

České vysoké učení technické v Praze
Fakulta jaderná a fyzikálně inženýrská

Diplomová práce

2007

Emil Doležal

České vysoké učení technické v Praze
Fakulta jaderná a fyzikálně inženýrská

Studium korelačních vlastností lidského EEG signálu

Emil Doležal

Katedra fyziky

Akademický rok: 2006/2007

Školitel: Prof. RNDr. Petr Šeba, DrSc.

Poděkování

Rád bych poděkoval prof. RNDr. Petru Šebovi, DrSc. za poskytnuté konzultace, cenné rady, připomínky a v neposlední řadě za přátelské jednání, se kterým mě vedl.

Prohlášení

Prohlašuji, že jsem svou diplomovou práci vypracoval samostatně a použil jsem pouze podklady (literaturu, projekty, SW atd.) uvedené v příloženém seznamu.

Nemám závažný důvod proti užití tohoto školního díla ve smyslu § 60 Zákona č. 121/2000 Sb., o právu autorském, o právech souvisejících s právem autorským a o změně některých zákonů (autorský zákon).

V Praze dne

.....
podpis

Název práce: Studium korelačních vlastností lidského EEG signálu
Autor: Emil Doležal
Obor: Matematické inženýrství
Vedoucí práce: Prof. RNDr. Petr Šeba, DrSc.
Abstrakt: V teoretické první části se zabýváme spektrální hustotou souboru kovariančních matic v závislosti na výkonovém spektru odpovídajícího signálu. Bílý šum vede k Marchenko-Pasturově formuli. Naším cílem je odvození spektrální hustoty pro barevný šum. V další části použijeme teorii náhodných matic k nalezení univerzálních vlastností lidského EEG, které nezávisí na subjektu, jenž je studován. Ukážeme, že EEG signál vypadá jako barevný šum jenom na malých časových úsecích. Dále zkonstruujeme vyšší spektrální charakteristiky, jmenovitě level spacing a number variance a porovnáme je s teoretickými předpověďmi. Největší odchylky předpovězených a naměřených charakteristik se objeví přesně v okamžicích, které odpovídají dobře definovaným událostem v mozku. V této práci se zabýváme zrakovými a motorickými evokovanými potenciály.
Klíčová slova: Teorie náhodných matic, spektrální hustota, level spacing, number variance, EEG, evokované potenciály.

Title: The study of correlation properties of human EEG signal
Author: Emil Doležal
Abstract: In theoretical first part we study the dependence of the spectral density of the covariance matrix ensemble on the power spectrum of the underlying multivariate signal. The white noise signal leads to the celebrated Marchenko-Pastur formula. We demonstrate results for some colored noise signals. In second part we use random matrix theory to find the universal subject-independent properties of human EEG and show that EEG signal looks like coloured noise in short time scales. Next we construct higher spectral characteristics, namely level spacing and number variance, and compare them with their theoretical predictions. The biggest differences of predicted and measured characteristics appear exactly at the time lags corresponding to well-defined events in the brain. We are dealing with the visual and motor evoked response data in this study.
Keywords: Random matrix theory, spectral density, level spacing, number variance, EEG, evoked response.

Obsah

Úvod	6
1 Spektrální analýza barevného šumu	7
1.1 Konstrukce korelačních matic	8
1.2 Marchenko-Pasturova předpověď rozdělení vlastních čísel	8
1.3 Frekvenční analýza časových řad	9
1.4 Spektrální hustota korelačních matic obecného barevného šumu . . .	11
1.5 Zobecněný bílý šum	13
1.6 Speciální případ barevného šumu	16
2 Analýza lidského elektroencefalogramu	20
2.1 Měření EEG	20
2.2 Frekvenční analýza	22
2.3 Hustota vlastních čísel korelačních matic	23
3 Vlastnosti spektra korelačních matic EEG	26
3.1 Unfoldované spektrum	27
3.2 Rozdělovací funkce vzdáleností mezi nejbližšími sousedy	29
3.3 Rozptyl počtu vlastních čísel	30
3.4 Časový vývoj EEG signálu	33
4 EEG signál	37
4.1 Závěr	38
Literatura	40

Úvod

Mozek je asi nejsložitější a nejdůležitější orgán v lidském těle. Svou činností řídí všechny ostatní části organismu. Přes velké úsilí lékařů a vědců z jiných oborů, není jeho popis zdaleka úplný. Procesy, které v něm probíhají, jsou velmi komplikované. Na první pohled se zdají být dokonce chaotické a neuspořádané.

Mozek patří mezi komplexní systémy. Jejich charakteristickým rysem je složitost, díky které vypadají zvnějšku chaoticky, ale ve skutečnosti nejsou. Detailní znalost interakce mezi stavebními kameny komplexních systémů ještě nezaručuje pochopení chování celého objektu. Teorie náhodných matic poskytuje nástroje ke zkoumání a klasifikování takových systémů. Jedná se o disciplínu, která se vyvíjela hlavně v 50. a 60. letech 20. století. Mezi její zakladatele a průkopníky patřili Wigner, Dyson, Mehta a další. Původně měla přinést jistý řád do popisu spekter složitých atomových jader. Později našla uplatnění v oboru nazývaném kvantový chaos, jenž se zabývá systémy, které jsou z hlediska klasické fyziky chaotické a popisují se kvantovou mechanikou (viz [13]). Dnes se teorie náhodných matic používá téměř ve všech oblastech fyziky (např. [16], [17] a [4]).

Elektromagnetická aktivita mozku se měří elektrodami, rozmístěnými na povrchu lebky. Hlavním zdrojem aktivity jsou nejvyšší vrstvy koncového mozku (kortexu), obsahující neurony. Vyprodukované signály se rozdělují do několika typů - podle umístění zdroje, intenzity a frekvenční charakteristiky.

Součinností neuronů vzniká střídavé napětí s frekvencí v rozsahu 2-50 Hz. Vlastnosti povrchu a obsahu lebky umožňují bezproblémové šíření jen určitým vlnám. Často dochází k tlumení nebo úplnému pohlcení vln. Ve výsledku vypadá signál naměřený elektrodami jako barevný šum, kterým se budeme zabývat v první kapitole. Hlavním cílem zde bude odvození spektrální hustoty korelačních matic, vytvořených z barevného šumu. Ve druhé kapitole nejprve popíšeme měření a zpracování lidského EEG a následně porovnáme výsledky z první kapitoly s naměřenými hodnotami. Třetí kapitola bude věnována dalším spektrálním charakteristikám korelačních matic. V poslední kapitole shrneme analýzu EEG signálu.

Kapitola 1

Spektrální analýza barevného šumu

Prostor kolem nás je vyplněn vlněním rozličné povahy. Existuje mnoho cest vedoucích ke vzniku vln. Jmenujme alespoň některé. Chvěním materiálů vznikají vlny zvukové (princip hudebních nástrojů). Při kmitání molekul nebo atomů v krystalické mřížce se uvolňuje tepelné záření. Zrychlený pohyb nabitých částic je zdrojem elektromagnetického vlnění. Nehledě na typ zdroje můžeme každé vlně přisoudit amplitudu, frekvenci a rychlost šíření.

Vzhledem k různé povaze vlnění existuje také pestrá paleta detektorů, konstruovaných k měření konkrétních druhů vln. Detektory periodicky měří hodnotu jisté fyzikální veličiny (např. napětí). Jejich výstupem jsou proto časové řady.

Střetnou-li se vlny na jednom místě, dochází k jejich skládání (superpozici). Umístíme-li do tohoto místa detektor, nedostaneme již informaci o jednotlivých vlnách, ale pouze o jejich superpozici. Frekvenčním rozkladem časových řad, zaznamenaných detektorem, můžeme alespoň určit zastoupení signálu o daném kmitočtu.

Předpokládejme dále, že signál je náhodný, Gaussovsky rozdělený, se střední hodnotou rovnou nule. Jsou-li v jeho frekvenčním rozkladu zastoupeny všechny frekvence a přispívají-li k celkovému výkonu přibližně stejně, mluvíme v souvislosti s přicházejícím vlněním o tzv. bílém šumu. Nepřispívají-li všechny frekvence k celkovému výkonu rovnoměrně, budeme vlnění nazývat barevný šum. Přesná definice bude zmíněna později.

Data získaná z jednoho detektoru většinou nejsou dostatečná k analýze měřeného signálu. Z tohoto důvodu se do zkoumané oblasti umísťuje celá sada stejných detektorů. Naměřené časové řady je možné rozdělit na okénka předepsané délky. Z údajů v okénkách lze následně vytvořit korelační matice a zkoumat jejich vlastní čísla. V případě, že frekvenční analýza dat ze všech detektorů ukazuje na bílý šum, předpovídá teorie vybudovaná Pasturem a Marchenkem [3], za jistých okolností, tvar rozdělovací funkce vlastních čísel. Cílem této kapitoly je rozšířit předpověď o tvaru rozdělovací funkce bílého šumu na barevný šum.

1.1 Konstrukce korelačních matic

Uvažujme systém M detektorů poskytující M časových řad $\{x^i\}_{i=1}^M$. Dále předpokládejme, že všechna měřidla zaznamenala N hodnot.

Prvním krokem při zpracování dat je rozdělení časových řad na okénka. Tento krok je velmi důležitý. Správná volba počtu měření n v jednom okénku ovlivňuje celou další analýzu. Z následujících úvah bude zřejmé, že n musí být alespoň stejně velké jako M , jinak bychom s jistotou dostali singulární korelační matice. Na druhé straně, je-li n srovnatelné s N , nemůžeme z výsledků dosažených pro jednotlivá okénka říci, ke které události se vztahují (v jednom okénku může proběhnout více událostí).

Časovou řadu x^i je zvykem přeskálovat tak, aby platilo

$$\sum_{j=n_1}^{n_2} x_j^i = 0, \quad \sum_{j=n_1}^{n_2} (x_j^i)^2 = 1, \quad (1.1)$$

kde n_1, n_2 určují počátek a délku okénka $n = n_2 - n_1$. Této úpravě řad se říká whitening - vybělení.

Nyní definujme prvek $c_{i,j}$ korelační matice vztahem

$$c_{i,j} = \sum_{k=n_1}^{n_2} x_k^i x_k^j. \quad (1.2)$$

Označíme-li symbolem x matici $M \times n$ obsahující data z časových řad v řádcích, můžeme předchozí definici zapsat přehledněji jako $c = xx^T$.

1.2 Marchenko-Pasturova předpověď rozdělení vlastních čísel

Nechť M je i nadále počet detektorů, které používáme při analýze. Zvolíme-li délku měření N nepříliš velkou a okénko dostatečně široké vzhledem k celému souboru, poskytují korelační matice pro jednotlivé vzorky dobrou aproximaci korelační matice pro celý soubor. Nicméně, necháme-li N růst do nekonečna a šířka okénka n zůstane konečná, zjistíme, že výše zmiňovaný vztah již nebude platit.

Za předpokladu, že prvky matice x jsou nezávislé a identicky rozdělené kolem nuly se směrodatnou odchylkou σ , poskytuje Marchenko-Pasturův teorém (viz [3]) vzorec pro hustotu vlastních čísel korelační matice xx^T příslušející k jednomu okénku v limitním případě

$$M \rightarrow \infty, \quad \frac{M}{n} \rightarrow p.$$

V závislosti na volbě parametrů σ a p má spektrální hustota tvar

$$\varrho(\lambda) = \begin{cases} \frac{1}{2\pi\lambda p\sigma^2} \sqrt{(b-\lambda)(\lambda-a)} & a \leq \lambda \leq b \\ 0 & \lambda < a \vee \lambda > b \end{cases}, \quad (1.3)$$

kde $a = \sigma^2(1 - \sqrt{p})^2$, $b = \sigma^2(1 + \sqrt{p})^2$. Při $p > 1$ se ve funkci $\varrho(\lambda)$ dodatečně objeví Diracova delta funkce (o velikosti $1 - \frac{1}{p}$ v bodě 0). Existence delta funkce v hustotě vlastních čísel je zřejmá (viz odstavec 1.1), uvážíme-li fakt, že v tomto případě dostáváme singulární korelační matice.

V dalších odstavcích zjistíme, že rozdělení (1.3) je do značné míry univerzální. Ukážeme, že je speciálním případem obecnějšího rozdělení vlastních čísel, závislého na frekvenčním rozkladu časových řad, z nichž je vytvořena příslušná korelační matice.

1.3 Frekvenční analýza časových řad

Důležitou vlastností měřícího přístroje, periodicky zaznamenávajícího určitou fyzikální veličinu, je vzorkovací frekvence f_v . Udává, jak často přístroj ukládá naměřenou hodnotu. Nepřímo také ovlivňuje rozsah frekvencí pro frekvenční analýzu.

Časovou řadu si můžeme představit jako prvek vektorového prostoru $\mathbb{R}^N$. Podobně data v jednotlivých okénkách této řady jako vektory v prostoru $\mathbb{R}^n$. Zavedená interpretace umožňuje podrobit časovou řadu diskrétní Fourierově transformaci.

Diskrétní Fourierova transformace (DFT) je definována na komplexních prostorech formulemi (složky vektorů číslujeme od 0)

$$X_k = \frac{1}{\sqrt{N}} \sum_{j=0}^{N-1} x_j e^{-i\omega_k t_j}, \quad x_j = \frac{1}{\sqrt{N}} \sum_{k=0}^{N-1} X_k e^{i\omega_j t_k}, \quad (1.4)$$

kde úhlová frekvence ω_k a čas t_j jsou určeny vzorkovací frekvencí

$$\omega_k = k \frac{2\pi}{N} f_v = k \frac{2\pi}{TN}, \quad t_j = \frac{j}{f_v} = jT, \quad f_v = \frac{1}{T}, \quad f_k = \frac{\omega_k}{2\pi}, \quad (1.5)$$

T je časový interval mezi dvěma měřeními.

Transformační vztahy (1.4) je možné zapsat přehledně v operátorovém formalismu. Nechť U označuje operátor definovaný prvním výrazem v (1.4). Tento operátor je unitární, zachovává tedy standardní skalární součin $\langle, \rangle$. Inverze U^{-1} je vyjádřena druhou formulí v (1.4).

Zastavme se u několika významných vlastností operátoru diskrétní Fourierovy transformace U .

Reálnost vektoru x umožňuje přepis definice inverzního operátoru U^{-1} na tvar

$$x_j = \frac{1}{\sqrt{N}} \sum_{k=0}^{N-1} \operatorname{Re}(X_k) \sin \omega_j t_k - \operatorname{Im}(X_k) \cos \omega_j t_k, \quad (1.6)$$

ze kterého je vidět, že reálné a imaginární části složek vektoru X_k představují v jistém smyslu amplitudy vln (nemusí však být kladné).

Definici korelační matice (1.2) můžeme pomocí skalárního součinu zapsat jako rovnost

$$c_{l,m} = \langle x^l, x^m \rangle_{\mathbb{R}^N} = \langle X^l, X^m \rangle_{\mathbb{C}^N}, \quad (1.7)$$

kde indexy $\mathbb{R}^N$ a $\mathbb{C}^N$ určují prostor, na kterém skalární součin počítáme.

Operátor U , zúžený na reálný prostor $\mathbb{R}^N$, zobrazuje vektor $x \in \mathbb{R}^N$ na vektor $X \in \mathbb{C}^N$, který je obecně komplexní a jeho složky jsou navzájem závislé. Přesněji: platí vztah

$$X_i = \overline{X_{N-i}}, \quad 0 < i < N. \quad (1.8)$$

Velmi používanou charakteristikou při frekvenční analýze signálu je výkonové (power) spektrum. Jedná se o graf závislosti $|X_k|^2$ na odpovídající frekvenci f_k . Určuje příspěvky jednotlivých frekvencí k celkovému výkonu, který je přímo úměrný kvadrátu amplitud. Díky platnosti vztahu (1.8) je zbytečné kreslit power spektrum pro všechny frekvence f_k , proto se obvykle použije pouze prvních $\left\lfloor \frac{N}{2} \right\rfloor + 1$ složek rozkladu X_k (hranaté závorky značí celou část).

Některé vlastnosti vektoru X jsou pro naši další analýzu nežádoucí. Pokusme se definovat jiný lineární operátor $\tilde{U}$, zobrazující $\mathbb{R}^N \rightarrow \mathbb{R}^N$ tak, aby složky obrazu $\tilde{X}$ vektoru x stále určovaly frekvenční rozklad (1.6) a aby skalární součin zůstal zachován.

Definujeme působení operátoru $\tilde{U}$ na vektor x pomocí vektoru $X = Ux$ vztahem

$$\tilde{X}_i = \sqrt{2} \cdot \begin{cases} \operatorname{Re}(X_i) & 0 < i < \left\lfloor \frac{N}{2} \right\rfloor \\ \operatorname{Im}(X_{N-i}) & \left\lfloor \frac{N}{2} \right\rfloor < i < N \end{cases}. \quad (1.9)$$

Zbývající dva prvky definujeme samostatně, protože jejich význam a vlastnosti se od ostatních liší. První prvek X_0 je vždy reálný a je definován součtem řady $\{x_i\}$. Pro sudé N je prvek $X_{\frac{N}{2}}$ také reálný a označuje se "Nyquist component". Obě

naposledy zmíněné složky vektoru X jsou pro frekvenční rozklad nedůležité, jelikož nehrají roli amplitudy vlny o jisté frekvenci jako ostatní složky. Definujeme $\tilde{X}_0 = X_0$ a v závislosti na N , buď $\tilde{X}_{\frac{N}{2}} = X_{\frac{N}{2}}$ pro sudé N , nebo $\tilde{X}_{\frac{N-1}{2}} = \sqrt{2} \operatorname{Re} \left(X_{\frac{N-1}{2}} \right)$,

je-li N liché. Snadno ověříme, že takto definovaný operátor má všechny požadované vlastnosti.

Podobně jako v odstavci 1.1 můžeme definici korelační matice přehledně zapsat rovností

$$c = xx^T = XX^* = \tilde{X}\tilde{X}^T, \quad (1.10)$$

kde x je matice rozměru $M \times n$. Řádky matice X , resp. $\tilde{X}$ jsou obrazem řádků matice x při zobrazení U , resp. $\tilde{U}$.

Graf závislosti $\tilde{X}_k^2$ na frekvenci f_k , budeme v dalších odstavcích nazývat modifikované power spektrum. Jeho význam je podobný jako u power spektra a liší se tím, že rozlišuje mezi sudou a lichou částí vln (viz rozklad 1.6).

1.4 Spektrální hustota korelačních matic obecného barevného šumu

V předchozím odstavci jsme popsali nástroje, kterými je možné odlišit barevný šum od bílého šumu. Následující definice jsou založeny na tvaru power spektra.

1.4.1 Definice (Bílý šum). Mějme náhodnou časovou řadu $\{x_j\}_{j=0}^{N-1}$, jejíž elementy jsou Gaussovsky rozdělené kolem nuly. Je-li power spektrum příslušné k řadě $\{x_j\}_{j=0}^{N-1}$ konstantní, nazýváme odpovídající signál (Gaussovským) bílým šumem.

1.4.2 Definice (Barevný šum). Mějme náhodnou časovou řadu $\{x_j\}_{j=0}^{N-1}$, jejíž elementy jsou Gaussovsky rozdělené kolem nuly. Není-li power spektrum příslušné k řadě $\{x_j\}_{j=0}^{N-1}$ konstantní, nazýváme odpovídající signál (Gaussovským) barevným šumem.

V důsledku nulovosti středních hodnot složek řady $\{x_j\}_{j=0}^{N-1}$ jsou také střední hodnoty složek rozkladu $\{\tilde{X}_k\}_{k=0}^{N-1}$ časové řady $\{x_j\}_{j=0}^{N-1}$ nulové (viz. definiční vztahy 1.4 a 1.9). Dále pro členy diskrétního Fourierova rozkladu $\{X_k\}_{k=0}^{N-1}$ platí rovnosti

$$\langle (\operatorname{Re}(X_k))^2 \rangle = \langle (\operatorname{Im}(X_{N-k}))^2 \rangle, \quad \text{pro} \quad \left[\frac{N}{2} \right] < k < N, \quad (1.11)$$

neboli

$$\left\langle \left(\tilde{X}_k \right)^2 \right\rangle = \left\langle \left(\tilde{X}_{N-k} \right)^2 \right\rangle, \quad \text{pro} \quad \left[\frac{N}{2} \right] < k < N, \quad (1.12)$$

kde lomené závorky značí střední hodnotu.

Analogické definice k 1.4.1 a 1.4.2 bychom mohli formulovat na základě modifikovaného výkonového spektra, které by bylo symetrické v souladu s rovností 1.12.

Z odstavce 1.2 víme, jak bude vypadat hustota vlastních čísel $\varrho(\lambda)$ korelačních matic xx^T , obsahují-li matice x v řádcích bílý šum. K určení spektrální hustoty korelačních matic odpovídajících barevnému šumu použijeme Větu formulovanou Girkem (viz [19]).

1.4.3 Věta. Buď A náhodná matice $n \times [cn]$ s nezávislými elementy, které mají nulovou střední hodnotu a splňují podmínku

$$n\text{Var}(A_{ij}) < B, \quad (1.13)$$

kde Var znamená rozptyl a $B < \infty$. Předpokládejme, že funkce $v_n: \langle 0, 1 \rangle \times \langle 0, c \rangle \rightarrow \mathbb{R}$ definované jako

$$v_n(x, y) = n\text{Var}(A_{ij}), \quad \frac{i}{n} \leq x \leq \frac{i+1}{n}, \quad \frac{j}{n} \leq y \leq \frac{j+1}{n} \quad (1.14)$$

stejněměrně konvergují k limitní funkci $v(x, y)$. Potom limitní rozdělovací funkce vlastních čísel $\varrho(\lambda)$ korelační matice AA^T existuje a splňuje rovnici:

$$\int_0^\infty \frac{\varrho(\lambda) d\lambda}{1+t\lambda} = \int_0^1 u(x, t) dx, \quad (1.15)$$

kde funkce $u(x, t)$ je určena rovnicí:

$$u(x, t) = \frac{1}{1+t \int_0^c \frac{v(x, y) dy}{1+t \int_0^1 u(z, t) v(z, y) dz}}. \quad (1.16)$$

Řešení rovnice (1.16) existuje a je jednoznačné na třídě funkcí $u(x, t) \geq 0$, analytických v t a spojitých v $x \in \langle 0, 1 \rangle$.

Nechť matice $\tilde{X}$ je obrazem matice x při zobrazení $\tilde{U}$ (přesněji: řádky matice $\tilde{X}$ jsou obrazem řádků matice x , viz odstavec 1.3). Odpovídají-li řádky matice x , o rozměrech $M \times n$, barevnému šumu, zvolíme $\tilde{X}$ jako matici A ve Větě 1.4.3.

Ihned vidíme, že $c = \frac{n}{M}$. Splnění podmínky (1.13) nebudeme nyní řešit, vyplne totiž z vlastností konkrétních posloupností $\{v_n\}$.

Modifikované výkonové spektrum, určující rozptyl složek v řádku matice $\tilde{X}$, je pro všechny řádky stejné. Funkce $v(x, y)$ díky tomu nebude záviset na prvním argumentu, tedy:

$$v(x, y) = v(y). \quad (1.17)$$

Využijeme-li vztahu (1.17), zjistíme na základě definice (1.16), že ani funkce $u(x, t)$ nezávisí na prvním argumentu.

Nakonec se podívejme na rovnice (1.15) a (1.16). Jejich tvar se také výrazně zjednoduší. V každé z nich zmizí jeden integrál a dostanou tvar

$$\int_0^\infty \frac{\varrho(\lambda) d\lambda}{1+t\lambda} = u(t) \quad (1.18)$$

a

$$u(t) = \frac{1}{1+t \int_0^c \frac{v(y) dy}{1+tu(t)v(y)}}. \quad (1.19)$$

Principiálně jsme našli hustotu vlastních čísel libovolných korelačních matic $\tilde{X}\tilde{X}^T$, odpovídajících barevnému šumu. Řešení rovnic (1.18) a (1.19) však není triviální. V dalších odstavcích se pokusíme najít předpis pro hustotu $\varrho(\lambda)$, v případě, že funkce $v(y)$ je schodovitá (nespojité funkce tvořená konstantními bloky různé výšky).

1.5 Zobecněný bílý šum

Představme si situaci, kdy do jednoho místa přichází signál z několika zdrojů. Každý zdroj produkuje ve svém frekvenčním pásmu změť vln náhodných fází. Pro všechny vysílače je společný pouze průměrný výkon, přenášený jednotlivými vlnami. Měříme-li přicházející signál M detektory, dostaneme časové řady $\{x_j^i\}_{i=1, j=0}^{i=M, j=n-1}$. Zobrazíme-li tyto řady diskrétní Fourierovou transformací a následně zkonstruujeme výkonové spektrum, bude příslušná funkce $v(y)$ (viz 1.17) po částech konstantní, podobně jako funkce na obrázku 1.1 ($v(y)$ bude stejná pro všech M řad!).

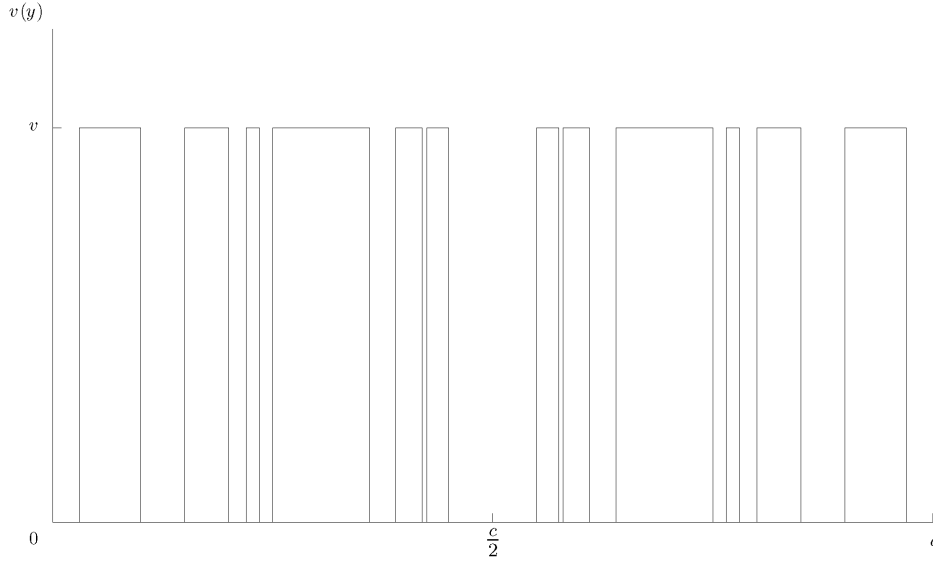
Z M časových řad $\{x_j^i\}_{i=1, j=0}^{i=M, j=n-1}$ umístěných do řádků vytvoříme, stejně jako v odstavci 1.1, matici x o rozměrech $M \times n$.

Pro určení hustoty vlastních čísel $\varrho(\lambda)$ korelačních matic xx^T jsou podstatné pouze dva údaje o tvaru funkce $v(y)$ diskutovaného typu. Součet délek intervalů d , na kterých $v(y)$ nabývá nenulové hodnoty, a funkční hodnota v na těchto intervalech. Není složité se přesvědčit, že řešení rovnice (1.19) nezávisí na umístění intervalů, na nichž je $v(y)$ konstantně rovna v .

Dosazením funkce $v(y)$, podobného tvaru jako je na obrázku 1.1, do výrazu (1.19), nalezneme předpis pro funkci $u(t)$

$$u(t) = \frac{-[1+tv(d-1)] \pm \sqrt{[1+tv(d-1)]^2 + 4tv}}{2tv}, \quad (1.20)$$

který je prozatím nejednoznačný. Věta 1.4.3 předpovídá řešení (1.19) jednoznačně na třídě analytických funkcí, pro něž platí $u(t) \geq 0$. Znaménko před odmocninou ve vzorci (1.20) proto bude kladné.

Obrázek 1.1: Graf funkce $v(y)$ (viz 1.17) pro zobecněný bílý šum.

Integrální rovnici (1.18) převedeme na tvar

$$\int_0^\infty \frac{\varrho(\lambda) d\lambda}{y + \lambda} = \frac{u\left(\frac{1}{y}\right)}{y} = \tilde{u}(y), \quad (1.21)$$

který odpovídá Stieltjesově transformaci (viz [18]).

Operátor zobecněné Stieltjesovy transformace je definován vztahem

$$G(z) = \int_0^\infty \frac{F(y) dy}{(y + z)^p}, \quad |\arg z| < \pi, \quad (1.22)$$

kde p je kladný reálný parametr. Předpokládá se, že $F(y)$ je libovolná zobecněná funkce, která je definována na kladné ose a pro kterou existuje reálné číslo α takové,

že výraz $\left| \int_{y_1}^{y_2} y^{\alpha-p} F(y) dy \right|$ je stejnoměrně omezený pro libovolné $0 < y_1 < y_2$ a zároveň

$0 < \alpha < p$. Obraz $G(z)$ je potom holomorfní na $|\arg z| < \pi$ a existuje $\beta > 0$ takové, že limita z absolutní hodnoty $|z^\beta G(z)|$ v nekonečnu je konečná.

Alternativně se na zobrazení (1.22) pohlíží jako na násobnou Laplaceovu transformaci. Jedna z možností, jak definovat inverzní operátor, je proto využití násobného operátoru inverzní Laplaceovy transformace. Jiný způsob nabízí již zmiňovaný článek [18], který dokazuje, že inverzní transformaci k (1.22) lze formulovat pomocí

jedno-dimenzionálního integrálu. Předpis pro přechod od G k F je zde uváděn ve formě

$$F(y) = -\frac{1}{2\pi i} y^p \int_{\mathcal{C}} \frac{G'(yw)dw}{(1+w)^{1-p}}, \quad (1.23)$$

kde $\mathcal{C}$ je křivka v komplexním prostoru, mající začátek i konec v bodě -1 a obíhající počátek ve směru hodinových ručiček.

Srovnáme-li rovnici (1.21), kterou se snažíme vyřešit, a obecný tvar Stieltjesovy transformace, zjistíme, že nás zajímá případ, kdy parametr p je roven 1. V definici (1.23) můžeme snadno provést integraci, zvolíme-li parametr $p = 1$, díky platnosti Cauchyho teorému, který poskytuje správné řešení

$$F(y) = \lim_{\varepsilon \rightarrow 0^+} \frac{1}{2\pi i} (G(-y - i\varepsilon) - G(-y + i\varepsilon)). \quad (1.24)$$

pro $y > 0$.

Funkci $\tilde{u}(t)$ máme určenou na kladné části reálné osy pomocí analytické funkce $u(t)$ (viz (1.21)). Chceme-li na ni použít inverzní operátor (1.24), musíme ji nejprve holomorfně dodefinovat na celém $|\arg t| < \pi$. Holomorfní podobu funkce $\tilde{u}(t)$ můžeme zapsat ve tvaru

$$\tilde{u}(t) = \frac{-1 - \frac{v(d-1)}{t} + \sqrt{\left[1 + \frac{v(d-1)}{t}\right]^2 + \frac{4v}{t}}}{2v} \quad (1.25)$$

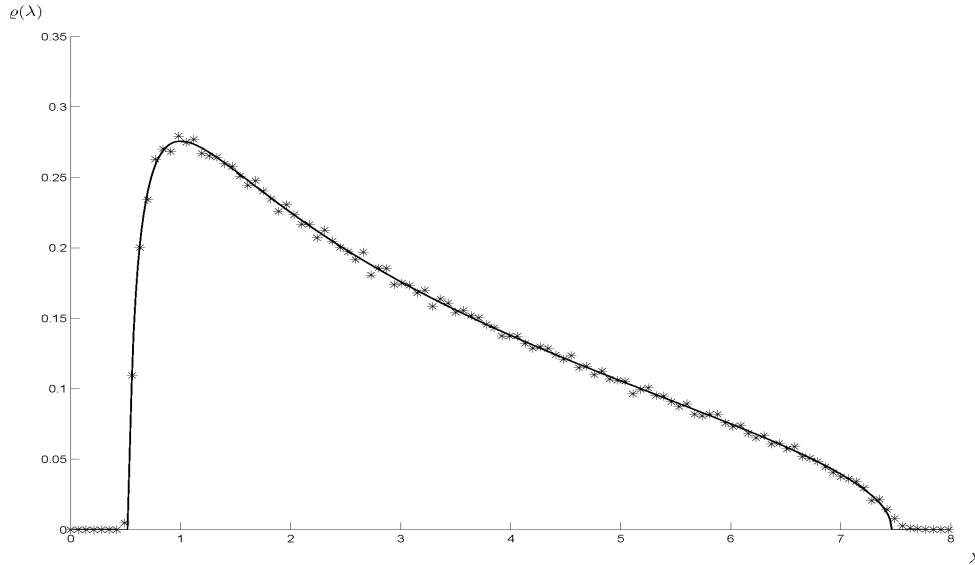
s tím, že hodnota $\tilde{u}(t)$ v bodě 0 je rovna $\frac{1}{v(d-1)}$, je-li $d \neq 1$. Pro $d = 1$ jde limita $\tilde{u}(t)$ zprava v bodě 0 do nekonečna.

Hustotu vlastních čísel $\varrho(\lambda)$ nalezneme jako limitu ve formuli (1.24) při volbě $G = \tilde{u}$ a $F = \varrho$. Výsledný vzorec

$$\varrho(\lambda) = \begin{cases} \frac{1}{2\pi\lambda v} \sqrt{(\lambda_1 - \lambda)(\lambda - \lambda_2)} & \lambda_1 \leq \lambda \leq \lambda_2 \\ 0 & \lambda < \lambda_1 \vee \lambda > \lambda_2 \end{cases}, \quad (1.26)$$

kde $\lambda_{1,2} = v \left(1 \mp \sqrt{d}\right)^2$, je stejný jako v Pastur-Marchenkově předpovědi (1.3), včetně existence Diracovy delta funkce (o velikosti $1 - d$ v bodě 0) v případě, že $d < 1$. Důkaz spočívá v dosazení parametrů $d = \frac{1}{p}$ a $v = p\sigma^2$ do vzorce (1.26). Volba parametrů d a v přímo odpovídá předpokladům uvedeným odstavci 1.2.

Shoda obou výsledků je velmi zajímavá, zvláště, když si uvědomíme, že nalezená hustota není závislá na typu rozdělení elementů v matici x (implicitně jsme předpokládali Gaussovo).



Obrázek 1.2: Experimentální výsledky (hvězdičky)¹ proložené grafem funkce $\varrho(\lambda)$ při volbě parametrů $v = 1$ a $d = 3$.

Závěr: Hustota vlastních čísel korelační matice xx^T má tvar (1.26) (viz obrázek 1.2), který nezávisí na počtu zdrojů vln ani na jak vysokých frekvencích vysílají, důležitý je pouze součet šířek jednotlivých vysílacích pásem a tvar výkonového spektra. Rozdělení je nenulové pouze na intervalu určeném λ_1 a λ_2 .

1.6 Speciální případ barevného šumu

Na základě tvaru modifikovaného výkonového spektra libovolného barevného šumu můžeme stanovit rovnice, kterým musí hustota vlastních čísel korelačních matic vyhovovat. Obdržené rovnice se v obecném případě těžko řeší. Proto se je pokusme vyřešit alespoň v nejjednodušších případech.

V reálném experimentu vypadají funkce $v_n(y)$, definované formulí (1.14), jako schodovité funkce (viz odstavec 1.4), protože vyšetřované časové řady jsou konečné. Výkonové spektrum, jež určuje funkce $v_n(y)$, je v principu možné zpřesnit dvěma způsoby.

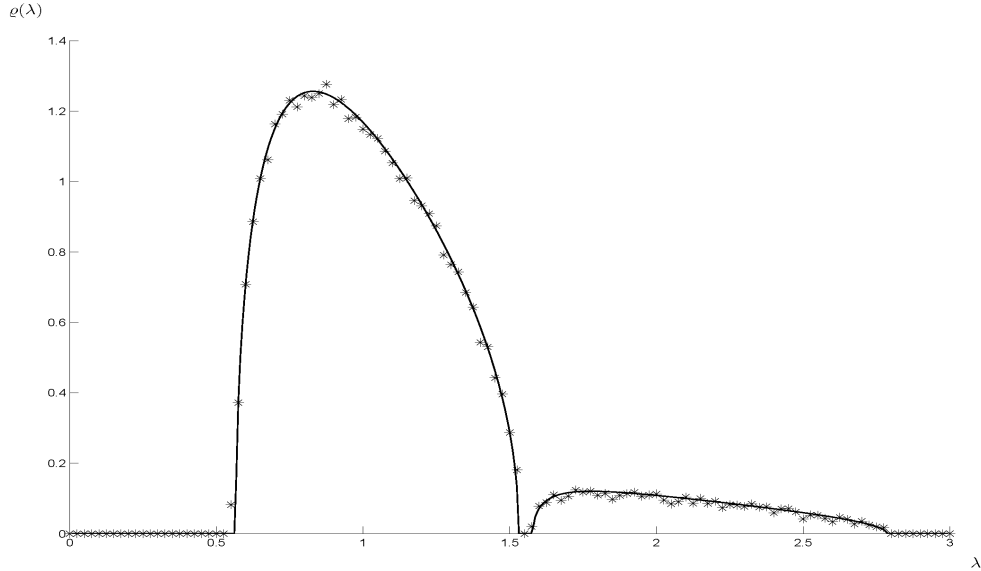
Prodloužení pozorovacího okénka je jedna z možností, která ovšem není příliš vhodná. Ve skutečnosti při ní spojujeme po sobě jdoucí okénka, která sama o sobě nesou dílčí informaci o studovaném systému za určitou dobu, což může vést k mylným závěrům o stavu probíhajícího procesu.

¹Experimentální výsledky byly získány zpracováním náhodných dat, generovaných počítačem při volbě parametrů $v = 1$ a $d = 3$.

Mnohem atraktivnější způsob zpřesnění výkonového spektra je zvyšování vzorkovací frekvence měřícího přístroje, protože délka pozorovacího okénka může zůstat stejná. Naneštěstí vzorkovací frekvence je základní vlastností měřidla, a proto ji obvykle vůbec nelze měnit, nebo pouze v omezeném rozsahu.

Spokojíme-li se s určitou přesností ve stanovení modifikovaného výkonového spektra, můžeme učinit předpoklad, že se zvyšováním vzorkovací frekvence se spektrum nezmění ve smyslu definice funkcí $v_n(y)$. Posloupnost $\{v_n(y)\}$ je potom konstantní a má za limitu schodovitou funkci.

Korektní odvození hustoty vlastních čísel $\varrho(\lambda)$ probírané v tomto odstavci je po formální stránce velmi složité, nebudeme proto uvádět přesné výpočty u každého kroku, spíše se budeme snažit, aby celkový algoritmus zůstal přehledný.



Obrázek 1.3: Experimentální výsledky (hvězdičky)² proložené grafem funkce $\varrho(\lambda)$ pro $K = 2$, $v = \left(1, \frac{1}{15}\right)$, $d = \left(\frac{1}{10}, 15\right)$.

Dosazením schodovité funkce $v(y)$ do integrálu ve výrazu (1.19) a užitím definice $\tilde{u}(t)$ (viz 1.21) získáme rovnost

$$t\tilde{u}(t) + \sum_{i=1}^K d_i - 1 = \sum_{i=1}^K \frac{d_i}{1 + v_i \tilde{u}(t)}, \quad (1.27)$$

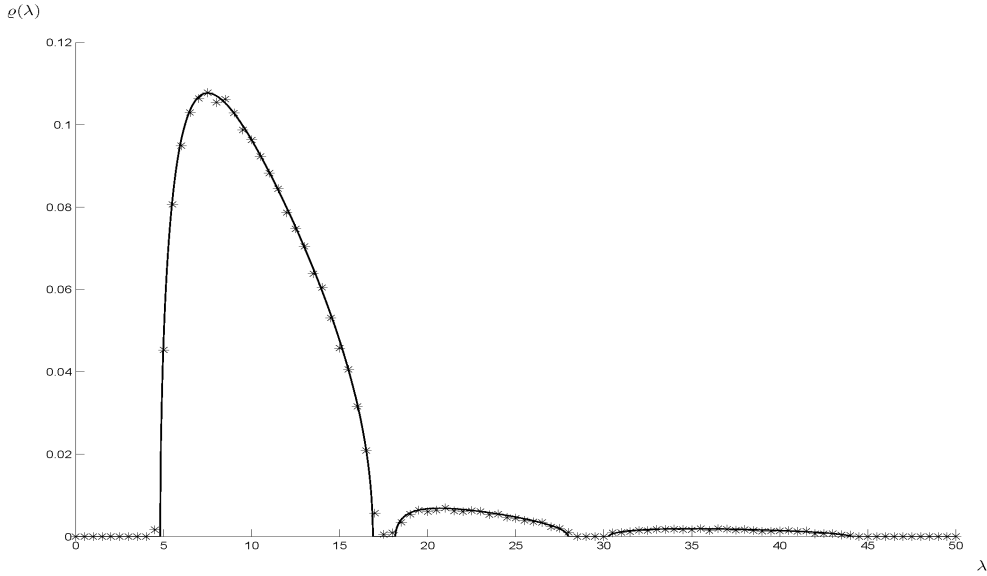
kde K je počet schodů ve funkci $v(y)$, d_i a v_i pak jejich výška a délka.

²Experimentální výsledky byly získány zpracováním náhodných dat generovaných počítačem pro $K = 2$, $v = \left(1, \frac{1}{15}\right)$, $d = \left(\frac{1}{10}, 15\right)$.

Řešení rovnice (1.27) vyústí v hledání kořenů polynomu $(K+1)$ -ho stupně v $\tilde{u}(t)$. Výsledný předpis pro $\tilde{u}(t)$, pokud existuje, je v závislosti na parametrech d_i a v_i velmi dlouhý. Z tohoto důvodu ho zde nebudeme uvádět.

Průběh funkce $\tilde{u}(t)$ není závislý na umístění schodů ve $v(y)$, tj. kdybychom zpřeházeli pořadí schodů ve $v(y)$ s tvarem $\tilde{u}(t)$ se nic nestane. Také spojovat schody o stejné výšce do jednoho širšího můžeme beztréstně.

Tvrzení Věty 1.4.3 zaručuje, že funkce $u(t)$ bude kladná na pozitivní reálné poloose a v důsledku definice (1.21) také $\tilde{u}(t)$. Pokud budeme chtít použít Stieltjesovu transformaci musíme navíc požadovat holomorfnost na $|\arg t| < \pi$, kterou zařídíme, podobně jako v odstavci 1.5, správným dodefinováním mimo kladnou reálnou poloosu.



Obrázek 1.4: Experimentální výsledky (hvězdičky)³ proložené grafem funkce $\varrho(\lambda)$ pro $K = 3$, $v = (1, 25, 12)$, $d = \left(10, \frac{1}{50}, \frac{1}{20}\right)$.

Hledanou hustotu vlastních čísel $\varrho(\lambda)$ pro barevný šum, narozdíl od zobecněného bílého šumu, nemůžeme zapsat jediným přehledným vzorcem. Pro ilustraci spočtíme případ, kdy

$$K = 2, \quad v = \left(1, \frac{1}{2}\right), \quad d = \left(\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right). \quad (1.28)$$

³Experimentální výsledky byly získány zpracováním náhodných dat generovaných počítačem pro $K = 3$, $v = (1, 25, 12)$, $d = \left(10, \frac{1}{50}, \frac{1}{20}\right)$.

Spektrální hustota potom vychází

$$\varrho(\lambda) = \sqrt{\frac{\left(-\sqrt[3]{-27\lambda - 8\lambda^3 + 36\lambda^2 + 27 + 3\sqrt{3}\sqrt{\lambda}\sqrt{54 - 16\lambda^3 + 72\lambda^2 - 81\lambda}} + 2\lambda - 3\right)^2}{8\pi^2\lambda\sqrt[3]{-27\lambda - 8\lambda^3 + 36\lambda^2 + 27 + 3\sqrt{3}\sqrt{\lambda}\sqrt{54 - 16\lambda^3 + 72\lambda^2 - 81\lambda}}}}. \quad (1.29)$$

Grafy funkcí $\varrho(\lambda)$ ve dvou vybraných případech pro $K = 2$ a $K = 3$ jsou na obrázcích 1.3 a 1.4.

Závěr: Hustota vlastních čísel $\varrho(\lambda)$ korelačních matic xx^T v případě, kdy frekvenční rozklad signálů tvořících matici x odpovídá barevnému šumu, má podobný tvar jako je na obrázcích 1.3 a 1.4. Nezávisí na kmitočtu jednotlivých vysílacích pásem (pouze na jejich výkonu úměrnému v_i a šířce d_i), ani na jejich pořadí (viz obdobné úvahy o přehazování schodů ve funkci v). Rozdělení je nenulové pouze na některých intervalech.

Kapitola 2

Analýza lidského elektroencefalogramu

Mozek je složený převážně z gliových buněk, které jsou uvnitř, a neuronů, které pokrývají povrch. Obal neuronů je tvořen elektricky nabitou membránou. Elektrický potenciál membrány vzniká při metabolické přeměně látek dodávaných krví (glukóza a kyslík). Neurony jsou propojeny dvěma druhy výběžků, dendrity a neurity neboli axony. Navzájem spolu komunikují prostřednictvím "chemických posílů" neurotransmiterů čili mediatorů.

Biochemicko-elektrický signál je přijímán na membránách dendritů a somatu (těle) buněk. Po neuritu se šíří informace k jiným neuronům. Membránové potenciály jsou jednak pomalé, řádově desetiny Hz a rychlé, řádově desítky až stovky Hz. Pomalé nazýváme "stálé" ("standing"), rychlé nazýváme "hrotové" ("spiking"). Synchronizací především "standing" potenciálů vzniká elektroencefalogram (EEG).

V medicíně je analýza EEG velmi subjektivní. Výsledky se značně liší podle toho, kdo analýzu prováděl. Jakékoli "objektivní metody" jsou proto žádané a potřebné.

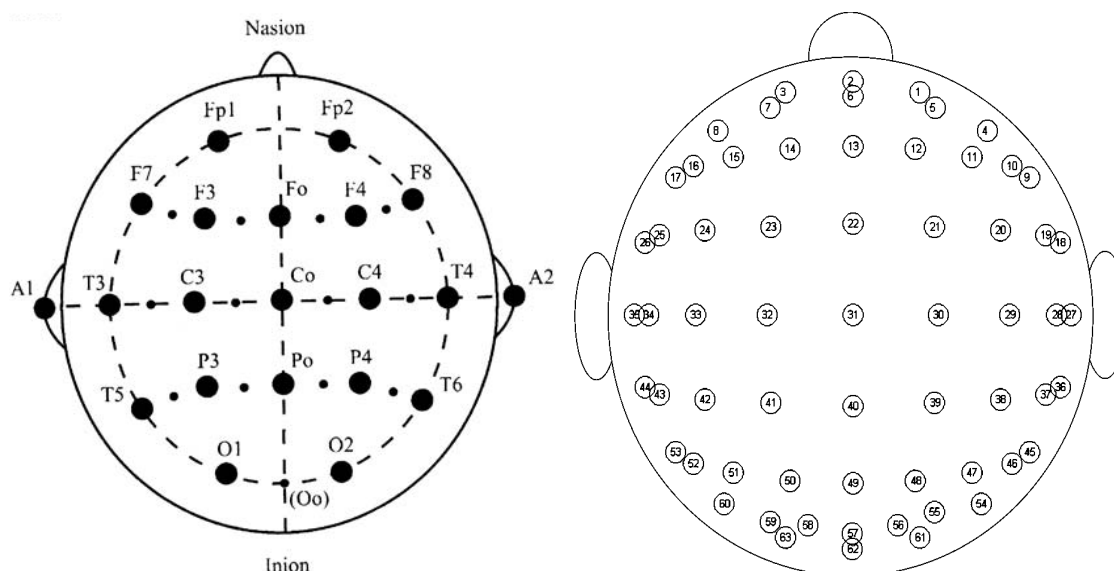
2.1 Měření EEG

Rozložení elektrod na hlavě není náhodné, řídí se jednoduchým systémem, který navrhl H. Jasper (viz [6]). Příklady možných zapojení jsou na obrázku 2.1.

Spojení mezi dvěma elektrodami je buď bipolární čili diferenční, kdy zesilovací kanál má na vstupu vždy dvě elektrody, nebo je spojení unipolární čili referenční, kdy k jedné elektrodě (Goldmannově) jsou ostatní připojeny přes určitý odpor. Pro zpracování EEG signálu na počítači se používá unipolární zapojení.

Nejčastěji se EEG měří ve dvou případech:

- Když předpokládáme, že je mozek v klidu a nepůsobí na něj žádné vnější vlivy. Výsledky takového měření budeme označovat jako klidové EEG.



Obrázek 2.1: Rozmístění elektrod na povrchu lebky s označením (očíslováním) jednotlivých elektrod.

- Když je mozek stimulován. Jeden z běžných experimentů se nazývá Reversal. Subjekt při něm sleduje obrazovku, kde je zobrazena černobílá šachovnice. Stimulace nastane, když se barva všech polí náhle invertuje. Podobným měřením se říká vyšetření evokovaných potenciálů. Výsledky budeme označovat jako stimulované EEG.

V prvním případě se provede jedno dlouhé měření (typicky 15-20 min) a naměřené hodnoty se dále nijak nediferencují. U evokovaných potenciálů se celé měření ještě rozdělí do epoch určených okamžikem, kdy došlo ke stimulaci.

Data v jednotlivých epochách můžeme považovat za výsledky stejného experimentu, provedeného několikrát po sobě. Nejjednodušší statistické zpracování spočívá ve zprůměrování signálů přes všechny epochy.

Kromě zamýšlených stimulací občas dochází k spontánním stimulacím (artefaktům), jako je mrknutí očí, polknutí, případně jiná svalová činnost, které je potřeba co nejvíce omezit. Naštěstí mají odezvy na takový podnět obvykle vyšší frekvenci a amplitudu, než mají odezvy na námi zvolený stimul. V datech je tedy snadno rozpoznáme a odpovídající epochy jednoduše vyřadíme.

Všechna měření, která budeme v dalším textu zmiňovat, byla prováděna na 64-kanálovém elektroencefalografu bez dodatečného frekvenčního filtru. Přístroj tlumí pouze velmi malé frekvence v rozsahu 0 – 0,01 Hz a velmi vysoké tj. > 150 Hz, u kterých se nepředpokládá, že jsou zdrojem normální činnosti mozku. Spojení mezi elektrodami bylo unipolární. Vzorkovací frekvence byla nastavena na 1024 Hz (maximální hodnota přístroje).

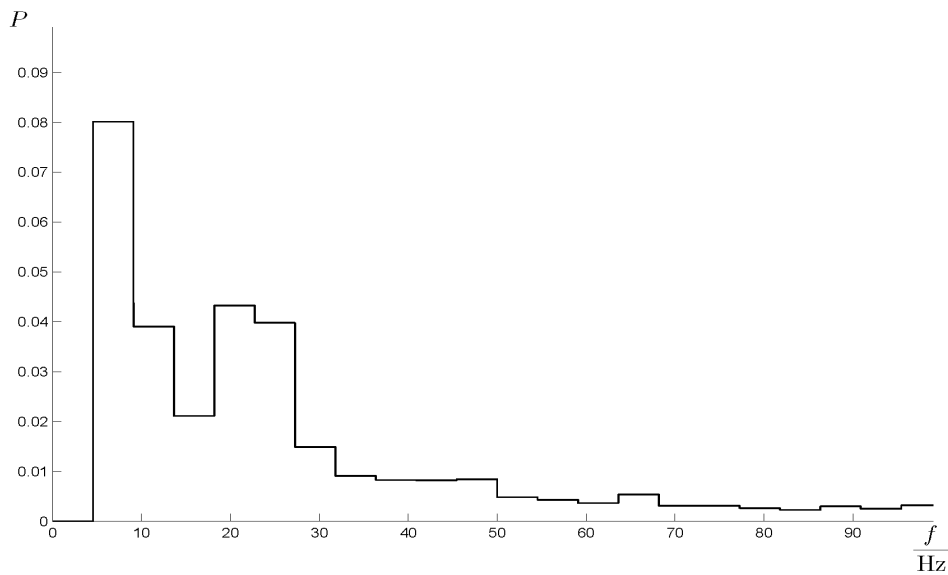
2.2 Frekvenční analýza

Změny potenciálu synaptodendritických membrán v nejvyšších vrstvách koncového mozku (případně z jiných částí, ale odtud hlavně) se přenášejí na povrch lebky, kde jsou zaznamenány elektrodami. Při své cestě musí procházet různým prostředím. V závislosti na frekvenci může docházet, buď ke ztrátám energie, nebo k úplnému pohlcení vlny. Nejvyšší frekvence se díky tomuto "organickému filtru" nedostanou na povrch vůbec. Proto se dříve myslelo, že v mozku tak rychlé procesy neprobíhají.

Základní aktivitou mozku, který je zdravý, bdělý a zralý (přibližně od 5. – 7. roku), je tzv. "alfa" aktivita, vyznačující se frekvencí v rozsahu 8 – 13 Hz a amplitudou 30 – 80 μV . Na druhém místě jmenujme "beta" aktivitu s frekvencí 14 – 30 Hz a amplitudou 30 až 50 μV . Mezi nejdůležitější patří také "theta" aktivita s frekvencí 4 – 7,5 Hz a amplitudou do 30 μV . Ostatní druhy aktivit se vyskytují jen zřídka nebo jsou důsledkem neurologických poruch.

Výstupy z elektrod putují do zesilovačů, kde kromě zesílení signálu může dojít k odřezání některých frekvencí. Na konec jsou výsledky zaznamenány v počítači ve formě časových řad $\{x_j^i\}_{i=1, j=0}^{i=M, j=N-1}$, kde M je počet elektrod (kanálů) a N určuje délku měření v závislosti na vzorkovací frekvenci f_v (viz vzorec 1.5).

Zpracování dat začneme volbou šířky pozorovacího okénka $n = cM$, kde c je konstanta z Věty 1.4.3. Pomocí diskrétní Fourierovy transformace zobrazíme časové řady a vytvoříme power spektra (viz odstavec 1.3), která zprůměrujeme přes všechna okénka.



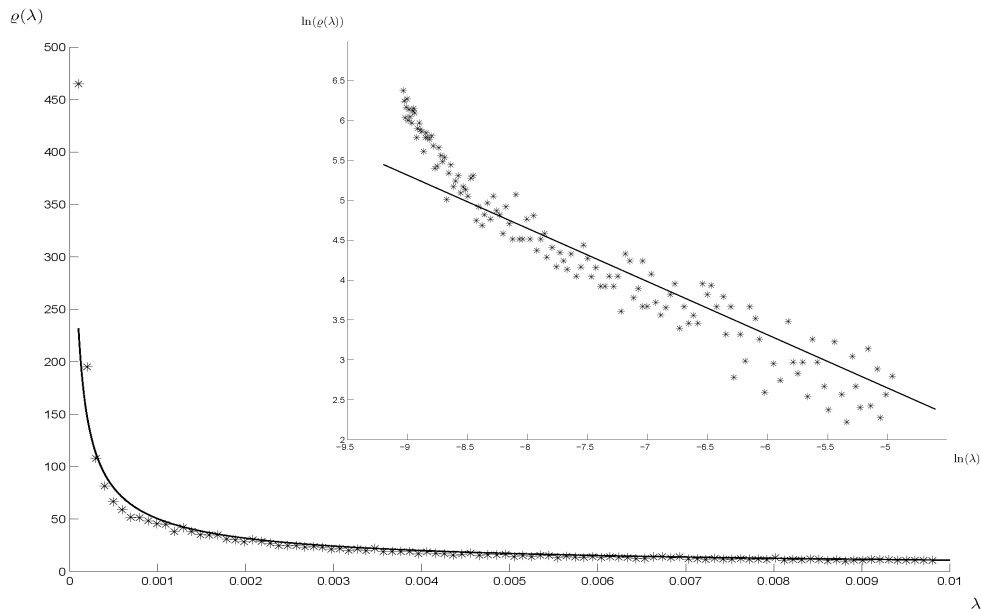
Obrázek 2.2: Výkonové spektrum signálů přijímaných elektrodami pro $c = 2$. Použito bylo 64-kanálové EEG s vzorkovací frekvencí 1024 Hz.

Příklad výkonového spektra získaného z EEG je na obrázku 2.2. Vidíme, že jednotlivé frekvence nejsou zastoupeny rovnoměrně. Nejvyšší frekvence v rozkladu chybí úplně. Vysvětlení bychom, v souladu s předchozími úvahami, pravděpodobně našli ve vlastnostech prostředí uvnitř lebky a v lebce samotné nebo v parametrech zesilovačů.

2.3 Hustota vlastních čísel korelačních matic

Data z lidského EEG jsme v předchozím odstavci zobrazili diskrétní Fourierovou transformací. Obdrželi jsme frekvenční charakteristiku v podobě výkonového spektra.

Spektrální analýza EEG spočívá v konfrontaci zvoleného modelu mozku s naměřenými hodnotami. Náš model je založen na jednoduchém předpokladu, že signál uvnitř lebky je obyčejný bílý šum. Pronikáním na povrch hlavy se z něho stává barevný šum. Stále zůstává náhodným signálem, narozdíl od skutečné elektromagnetické aktivity, která přenáší informaci mezi jednotlivými částmi mozku, resp. částmi celého těla.



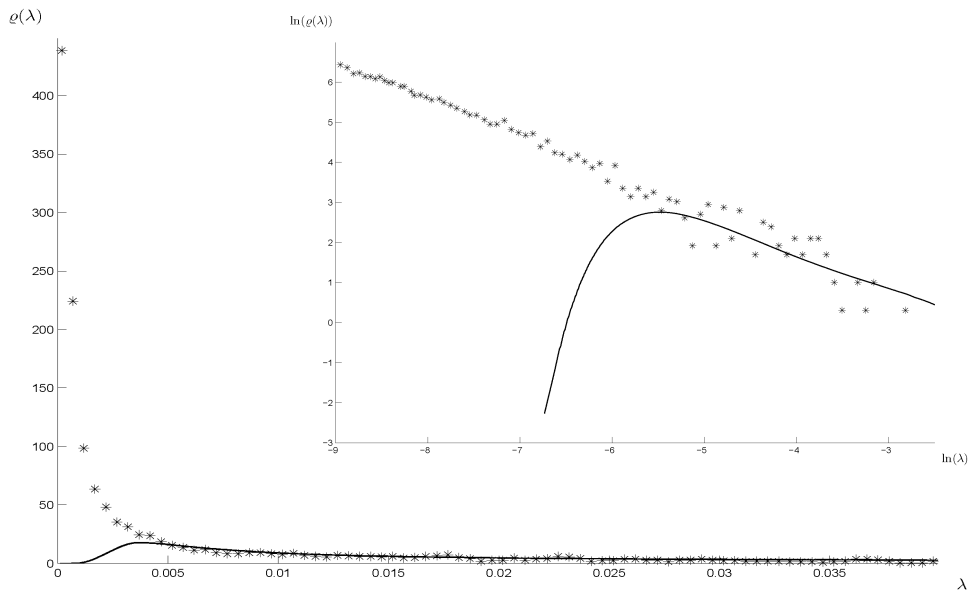
Obrázek 2.3: Hustota vlastních čísel korelačních matic, vytvořených z EEG (hvězdičky) pro $c = 1$, proložená hustotou $\varrho(\lambda)$ pro korelační matice z barevného šumu, určeného odpovídajícím výkonovým spektrem EEG.

Na první pohled se může zdát, že kolísání potenciálu na membránách každého z neuronů nemá globální význam. Shromáždí-li se skupina neuronů, vykazujících

podobné změny napětí (vnitřně provázané změny), na jednom místě, stává se z nich samostatná jednotka schopná vykonávat jistou funkci. EEG je tvořeno elektromagnetickou aktivitou právě takových shluků.

Plně náhodný signál, jako je bílý šum, nemůže přenášet informaci. Navržený model mozku proto musí být v rozporu s experimentálně naměřenými daty. Hustota vlastních čísel by mohla být tím ukazatelem, který odhalí nedostatečnost našeho popisu činnosti mozku.

Na základě výsledků odvozených v kapitole 1, jsme schopni nalézt spektrální hustotu korelačních matic barevného šumu, podle průběhu výkonového spektra. Společně s experimentálně zjištěným rozdělením vlastních čísel jsou na obrázcích 2.3 a 2.4.



Obrázek 2.4: Hustota vlastních čísel korelačních matic, vytvořených z EEG (hvězdičky) pro $c = 2$, proložená hustotou $\rho(\lambda)$ pro korelační matice z barevného šumu, určeného odpovídajícím výkonovým spektrem EEG.

Zmenšujeme-li λ experimentální hustota $\rho(\lambda)$ prudce roste. Polovina vlastních čísel je velmi malých a druhá polovina je přibližně rovnoměrně rozmístěna na zbytku kladné reálné poloosy. Z obrázků je vidět, že shoda teoretické křivky s experimentálně zjištěným rozdělením je tím lepší čím menší c zvolíme. Na druhé straně, je-li c dostatečně velké, objeví se ve spektrální hustotě pro náhodný signál (barevný šum) pás kolem nuly, kde by neměla být vlastní čísla. Experimentální rozdělení je však v této oblasti nenulové.

Závěr: Průběh hustoty vlastních čísel korelačních matic, konstruovaných z časových řad pocházejících z elektrod umístěných na hlavě, se v závislosti na volbě c liší

od předpovědi učiněné prostřednictvím znalosti výkonového spektra. Zmenšujeme-li délku časového okénka odpovídá spektrální hustota stále více spektrální hustotě korelačních matic vytvořených z barevného šumu.

Kapitola 3

Vlastnosti spektra korelačních matic EEG

Existence malých vlastních čísel korelačních matic z lidského EEG v oblastech, kde je teoretické rozdělení $\varrho(\lambda)$ nulové, narušuje náš model založený na nahrazení EEG signálu barevným šumem. Navíc podle obrázků 2.3 a 2.4 má experimentální spektrální hustota, narozdíl od spektrální hustoty pro barevný šum, v oblasti kolem nuly algebraickou singularitu nezávisle na c , podobně jako tzv. kritické systémy (viz [7] nebo [8]).

Díky předchozí kapitole můžeme předpokládat, že minimálně nejmenší vlastní čísla (nebereme-li v úvahu nulová) neodpovídají náhodnému signálu. Nejedná se o intuitivní fakt, někdo by mohl očekávat, že malá vlastní čísla budou pocítovat největší vliv systémového šumu. Studium právě této části spektra možná zjistíme některé důležité vlastnosti samotného EEG.

Korelační matice jsou podle definice (1.2) a normování (1.1) reálné symetrické matice s jedničkami na diagonále. Předpokládáme-li dále, že členy časových řad x_i^j jsou náhodné a Gaussovsky rozdělené, nazývá se soubor odpovídajících korelačních matic "white-Wishart ensemble" (WWE, viz [9], [5]).

Spektrum WWE popisuje rozdělovací funkce vlastních čísel $\lambda_1, \dots, \lambda_N$ (anglicky nazývaná "Joint density of the eigenvalues")

$$P(\lambda_1, \dots, \lambda_N) = K \prod_{i=1}^N \sqrt{\lambda_i^{N(c-1)-1} e^{-\lambda_i}} \prod_{i < j} (\lambda_j - \lambda_i), \quad \lambda_1 \leq \lambda_2 \leq \dots \leq \lambda_N, \quad (3.1)$$

kde c má stejný význam jako v předchozím textu (viz Věta 1.4.3). Normalizační konstanta K je dána vzorcem

$$K = \frac{2^{\frac{cN^2}{2}} \pi^{\frac{N^2}{2}}}{\Gamma_N\left(\frac{N}{2}\right) \Gamma_N\left(\frac{cN}{2}\right)}. \quad (3.2)$$

Přičemž hodnotu $\Gamma_N(a)$ určuje Gamma funkce Γ

$$\Gamma_N(a) = \pi^{\frac{N(N-1)}{4}} \prod_{i=1}^N \Gamma\left(a - \frac{i-1}{2}\right). \quad (3.3)$$

V teorii náhodných matic se často používá tvrzení, jehož přibližné znění je obsahem následující Věty.

3.0.1 Věta. Vyplňuje-li zvolený soubor matic dostatečně prostor s určitou symetrií (např. prostor symetrických matic), předpovídá teorie náhodných matic univerzální statistické vlastnosti pro tzv. unfoldované spektrum (zvoleného souboru matic, viz následující odstavec). Tyto vlastnosti se shodují se statistickými vlastnostmi spektra celého pokrývacího prostoru.

Z Věty 3.0.1 vyplývá, že spektrální charakteristiky pro WWE jsou stejné jako pro Gaussův ortogonální soubor (GOE, viz [13], [16] nebo [10]), který tvoří symetrické matice, jejichž elementy jsou Gaussovsky rozdělené (narozdíl od WWE není kladena podmínka na diagonálu). Tohoto faktu využijeme, protože GOE je důkladně prozkoumán a pro většinu distribučních funkcí známe předpis.

3.1 Unfoldované spektrum

Unfoldování spektra spočívá v transformování vlastních čísel $\{\lambda_i\}_{i=1}^N \longrightarrow \{\tilde{\lambda}_i\}_{i=1}^N$, tak aby spektrální hustota $\tilde{\varrho}(\tilde{\lambda})$ byla konstantní a platilo

$$\tilde{\varrho}(\tilde{\lambda}) = 1. \quad (3.4)$$

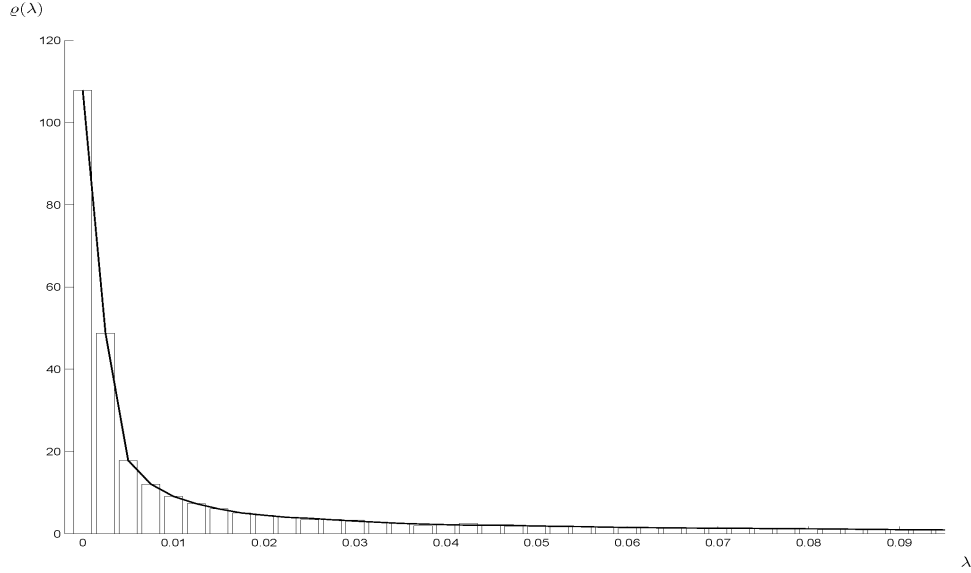
Transformujeme-li vlastní čísla vztahem

$$\tilde{\lambda}_i = \int_{-\infty}^{\lambda_i} \varrho(x) dx, \quad (3.5)$$

kde $\varrho(x)$ je původní spektrální hustota normovaná na N , můžeme se snadno přesvědčit, že $\tilde{\varrho}(\tilde{\lambda})$ bude rovna 1.

Známe-li předpis pro $\varrho(\lambda)$, je unfoldování triviální záležitostí. U naměřených dat bohužel tvar funkce $\varrho(\lambda)$ neznáme. Určení unfoldovaného spektra je potom otázkou jisté aproximace.

Předpokládejme, že jsme pro experimentálně získaná data spočetli množinu J spekter $\{\lambda_i^j\}_{i=1, j=1}^{i=N, j=J}$ takových, že pro libovolné j je posloupnost $\{\lambda_i^j\}_{i=1}^N$ popsána spektrální hustotou $\varrho(\lambda)$. Smícháme-li všechna vlastní čísla a vytvoříme histogram (viz obrázek 3.1), dostáváme přibližný průběh funkce $\varrho(\lambda)$. Získanou křivku můžeme



Obrázek 3.1: Histogram vlastních čísel korelačních matic EEG pro $c = 5$ a z něho plynoucí průběh funkce $\varrho(\lambda)$ (plná čára).

případně vyhladit. Užitím transformace (3.5) nalezneme aproximaci unfoldovaných spekter.

Jiný postup, vedoucí ke stejnému cíli, je založen na přibližném určení křivky funkce

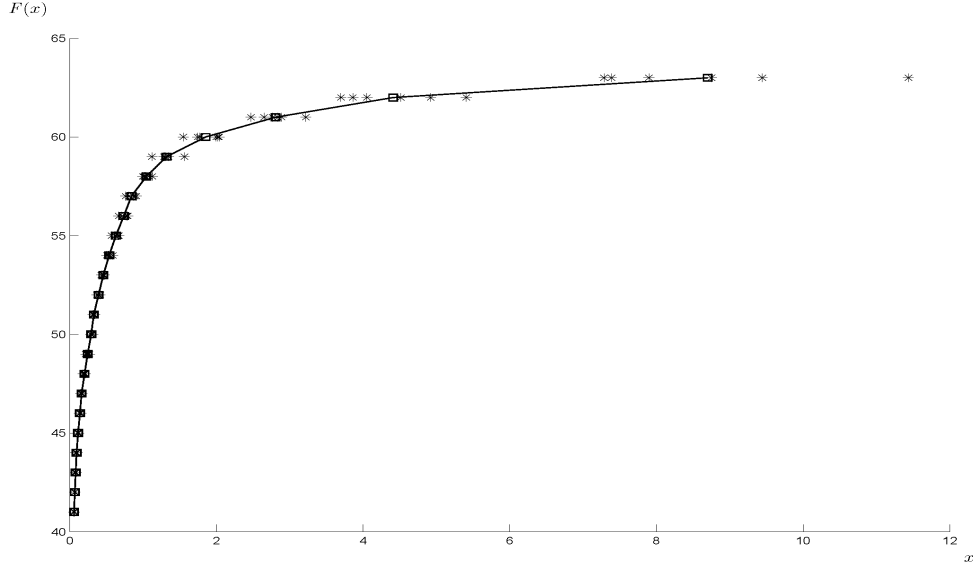
$$F(x) = \int_{-\infty}^x \varrho(y) dy. \quad (3.6)$$

U $F(x)$ známe přesně N hodnot, kterých nabývá, ale víme jen přibližně, ve kterých je to bodech, platí totiž vztahy

$$F(x_i) = i, \quad x_i \approx \lambda_i^j, \quad \forall i, j. \quad (3.7)$$

Zároveň předpokládáme, že posloupnosti $\{\lambda_i^j\}_{i=1}^N$ jsou seřazeny podle velikosti. Pomocí průměrování hodnot λ_i^j přes index j obdržíme nejpravděpodobnější x_i , ve kterém funkce $F(x)$ nabývá hodnoty i (viz obrázek 3.2). Nalezenou křivku $F(x)$ se můžeme pokusit vyhladit. Nakonec interpolací (případně extrapolací u krajních bodů) určíme unfoldovaná spektra z formule

$$\tilde{\lambda}_i^j = F(\lambda_i^j), \quad \forall i, j. \quad (3.8)$$



Obrázek 3.2: Část průběhu funkce $F(x)$ (plná čára), která je určena středními hodnotami (čtvereček) spekter korelačních matic z EEG (hvězdičky) při $c = 5$.

Všechny následující statistické vlastnosti spektra budou vycházet z unfoldovaného spektra. Budeme-li mluvit o spektru, budeme mít na mysli unfoldované spektrum korelačních matic.

3.2 Rozdělovací funkce vzdáleností mezi nejbližšími sousedy

Asi nejintenzivněji studovaná spektrální charakteristika je distribuční funkce vzdáleností mezi nejbližšími sousedy $p(s)$ (anglicky nazývaná "nearest neighbour distance distribution", případně "level spacing distribution"). Popisuje, jak již název napovídá, rozdělení vzdáleností mezi po sobě jdoucími vlastními čísly λ_i , srovnanými podle velikosti $\lambda_1 \leq \lambda_2 \leq \dots \leq \lambda_N$.

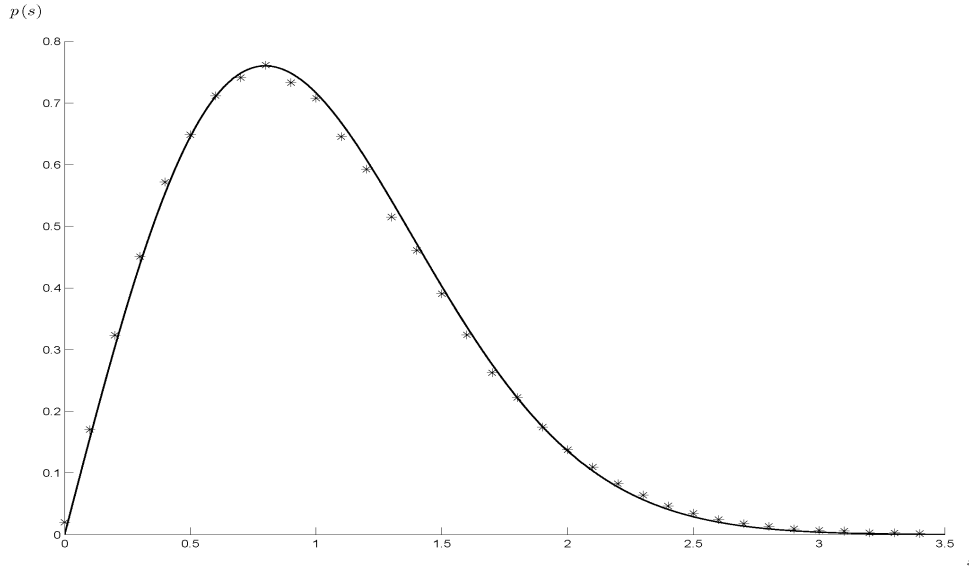
Pro reálné symetrické matice (GOE) předpovídá teorie náhodných matic funkci $p(s)$ ve tvaru

$${}^4\tilde{p}(s) = \frac{\pi}{2}s \exp\left(-\frac{\pi}{4}s^2\right). \quad (3.9)$$

⁴Vlnkou budeme v této kapitole označovat funkce předpovězené teorií náhodných matic.

Prostřednictvím úvah z úvodu kapitoly můžeme očekávat, že průběh křivky $p(s)$ (3.9) bude sledovat i rozdělení vytvořené z unfoldovaného spektra korelačních matic EEG.

Shodu naměřených hodnot s teoretickou předpovědí funkce $p(s)$ (viz obrázek 3.3) nalezneme, jak pro celé spektrum korelačních matic, tak i pro ta nejmenší vlastní čísla, jejichž existence narušuje model s barevným šumem (viz odstavec 2.3). Výsledek pro klidové EEG je stejný jako pro stimulované EEG. Rovněž délka okénka nehraje roli.



Obrázek 3.3: Rozdělovací funkce vzdáleností mezi nejbližšími sousedy (Level spacing distribution) pro spektrum korelačních matic EEG při $c = 2$ (hvězdičky), proložená teoretickou křivkou (3.9) pro GOE.

Závěr: Teoretická předpověď rozdělení vzdáleností mezi nejbližšími sousedy pro GOE souhlasí s experimentálně nalezeným rozdělením pro data z EEG.

3.3 Rozptyl počtu vlastních čísel

Rozptyl počtu vlastních čísel (anglicky "Number variance") popisuje další statistickou vlastnost spektra. Značí se $\Sigma^2(\lambda, L)$ a udává střední kvadratickou odchylku množství bodů ze spektra $\{\lambda_i\}_{i=1}^N$ v intervalu

$$\left\langle \lambda - \frac{L}{2}, \lambda + \frac{L}{2} \right\rangle.$$

Definici $\Sigma^2(\lambda, L)$ je možné zapsat ve tvaru

$$\Sigma^2(\lambda, L) = \langle (n(\lambda, L) - \langle n(\lambda, L) \rangle)^2 \rangle = \langle n(\lambda, L)^2 \rangle - \langle n(\lambda, L) \rangle^2, \quad (3.10)$$

kde $n(\lambda, L)$ udává počet vlastních čísel v intervalu délky L se středem v bodě λ , lomené závorky znamenají souborovou střední hodnotu. Díky konstantnosti spektrální hustoty unfoldovaného spektra (3.4) je střední hodnota $\langle n(\lambda, L) \rangle$ nezávislá na λ a platí vztahy

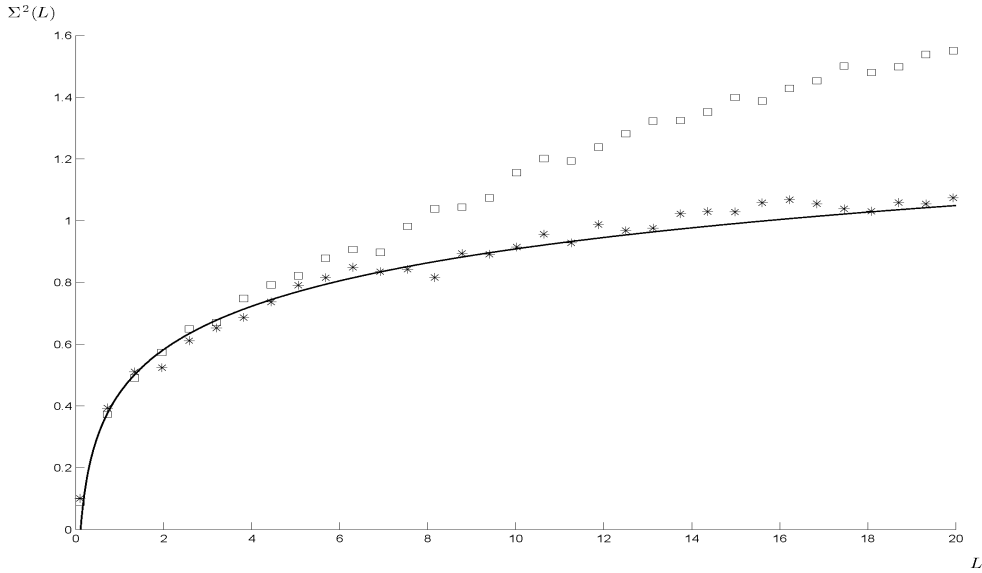
$$\langle n(\lambda, L) \rangle = L, \quad \Sigma^2(\lambda, L) = \langle n(\lambda, L)^2 \rangle - L^2. \quad (3.11)$$

Teorie náhodných matic je schopna předpovědět tvar distribuční funkce $\Sigma^2(\lambda, L)$ pro GOE a výsledný vzorec je nezávislý na λ

$${}^4\widetilde{\Sigma^2}(L) = \frac{2}{\pi^2} \left(\ln(2\pi L) + \gamma - \frac{\pi^2}{8} \right), \quad (3.12)$$

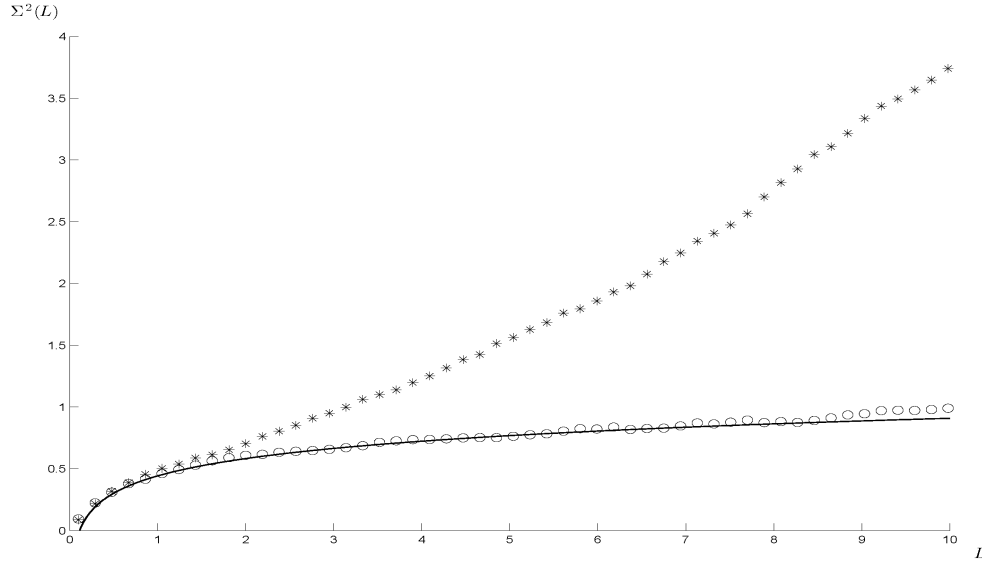
kde $\gamma \approx 1,5772$.

Porovnání Number variance pro klidové a stimulované EEG je na obrázku 3.4. Ve výsledcích pro stimulované EEG ještě rozdělíme vlastní čísla na malá a velká (viz obrázek 3.5).



Obrázek 3.4: ⁵ Rozptyl počtu vlastních čísel (Number variance), vytvořený ze spektra korelačních matic klidového (hvězdičky) EEG a stimulovaného (čtverečky) EEG (v obou případech bylo $c = 1,1$), společně s teoretickou předpovědí (plná čára) pro GOE (3.12).

Z obrázků 3.4 a 3.5 je patrné, že shoda teoretické předpovědi Σ^2 s experimentálním rozdělením není úplná jako u Level spacing distribution. Je třeba dodat, že funkce Σ^2 je velice citlivá na artefakty, proto je důležité, aby byly z měření pečlivě odstraněny.



Obrázek 3.5: ⁵Rozptyl počtu vlastních čísel (Number variance), vytvořený z částí spektra korelačních matic stimulovaného EEG ($c = 1,1$). Pro nejmenších 20 vlastních čísel jsou použity hvězdičky a pro největších 20 kolečka. Plnou čarou je vykreslena teoretická předpověď pro GOE (3.12).

Závěr: Rozptyl počtu vlastních čísel Σ^2 se ukazuje jako citlivější charakteristika než Level spacing distribution. Pro klidové EEG odpovídá experimentální rozdělení předpovědi pro GOE. Je-li mozek stimulován odchyluje se naměřené rozdělení od funkce (3.12) a z jeho průběhu je možné usuzovat, zda-li byl mozek v klidu, či nikoliv (viz obrázek 3.4). Pro stimulované EEG se liší tvar Number variance podle toho, z jaké oblasti spektra volíme vlastní čísla (viz obrázek 3.5). V souladu s předchozími úvahami se potvrzuje význam nejmenších vlastních čísel jako nositele informace (vlastnosti velkých vlastních čísel se více podobají vlastnostem spektra korelačních matic, vytvořených z barevného šumu).

⁵Experimentální rozdělení $\Sigma^2(\lambda, L)$ bylo vytvořeno pro $\lambda = \frac{M+1}{2}$, kde M je počet vlastních čísel. Volba λ odpovídá předpokládanému středu unfoldovaného spektra.

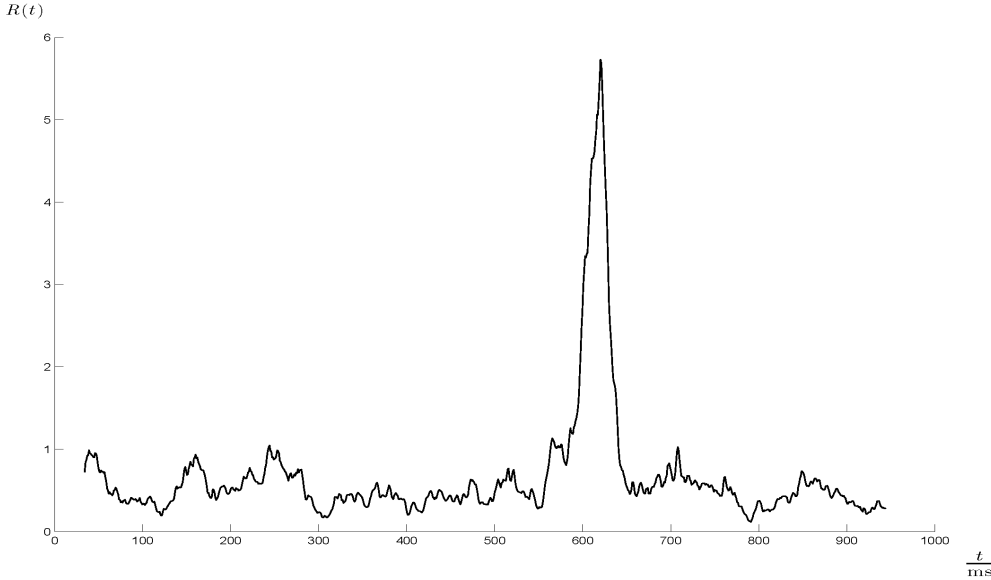
3.4 Časový vývoj EEG signálu

Spektrální vlastnosti korelačních matic (vytvořených z lidského EEG) jsou v určitých mezích nezávislé na subjektu, který je měřen. V předchozích odstavcích jsme zkonstruovali statistické funkce, jejichž průběh je shodný pro všechna EEG, která jsme měřili (tj. pro každého člověka, u kterého jsme měřily EEG). Zvláště Number variance se ukázala užitečnou.

Dosud jsme analyzovali EEG jako celek. Rozdělili jsme epochy na časová okénka, ale výsledky jsme přes ně vždy vystředovali. Nyní se pokusíme analyzovat jednotlivá okénka a průměrovat výsledky pouze přes epochy.

Zvolíme-li časové okénko délky $n = cM$, můžeme spektrální vlastnosti korelačních matic porovnat se spektrálními vlastnostmi korelačních matic okénka v jiném čase. Seřadíme-li výsledky pro určitou charakteristiku, vytvořenou na základě dat z okének jdoucích v čase za sebou, dostaneme časový vývoj charakteristiky.

Level spacing distribution se s časem nemění a je shodné s předpovědí pro GOE (3.9). Naopak Number variance se vyvíjí. Její časový průběh budeme popisovat kvadratickou odchylkou od teoretické předpovědi $\widetilde{\Sigma}^2$.



Obrázek 3.6: Funkce R , vytvořená z EEG dat ($c = 1,1$), jejíž definice je (3.14). Naměřený signál pochází ze stimulovaného EEG (Reversal, viz odstavce 2.1). Stimul nastal přibližně v čase 488 ms.

Předpokládejme, že jsme z experimentálních dat vytvořili křivku funkce Σ^2 pomocí L hodnot v bodech l_i . Stejně zpracování dat jsme provedli v K po sobě následujících okénkách, jejichž délka je určena konstantou c . Každému okénku, jakož i libovolné funkci pro něho stanovené, přiřadíme čas t_j , daný středem okénka.

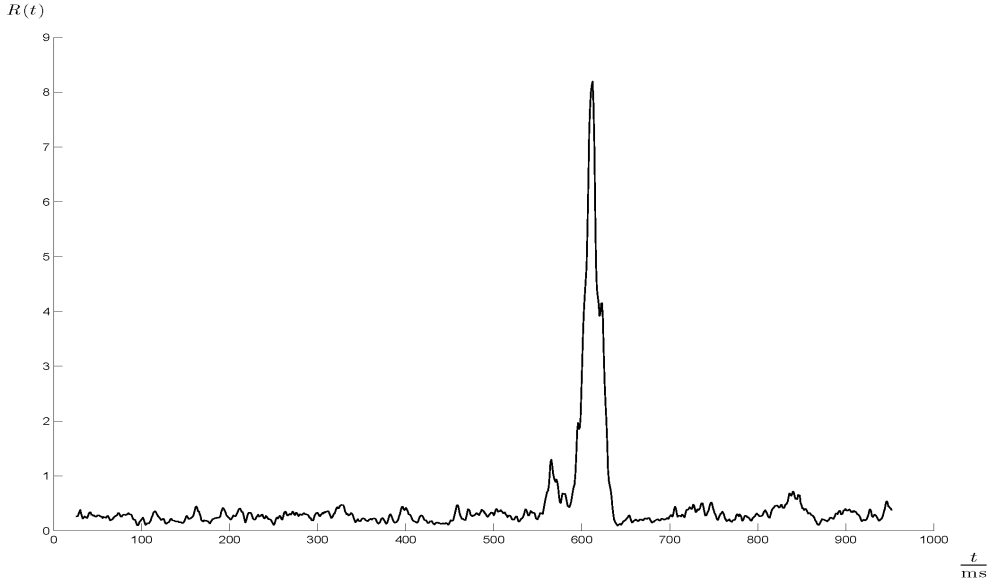
Definujeme nejprve funkci

$$r(t_j) = \frac{1}{L} \sum_{i=1}^L \left(\Sigma^2(t_j, l_i) - \widetilde{\Sigma}^2(l_i) \right)^2, \quad (3.13)$$

kde $\Sigma^2(t_j, l_i)$ přísluší experimentálnímu rozdělení⁵ a $\widetilde{\Sigma}^2(l_i)$ je teoretická předpověď (3.12) v případě Gaussova ortogonálního souboru.

Dále definujeme funkci R pomocí r (pouze znormujeme směrodatnou odchylku $r(t_j)$ na 1)

$$R(t_j) = \frac{r(t_j)}{\sqrt{\frac{1}{K} \sum_{k=1}^K r(t_k)^2}}. \quad (3.14)$$



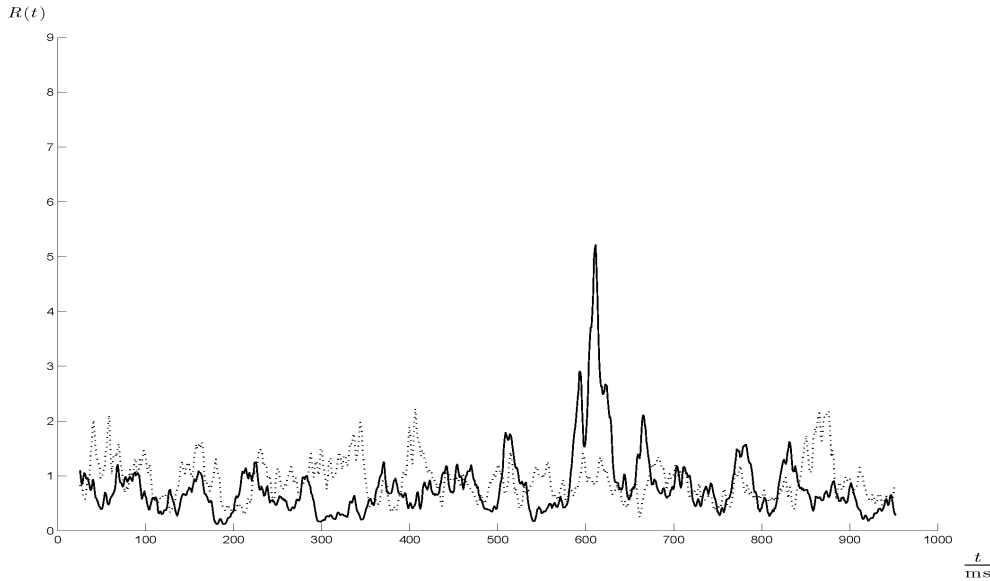
Obrázek 3.7: Funkce R (3.14) pro experimentální data, naměřená na 13 elektrodách nad zrakovým centrem (podmnožina ze stejných dat, která byla použita k vytvoření obrázku 3.6) při ⁶ $c = 4$. Stimul v čase 488 ms.

Na obrázku 3.6 je průběh funkce $R(t)$, vytvořené pomocí EEG dat mozku, který byl opticky stimulován (Reversal, viz odstavec 2.1). Časová vzdálenost mezi stimulem a maximem funkce $R(t)$ přibližně odpovídá době, za níž dorazí informace z oka do zrakového centra (viz [6]). Existenci maxima ve funkci $R(t)$ je možné vysvětlit

⁶Velká hodnota konstanty c nemusí být zarážející, uvědomíme-li si, že při 13 kanálech a $c = 4$ je délka okénka přibližně 51 ms. Při volbě $c = 1,1$ a 63 kanálech (viz obrázky 3.6 a 3.9) je délka okénka přibližně 68 ms. Vše měřeno s vzorkovací frekvencí 1024 Hz.

dostatečnou synchronizací signálu na jednotlivých elektrodách, způsobenou zvýšenou aktivitou mozku v oblasti zrakového centra. Reversal je jedno z nejjednodušších měření proto se zdá, jako by ke zpracování informace v mozku docházelo pouze při reakci zrakového centra.

Ještě větší vypovídající hodnotu mají obrázky 3.7 a 3.8, které zachycují stejnou veličinu jako obrázek 3.6, ale pouze pro vybrané kanály EEG.



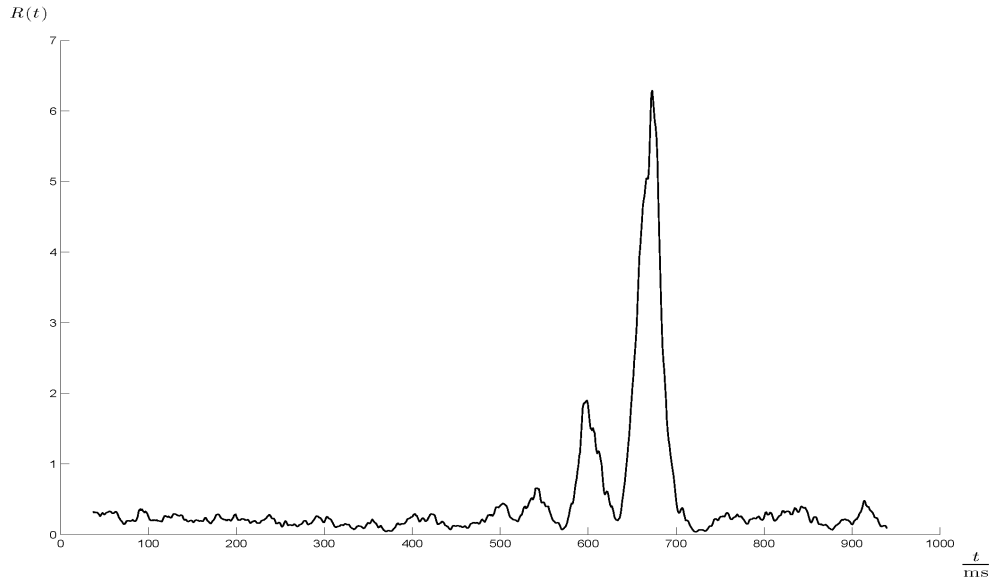
Obrázek 3.8: Funkce R (3.14) pro experimentálně naměřená data (stejná jako na obrázku 3.6) z elektrod v oblasti přední části hlavy (přerušovaná čára) a v oblasti pravé zadní části hlavy (plná čára). V obou případech bylo použito 13 kanálů a konstanta ⁶ $c = 4$. Stimul v čase 488 ms.

Elektrody umístěné přibližně nad oblastí zrakového centra (zadní část hlavy), podle předpokladu, nejvíce reagují v okamžiku, kdy by mělo docházet ke zpracování informace ve zrakovém centru (viz obrázek 3.7). Naopak elektrody z opačného konce hlavy (přední část) na stimul téměř nereagují (viz obrázek 3.8). Nakonec pravá zadní strana hlavy. Zde se sice promítá vzruch ze zrakového centra (soudě podle okamžiku, kdy se objevila výchylka), ale maximum není tak přesvědčivé v rámci celého průběhu.

Na optickou stimulaci reaguje zrakové centrum, na zvukové nebo hmatové stimuly reagují jiná centra v mozku. Proto není udivující, že podobných výsledků jako u Reversalu dosáhneme i u nejjednodušších podnětů tohoto typu (viz [6]). Rozdílná může být časová vzdálenost maxima funkce R od stimulu, nebo se nejvíce aktivují jiné elektrody.

Na obrázku 3.9 je funkce R pro stimulované EEG, kdy subjektu bylo na prst navlečeno pouzdro s jehlou, která se pravidelně vysouvala a způsobovala tak bolest. Očekává se, že na tento podnět bude reagovat somatosenzorický kortex, který se

nachází na opačné straně mozku, než je strana těla, ve které došlo k podráždění. Vzdálenost maxima funkce R od podnětu opět přibližně odpovídá době, za kterou dorazí informace o píchnutí do somatosenzorického kortexu.



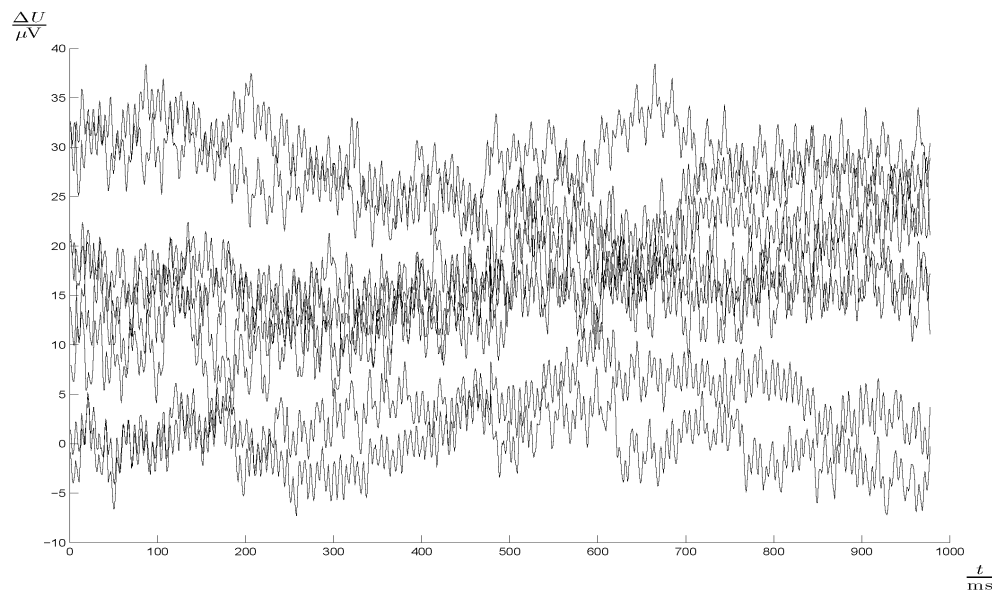
Obrázek 3.9: Funkce R (3.14) pro experimentálně naměřená data (konstanta $c = 1,1$). Subjekt byl stimulován pícháním do prstu v čase 488 ms.

Kromě časového vývoje můžeme s jistou přesností určit pozici ložiska signálu. Omezení jsme pouze minimálním počtem elektrod, které musíme vybrat. Aby se dalo mluvit o spektrální analýze, mělo by jich být alespoň 10, což u 64 a více kanálového EEG není problém.

Kapitola 4

EEG signál

Měření EEG je velmi náročné na přesnost. Stává se, že některé elektrody vzájemně probíjejí přes povrch lebky (zvláště u lidí bez vlasů). Případně nejsou elektrody správně připojeny a naměřený signál je slabý. Obvyklý EEG výstup je velmi zašuměný (viz obrázek 4.1) a amplituda šumu je mnohokrát větší než amplituda signálu, který nese informaci. Z tohoto důvodu není metoda, spočívající v průměrování přes epochy, nejvhodnější nástroj pro analýzu. Přesto se používá a dává uspokojivé výsledky, minimálně pro nejjednodušší stimuly.



Obrázek 4.1: Vzorek několika kanálů lidského EEG. Na vertikální ose je rozdíl napětí mezi zvolenou a referenční elektrodou (viz odstavec 2.1).

Kromě průměrování existují i jiné postupy, jak z EEG dostat potřebné informace. V článku [11] je zmíněna metoda založená na předpokladu, že jednotlivé epochy na-

měřeného EEG obsahují stejnou odpověď na stimul a jsou zašuměny zcela náhodným signálem. Tato metoda slouží k odfiltrování šumu. Narozdíl od průměrování, konverguje ke skutečnému signálu mnohem rychleji (tj. není potřeba tolik epoch) a funguje i při velmi vysoké hladině šumu, jako je tomu u EEG.

Další hojně využívaná metoda se nazývá principal-component. Studuje největší vlastní čísla a příslušné vlastní vektory korelačních matic. Používá se hlavně k určení nejdůležitějších zdrojů signálu. Malá vlastní čísla jsou z analýzy vyloučena jako nezajímavá. V odstavci 2.3 jsme ukázali, že v případě EEG to nemusí být správná cesta, protože podle spektrální hustoty a Number variance nejmenší vlastní čísla pravděpodobně ukrývají informace o systému.

Naše spektrální analýza EEG se soustřeďuje na korelaci mezi kanály. Jedná se o čistě lineární metodu, stejně jako výše zmíněné metody. Slouží především k popisu EEG jako celku a k nalezení jeho universálních statistických vlastností. Nicméně v předchozí kapitole jsme ukázali, že je schopna popsat časový vývoj signálu naměřeného na elektrodách a přibližně lokalizovat jeho zdroj (respektive určit, které elektrody vzájemně nejvíce korelují).

4.1 Závěr

Cílem této práce bylo poskytnout objektivní metody ke zkoumání lidského EEG, které stále chybí. K EEG jsme od začátku až dokonce přistupovali jako k obyčejným časovým řadám. Nekladli jsme na ně žádné dodatečné předpoklady. Vycházeli jsme z frekvenční analýzy hodnot naměřených na elektrodách, a postupně jsme dokazovali, že se nejedná o náhodný signál, přestože se tak může na první pohled jevit.

Spektrální analýzu jsme začali odvozením hustoty vlastních čísel korelačních matic pro barevný šum. Jedná se o rozšíření Marchenko-Pasturovy předpovědi pro bílý šum, která se používá v různých oblastech fyziky a statistiky (viz [2], [12]).

Zkoumáním spektrální hustoty $\varrho(\lambda)$, získané z naměřených dat, jsme došli k závěru, že nenáhodnost EEG se projeví v existenci malých vlastních čísel, která se nalézají mimo oblast určenou spektrální hustotou pro barevný šum. Podstatným parametrem při srovnávání experimentálního a teoretického rozdělení vlastních čísel je délka okénka. Největší shoda nastává pro krátká okénka (přesněji: pro malou hodnotu konstanty c , udávající poměr mezi délkou časového okénka a počtem kanálů EEG).

Další spektrální charakteristiky jen potvrzují význam malých vlastních čísel. Hustota vlastních čísel stejně jako Level spacing distribution nejsou pro další pokrok ve zkoumání EEG dostatečně citlivé. Proto jsme zkoumali jemnější statistické funkce. Number variance se ukázala jako vhodná charakteristika a díky ní se nám podařilo rozlišit klidové a stimulované EEG. Tento výsledek můžeme považovat za první krůček k objektivní analýze.

Po zkoumání EEG jako celku jsme se soustředili na časový vývoj stimulovaného

EEG. Využili jsme přitom již ověřený fakt, že experimentální rozdělení Number variance Σ^2 neodpovídá teoretické předpovědi. Detailní studie jednotlivých časových okének ukázala, že existuje spojení mezi událostmi v mozku a průběhem funkce R definované prostřednictvím distribuční funkce Σ^2 (viz 3.14). Na dvou jednoduchých experimentech, aktivujících zrakové centrum a somatosenzorický kortex, jsme ukázali, že pozice maxima ve funkci R odpovídá času, kdy dochází ke zpracování podnětu v těchto centrech, nezávisle na subjektu, který je měřen.

Výchyvky ve funkci R jsou způsobené hlavně zvýšenou korelací mezi elektrodami (náhodný šum korelace nezpůsobuje). Existuje mnoho různých stimulů a na každý z nich nejvíce reaguje nějaké centrum (nebo centra) v mozku. Zdá se logické, že signály z elektrod nad takovým centrem budou nejvíce korelovány. O pravdivosti této domněnky jsme se přesvědčili, když jsme studovali zrakové, hmatové nebo zvukové podněty. Důležité je, že ke stejným výsledkům jsme dospěli u všech lidí, které jsme měřili.

Předloží-li nám někdo neznámé EEG, můžeme stejným postupem analyzovat signál a říci, zda se aktivovalo zrakové centrum, somatosenzorický kortex nebo jiná část mozku a v jakém čase.

Pro určení ložiska signálu je důležité mít k dispozici dostatečný počet elektrod. Dnešní elektroencefalografy takové množství elektrod poskytují (např. 64-kanálové nebo 112-kanálové), ale jedná se většinou o experimentální zařízení. V lékařství se k měření EEG běžně používá jen 16 nebo 20 kanálů.

Spektrální analýzu jsme ke zkoumání EEG použili hlavně pro její invariantní vlastnosti. Dá se snadno dokázat, že spektrální vlastnosti korelačních matic se nezmění, transformujeme-li kanály EEG libovolnou ortogonální transformací (např. záměna dvou a více elektrod nehraje roli).

Jak již bylo zmíněno, návod, jak provést objektivní analýzu EEG, zatím neexistuje. Nám se alespoň podařilo najít několik objektivních metod pro zkoumání lidského EEG.

Literatura

- [1] S. DROZDZ, J. KWAPIEN, A. A. IOANNIDES, L. C. LIU: *Collectivity in the Brain Sensory Response*. cond-mat/9901134, 1999.
- [2] Z. BURDA, A. GÖRLICH, J. JURKIEWICZ, B. WACLAW: *Correlated Wishart Matrices and Critical Horizons*. cond-mat/0508341, 2005.
- [3] W. A. MARCHENKO, L. A. PASTUR: *Distribution eigenvalues of sample covariance matrices*. Math. USSR-Sbornik, 1:457-486, 1967.
- [4] K. N. C. TSE, D. N. C. TSE: *Effective Interference and Effective Bandwidth of Linear Multiuser Receivers in Asynchronous CDMA Systems*. University of California, USA.
- [5] I. DUMITRIU: *Eigenvalue Statistics for Beta-Ensembles*. Thesis, New York University, 2003.
- [6] J. FABER: *Elektroencefalografie a psychologie*. ISV, Praha, 2001.
- [7] Z. BURDA, J. JURKIEWICZ, M. A. NOWAK, G. PAPP, I. ZAHED: *Free Lévy Matrices and Financial Correlations*. cond-mat/0103109, 2001.
- [8] Z. BURDA, J. JURKIEWICZ, M. A. NOWAK, G. PAPP, I. ZAHED: *Free Random Lévy Variables and Financial Probabilities*. cond-mat/0103140, 2001.
- [9] I. M. JOHNSTONE: *High Dimensional Statistical Inference and Random Matrices*. Stanford University, USA, 2006.
- [10] Y. V. FYODOROV: *Introduction to the Random Matrix Theory: Gaussian Unitary Ensemble and Beyond*. Brunel University, Uxbridge, 2004.
- [11] B. V. BARYSHNIKOV, B. D. VAN VEEN, R.T. WAKAI: *Maximu-Likelihood Estimation of Low-Rank Signals Multiepoche MEG/EEG Analysis*. IEEE Trans. Biomed. Eng. 51, 2004.
- [12] L. LALOUX, P. CIZEAU, J. P. BOUCHAUD, M. POTTERS: *Noise Dressing of Financial Correlation Matrices*. Phys. Rev. Lett. 83. Num. 7, 1999.

- [13] HANS-JÜRGEN STÖCKMANN: *Quantum Chaos: an introduction*. Cambridge University Press, 1999.
- [14] M. L. MEHTA: *Random Matrices*. 3rd ed., New York: Academic Press, 1991.
- [15] P. ŠEBA: *Random Matrix Analysis of Human EEG Data*. Phys. Rev. Lett. 91. 198104, 2003.
- [16] T. GUHR, A. MÜLLER-GROELING, H. A. WEIDENMÜLLER: *Random Matrix Theories in Quantum Physics: Common Concepts*. Max-Planck-Institut für Kernphysik, 1997.
- [17] M. S. SANTHANAM, P. K. PATRA: *Statistics of atmospheric correlations*. Phys. Rev. E 64. 016102, 2001.
- [18] J. H. SCHWARZ: *The Generalized stieltjes transform and its inverse*. Pasadena, USA, 2004.
- [19] V. L. GIRKO: *Theory of Random Determinants*. Kluwer, 1990.