D' antiderivace stupně k', potom je $[D, D']$ antiderivace stupně $k + k'$.
- Jsou-li D, D' antiderivace stupně k, k', pak $DD' + D'D$ je derivace stupně $k + k'$.
- Derivace i antiderivace jsou plně určeny svým působením na $\mathcal{F}$ a na $\mathfrak{D}^1$. Tj. $D \overset{\mathcal{F} \cup \mathfrak{D}^1}{=} D' \Rightarrow D = D'$

$\forall X \in \mathfrak{X}$ je $\mathfrak{L}_X$ derivací stupně 0 algebry $\mathfrak{D}$ komutující s vnější derivací d. [7] A obráceně: Buď D derivace stupně 0 algebry $\mathfrak{D}$ komutující s vnější derivací d, pak existuje $X \in \mathfrak{X}$ tak, že $D = \mathfrak{L}_X$.

$\forall X \in \mathfrak{X}$ definujeme antiderivaci i_X stupně (-1) algebry $\mathfrak{D}$, kterou nazveme vnitřní derivací podle vektorového pole X:

1. $\forall f \in \mathcal{F} \left(\mathrm{i}_X f = 0\right)$
2. $\forall \omega \in \mathfrak{D}^1 \Big(\mathrm{i}_X \omega = \omega(X)\Big)$

Platí

- $\forall X \in \mathfrak{X} \left(\mathrm{i}_X^2 = 0\right)$
- $\forall X \in \mathfrak{X} \left(\mathfrak{L}_X = d \circ \mathrm{i}_X + \mathrm{i}_X \circ d\right)$
- $\forall X, Y \in \mathfrak{X} \Big([\mathfrak{L}_X, \mathrm{i}_Y] = \mathrm{i}_{[X,Y]}\Big)$

A na závěr této kapitoly už jen jeden podivný způsob výroby tensorového pole pomocí dvou jiných: Buďte A, B tensorová pole typu $\binom{1}{1}$. Definujeme-li $\forall X, Y \in \mathfrak{X}$

$$S(X,Y) := [AX, BY] + [BX, AY] + AB[X,Y] + BA[X,Y] - \\ -A[X, BY] - A[BX, Y] - B[X, AY] - B[AX, Y],$$

je zobrazení $S : \mathfrak{X} \times \mathfrak{X} \to \mathfrak{X}$ $\mathcal{F}$-bilinearní (Tedy S je tensorové pole typu $\binom{1}{2}$) a $S(X,Y) = -S(Y,X)$.

[7] Vnější derivace d je ovšem antiderivací stupně 1.

Kapitola 4

Lieova grupa a její Lieova algebra

Def 4.1 *Vektorový prostor V s bilineární operací $[\,,\,] : V \times V \to V$, která je antisymetrická a splňuje Jacobiho identitu:*

$$\forall x, y, z \in V\Big([x,[y,z]] + [z,[x,y]] + [y,[z,x]] = 0\Big)$$

nazýváme Lieovou algebrou. Dimensí Lieovy algebry rozumíme dimensi V.

Def 4.2 *Topologickou grupu G, která je současně diferencovatelnou varietou tak, že zobrazení $\sigma : G \times G \to G : (g,h) \mapsto gh$ a zobrazení $\iota : G \to G : g \mapsto g^{-1}$ jsou třídy C^∞, nazveme Lieovou grupou. Dimensí Lieovy grupy rozumíme její dimensi jakožto variety. Jednotku grupy označme e.*

$\forall g \in G$ definujme zobrazení $L_g : G \to G : h \mapsto gh$ a $R_g : G \to G : h \mapsto hg$.

Příklad 4.1 *Buď G Lieova grupa dimense $n \in \mathbb{N}$; $h, g \in G$; $(\mathbf{e}_\mu)_{\mu \in \hat{n}}$ base v $\mathbb{R}^n$; $\kappa = (H_h, \psi)$, $\lambda = (H_{gh}, \xi)$ mapy v bodech h, gh; $\partial_\mu|_h \in T_h G$, tečný vektor takový, že $\forall f \in \mathcal{F}\big(\partial_\mu|_h f = (f \circ \psi^{-1})'(\psi(h))\,\mathbf{e}_\mu\big)$. Tj. $\partial_\mu|_h = \theta_\kappa^{-1}(\mathbf{e}_\mu)$. Označíme-li $\partial_i|_{gh} := \theta_\lambda^{-1}(\mathbf{e}_i)$ (kde $\mathbf{e}_\mu = \mathbf{e}_i$ pro $\mu = i$); $\xi = (\xi^1, \ldots, \xi^n)$. Pak platí:*

$$T_h L_g \partial_\mu|_h = (\xi^i \circ L_g \circ \psi^{-1})'(\psi(h))\,\mathbf{e}_\mu\,\partial_i|_{gh}. \tag{4.1}$$

Def 4.3 *Vektorové pole $X \in \mathfrak{X}(G)$ nazveme*

- *levoinvariantním, jestliže $\forall g \in G\big((L_g)_* X = X\big)$*
- *pravoinvariantním, jestliže $\forall g \in G\big((R_g)_* X = X\big)$*

Prostor všech levoinvariantních (resp. pravoinvariantních) diferenovatelných vektorových polí označme symbolem $\mathfrak{X}_{Linv}(G)$ (resp. $\mathfrak{X}_{Rinv}(G)$)

Def 4.4 $\forall \mathbf{v} \in T_e(G)$ *definujeme diferencovatelné levoinvariantní vektorové pole $X_\mathbf{v}$ vztahem $\forall g \in G\Big(X_\mathbf{v}(g) := T_e(L_g)\mathbf{v}\Big)$*

Prostor $\mathfrak{X}(G)$ všech diferencovatelných vektorových polí s operací Lieovy závorky $[\,,\,]$ je Lieovou algebrou a protože Lieova závorka levoinvariantních vektorových polí je znovu levoinvariantním vektorovým polem, je prostor $\mathfrak{X}_{Linv}(G)$ její Lieovou podalgebrou. A protože zobrazení $T_e(G) \to \mathfrak{X}_{Linv}(G) : \mathbf{v} \mapsto X_\mathbf{v}$ definované v předchozí definici je isomorfismem vektorových prostorů, lze na prostor T_eG přenést strukturu Lieovy algebry. Algebry T_eG a $\mathfrak{X}_{Linv}G$ pak ztotožníme, označíme symbolem $\mathfrak{g}$, nazveme Lieovou algebrou příslušné Lieovy grupy G a s jejími prvky budeme podle potřeby nakládat buď jako s tečnými vektory v jednotce nebo jako s Levoinvariantními vektorovými poli. Ovšem platí $dim\, G = dim\, \mathfrak{g}$.

Def 4.5 *Buďte G, H Lieovy grupy. Zobrazení $\varphi : G \to H$ nazveme homomorfismem Lieových grup (dále homomorfismem), jestliže je homomorfismem grup a zároveň zobrazením třídy C^∞.*

Def 4.6 *Homomorfismy Lieových grup $\mathbb{R} \to G$ nazýváme jednoparametrickými podgrupami grupy G.*

Tvrzení 4.1 *Zobrazení $\theta \mapsto \dot{\theta}(0) = T_0\theta\, \mathbf{r}_0$ množiny jednoparametrických podgrup Lieovy grupy G do T_eG je bijektivní. Obraz vektoru $\mathbf{v} \in T_eG$ při inversním zobrazení označíme $\theta_\mathbf{v}$.*

Def 4.7 *Buď G Lieova grupa. Pak definujeme exponencialní zobrazení $exp : T_eG \to G : \mathbf{v} \mapsto \theta_\mathbf{v}(1)$*

Tvrzení 4.2 *Buď $\varphi : G \to H$ homomorfismus Lieových grup, $\mathbf{v} \in T_eG$. Pak*

- *zobrazení $\mathbb{R} \to G : t \mapsto exp(t\mathbf{v})$ je jednoparametrická podgrupa grupy G a $\dot{\theta}(0) = \mathbf{v}$*
- *$\varphi \circ exp = exp \circ T_e\varphi$*
- *Zobrazení $T_e\varphi : T_eG \to T_eH : \mathfrak{g} \to \mathfrak{h}$ je homomorfismem Lieových algeber*

Je-li navíc G souvislá, pak homomorfismus φ je zobrazením $T_e\varphi$ určen jednoznačně. Tzn.: Jsou-li $\varphi_1, \varphi_2 : G \to H$ homomorfismy a $T_e\varphi_1 = T_e\varphi_2$, pak $\varphi_1 = \varphi_2$. Je-li G dokonce jednoduše souvislá, pak ke každému homomorfismu Lieových algeber $\rho : \mathfrak{g} \to \mathfrak{h}$ existuje právě jeden homomorfismus Lieových grup $\varphi : G \to H$ tak, že $\rho = T_e\varphi$.

Nyní definujeme několik užitečných zobrazení:

Def 4.8 *Buď G Lieova grupa. Potom definujeme*

- *$a : G \times G \to G : (g, h) \mapsto a_g(h) := ghg^{-1}$*
  neboli $\forall g \in G$ def difeomorfismus $a_g := L_g \circ R_{g^{-1}} \equiv R_{g^{-1}} \circ L_g : G \to G$
- *$Ad : G \to Aut(\mathfrak{g}) : g \mapsto T_e a_g$*
- *$ad := T_e Ad : \mathfrak{g} \to End(\mathfrak{g})$*

Kde $Aut(\mathfrak{g}) \equiv GL(\mathfrak{g})$ je Lieova multiplikativní grupa invertibilních linearních operatorů na $\mathfrak{g}$ a $T_eAut(\mathfrak{g}) \equiv End(\mathfrak{g}) \equiv gl(\mathfrak{g})$ je její Lieova algebra, čili vektorový prostor všech linearních operatorů na $\mathfrak{g}$ s operací komutatoru.

Jelikož je $\forall g \in G$ zobrazení a_g homomorfismem (dokonce automorfismem), platí podle předchozího tvrzení $a_g \circ exp = exp \circ Ad_g$. A jelikož i zobrazení Ad je homomorfismem, $Ad \circ exp = exp \circ ad$. Čili

$$\forall t \in \mathbb{R} \forall \mathbf{v} \in \mathfrak{g} \forall g \in G \Big(exp\,(t\, Ad_g \mathbf{v}) = g (exp\, t\mathbf{v}) g^{-1} \Big)$$

Dále platí: $\forall g \in G \left(T_e a_g = T_{g^{-1}} L_g \circ T_e R_{g^{-1}} = T_g R_{g^{-1}} \circ T_e L_g \right)$. Také zavedeme následující označení: $\forall x, g \in G \, \forall (x, \mathbf{v}) \in TG$

- $g\,\mathbf{v} := TL_g(x, \mathbf{v}) = T_x L_g \mathbf{v}$
- $\mathbf{v}\,g := TR_g(x, \mathbf{v}) = T_x R_g \mathbf{v}$

Potom platí: $\forall x, g, h \in G \, \forall \mathbf{v} \in T_x G$

- $g\,(\mathbf{v}\,h) = (g\,\mathbf{v})\,h =: g\,\mathbf{v}\,h$
- $(g\,h)\,\mathbf{v} = g\,(h\,\mathbf{v}) =: g\,h\,\mathbf{v}$
- $\mathbf{v}\,(g\,h) = (\mathbf{v}\,g)\,h =: \mathbf{v}\,g\,h$

Tedy s použitím tohoto označení lze zpsat $\forall g \in G \, \forall \mathbf{v} \in T_e G$

$$T_e a_g\,\mathbf{v} \equiv Ad_g \mathbf{v} = g\,\mathbf{v}\,g^{-1}$$

Jméno zobrazení exp pochází od toho, že v případě maticové grupy $GL(V)$ libovolného (konečnědimensionalního) vektorového prostoru toto zobrazení má doopravdy tvar exponencialy

$$exp : gl(V) \to GL(V) : A \mapsto \sum_{i \in \mathbb{N}_0} \frac{A^i}{i!}.$$

Proto pro homomorfismus $\varphi : G \to GL(V)$ a $A \in T_e G$ platí

$$\varphi\,(exp\,A) = \sum_{i \in \mathbb{N}_0} \frac{(T_e \varphi\,A)^i}{i!}.$$

Nyní se obrátíme k jednoparametrickým grupám difeomorfismů. Buď $A \in \mathfrak{g}$ a $A \overset{loc}{\leftrightarrow} \varphi_t$. Tzn. (budeme-li se zabývat bodem e), že φ je definována na nějaké množině $H_0 \times H_e \subseteq \mathbb{R} \times G$. Tedy výraz $\varphi_t e =: a_t$ má smysl pro $t \in H_0$. Definujeme $\forall x \in G \left(\varphi_t x := L_x(\varphi_t e) \right)$ a tedy víme, že každé levoinvariantní pole je úplné. Dále víme, že $a_t = exp(t\,A)$, což znamená že

$$\forall x \in G \, \forall t \in \mathbb{R} \Big(\varphi_t x = L_x \big(exp(t\,A) \big) \Big).$$

Toho lze využít pro snadný důkaz následujícího vztahu

$$\forall A, B \in \mathfrak{g} \left(ad_A B = [A, B] \right).$$

Velmi vhodné je si připravit tvar tečného zobrazení k zobrazení součinu, inverse a libovolného homomorfismu Lieových grup $\varphi : G \to G'$

- $\forall (x, \mathbf{v}) \in TG \big((T_x \iota) \mathbf{v} = -x^{-1} \mathbf{v}\, x^{-1} \big)$
- $\forall \big((x, y), (\mathbf{v}, \mathbf{w}) \big) \in T(G \times G) \big((T_{(x,y)} \sigma)\,(\mathbf{v}, \mathbf{w}) = x\,\mathbf{w} + \mathbf{v}\,y \big)$
- $\forall (x, \mathbf{v}) \in TG \big((T_x \varphi) \mathbf{v} = \varphi(x) \big(T_e \varphi (x^{-1} \mathbf{v}) \big) \big)$

Druhé tvrzení plyne přímo ze vztahu (2.1). První plyne z druhého a z toho, že $\forall x \in G \Big(\sigma\big(x, \iota(x)\big) = e \Big)$. A třetí plyne z rovnosti $\varphi \circ L_{x^{-1}} = L_{(\varphi(x))^{-1}} \circ \varphi$.

Kapitola 5

Příklad

Některé z dříve definovaných pojmů si ukážeme na příkladu Lieovy grupy $Af1$ afinních transformací v $\mathbb{R}$. Afinní transformace v $\mathbb{R}$ je zobrazení

$$\mathbb{R} \to \mathbb{R} : x \mapsto ax + b, \quad \text{kde } a \in \mathbb{R} \setminus \{0\} \;\&\; b \in \mathbb{R}.$$

Grupovým násobením je skládání transformací. Označíme-li $M := (\mathbb{R} \setminus \{0\}) \times \mathbb{R}$, jde o grupu

$$G \equiv Af1 = (M, *), \quad \text{kde} \quad (g^1, g^2) * (h^1, h^2) = (g^1 h^1, g^1 h^2 + g^2)$$
$$\&$$
$$g^{-1} = \left(\frac{1}{g^1}, -\frac{g^2}{g^1}\right).$$

Varieta je vnořena do $\mathbb{R}^2$ a struktura grupy spolu s diferencovatelnou strukturou zděděnou od $\mathbb{R}^2$ skutečně definuje Lieovu grupu, tedy nejhezčí a nejrozumější mapa je $\mu := (M, id_M)$. Tečný prostor $T_e G$ v jednotce $e = (1, 0)$ má dimensi 2 a jeho basi vybereme takto: $\forall i \in \{1, 2\}$

$$\partial_i|_e := \theta_\mu^{-1}(\mathbf{e}_i)$$

Je-li $f \in \mathcal{F}^1(e)$, pak $\partial_i|_e f = f'(e)\,\mathbf{e}_i = f_i(e)$, což je obyčejná parcialní derivace funkce f podle i-té proměnné v bodě e. Buď $\mathbf{v} = \alpha^i \partial_i|_e \in T_e G$, pak levoinvariantní vektorové pole $X_\mathbf{v}$ definované vztahem $\forall g \in G \big(X_v(g) := T_e(L_g)\mathbf{v}\big)$ se spočte za pomoci jeho akce na funkci $f \in \mathcal{F}$

$$X_\mathbf{v}(g)\, f = \big(T_e(L_g)\mathbf{v}\big) f = \alpha^i \partial_i|_e (f \circ L_g) = \alpha^i g^1 f_i(g)$$
$$\text{protože } (f \circ L_g)(x) = f(L_g x) = f(gx) = f(g^1 x^1, g^1 x^2 + g^2).$$

Čili $X_\mathbf{v}(g) = \alpha^i g^1 \partial_i|_g$.

Najít jednoparametrickou grupu transformací φ_t příslušející tomuto poli znamená vyřešit soustavu diferencialních rovnic

$$\alpha^i \varphi_t^1(g) = \dot{\varphi}_t^i(g)$$

s počátečními podmínkami $\varphi_0^i(g) = g^i$. Což v tomto případě není problém a výsledkem je

$$\varphi_t(g) = \left(g^1 e^{\alpha^1 t}, g^1 \frac{\alpha^2}{\alpha^1} e^{\alpha^1 t} + g^2 - g^1 \frac{\alpha^2}{\alpha^1}\right) \quad (\text{pro } \alpha^1 \neq 0)$$

nebo

$$\varphi_t(g) = \big(g^1, \alpha^2 g^1 t + g^2\big) \quad (\text{pro } \alpha^1 = 0).$$

Počítat komutator polí $X_{\mathbf{v}}$ & $X_{\mathbf{v}'}$ ($\mathbf{v}' = \beta^i \partial_i|_e$) pomocí limity

$$[X_{\mathbf{v}}, X_{\mathbf{v}'}](g)f =$$

$$= \lim_{t\to 0} \frac{1}{t}\Big(X_{\mathbf{v}'}(g)f - \big((\varphi_t)_* X_{\mathbf{v}'}\big)(g)f\Big) = \lim_{t\to 0} \frac{1}{t}\Big(X_{\mathbf{v}'}(g)f - X_{\mathbf{v}'}\big(\varphi_t^{-1}(g)\big)(f\circ\varphi_t)\Big) =$$

$$= \lim_{t\to 0} \frac{1}{t}\Big(\beta^2 g^1 f_2(g) - \beta^1 g^1 \frac{\alpha^2}{\alpha^1} f_2(g) + \beta^1 g^1 f_2(g) \frac{\alpha^2}{\alpha^1} e^{-\alpha^1 t} - \beta^2 g^1 f_2(g) e^{-\alpha^1 t}\Big) =$$

$$= \beta^2 g^1 f_2(g) \lim_{t\to 0} \frac{1}{t}\big(1 - e^{-\alpha^1 t}\big) - \beta^1 g^1 f_2(g) \frac{\alpha^2}{\alpha^1} \lim_{t\to 0} \frac{1}{t}\big(1 - e^{-\alpha^1 t}\big) =$$

$$= \beta^2 \alpha^1 g^1 f_2(g) - \beta^1 \alpha^2 g^1 f_2(g) =$$

$$= X_{\mathbf{w}}(g)f, \quad \text{kde } \mathbf{w} = 0\,\partial_1|_e + (\alpha^1\beta^2 - \alpha^2\beta^1)\partial_2|_e$$

pro $\alpha^1 \neq 0$ & $f \in \mathcal{F}$, nebo pomocí jiné limity, pro $\alpha^1 = 0$

$$[X_{\mathbf{v}}, X_{\mathbf{v}'}](g)f =$$

$$= \lim_{t\to 0} \frac{1}{t}\Big(g^1\beta^i f_i(g) - X_{\mathbf{v}'}(g^1, -\alpha^2 g^1 t + g^2)\big(f\circ\varphi_t\big)\Big) = \lim_{t\to 0} \frac{1}{t}\big(-\alpha^2\beta^1 g^1 t f_2(g)\big) =$$

$$= X_{\mathbf{w}}(g)f, \quad \text{kde } \mathbf{w} = 0\,\partial_1|_e - \alpha^2\beta^1\partial_2|_e$$

je cesta dosti nešikovná, vzhledem k tomu, že když se podíváme, jak vypadá následující výraz

$$\begin{aligned}
[X_{\mathbf{v}}, X_{\mathbf{v}'}](g)f &= X_{\mathbf{v}}(g)\big(X_{\mathbf{v}'}f\big) - X_{\mathbf{v}'}(g)\big(X_{\mathbf{v}}f\big) = \\
&= g^1\alpha^i\partial_i|_g(g^1\beta^j f_j(g)) - g^1\beta^i\partial_i|_g(g^1\alpha^j f_j(g)) = \\
&= g^1\alpha^1\beta^j f_j(g) + g^1 g^1\alpha^i\beta^j f_{ij}(g) - g^1\beta^1\alpha^j f_j(g) - g^1 g^1\beta^i\alpha^j f_{ij}(g) = \\
&= \beta^2\alpha^1 g^1 f_2(g) - \beta^1\alpha^2 g^1 f_2(g) = X_{\mathbf{w}}(g)f
\end{aligned}$$

pro $f \in \mathcal{F}$, zjistíme, že $\mathbf{w} = 0\,\partial_1|_e + (\alpha^1\beta^2 - \alpha^2\beta^1)\partial_2|_e$, což znamená (pokud označíme $X_i := X_{\partial_i|_e}$), že $[X_1, X_2] = X_2$.

Provedeme-li stejný postup s tím, že k vektoru $\mathbf{v} \in T_eG$ budeme hledat pravoinvariantní pole $Y_{\mathbf{v}}$ podle vztahu $Y_{\mathbf{v}}(g) = T_e(R_g)\mathbf{v}$ a označíme $Y_i := Y_{\partial_i|_e}$, obdržíme Lieovu algebru pravoinvariantních polí a bude platit $[Y_1, Y_2] = -Y_2$.

Vztah (4.1) a s ním související písmenka v této grupě znamenají: $\forall f \in \mathcal{F}$

- $\partial_\mu|_h f = f_\mu(h)$
- $\partial_i|_{gh} f = f_i(gh)$
- $T_h L_g \partial_1|_h = g^1\partial_1|_{gh}$ & $T_h L_g \partial_2|_h = g^1\partial_2|_{gh}$.

Kapitola 6

Drinfeldův double a $GL(\mathbb{R}^2)$

Buď U vektorový prostor nad tělesem K, $B : U \times U \to K$ symetrická bilinearní forma, $W \subseteq U$ podprostor. Pak definujeme podprostor

$$W' := \{y \in U \mid \forall x \in W \big(B(x,y) = 0\big)\}$$

a řekneme, že forma B je nedegenerovaná $\overset{def}{\iff}$ $U' = \{0\}$.
Dále podprostor W je

- isotropní $\overset{def}{\iff}$ $W \cap W' \neq \{0\} \iff B \mid W \times W$ je degenerovaná
- totalně isotropní $\overset{def}{\iff}$ $W \subseteq W' \iff B \mid W \times W \equiv 0$
- maximalně isotropní $\overset{def}{\iff}$ je totalně isotropní & pro každý totalně isotropní podprostor $V \subseteq U$ platí $\big(W \subseteq V \Rightarrow W = V\big)$

Buď G Lieova grupa, $\mathfrak{g}$ její Lieova algebra, $B : \mathfrak{g} \times \mathfrak{g} \to \mathbb{R}$ bilinearní forma. Řekneme, že forma B je ad-invariantní $\overset{def}{\iff}$

$$\forall X, Y, Z \in \mathfrak{g} \Big(B(ad_X Y, Z) + B(Y, ad_X Z) = 0\Big).$$

Definujeme množinu $\Theta(G) := \{g \in G \mid \exists X \in \mathfrak{g}\,(g = exp\, X)\}$ potom platí:

$$B \text{ je } ad\text{-invariantní } \Rightarrow \forall g \in \Theta(G)\, \forall X, Y \in \mathfrak{g} \Big(B(Ad_g X, Ad_g Y) = B(X, Y)\Big).$$

To plyne z toho, že

$$\forall Z \in \mathfrak{g} \left(Ad_{exp\, Z} = exp(ad_Z) = \sum_{i \in \mathbb{N}_0} \frac{(ad_Z)^i}{i!}\right)$$

a z toho, že všechny členy se stejným součtem $i + j \neq 0$ ve vyjádření

$$B(Ad_{exp\, Z} X, Ad_{exp\, Z} Y) = \sum_{i \in \mathbb{N}_0} \sum_{j \in \mathbb{N}_0} B\Big(\frac{(ad_Z)^i}{i!} X, \frac{(ad_Z)^j}{j!} Y\Big)$$

se vzájemně požerou. (Pro $i + j$ liché je to vidět poměrně snadno, pro $i + j$ sudé tento fakt lze ověřit pomocí Pascalova trojúhelníku a vizualního kriteria.)

Souvislá Lieova grupa D, jejíž Lieovu algebru $\mathcal{D}$ vybavenou symetrickou nedegenerovanou ad-invariantní bilinearní formou $\langle\,|\,\rangle$ lze rozložit na direktní součet dvou (vzhledem k $\langle\,|\,\rangle$) maximalně isotropních podalgeber $\mathfrak{g}\,\&\,\widetilde{\mathfrak{g}}$, se nazývá Drinfeldův double.

Z požadavků kladených na formu $\langle\,|\,\rangle$ plyne, že obě zmíněné podalgebry musí mít nutně stejnou dimensi. Nechť náš Drinfeldův double má dimensi $2n \in \mathbb{N}$. Buďte $G, \widetilde{G} \subseteq D$ podgrupy příslušné podalgebrám $\mathfrak{g}, \widetilde{\mathfrak{g}}$. Buďte $\mathcal{E}^+, \mathcal{E}^- \subseteq \mathcal{D}$ podprostory dimense n, pro které platí:

$$\forall X \in \mathcal{E}^+ \, \forall Y \in \mathcal{E}^- \big(\langle X \mid Y\rangle = 0\big) \quad \& \quad \mathcal{E}^+ + \mathcal{E}^- = \mathcal{D}. \quad \text{(ortogonalita)}$$

Base $(T^i)_{i\in\widehat{n}}, (\widetilde{T}_i)_{i\in\widehat{n}}$ algeber $\mathfrak{g}\,\&\,\widetilde{\mathfrak{g}}$ lze vybrat tak, že platí

$$\forall i,j \in \widehat{n} \left(\langle T^i \mid \widetilde{T}_j\rangle = \delta^i_j \quad \& \quad \langle T^i \mid T^j\rangle = 0 = \langle \widetilde{T}_i \mid \widetilde{T}_j\rangle\right)$$

Nechť $\forall i,j \in \widehat{n} \left([T^i, T^j] = f^{ij}_k T^k \quad \& \quad [\widetilde{T}_i, \widetilde{T}_j] = \widetilde{f}^k_{ij}\widetilde{T}_k\right)$. Potom z ad-invariance formy $\langle\,|\,\rangle$ plyne $[\widetilde{T}_i, T^j] = f^{jk}_i \widetilde{T}_k - \widetilde{f}^j_{ik} T^k$. Mějme dále zobrazení $l : \mathbb{R}^2 \to D$. Označme $x = (x_+, x_-) \in \mathbb{R}^2$, množina $\{\partial_+, \partial_-\}$ nechť je basí $T_x\mathbb{R}^2$. Rovnice mají tvar

$$\forall x \in \mathbb{R}^2 \, \forall X \in \mathcal{E}^\pm \left(\langle (T_x l\, \partial_\pm)(l(x))^{-1} \mid X\rangle = 0\right)$$

Jelikož v okolí jednotky $e \in D$ existuje jednoznačný rozklad $l(x) = g(x)\widetilde{h}(x)$ prvku doublu D pomocí prvků grup $G\,\&\,\widetilde{G}$ a jelikož lze zobrazení l šikovně rozložit na

$$l = \sigma \circ (g, \widetilde{h}) : \mathbb{R}^2 \to D \times D \to D,$$

lze první člen na levé straně upravit:

$$\begin{aligned}
(T_x l \partial_\pm)(l(x))^{-1} &= \Big(T_x\big(\sigma \circ (g,\widetilde{h})\big)\partial_\pm\Big)(\widetilde{h}(x))^{-1}(g(x))^{-1} = \\
&= \Big(\big(T_{(g(x),\widetilde{h}(x))}\sigma \circ T_x(g,\widetilde{h})\big)(\partial_\pm)\Big)(\widetilde{h}(x))^{-1}(g(x))^{-1} = \\
&= \Big(T_{(g(x),\widetilde{h}(x))}\sigma\,(T_x g\partial_\pm, T_x\widetilde{h}\partial_\pm)\Big)(\widetilde{h}(x))^{-1}(g(x))^{-1} = \\
&= \Big(g(x)T_x\widetilde{h}\partial_\pm + (T_x g\partial_\pm)\widetilde{h}(x)\Big)(\widetilde{h}(x))^{-1}(g(x))^{-1} = \\
&= g(x)\Big(T_x\widetilde{h}\partial_\pm\Big)(\widetilde{h}(x))^{-1}(g(x))^{-1} + \Big(T_x g\partial_\pm\Big)(g(x))^{-1}
\end{aligned}$$

Použijeme-li ad-invarianci formy $\langle\,|\,\rangle$, dostaneme

$$\langle \big(T_x\widetilde{h}\partial_\pm\big)(\widetilde{h}(x))^{-1} + (g(x))^{-1}\big(T_x g\partial_\pm\big) \mid (g(x))^{-1} X\, g(x)\rangle = 0 \tag{6.1}$$

Je-li base $\mathcal{E}^+$ vybrána ve tvaru $(T^i + E^{ij}\widetilde{T}_j)_{i\in\widehat{n}}$, potom z požadavku ortogonality plyne, že chceme-li mít basi $\mathcal{E}^-$ ve tvaru $(T^i + B^{ij}\widetilde{T}_j)_{i\in\widehat{n}}$, platí $B^{ij} = -E^{ji}$. Jelikož zobrazení $Ad_{(g(x))^{-1}}$ je linearním isomorfismem a $\mathfrak{g}$ je vzhledem k němu invariantním podprostorem, jsou $Ad_{(g(x))^{-1}}\mathcal{E}^\pm \equiv \{(g(x))^{-1}X\, g(x) \mid X \in \mathcal{E}^\pm\}$ znovu podprostory stejné dimense (a znovu ortogonalní z ad-invariance formy $\langle\,|\,\rangle$) a jejich base lze zapsat ve tvaru

$$(T^i + E^{ij}\big(g(x)\big)\widetilde{T}_j)_{i\in\widehat{n}} \quad \text{resp.} \quad (T^i - E^{ji}\big(g(x)\big)\widetilde{T}_j)_{i\in\widehat{n}}.$$

Pokud toto zohledníme ve vztahu (6.1) dostaneme takovéto vztahy mezi souřadnicemi

$$-\Big(\big(T_x\widetilde{h}\partial_+\big)\big(\widetilde{h}(x)\big)^{-1}\Big)^i = E^{ij}\big(g(x)\big)\Big(\big(g(x)\big)^{-1}\big(T_x g\partial_+\big)\Big)_j =: A_+^i\big(g(x)\big) \quad (6.2)$$

$$-\Big(\big(T_x\widetilde{h}\partial_-\big)\big(\widetilde{h}(x)\big)^{-1}\Big)^i = -E^{ji}\big(g(x)\big)\Big(\big(g(x)\big)^{-1}\big(T_x g\partial_-\big)\Big)_j =: A_-^i\big(g(x)\big). \quad (6.3)$$

Buďte $\kappa = (H_{\widetilde{e}}, \xi)$, $\lambda = (H_{\widetilde{h}(x)}, \psi)$, mapy na $\widetilde{G}$ v bodech $\widetilde{e}$, $\widetilde{h}(x)$. (Pro $x \in \mathbb{R}^2$ pevné.) Označme $\xi = (\xi^1, \ldots, \xi^n)$ a stejně tak i pro ψ. Dále pro libovolné zobrazení $F : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ bude symbol $\partial_i F^j(a)$ znamenat parcialní derivaci j-té složky zobrazení F podle jeho i-té proměnné v bodě a. Obdobně v případě zobrazení $F : \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ bude symbol $\partial_i^{(1)} F^j(b_1, b_2)$ $\big($resp. $\partial_i^{(2)} F^j(b_1, b_2)\big)$ značit parcialní derivaci v bodě (b_1, b_2) j-té složky zobrazení F podle jeho i-té proměnné z první (resp. druhé) sady. $\big(A_\pm^i(g(x)) \overset{ozn}{=} A_\pm^i(x)\big)$

Vektorům

$$-\big(T_x\widetilde{h}\partial_\pm\big)\big(\widetilde{h}(x)\big)^{-1} = A_\pm^i\big(g(x)\big)\widetilde{T}_i \overset{ozn}{=} \alpha_\pm$$

z $T_{\widetilde{e}}\widetilde{G}$ lze jednoznačně přiřadit levoinvariantní vektorová pole na $\widetilde{G}$ vztahem $\forall \widetilde{g} \in \widetilde{G}\ \big(X_\pm(\widetilde{g}) := T_{\widetilde{e}} L_{\widetilde{g}} \alpha_\pm\big)$. Potom pro $f \in \mathcal{F}(\widetilde{G})$ je

$$X_\pm f : (\widetilde{g} \in H_{\widetilde{e}}) \mapsto -\partial_\nu\big(f \circ \xi^{-1}\big)(\xi(\widetilde{g}))\,\partial_\beta\big(\xi^\nu \circ L_{\widetilde{g}} \circ \xi^{-1}\big)(\xi(\widetilde{e})) \cdot$$
$$\cdot\, \partial_\gamma\big(\xi^\beta \circ R_{(\widetilde{h}(x))^{-1}} \circ \psi^{-1}\big)\big(\psi(\widetilde{h}(x))\big)\,\partial_\pm\big(\psi^\gamma \circ \widetilde{h}\big)(x).$$

Označíme

$$q_{\gamma\beta}^\nu := \partial_\gamma^{(1)}\partial_\beta^{(2)}\big(\xi^\nu \circ \sigma \circ (\xi^{-1} \times \xi^{-1})\big)(\xi(\widetilde{e}), \xi(\widetilde{e})).$$

Pak platí

$$[X_-, X_+](\widetilde{e})f \equiv X_-(\widetilde{e})(X_+ f) - X_+(\widetilde{e})(X_- f) =$$
$$= \partial_\nu\big(f \circ \xi^{-1}\big)(\xi(\widetilde{e}))q_{\gamma\beta}^\nu\big(A_+^\beta(x)A_-^\gamma(x) - A_-^\beta(x)A_+^\gamma(x)\big).$$

Tj.

$$[X_-, X_+](\widetilde{e}) = q_{\gamma\beta}^i\big(A_+^\beta(x)A_-^\gamma(x) - A_-^\beta(x)A_+^\gamma(x)\big)\,\widetilde{T}_i.$$

Na $A_\pm^i\big(g(\cdot)\big) =: A_\pm^i$ lze také pohlížet jako na zobrazení $\mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$, čili má smysl se ptát, jak vypadá výraz $\partial_+ A_-^i(x) - \partial_- A_+^i(x)$. Při jeho výpočtu je dobré si uvědomit, že

$$\forall \widetilde{g} \in \widetilde{G}\ \Big(\sigma\big(R_{\widetilde{g}^{-1}}(\cdot), L_{\widetilde{g}}(\cdot)\big) = \sigma(\cdot, \cdot)\Big).$$

Pokud výpočet opravdu provedeme a výsledek porovnáme s předchozím vztahem pro komutator, dostaneme následující vztah

$$\partial_+ A_-^i(x) - \partial_- A_+^i(x) = \Big([X_-, X_+](\widetilde{e})\Big)^i.$$

Jinými slovy

$$\frac{\partial}{\partial x_+}A_-^i\big(g(x)\big) - \frac{\partial}{\partial x_-}A_+^i\big(g(x)\big) - \widetilde{f}_{jk}^i A_-^j\big(g(x)\big)A_+^k\big(g(x)\big) = 0. \quad (6.4)$$

Nyní se budeme věnovat konkretnímu příkladu. Uvažujme dva exempláře podgrupy $B_2 := (\mathbb{R}_+ \times \mathbb{R}, *)$ grupy $Af1$. Na ně lze pohlížet i jako na dvě různé podgrupy G & $\widetilde{G}$ grupy $GL(\mathbb{R}^2)$ v následujícm smyslu:

$$G = \left\{ \begin{pmatrix} g^1 & g^2 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} | g^1 \in \mathbb{R}_+, g^2 \in \mathbb{R} \right\} \quad \widetilde{G} = \left\{ \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ \widetilde{h}^2 & \widetilde{h}^1 \end{pmatrix} | \widetilde{h}^1 \in \mathbb{R}_+, \widetilde{h}^2 \in \mathbb{R} \right\}$$

Grupové násobení $*$ je representováno obvyklým součinem matic. Položíme-li $D := \langle G \cup \widetilde{G} \rangle$ [1] a podíváme-li se, co je to zač, zjistíme, že jde o souvislou podgrupu grupy $GL(\mathbb{R}^2)$ tvořenou všemi linearními operatory na $\mathbb{R}^2$ s kladným determinantem. Lieova algebra $\mathcal{D}$ této grupy má tvar

$$T^1 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad T^2 = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$$\widetilde{T}_1 = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad \widetilde{T}_2 = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ -1 & 0 \end{pmatrix},$$

kde (T^1, T^2), resp. $(\widetilde{T}_1, \widetilde{T}_2)$, tvoří basi podalgebry $\mathfrak{g}$, resp. $\widetilde{\mathfrak{g}}$. [2] Bilinearní formu splňující požadované vlastnosti lze definovat vztahy

$$\langle T^i \mid \widetilde{T}_j \rangle := \delta^i_j \qquad \langle T^i \mid T^j \rangle := 0 =: \langle \widetilde{T}_i \mid \widetilde{T}_j \rangle.^3$$

Vztahy (6.2) & (6.3) potom přechází na tvar

$$\begin{pmatrix} -\frac{\partial_+ \widetilde{h}^1(x)}{\widetilde{h}^1(x)} \\ \partial_+ \widetilde{h}^2(x) - \frac{\widetilde{h}^2(x)}{\widetilde{h}^1(x)} \partial_+ \widetilde{h}^1(x) \end{pmatrix} = \mathbb{E}\big(g(x)\big) \begin{pmatrix} \frac{\partial_+ g^1(x)}{g^1(x)} \\ \frac{\partial_+ g^2(x)}{g^1(x)} \end{pmatrix} =: \begin{pmatrix} A^1_+\big(g(x)\big) \\ A^2_+\big(g(x)\big) \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} -\frac{\partial_- \widetilde{h}^1(x)}{\widetilde{h}^1(x)} \\ \partial_- \widetilde{h}^2(x) - \frac{\widetilde{h}^2(x)}{\widetilde{h}^1(x)} \partial_- \widetilde{h}^1(x) \end{pmatrix} = -\,\mathbb{E}^T\big(g(x)\big) \begin{pmatrix} \frac{\partial_- g^1(x)}{g^1(x)} \\ \frac{\partial_- g^2(x)}{g^1(x)} \end{pmatrix} =: \begin{pmatrix} A^1_-\big(g(x)\big) \\ A^2_-\big(g(x)\big) \end{pmatrix}.$$

A rovnice (6.4) znamenají

$$\frac{\partial}{\partial x_+} A^1_-\big(g(x)\big) - \frac{\partial}{\partial x_-} A^1_+\big(g(x)\big) = 0$$

$$\frac{\partial}{\partial x_+} A^2_-\big(g(x)\big) - \frac{\partial}{\partial x_-} A^2_+\big(g(x)\big) - A^1_-\big(g(x)\big) A^2_+\big(g(x)\big) + A^2_-\big(g(x)\big) A^1_+\big(g(x)\big) = 0.$$

[1] Nejmenší podgrupa grupy $GL(\mathbb{R}^2)$ obsahující sjednocení $G \cup \widetilde{G}$

[2] Lieovy grupy B_2 & $Af1$ mají ovšem stejnou Lieovu algebru stejně tak jako i D & $GL(\mathbb{R}^2)$.

[3] S tímto také souvisí výběr base algebry $\mathcal{D}$. Kdyby symbol $\widetilde{T}_2$ označoval -1-násobek toho, co značí teď, komutační relace by zůstaly beze změny poze v rámci $\widetilde{\mathfrak{g}}$ a takto definovaná forma by nebyla ad-invariantní.

Kapitola 7

Závěr

Uvědomuji si, že míchání různých přístupů k téže problematice nepůsobí zrovna příliš hezky a čtivě, nicméně mi velmi pomohlo k pochopení základních pojmů diferencialní geometrie a vztahů mezi nimi.

Dále bych rád podotkl, že z literatury, kterou jsem použil, není zcela jasné, co je to vlastně Drinfeldův double a proč. Čili za jakých podmínek a na jak velké množině v D lze použít rozklad $l = g\widetilde{h} = \widetilde{g}h$. [1]

Různé články na grupu D kladou různé požadavky. Například: [6] souvislost, [12] souvislost a jednoduchá souvislost, [11] jednoduchá souvislost, [2] v [5] jde o grupu zcela libovolnou. O struktuře grup G & $\widetilde{G}$ se nemluví. Co se týče uvedeného rozkladu, otázka je, zda existuje na celé grupě D, či nikoli.

Podíváme-li se blíže na příklad z předcházející strany, všimneme si, že grupy G, $\widetilde{G}$ a D jsou všechny souvislé. G & $\widetilde{G}$ jednoduše souvislé. [3] A přesto rozklad $l = g\widetilde{h}$ lze najít pouze na množině

$$G\widetilde{G} := \{g\widetilde{h} \mid g \in G, \widetilde{h} \in \widetilde{G}\} = \left\{ \begin{pmatrix} x & y \\ z & w \end{pmatrix} | x, y, z \in \mathbb{R}, w \in \mathbb{R}_+, wx - yz > 0 \right\},$$

rozklad $l = \widetilde{g}h$ na množině

$$\widetilde{G}G := \{\widetilde{g}h \mid \widetilde{g} \in \widetilde{G}, h \in G\} = \left\{ \begin{pmatrix} x & y \\ z & w \end{pmatrix} | y, z, w \in \mathbb{R}, x \in \mathbb{R}_+, wx - yz > 0 \right\}$$

a rozklad $l = g\widetilde{h} = \widetilde{g}h$ na $G\widetilde{G} \cap \widetilde{G}G \subset D$.

Tomuto problemu se (mimo jiné) budu dále věnovat.

[1] Při zachování značení z předchozí kapitoly.

[2] V souvislosti s jednoduchou souvislostí a její souvislostí se souvislostí provádím pátrání.

[3] Pro množiny v $\mathbb{R}^2$ vím, že to znamená „nemít díry“.

Literatura

[1] Jean Dieudonné: Éléments d'Analyse, Tome 3, Gauthier–Villars, Paris 1970

[2] Shoshichi Kobayashi & Katsumi Nomizu: Foundations of Differential Geometry, Vol. 1, Interscience Publishers, New York London 1963, (Ruský překlad: Nauka, Moskva 1981)

[3] Frank W. Warner: Foundations of Differentiable Manifolds and Lie Groups, Springer-Verlag, New York Berlin Heidelberg Tokyo 1983 (Ruský překlad: Mir, Moskva 1987)

[4] Libor Šnobl & Ladislav Hlavatý: Classification of 6-dimensional real Drinfeld doubles, math.QA/0202210

[5] C. Klimčík: Poisson-Lie T-duality, hep-th/9509095

[6] C. Klimčík & P. Ševera: Dual Non-Abelian Duality and the Drinfeld Double, hep-th/9502122

[7] Vladimír Souček: Representace Lieových grup a algeber, http://www.karlin.mff.cuni.cz/~soucek/semestr1/lalg1.ps

[8] Claude C. Chevalley: The Algebraic Theory of Spinors, Columbia University Press, New York 1955

[9] Saunders Mac Lane & Garrett Birkhoff: Algebra, ALFA, Bratislava 1973

[10] Jan Mareš: ALGEBRA, Úvod do obecné algebry, Vydavatelství ČVUT, Praha 1999

[11] Fernando Falceto & Krzysztof Gawędzki: Lattice Wess-Zumino-Witten Model and Quantum Groups, hep-th/9209076

[12] A. Yu. Alekseev & A. Z. Malkin: Symplectic Stuctures Associated to Lie-Poisson Groups, hep-th/9303038