ČESKÉ VYSOKÉ UČENÍ TECHNICKÉ V PRAZE
FAKULTA JADERNÁ A FYZIKÁLNĚ INŽENÝRSKÁ
KATEDRA FYZIKY

VÝZKUMNÝ ÚKOL

Bodová interakce ve dvou dimenzích: spektrální analýza a úloha rozptylu

Matěj Tušek

11. září 2005 v Praze

školitel: Prof. Ing. Pavel Šťovíček, DrSc.

Obsah

Konvence a značení

V definujících rovnostech nahradíme běžné rovnítko znakem $:=$.

$\bar{A}$ značí komplexní sdružení, je-li A číslo či funkce, a uzávěr, je-li A množina nebo operátor. Pro množinu prvků komplexně sdružených k prvkům množiny A použijeme hvězdičku: A^*.

Pod pojmem operátor rozumíme lineární zobrazení definované na podprostoru $Dom(.)$ Hilbertova prostoru $\mathscr{H}$. Standardní skalární součin na prostoru kvadraticky integrabilních (s nezápornou mírou $\mathrm{d}\mu$) funkcí na množině M: $\mathscr{H} = L^2(M, \mathrm{d}\mu)$ a jím generovanou normu budeme značit $\langle .,. \rangle$ a $\|.\|$

$$\langle f, g \rangle := \int\limits_M \bar{f} g \; \mathrm{d}\mu, \quad \forall f, g \in \mathscr{H}$$

Abychom předešli případným nedorozuměním, budeme někdy navíc symboly pro skalární součin a normu opatřovat indexem Hilbertova prostoru: $\langle .,. \rangle_{\mathscr{H}}$, $\|.\|_{\mathscr{H}}$. Skalárním součinem vektorových funkcí rozumíme součet skalárních součinů dílčích komponent.

$\mathbb{C}$ (resp. $\mathbb{R}$) značí těleso komplexních (resp. reálných čísel), skalární součin na $\mathbb{C}^n$ (resp. $\mathbb{R}^n$) potom definujeme jako obvykle: $\langle a, b \rangle := \sum_{i=1}^n \bar{a}_i b_i$.

Kvadratickou formu generovanou seskvilineární formou $u(.,.)$ budeme označovat stejným písmenem $u[.]$.

Buď $A \subset \mathbb{R}^n$, potom $D(A)$ představuje vektorový prostor hladkých funkcí s omezeným nosičem ležícím v A. Označme dále $D'(A)$ prostor všech spojitých lineárních funkcionálů na $D(A)$. Prvky $D(A)$ nazýváme testovacími funkcemi, prvky $D'(A)$ funkcemi zobecněnými. $(f, \varphi) := f(\varphi)$ pro libovolné $f \in D'(A)$ a $\varphi \in D(A)$. Je-li f lokálně integrabilní na J (regulární zobecněná funkce), klademe

$$(f, \varphi) := \int\limits_A \bar{f}(x) \varphi(x) \mathrm{d}^n x$$

Pro $c \in \mathbb{C}$ libovolné bereme imaginární část nezápornou $\Im(c) \geq 0$.

Použité symboly včetně těch již zavedených pro přehlednost setřídíme do tabulky.

Symbol	**Význam**
$\bar{\ }$	komplexní sdružení, resp. uzávěr
$*$	komplexní sdružení množiny
$'$	derivace funkce jedné proměnné
$\dagger$	hermitovské sdružení
$\upharpoonright$	zúžení
$:=$	definující rovnost
$\langle .,. \rangle_{\mathscr{H}}$	skalární součin na Hilbertově prostoru $\mathscr{H}$
$\Vert . \Vert_{\mathscr{H}}$	norma na Hilbertově prostoru $\mathscr{H}$
$[.,.]_x$	"Lagrangeova" závorka (viz (D.3))
$AC^n(J)$	prostor funkcí, jejichž derivace do n-tého řádu jsou absolutně spojité na množině J, $AC \equiv AC^0$
arc	zobrazení $\mathbb{R}^2 \to \langle 0, 2\pi),\ x = r(\cos\varphi, \sin\varphi) \mapsto \varphi$
$\mathscr{B}(\mathscr{H})$	prostor omezených operátorů na Hilbertově prostoru $\mathscr{H}$
$\mathbb{C}$	těleso komplexních čísel
δ^n	Diracova delta funkce na $\mathbb{R}^n$
$D(A)$	prostor testovacích funkcí s nosičem ležícím v množině A
$D'(A)$	prostor zobecněných funkcí (spojitých funkcionálů na $D(A)$)
$Dom(.)$	definiční obor
$H_n^{\binom{(1)}{(2)}}$	Hankelovy funkce (viz dodatek D.2)
H^m	m-tý Sobolevův prostor (viz dodatek D.4)
$\mathscr{F}$	Fourierova transformace, resp. Fourier-Plancherelův operátor; pro $f \in L^1(\mathbb{R}^n, \mathrm{d}^n x)$ klademe $(\mathscr{F} f)(\xi) := (2\pi)^{-\frac{n}{2}} \int_{\mathbb{R}^n} \mathrm{e}^{i\langle x,\xi\rangle} f(x) \mathrm{d}^n x, \quad \xi \in \mathbb{R}^n$
$f(a_\pm)$	limita funkce f v bodě a zprava (resp. zleva)
$\Im$	imaginární část
Id_A	identický operátor na prostoru A
$Ker(.)$	jádro operátoru
$L^{1(2)}(M, \mathrm{d}\mu)$	prostor (kvadraticky) integrabilních funkcí na množině M s mírou μ
$L^{1(2)}_{loc}(M, \mathrm{d}\mu)$	prostor lokálně (kvadraticky) integrabilních funkcí na množině M s mírou μ
$\mathbb{N}$	těleso přirozených čísel, $\mathbb{N}_0 := \mathbb{N} \cup \{0\}$
$\varrho(.)$	rezolventní množina operátoru: $\varrho(.) = \mathbb{C} \setminus \sigma(.)$
$\Re$	reálná část
$\mathbb{R}$	těleso reálných čísel
$\mathbb{R}^\pm$	kladná (resp. záporná) poloosa: $\mathbb{R}^+ := (0, \infty),\ \mathbb{R}^- := (-\infty, 0)$
$Ran(.)$	obor hodnot
$\sigma_{ac,c,ess,p,r}$	absolutně spojitá, spojitá, esenciální, bodová a reziduální část spektra
S^1	jednotková kružnice
$\mathscr{S}(\mathbb{R}^n)$	Schwartzův prostor (prostor rychle ubývajících funkcí)
$\mathscr{S}'(\mathbb{R}^n)$	prostor temperovaných distribucí (spojitých funkcionálů na $\mathscr{S}(\mathbb{R}^n)$)
$span\{.\}$	lineární obal
$Tr(.)$	stopa operátoru: $Tr(A) := \sum_n \langle \varphi_n, A\varphi_n \rangle$, kde $\{\varphi_n\}$ je ortonormální báze separabilního Hilbertova prostoru

Úvod

Bodová interakce (někdy též nazývaná δ interakce) si zasluhuje pozornost již jen z hlediska matematického, neboť představuje jeden z mála řešitelných modelů kvantové mechaniky [1].

Na následujících stránkách si detailně popíšeme hned dva způsoby zavedení bodové interakce, vyšetříme spektrum získaného hamiltoniánu a vyřešíme úlohu rozptylu, tj. nalezneme operátor a amplitudu rozptylu.

Pomocná tvrzení, některé vlastnosti cylindrických funkcí, základní poznatky o Sobolevových prostorech a minimum teorie rozptylu jsou pro přehlednost odsunuty do dodatků.

Použité postupy lze zobecnit a aplikovat na další modely s potenciály nesenými množinou nulové míry. Význam výzkumného úkolu je převážně studijní jakožto příprava na další práci, případně může toto dílko posloužit dalším studentům v uvedení do problematiky.

Bodová interakce ve dvou dimenzích

Bodovou interakci nejprve zavedeme metodou samosdružených rozšíření [1], poté ukážeme, že ke stejnému výsledku je možné dospět nalezením samosdruženého operátoru asociovaného vhodně zvolenou kvadratickou formou [2]. Oba postupy lze přímo zobecnit pro konečný počet bodů. Pro případ jednobodové interakce v počátku vyřešíme úlohu rozptylu.

1 Metoda samosdružených rozšíření

Vyjděme z hustě definovaného operátoru H na $\mathscr{H} = L^2(\mathbb{R}^2, \mathrm{d}^2x)$

$$H := -\Delta = -\frac{\partial^2}{\partial x_1^2} - \frac{\partial^2}{\partial x_2^2}, \quad Dom(H) := D(\mathbb{R}^2 \setminus \{0\}) \tag{1}$$

Operátor H nejprve převedeme do polárních souřadnic a použijeme rozklad do parciálních vln. Jelikož následující prostory jsou izometrické [3]

$$\begin{aligned} \mathscr{H} = L^2(\mathbb{R}^2, \mathrm{d}^2x) &\overset{U}{\equiv} L^2(\mathbb{R}^+ \times (0, 2\pi), r\mathrm{d}r\mathrm{d}\varphi) \equiv L^2(\mathbb{R}^+, r\mathrm{d}r) \otimes L^2((0, 2\pi), \mathrm{d}\varphi) \\ &\equiv \bigoplus_{n=-\infty}^{\infty} L^2(\mathbb{R}^+, r\mathrm{d}r) \otimes Y_n =: \mathscr{H}', \quad \text{kde } Y_n(\varphi) := \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\mathrm{e}^{in\varphi}, \end{aligned} \tag{2}$$

každému prvku $g \in \mathscr{H}$ můžeme přiřadit právě jeden prvek $f \in \mathscr{H}'$ takový, že

$$\begin{aligned} (U(g))(r, \varphi) &:= g(r\cos\varphi, r\sin\varphi) = f(r, \varphi) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} f_n(r) Y_n(\varphi), \\ &\text{kde } f_n(r) = \langle Y_n, f \rangle_{L^2((0,2\pi),\mathrm{d}\varphi)}, \end{aligned}$$

přičemž $\|g\|_{\mathscr{H}} = \|f\|_{\mathscr{H}'}$.

Izometrii (2) odpovídá operátorový rozklad

$$\begin{aligned} H &= U^{-1} H_{polar} U = U^{-1} \left(\sum_{n=-\infty}^{\infty} H_n \otimes \mathrm{Id}_{span\{Y_n\}} \right) U, \quad \text{kde} \\ H_{polar} &= -\frac{\partial}{\partial r^2} - \frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial r} - \frac{1}{r^2}\frac{\partial^2}{\partial \varphi^2}, \quad Dom(H_{polar}) = D(\mathbb{R}^+ \times (0, 2\pi)) \\ H_n &= -\frac{\partial^2}{\partial r^2} - \frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial r} + \frac{n^2}{r^2}, \quad Dom(H_n) = D(\mathbb{R}^+) \end{aligned}$$

Diferenciální výraz pro působení operátoru H_n zjednodušíme další izometrií $V:\ L^2(\mathbb{R}^+, r\mathrm{d}r) \to L^2(\mathbb{R}^+, \mathrm{d}r),\ f(r) \overset{V}{\mapsto} \sqrt{r} f(r)$ na

$$h_n := VH_nV^{-1} = -\frac{\mathrm{d}^2}{\mathrm{d}r^2} + \frac{n^2 - \frac{1}{4}}{r^2}, \quad Dom(h_n) = D(\mathbb{R}^+) \tag{3}$$

Nyní můžeme přeformulovat úlohu nalezení samosdružených rozšíření operátoru H.

Tvrzení 1 *Všechna rotačně symetrická[1] samosdružená rozšíření operátoru H získáme z množiny všech samosdružených rozšíření operátorů h_n, $n \in \mathbb{Z}$ následujícím způsobem. Buď $\tilde{h}_n$ libovolné pevné samosdružené rozšíření operátoru h_n pro každé $n \in \mathbb{Z}$, potom*

$$\tilde{H} := U^{-1}\left(\bigoplus_{n=-\infty}^{\infty} V^{-1}\tilde{h}_n V \otimes \mathrm{Id}_{span\{Y_n\}}\right) U$$

je samosdružené rozšíření operátoru H.

Důkaz Operátory svázané unitární transformací jsou samosdružené právě současně. Tvrzení tedy plyne z předchozího.

■

Tvrzení 2 *Operátor $h_n^\dagger$ hermitovsky sdružený k operátoru (3) má tvar*

$$h_n^\dagger = -\frac{\mathrm{d}^2}{\mathrm{d}r^2} + \frac{n^2 - \frac{1}{4}}{r^2}$$
$$Dom(h_n^\dagger) = \left\{ f \in L^2(\mathbb{R}^+, \mathrm{d}r) |\ f \in AC^1(\mathbb{R}^+),\ \left(-f'' + \frac{n^2 - \frac{1}{4}}{r^2} f\right) \in L^2(\mathbb{R}^+, \mathrm{d}r) \right\}.$$

Operátor h_n je tedy symetrický pro všechna $n \in \mathbb{Z}$.

Důkaz Operátor h_n je hustě definován, má tedy smysl hledat sdružený operátor. Definice sdruženého operátoru říká, že

$$f \in Dom(h_n^\dagger) \Leftrightarrow \exists g \in L^2(\mathbb{R}^+, \mathrm{d}r) |\ \forall \varphi \in Dom(h_n) \equiv D(\mathbb{R}^+)\ \langle f, h_n\varphi \rangle = \langle g, \varphi \rangle, \tag{4}$$

což je vzhledem k tomu, že $f, g \in L^2(\mathbb{R}^+, \mathrm{d}r) \subset L^1_{loc}(\mathbb{R}^+, \mathrm{d}r)$, ekvivalentní podmínce

$$f \in Dom(h_n^\dagger) \Leftrightarrow \exists g \in L^2(\mathbb{R}^+, \mathrm{d}r) |\ \forall \varphi \in D(\mathbb{R}^+)\ (f, h_n\varphi) = \left(-f'' + \frac{n^2 - \frac{1}{4}}{r^2} f, \varphi\right) = (g, \varphi)$$
$$\Leftrightarrow \exists g \in L^2(\mathbb{R}^+, \mathrm{d}r) |\ -f'' + \frac{n^2 - \frac{1}{4}}{r^2} f = g \text{ v } D'(\mathbb{R}^+)$$

[1] tj. rozšíření, která pro všechna $n \in \mathbb{Z}$ komutují s projektorem $\mathrm{Id}_{L^2(\mathbb{R}^+, r\mathrm{d}r)} \otimes P_n$, kde $P_n := \langle Y_n, . \rangle Y_n$

Patří-li tedy f do $Dom(h_n^\dagger)$, pak podle důsledku D.4 f nutně leží v $AC^1(\mathbb{R}^+)$. Celkem jsme dostali následující implikaci

$$f \in Dom(h_n^\dagger) \Rightarrow$$
$$f \in M_n := \left\{ f \in L^2(\mathbb{R}^+, \mathrm{d}r) |\ f \in AC^1(\mathbb{R}^+),\ \left(-f'' + \frac{n^2 - \frac{1}{4}}{r^2} f \right) \in L^2(\mathbb{R}^+, \mathrm{d}r) \right\}.$$

Pro libovolné $f \in M_n$ pevné a každé $\varphi \in D(\mathbb{R}^+)$ dostaneme za použití Lagrangeovy formule (D.4) [2]

$$\langle f, h_n \varphi \rangle - \langle -f'' + \frac{n^2 - \frac{1}{4}}{r^2} f, \varphi \rangle = [f, \varphi]_\infty - [f, \varphi]_0 = 0 - 0 = 0.$$

Našli jsme tedy $g := -f'' + \frac{n^2 - \frac{1}{4}}{r^2} f \in L^2(\mathbb{R}^+, \mathrm{d}r)$ takové, že platí pravá část ekvivalence (4). $Dom(h_n^\dagger) = M_n$, $h_n \subset h_n^\dagger$ pro $n \in \mathbb{Z}$.

■

Tvrzení 3 *Pro každé $n \in \mathbb{Z} \setminus \{0\}$ je operátor h_n v podstatě samosdružený $\bar{h}_n = h_n^\dagger$. Operátor h_0 má indexy defektu (1,1), jeho uzávěr je tvaru*

$$\bar{h}_0 = -\frac{\mathrm{d}^2}{\mathrm{d}r^2} - \frac{1}{4r^2}$$
$$Dom\left(\bar{h}_0\right) = \left\{ f \in L^2(\mathbb{R}^+, \mathrm{d}r) |\ f \in AC^1(\mathbb{R}^+),\ \left(-f'' - \frac{1}{4r^2} f \right) \in L^2(\mathbb{R}^+, \mathrm{d}r), \right.$$
$$\left. [g, f]_0 = [\bar{g}, f]_0 = 0 \right\},$$

kde $g(r) := \sqrt{r} H_0^{(1)}(\sqrt{i} r)$.

Důkaz Nalezněme nejprve defektní podprostor $Ker(h_n^\dagger - i)$, tzn. řešme na $Dom(h_n^\dagger)$ diferenciální rovnici

$$-g'' + \frac{n^2 - \frac{1}{4}}{r^2} g = ig.$$

Za lineárně nezávislá řešení této rovnice můžeme vzít dvojici $\sqrt{r} H_n^{(1)}(\sqrt{i} r)$ a $\sqrt{r} H_n^{(2)}(\sqrt{i} r)$ (viz dodatek D.2). Má-li řešení g navíc ležet v $Dom(h_n^\dagger)$, pak podle důsledku D.9 nutně $\lim_{r \to \infty} g(r) = 0$. Vzhledem k (D.12) a (D.13) tedy můžeme uvažovat pouze řešení $g = \sqrt{r} H_n^{(1)}(\sqrt{i} r)$, to je však kvadraticky integrabilní pouze pro $|n| < 1$ [4], což v našem případě znamená

$$Ker(h_n^\dagger - i) = \begin{cases} \{0\} & \text{pro } n \in \mathbb{Z} \setminus \{0\} \\ span\left\{ \sqrt{r} H_0^{(1)}(\sqrt{i} r) \right\} & \text{pro } n = 0 \end{cases}$$

[2] resp. dvakrát provedeme integraci per partes

Operátor $h_n^\dagger$ je reálný a proto $Ker(h_n^\dagger + i) = \Big(Ker(h_n^\dagger - i)\Big)^*$.

Indexy defektu operátoru h_0 jsou tedy opravdu (1,1). Pro $n \in \mathbb{Z} \setminus \{0\}$ platí $Ker(h_n^\dagger \pm i) = \{0\}$ a podle kritéria podstatné samosdruženosti [3] je operátor h_n v podstatě samosdružený $\bar{h}_n = h_n^\dagger$.

Ještě zbývá nalézt uzávěr operátoru h_0. Použitím Lagrangeovy formule (D.4) v lemmatu o uzávěru D.10 dostaneme

$$Dom(\bar{h}_0) = \Big\{ f \in Dom(h_0^\dagger) |\ [g, f]_\infty - [g, f]_0 = [\bar{g}, f]_\infty - [\bar{g}, f]_0 = 0 \Big\}$$

Navíc podle důsledku D.9 pro všechny funkce $f, h \in Dom(h_0^\dagger)$ (a tedy i pro g a $\bar{g}$) platí $[h, f]_\infty = 0$.

■

Tvrzení 4 *Každé samosdružené rozšíření operátoru $\bar{h}_0$ lze charakterizovat parametrem $\alpha \in (-\infty, \infty\rangle$:*

$$\begin{aligned} h_{0,\alpha} &= -\frac{\mathrm{d}^2}{\mathrm{d}r^2} - \frac{1}{4r^2} \\ Dom(h_{0,\alpha}) &= \left\{ f \in L^2(\mathbb{R}^+, \mathrm{d}r) \cap AC^1(\mathbb{R}^+) |\ \left(-f'' - \frac{1}{r^2} f \right) \in L^2(\mathbb{R}^+, \mathrm{d}r),\ 2\pi\alpha f_0 + f_1 = 0 \right\}, \end{aligned}$$

kde

$$f_0 := \lim_{r \to 0+} (\sqrt{r} \ln(r))^{-1} f(r), \quad f_1 := \lim_{r \to 0+} \frac{1}{\sqrt{r}} \big(f(r) - f_0 \sqrt{r} \ln r \big)$$

Důkaz Podle druhé von Neumannovy formule [3] mají samosdružená rozšíření operátoru $\bar{h}_0$ tvar

$$\begin{aligned} h_{0,\beta} f &= \bar{h}_0 \tilde{f} + i\xi \left(g + \mathrm{e}^{i\beta} \bar{g} \right), \quad \beta \in \langle 0, 2\pi) \\ Dom(h_{0,\beta}) &= \left\{ f \in L^2(\mathbb{R}^+, \mathrm{d}r) |\ f = \tilde{f} + \xi \left(g - \mathrm{e}^{i\beta} \bar{g} \right),\ \tilde{f} \in Dom(\bar{h}_0),\ \xi \in \mathbb{C} \right\}, \end{aligned}$$

kde opět $g(r) := \sqrt{r} H_0^{(1)}(\sqrt{i} r)$.

Nejprve ukážeme, že pro všechna $\tilde{f} \in Dom(\bar{h}_0)$ jsou limity $\tilde{f}_0, \tilde{f}_1$ nulové. Z podmínek $[g, \tilde{f}] = [\bar{g}, \tilde{f}] = 0$ plyne

$$\begin{aligned} \Re g'(0+) \tilde{f}(0+) - \Re g(0+) \tilde{f}'(0+) = 0 \\ \Im g'(0+) \tilde{f}(0+) - \Im g(0+) \tilde{f}'(0+) = 0. \end{aligned}$$

Za $g(0+)$ a $g'(0+)$ dosadíme z rozvojů pro Hankelovy funkce (viz poznámku D.11) a po elementárních úpravách dostaneme

$$\begin{aligned} \tilde{f}(0+) \left(\frac{1}{\sqrt{r}} + O(\sqrt{r}) \right) &\overset{r \to 0+}{\sim} 0 \\ \tilde{f}'(0+) \left(\sqrt{r} + O(r^{\frac{5}{2}} \ln r) \right) &\overset{r \to 0+}{\sim} 0, \end{aligned}$$

což znamená, že

$$\lim_{r\to 0+} \frac{\tilde f(r)}{\sqrt{r}} = 0, \quad \lim_{r\to 0+} \tilde f'(r)\sqrt{r} = 0.$$

Nulovost první z limit implikuje $\tilde f_0 = \tilde f_1 = 0$.

Zbývající část $f \in Dom(h_{0,\beta})$ můžeme rozvinout:

$$\xi\left(g(r) - e^{i\beta}\bar g(r)\right) \overset{r\to 0+}{\sim} \xi\frac{2i}{\pi}\left(1+e^{i\beta}\right)\sqrt{r}\ln r + \xi\left(A - e^{i\beta}\bar A\right)\sqrt{r} = f_0\sqrt{r}\ln r + f_1\sqrt{r},$$

kde $A := \frac{1}{2} - \frac{2i}{\pi}(\ln 2 + \Psi(1))$. Pro poměr $\frac{f_1}{f_0}$ dostaneme vztah

$$\frac{f_1}{f_0} = \frac{\pi}{2i}\left(i\Im A + \Re A\frac{1-e^{i\beta}}{1+e^{i\beta}}\right) = -\ln 2 - \Psi(1) - \frac{\pi}{4}\tan\frac{\beta}{2},$$

který při označení

$$\alpha := \frac{1}{2\pi}\left(\ln 2 + \Psi(1) + \frac{\pi}{4}\tan\frac{\beta}{2}\right) \tag{5}$$

přejde na $2\pi\alpha f_0 + f_1 = 0,\ \alpha \in (-\infty, \infty\rangle$. Ověřili jsme tedy inkluzi $h_{0,\beta} \subset h_{0,\alpha}$, kde α souvisí s β formulí (5).

Nechť nyní $f \in Dom(h_{0,\alpha}) \subset Dom(h_0^\dagger)$. Rozložíme-li f podle první von Neumannovy formule (D.8), stačí již jen ověřit, že v $Dom(h_{0,\alpha})$ leží právě taková lineární kombinace vektorů g a $\bar g$, která se vyskytuje v $Dom(h_{0,\beta})$.

Vezměme tedy až na násobek obecný prvek podprostoru $Ker(h_0^\dagger - i) \dotplus Ker(h_0^\dagger - i)$: $g + \gamma\bar g,\ \gamma \in \mathbb{C}$. Z jeho rozvoje v pravém okolí nuly dostaneme

$$(g+\gamma\bar g)_0 = \frac{2i}{\pi}(1-\gamma), \quad (g+\gamma\bar g)_1 = \frac{1}{2}(1+\gamma) - \frac{2i}{\pi}(\ln 2 + \Psi(1))(1-\gamma),$$

přičemž požadujeme

$$-2\pi\alpha = \frac{(g+\gamma\bar g)_1}{(g+\gamma\bar g)_0} = -\ln 2 - \Psi(1) + \frac{\pi}{4i}\frac{1+\gamma}{1-\gamma},$$

což s ohledem na označení (5) znamená

$$i\frac{1+\gamma}{1-\gamma} = \tan\frac{\beta}{2} = i\frac{1-e^{i\beta}}{1+e^{i\beta}}$$

a tedy $\gamma = -e^{i\beta}$.

■

Poznámka 5 *Výsledný operátor zkonstruovaný v tvrzení 1 budeme značit indexem α podle částečného hamiltoniánu $h_{0,\alpha}$, který jako jediný není společný všem samosdruženým rozšířením operátoru (1).*

Pro $\alpha = \infty$ dostaneme hamiltonián volné částice s hmotností $m = \frac{1}{2}$

$$H_\infty = -\Delta, \quad Dom(H_\infty) = H^2(\mathbb{R}^2) \tag{6}$$

Tvrzení 6 *Greenova funkce pro rezolventu operátoru H_α v bodě $z \in \mathbb{C} \setminus \mathbb{R}$ má tvar*

$$\begin{aligned} \mathcal{G}_z^\alpha(x,y) &= \mathcal{G}_z(x-y) + \lambda_\alpha(z)\mathcal{G}_z(x)\mathcal{G}_z(y), \ \textit{kde} \\ \mathcal{G}_z(x-y) &= \frac{i}{4} H_0^{(1)}(\sqrt{z}|x-y|) \\ \lambda_\alpha(z) &= 2\pi \left(2\pi\alpha - \Psi(1) + \ln \frac{\sqrt{z}}{2i} \right)^{-1} \end{aligned} \tag{7}$$

Důkaz Samosdružená rozšíření operátoru H se liší jen na podprostoru $\mathscr{H}_0 := L^2(\mathbb{R}^+, r\mathrm{d}r) \otimes$ *span* $\{Y_0\}$ z rozkladu (2) a tudíž právě na něj se můžeme omezit při hledání podprostorů $Ker(H^\dagger - z)$ a $Ker(H^\dagger - \bar{z})$, $z \in \mathbb{C} \setminus \mathbb{R}$.

Operátor $H^\dagger$ působí na netriviální části $\mathscr{H}_0$ jako

$$\begin{aligned} H_0^\dagger &= -\frac{\partial^2}{\partial r^2} - \frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial r} \\ Dom(H_0^\dagger) &= \left\{ f \in L^2(\mathbb{R}^+, r\mathrm{d}r) |\ f \in AC^1(\mathbb{R}^+),\ \left(-\frac{\partial f^2}{\partial r^2} - \frac{1}{r}\frac{\partial f}{\partial r} \right) \in L^2(\mathbb{R}^+, r\mathrm{d}r) \right\}, \end{aligned}$$

odkud spočteme

$$Ker(H^\dagger - z) = span \left\{ H_0^{(1)}(\sqrt{z}r) \right\}, \quad Ker(H^\dagger - \bar{z}) = span \left\{ \overline{H_0^{(1)}(\sqrt{z}r)} \right\}.$$

Z Kreinovy formule (viz větu D.12) dostaneme pro rezolventu operátoru H_α v bodě z

$$(H_\alpha - z)^{-1} = (H_\infty - z)^{-1} + \lambda_\alpha(z)\langle \overline{\mathcal{G}_z}, . \rangle \mathcal{G}_z, \quad \lambda_\alpha(z) \in \mathbb{C} \tag{8}$$

a pro příslušnou Greenovu funkci

$$\mathcal{G}_z^\alpha(x,y) = \mathcal{G}_z(x-y) + \lambda_\alpha(z)\mathcal{G}_z(x)\mathcal{G}_z(y),$$

neboť Greenova funkce rezolventy operátoru H_∞ je právě $\mathcal{G}_z$ (viz dodatek D.6).

Greenova funkce $\mathcal{G}_z^\alpha(x,y)$ musí pro libovolné $y \neq 0$ pevné splňovat hraniční podmínku samosdruženého rozšíření H_α

$$\begin{aligned} &2\pi\alpha f_0 + f_1 = 0, \ \text{kde} \\ &f_0 = \lim_{r \to 0+} (\ln r)^{-1} f(r), \quad f_1 = \lim_{r \to 0+} (f(r) - f_0 \ln r). \end{aligned} \tag{9}$$

S ohledem na rozvoj (D.15) platí pro $\mathcal{G}_z^\alpha(x,y)$ v okolí $|x| = 0$ vztah

$$\mathcal{G}_z^\alpha(x,y) \overset{x \to 0}{\sim} \mathcal{G}_z(y) + \frac{i}{4}\lambda_\alpha(z) \left(1 + \frac{2i}{\pi} \left(\ln \frac{\sqrt{z}|x|}{2} - \Psi(1) \right) \right) \mathcal{G}_z(y),$$

ze kterého při požadavku platnosti podmínky (9) dostaneme

$$\lambda_\alpha(z) = 2\pi \left(2\pi\alpha - \Psi(1) + \ln \frac{\sqrt{z}}{2i} \right)^{-1}$$

∎

Tvrzení 7 *Každý prvek $f \in Dom(H_\alpha)$ lze jednoznačně zapsat ve tvaru*

$$f(x) = \tilde{f}_z(x) + \lambda_\alpha(z)\tilde{f}_z(0)\mathcal{G}_z(x), \quad x \neq 0, \tag{10}$$

kde $z \in \mathbb{C} \setminus \mathbb{R}$ a $\tilde{f}_z \in Dom(H_\infty) \equiv H^2(\mathbb{R}^2)$. Přitom platí

$$(H_\alpha - z)f = (H_\infty - z)\tilde{f}_z. \tag{11}$$

Důkaz Vezměme libovolné $z \in \mathbb{C}\setminus\mathbb{R}$ pevné. S pomocí formule pro rezolventy (8) dostaneme

$$\begin{aligned} Dom(H_\alpha) &= (H_\alpha - z)^{-1}\mathscr{H} = (H_\alpha - z)^{-1}(H_\infty - z)Dom(H_\infty) \\ &= \left[(H_\infty - z)^{-1} + \lambda_\alpha(z)\langle\overline{\mathcal{G}_z}, .\rangle\mathcal{G}_z\right](H_\infty - z)Dom(H_\infty). \end{aligned} \tag{12}$$

Pro libovolné $\tilde{f}_z \in Dom(H_\infty)$ platí

$$\langle\overline{\mathcal{G}_z}, (H_\infty - z)\tilde{f}_z\rangle = \{per\ partes\} = \int_{\mathbb{R}^2} \tilde{f}_z(x)(-\Delta - z)\mathcal{G}_z(x)\mathrm{d}x^2 = \int_{\mathbb{R}^2} \tilde{f}_z(x)\delta^2(x)\mathrm{d}x^2 = \tilde{f}_z(0),$$

což spolu s (12) dává dokazovaný rozklad (10). Navíc platí

$$f = (H_\alpha - z)^{-1}(H_\infty - z)\tilde{f}_z \in Dom(H_\alpha)$$

a tedy i vztah (11).

Ještě zbývá ověřit jednoznačnost rozkladu . Buďte $f_1, f_2 \in Dom(H_\infty)$ takové, že

$$f(x) = f_{1,2}(x) + \lambda_\alpha(z)f_{1,2}(0)\mathcal{G}_z(x), \quad x \neq 0$$

a tedy

$$(f_1 - f_2)(x) = \lambda_\alpha(z)(f_2 - f_1)(0)\mathcal{G}_z(x), \quad x \neq 0.$$

Poněvadž funkce $(f_1 - f_2)$ je spojitá na $\mathbb{R}^2$, kdežto funkce $\mathcal{G}_z$ má v bodě $x = 0$ nespojitost, musí platit $f_1(0) = f_2(0)$ a následně $f_1 = f_2$.

■

Tvrzení 8 *Spektrum operátoru H_α má tvar*

$$\begin{aligned} &\sigma_{ess}(H_\alpha) = \sigma_{ac}(H_\alpha) = \langle 0, \infty) && \textit{pro } \alpha \in (-\infty, \infty\rangle \\ &\sigma_p(H_\alpha) = \left\{-4\mathrm{e}^{2[-2\pi\alpha + \Psi(1)]}\right\} && \textit{pro } \alpha \in \mathbb{R} \\ &\sigma_p(H_\infty) = \varnothing \end{aligned}$$

Důkaz Bodové spektrum nalezneme vyšetřením singularit rezolventy. Rovnice

$$\frac{1}{\lambda_\alpha(z)} = 0$$

má na $\mathbb{R}$ jediné řešení $z = -4\mathrm{e}^{2[-2\pi\alpha + \Psi(1)]} < 0$.

Je známo, že pro spektrum operátoru H_∞ platí $\sigma(H_\infty) = \sigma_{ess}(H_\infty) = \sigma_{ac}(H_\infty) = \langle 0, \infty)$. Podle vztahu (8) je rozdíl rezolvent $R_{H_\infty}(z)$ a $R_{H_\alpha}(z)$ jednodimenzionální (tedy nutně trace class[3]) operátor. Absolutně spojitá i esenciální část spektra je invariantní vůči trace class poruchám [5][4], tzn. $\sigma_{ac,ess}(R_{H_\alpha}(z)) = \sigma_{ac,ess}(R_{H_\infty}(z))$.

Jelikož rezolventu libovolného samosdruženého operátoru H lze pro každé $z \in \varrho(H)$ zapsat ve tvaru [3]

$$R_H(z) = \int\limits_{\sigma(H)} \frac{1}{t-z} \mathrm{d}E_H(t),$$

kde $E_H(.)$ je projektorová míra operátoru H, odkud

$$\sigma_{\substack{ac\\ess}}(H) = \left\{ \lambda \in \mathbb{R} | \ \frac{1}{\lambda - z} \in \sigma_{\substack{ac\\ess}}(R_H(z)) \right\},$$

rovnají se sobě i absolutně spojitá a esenciální spektra operátorů H_α a H_∞: $\sigma_{ess}(H_\alpha) = \sigma_{ac}(H_\alpha) = \langle 0, \infty)$.

Spektrum libovolného uzavřeného operátoru lze rozložit na ne nutně disjunktní části

$$\sigma = \sigma_{ess} \cup \sigma_p \cup \sigma_r$$

Navíc pro samosdružené (a tedy nutně normální) operátory platí $\sigma_r = \emptyset$. Nalezli jsme tedy celé spektrum operátoru H_α.

$\blacksquare$

Poznámka 9 *Bodovou interakci v libovolném bodě $y \in \mathbb{R}^2$ zavedeme stejným způsobem jako v počátku s tím, že nejprve provedeme posunutí $y \mapsto 0$.*

2 Kvadratická forma pro bodovou interakci

Motivováni výsledky kapitoly 1, zavedeme seskvilineární formu F_α na $L^2(\mathbb{R}^2, \mathrm{d}^2x)$ následovně:

$$\begin{aligned} &Dom(F_\alpha) := \left\{ u \in L^2(\mathbb{R}^2, \mathrm{d}^2x) | \ \exists Q_u \in \mathbb{C} : \ (u - Q_u\mathcal{G}_z) \in H^1(\mathbb{R}^2) \right\} \\ &F_\alpha(u,v) := \mathcal{F}^z(u,v) + \Phi^z_\alpha(Q_u, Q_v) \end{aligned} \tag{13}$$

$$\begin{aligned} &\mathcal{F}^z(u,v) := \langle \nabla(u - Q_u\mathcal{G}_z), \nabla(v - Q_v\mathcal{G}_z)\rangle - z\langle u - Q_u\mathcal{G}_z, v - Q_v\mathcal{G}_z\rangle + z\langle u, v\rangle \\ &\Phi^z_\alpha(Q_u, Q_v) := \frac{1}{2\pi}\left(2\pi\alpha - \Psi(1) + \ln\frac{\sqrt{z}}{2i}\right)\bar{Q}_u Q_v =: \Gamma_\alpha(z)\bar{Q}_u Q_v, \end{aligned}$$

kde $z < 0$, $\alpha \in \mathbb{R}$ a $\mathcal{G}_z$ značí Greenovu funkci operátoru $H_\infty = -\Delta$, $Dom(H_\infty) = H^2(\mathbb{R}^2)$:

$$\mathcal{G}_z(x-y) = \frac{i}{4} H_0^{(1)}(\sqrt{z}|x-y|) \in \mathbb{R} \quad \text{pro } z < 0$$

[3] Operátor A nazýváme trace class, pokud má konečnou stopu $Tr(A) < \infty$.
[4] Esenciální spektrum je dokonce invariantní vůči kompaktním poruchám.

Poznámka 10 *Forma F_α nezávisí na volbě $z < 0$.*

Důkaz Jelikož pro libovolné $z, z' < 0$ patří $\mathcal{G}_z - \mathcal{G}_{z'}$ do $H^1(\mathbb{R}^2)$, $Dom(F_\alpha)$ není na volbě z závislý. Navíc pro libovolné $u \in Dom(F_\alpha)$ a $z, z' < 0$ platí

$$\begin{aligned}
\mathcal{F}^z[u] - \mathcal{F}^{z'}[u] &= \int\limits_{\mathbb{R}^2} \left\{\nabla(\mathcal{G}_z - \mathcal{G}_{z'})\nabla\left[|Q_u|^2\mathcal{G}_z + |Q_u|^2\mathcal{G}_{z'} - (Q_u\bar{u} + \bar{Q}_u u)\right]\right\} \\
&+ \int\limits_{\mathbb{R}^2} \left\{z(Q_u\bar{u} + \bar{Q}_u u)\mathcal{G}_z - z|Q_u|^2\mathcal{G}_z^2 - z'(Q_u\bar{u} + \bar{Q}_u u)\mathcal{G}_{z'} + z'|Q_u|^2\mathcal{G}_{z'}^2\right\} \\
&= \{per\ partes\} = -\int\limits_{\mathbb{R}^2} \left\{\Delta(\mathcal{G}_z - \mathcal{G}_{z'})\left[|Q_u|^2\mathcal{G}_z + |Q_u|^2\mathcal{G}_{z'} - (Q_u\bar{u} + \bar{Q}_u u)\right]\right\} \\
&+ \int\limits_{\mathbb{R}^2} \left\{z(Q_u\bar{u} + \bar{Q}_u u)\mathcal{G}_z - z|Q_u|^2\mathcal{G}_z^2 - z'(Q_u\bar{u} + \bar{Q}_u u)\mathcal{G}_{z'} + z'|Q_u|^2\mathcal{G}_{z'}^2\right\} \\
&= \{-\Delta\mathcal{G}_z = z\mathcal{G}_z\} = (z - z')|Q_u|^2 \int\limits_{\mathbb{R}^2} \mathcal{G}_z\mathcal{G}_{z'} \\
&= \left\{\textit{rezolventní formule: } R(z) - R(z') = (z - z')R(z)R(z')\right\} \\
&= |Q_u|^2 \lim_{x\to 0}(\mathcal{G}_z - \mathcal{G}_{z'})(x) = \{podle\ (D.14)\} = -\frac{1}{2\pi}(\ln\sqrt{z} - \ln\sqrt{z'})|Q_u|^2 = \\
&= [\Gamma_\alpha(z') - \Gamma_\alpha(z)]|Q_u|^2 = \Phi_\alpha^{z'}[Q_u] - \Phi_\alpha^z[Q_u]
\end{aligned}$$

■

Tvrzení 11 *Kvadratická forma F_α je symetrická, zdola omezená a uzavřená.*

Důkaz Pro libovolné $\alpha \in \mathbb{R}$ pevné lze volit $z(\alpha) < 0$ tak, aby $\Gamma_\alpha(z(\alpha)) > 0$. Odhadem

$$F_\alpha[u] = \|\nabla(u - Q_u\mathcal{G}_{z(\alpha)})\|^2 - z(\alpha)\|u - Q_u\mathcal{G}_{z(\alpha)}\|^2 + z(\alpha)\|u\|^2 + \Gamma_\alpha(z(\alpha))|Q_u|^2 \geq z(\alpha)\|u\|^2 \quad (14)$$

jsme ověřili, že F_α je zdola omezená.

Forma F_α je uzavřená, právě když je uzavřená forma

$$F_\alpha^{z(\alpha)} := F_\alpha - z(\alpha)\|u\|^2, \ Dom(F_\alpha^{z(\alpha)}) := Dom(F_\alpha).$$

Buď $\{u_n\} \subset Dom(F_\alpha^{z(\alpha)})$ libovolná posloupnost taková, že

$$\lim_{m,n\to\infty} F_\alpha^{z(\alpha)}[u_n - u_m] = 0 \quad (15)$$

Položme $w_n := u_n - Q_{u_n}\mathcal{G}_{z(\alpha)}$. Předpoklad (15) implikuje

$$\begin{aligned}
&\lim_{m,n\to\infty} |Q_{u_n - u_m}| = \lim_{m,n\to\infty} |Q_{u_n} - Q_{u_m}| = 0 \\
&\lim_{m,n\to\infty} \|\nabla(w_n - w_m)\| = 0, \ \lim_{m,n\to\infty} \|w_n - w_m\| = 0 \quad (16)
\end{aligned}$$

Vztahy (16) říkají, že $\lim_{m,n\to\infty} \|w_n - w_m\|_{H^1(\mathbb{R}^2)} = 0$. Prostory $\mathbb{C}$ a $H^1(\mathbb{R}^2)$ jsou úplné (viz poznámku D.16), a tudíž existují $Q \in \mathbb{C}$ a $w \in H^1(\mathbb{R}^2)$ taková, že

$$\lim_{n\to\infty} |Q - Q_{u_n}| = 0$$
$$\lim_{n\to\infty} \|\nabla(w - w_n)\| = 0, \quad \lim_{m,n\to\infty} \|w - w_n\| = 0$$

Pro $u := w + Q\mathcal{G}_{z(\alpha)}$ platí

$$u \in Dom(F_\alpha^{z(\alpha)}), \ \lim_{n\to\infty} F_\alpha^{z(\alpha)}[u - u_n] = 0,$$

a forma $F_\alpha^{z(\alpha)}$ je tudíž uzavřená.

Symetrie formy je ihned patrná ze symetrie skalárního součinu.

■

Tvrzení 12 *Forma F_α asociuje samosdružený operátor $-\Delta_\alpha$:*

$$Dom(-\Delta_\alpha) = \left\{u \in L^2(\mathbb{R}^2) |\ \exists Q_u \in \mathbb{C} : \ (u - Q_u\mathcal{G}_z) \in H^2(\mathbb{R}^2), \ (u - Q_u\mathcal{G}_z)(0) = \Gamma_\alpha(z)Q_u\right\}$$
$$(-\Delta_\alpha - z)u = (-\Delta - z)(u - Q_u\mathcal{G}_z), \quad z < 0$$

Důkaz Forma F_α je, jak jsme ukázali, symetrická, zdola omezená a uzavřená. Můžeme pro ni tedy použít větu D.19 o reprezentaci, která říká, že existuje samosdružený operátor A_α takový, že pro libovolné $v \in Dom(A_\alpha) \subset Dom(F_\alpha)$ pevné existuje $g \in L^2(\mathbb{R}^2, \mathrm{d}^2x)$ takové, že platí

$$F_\alpha(u, v) = \langle u, g\rangle \quad \text{pro } \forall\ u \in Dom(F_\alpha) \tag{17}$$

Klademe potom $A_\alpha v = g$.

Buď nyní speciálně $u \in H^1(\mathbb{R}^2)$ libovolné, potom $Q_u = 0$ a platí

$$F_\alpha(u, v) = \langle\nabla u, \nabla(v - Q_v\mathcal{G}_z)\rangle - z\langle u, v - Q_v\mathcal{G}_z\rangle + z\langle u, v\rangle = \langle u, g\rangle, \tag{18}$$

což znamená

$$\langle\nabla u, \nabla(v - Q_v\mathcal{G}_z)\rangle = \langle u, g - zQ_v\mathcal{G}_z\rangle \quad \forall u \in H^1(\mathbb{R}^2).$$

Z lemmatu D.18 potom plyne $(v - Q_v\mathcal{G}_z) \in H^2(\mathbb{R}^2)$. V podmínce (18) můžeme tudíž integrovat per partes:

$$\langle u, (-\Delta - z)(v - Q_v\mathcal{G}_z)\rangle = \langle u, g - zv\rangle \quad \text{pro } \forall u \in H^1(\mathbb{R}^2),$$

to vzhledem k tomu, že prostor $H^1(\mathbb{R}^2)$ je hustý v $L^2(\mathbb{R}^2, \mathrm{d}^2x)$, znamená

$$(-\Delta - z)(v - Q_v\mathcal{G}_z) = g - zv = (A_\alpha - z)v.$$

Dále uvažujme obecné $u \in D(F_\alpha)$, potom $(u - Q_u\mathcal{G}_z) \in H^1(\mathbb{R}^2)$ a podmínka (18) dává

$$\langle\nabla(u - Q_u\mathcal{G}_z), \nabla(v - Q_v\mathcal{G}_z)\rangle - z\langle u - Q_u\mathcal{G}_z, v - Q_v\mathcal{G}_z\rangle = \langle u - Q_u\mathcal{G}_z, g - zv\rangle,$$

což dále pomocí rovnosti (17) upravíme na

$$\langle u, g\rangle - z\langle u, v\rangle - \Phi_\alpha^z(Q_u, Q_v) = \langle u - Q_u\mathcal{G}_z, g - zv\rangle$$

a tedy

$$\Phi_\alpha^z(Q_u, Q_v) = \langle Q_u\mathcal{G}_z, g - zv\rangle = \bar{Q}_u \int\limits_{\mathbb{R}^2} \mathcal{G}_z(-\Delta - z)(v - Q_v\mathcal{G}_z) = \bar{Q}_u(v - Q_v\mathcal{G}_z)(0),$$

neboť $\mathcal{G}_z$ je Greenova funkce operátoru H_∞. Platí tedy $(v - Q_v\mathcal{G}_z)(0) = \Gamma_\alpha(z)Q_v$.

Celkem jsme ukázali $A_\alpha \subset -\Delta_\alpha$.

Obrácenou inkluzi, tj.pro libovolné $v \in Dom(-\Delta_\alpha)$ existuje $g \in L^2(\mathbb{R}^2)$ tak, že platí (17) a

$$(-\Delta - z)(v - Q_v\mathcal{G}_z) = (-\Delta_\alpha - z)v,$$

dokážeme podobným způsobem jako předchozí tak, že nejprve uvažujeme $u \in H^1(\mathbb{R}^2)$.

■

Poznámka 13 *Vidíme, že jsme skutečně získali stejnou třídu operátorů jako metodou samosdružených rozšíření (viz tvrzení 7). Vzájemně si odpovídající operátory jsou svázány vztahem* $\Gamma_\alpha(z) = \frac{1}{\lambda_\alpha(z)}$.

3 Rozptyl

Tvrzení 14 *Zobecněné vlastní funkce operátoru H_α s vlastní hodnotou k^2, $k \in \mathbb{R}^2$ mají tvar*

$$F_k^\pm(x) = \mathrm{e}^{il\langle\omega,x\rangle} + \frac{i\pi}{2}\left(2\pi\alpha - \Psi(1) + \ln\frac{\pm l}{2i}\right)^{-1} H_0^{(1)}(\pm lr)^5,$$

kde vektor k jsme rozložili na $k = l\omega$, $l = |k|$ a $r = |x|$.

Důkaz Budeme hledat řešení rovnice

$$-\Delta F_k^\pm = k^2 F_k^\pm,$$

která splňují hraniční podmínku (9) spolu s asymptotickou podmínkou (D.26).

Asymptotická podmínka vede na řešení

$$F_k^\pm(x) = \mathrm{e}^{il\langle\omega,x\rangle} + L^\pm(l)H_0^{(1)}(\pm lr),$$

konstanty $L^\pm$ určíme z hraniční podmínky na

$$L^\pm(l) = \frac{i\pi}{2}\left(2\pi\alpha - \Psi(1) + \ln\frac{\pm l}{2i}\right)^{-1}$$

■

[5] Hankelovu funkci $H_0^{(1)}$ záporného argumentu bereme ve smyslu definice (D.21)

Poznámka 15 *Funkce $F_k^{\pm}(x) \equiv F^{\pm}(l,\omega;x)$ zapsané v polárních souřadnicích r,Ω jsou ve skutečnosti funkcemi pouze proměnných $l,r,|\Omega-\operatorname{arc}\omega|$:*

$$F^{\pm}(l,\omega;r,\Omega)=\mathrm{e}^{ilr\cos(\Omega-\operatorname{arc}\omega)}+\frac{i\pi}{2}\left(2\pi\alpha-\Psi(1)+\ln\frac{\pm l}{2i}\right)^{-1}H_0^{(1)}(\pm lr).$$

Poznámka 16 *Jelikož*

$$F_k^{\pm}(x)\overset{r\to\infty}{\sim}\mathrm{e}^{il\langle\omega,x\rangle}+\mathrm{e}^{i\frac{\pi}{4}}\frac{\sqrt{\pi}}{\sqrt{\pm 2l}}\left(2\pi\alpha-\Psi(1)+\ln\frac{\pm l}{2i}\right)^{-1}\frac{\mathrm{e}^{\pm ilr}}{\sqrt{r}}=\mathrm{e}^{il\langle\omega,x\rangle}+f^{\pm}(l)\frac{\mathrm{e}^{\pm ilr}}{\sqrt{r}}\text{[6]},$$

amplituda rozptylu (viz vztah (D.26)) nezávisí na úhlových proměnných (směry nalétavající a rozptýlené částice) a platí

$$f(l)\equiv f^{+}(l)=\mathrm{e}^{i\frac{\pi}{4}}\sqrt{\frac{\pi}{2l}}\left(2\pi\alpha-\Psi(1)+\ln\frac{l}{2i}\right)^{-1}.$$

Tvrzení 17 *Pro g tvaru*

$$g(x):=\int_0^\infty\int_{S^1}\mathrm{e}^{il\langle\omega,x\rangle}\varphi(l,\omega)\mathrm{d}\omega l\mathrm{d}l$$

je operátor rozptylu S_α bodové interakce dán předpisem

$$(S_\alpha g)(x)=\int_0^\infty\int_{S^1}\mathrm{e}^{il\langle\omega',x\rangle}\left(\int_{S^1}\mathcal{S}_\alpha^{(l)}(\omega,\omega')\varphi(l,\omega)\mathrm{d}\omega\right)\mathrm{d}\omega' l\mathrm{d}l,$$

$$\textit{kde }\mathcal{S}_\alpha^{(l)}(\omega,\omega')=\delta_{S^1}(\omega,\omega')+\frac{i}{2}\left(2\pi\alpha-\Psi(1)+\ln\frac{l}{2i}\right)^{-1}$$

Důkaz Pro usnadnění zápisu nebudeme v důkazu indexovat parametrem α.

Zobecněné vlastní funkce $F^{\pm}$ hamiltoniánu H_α splňují předpoklady lemmatu D.22 [7], pokud ještě ověříme platnost vztahu (D.31) (my dokonce $\mathcal{S}^{(l)}$ určíme), plynou dokazovaná tvrzení přímo z lemmatu D.24

Pokusme se tedy nalézt integrální jádro $\mathcal{S}^{(l)}(\omega,\omega')$. Uvážíme-li rotační symetrii modelu, můžeme jej volit tvaru

$$\mathcal{S}^{(l)}(\omega,\omega')=\sum_{m=-\infty}^{\infty}\mathcal{S}_m^{(l)}\mathrm{e}^{im(\operatorname{arc}\omega-\operatorname{arc}\omega')}.$$

Definující rovnost (D.31) vyjádříme pro $r\to\infty$

$$\sum_{m=-\infty}^{m=\infty}\left[\frac{(-)^m\mathrm{e}^{i\frac{\pi}{4}}}{\sqrt{2\pi lr}}\mathrm{e}^{-ilr}+\left(\frac{\mathrm{e}^{-i\frac{\pi}{4}}}{\sqrt{2\pi lr}}+\frac{f_m^{+}(l)}{\sqrt{r}}\right)\mathrm{e}^{ilr}\right]\mathrm{e}^{im(\Omega-\operatorname{arc}\omega)}=$$
$$2\pi\sum_{m=-\infty}^{m=\infty}\left[\left(\frac{(-)^m\mathrm{e}^{i\frac{\pi}{4}}}{\sqrt{2\pi lr}}+\frac{f_m^{-}(l)}{\sqrt{r}}\right)\mathrm{e}^{-ilr}+\frac{\mathrm{e}^{-i\frac{\pi}{4}}}{\sqrt{2\pi lr}}\mathrm{e}^{ilr}\right]S_m^{(l)}\mathrm{e}^{im(\Omega-\operatorname{arc}\omega)},$$

[6] Zřejmě $f^{+}(l)=\overline{f^{-}(l)}$.

[7] Při ověřování podmínek přijde vhod vztah $\frac{\partial}{\partial l}H_0^{(1)}(lr)=-rH_1^{(1)}(lr)$.

kde jsme v $F^+(l,\omega;r,\Omega)$ (resp. $F^-(l,\omega';r,\Omega)$) za výraz $\mathrm{e}^{ilr\cos(\Omega-\operatorname{arc}\omega)}$ (resp. $\mathrm{e}^{ilr\cos(\Omega-\operatorname{arc}\omega')}$) dosadili z (D.27) a kde $f_m^\pm(l)$ značí m-tý Fourierův koeficient funkce $f^\pm(l)$ (vzhledem k nezávislosti na úhlové proměnné $f_m^\pm(l)=0$ pro $m\neq 0$ a $f_0^\pm(l)=f^\pm(l)$.).

Snadno se přesvědčíme, že pro všechna $m\in\mathbb{Z}$ platí

$$\frac{\frac{(-)^m\mathrm{e}^{i\frac{\pi}{4}}}{\sqrt{2\pi l}}+f_m^-(l)}{\frac{\mathrm{e}^{-i\frac{\pi}{4}}}{\sqrt{2\pi l}}}=\frac{\frac{(-)^m\mathrm{e}^{i\frac{\pi}{4}}}{\sqrt{2\pi l}}}{\frac{\mathrm{e}^{-i\frac{\pi}{4}}}{\sqrt{2\pi l}}+f_m^+(l)},$$

a tudíž pro libovolné $m\in\mathbb{Z}$ dostaneme

$$\mathcal{S}_m^{(l)}=\frac{1}{2\pi}\left(1+\mathrm{e}^{i\frac{\pi}{4}}\sqrt{2\pi l}f_m^+(l)\right).$$

Pro $\mathcal{S}^{(l)}(\omega,\omega')$ jsme tak získali vyjádření

$$\begin{aligned}\mathcal{S}^{(l)}(\omega,\omega')&=\frac{1}{2\pi}\sum_{m\in\mathbb{Z}\setminus\{0\}}\mathrm{e}^{im(\operatorname{arc}\omega-\operatorname{arc}\omega')}+\frac{1}{2\pi}\left[1+i\pi\left(2\pi\alpha-\Psi(1)+\ln\frac{l}{2i}\right)^{-1}\right]\\&=\delta_{S^1}(\omega,\omega')+\frac{i}{2}\left(2\pi\alpha-\Psi(1)+\ln\frac{l}{2i}\right)^{-1}\end{aligned}$$

■

Poznámka 18 *Výsledek je v souladu s obecným vztahem (D.33). Jinak jsme mohli v důkazu přímo ověřit platnost (D.31) pro $\mathcal{S}_\alpha^{(l)}$ ze znění tvrzení.*

Dodatky

D.1 Několik užitečných lemmat

Lemma D.1 (Du Bois-Reymond) [8] *Buď $f \in L^1_{loc}(J, \mathrm{d}x)$, kde J je otevřený interval na $\mathbb{R}$ a nechť pro všechna $\varphi \in D(J)$ platí $(f, \varphi) = 0$. Potom $f = 0$ na $L^1_{loc}(J, \mathrm{d}x)$.*

Důkaz Důkaz lemmatu můžeme nalézt například v [6].

Lemma D.2 *Buď $f \in D'(J)$, kde J je interval na $\mathbb{R}$ a nechť $f' = 0$ v $D'(J)$. Potom $f = konst.$ v $D'(J)$.*

Důkaz Vezměme $\eta \in D(J)$ takové, že $(1, \eta) = \int_J \eta = 1$ a $supp(\eta) \subset (a, b)$, pro libovolné $\varphi \in D(J)$ definujme $\psi := \varphi - (1, \varphi)\eta$. ψ můžeme vyjádřit jako derivaci funkce $\tilde{\psi}$:

$$\tilde{\psi}(x) := \int_{-\infty}^{x} (\varphi(t) - (1, \varphi)\eta(t))\,\mathrm{d}t$$

$\tilde{\psi}$ je zřejmě hladká funkce a vzhledem k tomu, že nosič φ je omezený $supp(\varphi) \subset (c, d)$, a vzhledem k tvaru funkce ψ, je omezený i nosič $\tilde{\psi}$: $supp(\tilde{\psi}) \subset (m, M)$, kde $m := \min\{a, c\}$ a $M := \max\{b, d\}$. $\tilde{\psi}$ tedy leží v $D(J)$.

Jelikož o funkci f předpokládáme $(f', \varphi) = -(f, \varphi') = 0$ pro $\varphi \in D(J)$ libovolné, platí

$$0 = (f, \tilde{\psi}') = (f, \psi) = (f, \varphi - (1, \varphi)\eta),$$

odkud již dostaneme

$$(f, \varphi) = (f, \eta)(1, \varphi) = konst.\ (1, \varphi) = (konst., \varphi)$$

■

Lemma D.3 *Buďte $f, g \in L^1_{loc}(J, \mathrm{d}x)$, kde J je interval na $\mathbb{R}$, a nechť v $D'(J)$ platí $f' = g$. Potom $f \in AC(J)$ a s.v. na J platí $f'(x) = g(x)$.*

[8] Lemma platí obecně na prostorech $L^1_{loc}(M, \mathrm{d}^n x)$, kde M je otevřená podmnožina $\mathbb{R}^n$.

Důkaz Vezměme libovolný pevný bod $a \in J$ a pro libovolné $x \in J$ definujme

$$h(x) := \int_a^x g(t) \mathrm{d}t \tag{D.1}$$

Integrál (D.1) existuje, neboť $g \in L^1_{loc}(J, \mathrm{d}x)$. Funkce h je absolutně spojitá na J jakožto funkce integrální meze a s.v. na J platí $h'(x) = g(x)$.

Pro všechna $\varphi \in D(J)$ platí

$$(f', \varphi) = -\int_J \tilde{f}\varphi' = (g, \varphi) = \int_J \tilde{g}\varphi = \int_J \tilde{h}'\varphi = \{per\ partes\} = -\int_J \tilde{h}\varphi' = (h', \varphi)$$

a tudíž $(f - h)' = 0$ v $D'(J)$. Podle lemmatu D.2 v $D'(J)$ platí $f = h + konst.$. Lemma D.1 potom říká, že $f(x) = h(x) + konst.$ s.v. na J. Funkci f jakožto prvek prostoru $L^1_{loc}(J, \mathrm{d}x)$ můžeme tedy reprezentovat přímo prvkem $h+konst.$, odkud již přímo plynou tvrzení lemmatu.

■

Důsledek D.4 *Buďte* $f, V \in L^2_{loc}(J, \mathrm{d}x) \subset L^1_{loc}(J, \mathrm{d}x)$ *a* $g \in L^1_{loc}(J, \mathrm{d}x)$. *Platí-li v* $D'(J)$ *rovnost* $f'' + Vf = g$, *potom* $f \in AC^1(J)$.

Důkaz Funkce $g - Vf$ patří do $L^1_{loc}(J, \mathrm{d}x)$. Naprosto stejným způsobem jako v důkazu lemmatu D.3 ukážeme, že f' je absolutně spojitá na J, tedy $f \in AC^1(J)$.

■

Lemma D.5 (Lagrangeova formule) *Buď* $J \equiv (a, b)$ *interval na* $\mathbb{R}$ *a* l *diferenciální výraz tvaru*

$$l := -\frac{\mathrm{d}^2}{\mathrm{d}x^2} + V(x), \quad \text{kde } V \in L^1_{loc}(J),\ V(x) \in \mathbb{R}. \tag{D.2}$$

Bod a *(resp.* b*) nazveme regulárním koncem, pokud* $a > -\infty$ *(resp.* $b < \infty$*) a* V *je integrabilní na nějakém pravém (resp. levém) okolí* a *(resp.* b*). Symbolem* J_l *označíme sjednocení intervalu* J *s množinou regulárních konců. Pro každé* $x \in J_l$ *definujme*

$$[f, g]_x := \bar{f}(x)g'(x) - \bar{f}'(x)g(x) \tag{D.3}$$

Potom pro libovolný uzavřený interval $\langle c, d\rangle \subset J_l$ *a funkce* $f, g \in AC^1(J_l)$ *platí*

$$\int_c^d \big(l(\bar{f})g - \bar{f}l(g)\big)\, \mathrm{d}x = [f, g]_d - [f, g]_c \tag{D.4}$$

Vztahu (D.4) se říká Lagrangeova formule [3].

Důkaz Pro $f, g \in AC^1(J_l)$ je zobrazení $x \mapsto [f, g]_x$ absolutně spojité na J_l a má tudíž s.v. na J_l derivaci, pro kterou podle definice (D.3) platí

$$[f, g]' = \bar{f} g'' - \bar{f}'' g = l(\bar{f}) g - \bar{f} l(g)$$

Integrací od c do d dostaneme Lagrangeovu formuli.

■

Poznámka D.6 *Diferenciální výraz (D.2) určuje na $L^2(J, \mathrm{d}x)$ operátor H s maximálním definičním oborem*

$$Dom(H) = \left\{ f \in L^2(J, \mathrm{d}x) |\ f \in AC^1(J_l),\ l(f) \in L^2(J, \mathrm{d}x) \right\}$$

Pro $f, g \in Dom(H)$ existují vlastní limity $\lim_{x \to a+} [f, g]_x$ *a* $\lim_{x \to b-} [f, g]_x$.

Důkaz Důkaz provedeme například pro levý koncový bod a, důkaz pro pravý koncový bod je analogický.

Vezměme libovolný uzavřený interval $\langle c, d \rangle \subset J_l$ a $f, g \in Dom(H)$. Potom $\big(l(\bar{f}) g - \bar{f} l(g) \big) \in L^1(J, \mathrm{d}x)$ a tudíž existuje vlastní limita

$$\lim_{c \to a+} \int_c^d \big(l(\bar{f}) g - \bar{f} l(g) \big) \,\mathrm{d}x$$

Podle Lagrangeovy formule (D.4) se tento integrál rovná výrazu $[f, g]_d - \lim_{c \to a+} [f, g]_c$ a jelikož závorka $[f, g]_d$ je konečná, je konečná i limita $\lim_{x \to a+} [f, g]_x$.

■

Lemma D.7 *Buď $a \in \mathbb{R}$. Nechť $f \in L^2((a, \infty), \mathrm{d}r) \cap AC(a, \infty)$ taková, že $f' \in L^2((a, \infty), \mathrm{d}r)$. Potom* $\lim_{r \to \infty} f(r) = 0$.

Důkaz Označme $g := f' \bar{f} + f \bar{f}' \left\{ = (|f|^2)' \right\}$. Jelikož $g \in L^1((a, \infty), \mathrm{d}r)$, musí nutně platit

$$\forall \varepsilon > 0\ \exists K \in \mathbb{R} |\ \forall r_1, r_2 > K \quad | \int_{r_2}^{r_1} g(r) | < \varepsilon \tag{D.5}$$

Poněvadž $\int_{r_2}^{r_1} g(r) \mathrm{d}r = |f(r_1)|^2 - |f(r_2)|^2$, podmínka (D.5) říká, že limita $\lim_{r \to \infty} |f(r)|^2$ existuje. Má-li být $f \in L^2((a, \infty), \mathrm{d}, r)$, tato limita je nutně nulová.

■

Lemma D.8 *Buď $a \in \mathbb{R}$. Nechť $f \in L^2((a, \infty), \mathrm{d}r) \cap AC^1(a, \infty)$ taková, že $f'' \in L^2((a, \infty), \mathrm{d}r)$. Potom i $f' \in L^2((a, \infty), \mathrm{d}r)$.*

Důkaz Předpokládejme $f' \notin L^2((a,\infty), \mathrm{d}r)$. Pro libovolné $r \in (a,\infty)$ platí identita

$$g(r) = 2\int_a^r |f'|^2 + \int_a^r f''\bar{f} + \int_a^r f\bar{f}'' + g(a), \tag{D.6}$$

kde $g := f'\bar{f} + f\bar{f}'$. Hodnota $g(a)$ je konečné z absolutní spojitosti funkcí f a f', druhý a třetí integrál na pravé straně (D.6) mají vlastní limity pro $r \to \infty$, zatímco první integrál pro $r \to \infty$ roste nade všechny meze. Existuje tedy $\lim_{r\to\infty} g(r)$ a platí

$$\lim_{r\to\infty} g(r) = \lim_{r\to\infty} \left(|f|^2\right)' = \infty,$$

což je ale ve sporu s $f \in L^2((a,\infty), \mathrm{d}r)$.

■

Důsledek D.9 *Buď V omezenená na (a,∞) pro nějaké $a \in \mathbb{R}^+$, dále buď $f \in L^2(\mathbb{R}^+, \mathrm{d}r) \cap AC^1(\mathbb{R}^+)$ taková, že $(f'' + Vf) \in L^2(\mathbb{R}^+, \mathrm{d}r)$. Potom platí* $\lim_{r\to\infty} f(r) = \lim_{r\to\infty} f'(r) = 0$

Důkaz Z odhadů

$$\int_a^\infty |f'' + Vf|^2 < \int_0^\infty |f'' + Vf|^2 < \infty$$

$$\int_a^\infty |Vf|^2 < konst. \int_a^\infty |f|^2 < \infty$$

plyne $(f'' + Vf), Vf \in L^2((a,\infty), \mathrm{d}r)$ a tudíž i $f'' \in L^2((a,\infty), \mathrm{d}r)$. Tvrzení potom přímo plynou z lemmatů D.7 a D.8.

■

Lemma D.10 (Lemma o uzávěru) [9] *Buď H symetrický operátor $H \subset H^\dagger$. Definujme množinu*

$$M(H) := \left\{ f \in Dom(H^\dagger) | \; \forall g \in Ker(H^\dagger \pm i) \; \langle H^\dagger g, f\rangle = \langle g, H^\dagger f\rangle \right\}.$$

Potom $\bar{H} = H^\dagger \restriction M(H)$

Důkaz Uvážíme-li, že $\bar{H} = H^{\dagger\dagger}$, důkaz již není obtížný.

$$f \in Dom(H^{\dagger\dagger}) \Leftrightarrow \exists h \in \mathscr{H} | \; \forall g \in Dom(H^\dagger) \; \langle H^\dagger g, f\rangle = \langle g, h\rangle$$

Poněvadž z $H \subset H^\dagger$ plyne $H^{\dagger\dagger} \subset H^\dagger$, stačí položit $h = H^\dagger f$:

$$\langle g, h\rangle = \langle g, H^{\dagger\dagger} f\rangle = \langle g, H^\dagger f\rangle,$$

[9] Název lemmatu je čistě interní.

což dává

$$Dom(\bar{H}) = \left\{ f \in Dom(H^\dagger) |\ \forall g \in Dom(H^\dagger)\ \langle H^\dagger g, f\rangle = \langle g, H^\dagger f\rangle \right\}. \tag{D.7}$$

Jelikož H je symetrický operátor, platí první von Neumannova formule [3], jež říká, že libovolný prvek $f \in Dom(H^\dagger)$ lze jednoznačně rozložit na

$$f = \tilde{f} + g_+ + g_-, \quad \text{kde } \tilde{f} \in Dom(\bar{H}),\ g_\pm \in Ker(H^\dagger \pm i) \tag{D.8}$$

Pro $g \in Dom(\bar{H})$ je podmínka (D.7) vždy splněna a tudíž ji již stačí ověřovat jen pro $g \in Ker(H^\dagger \pm i)$.

■

D.2 Cylindrické funkce

Cylindrickými funkcemi se nazývají řešení lineární diferenciální rovnice druhého řádu

$$u'' + \frac{1}{z}u' + \left(1 - \frac{\nu^2}{z^2}\right) u = 0, \tag{D.9}$$

kde z je komplexní proměnná a ν je obecně komplexní parametr. Dvojici lineárně nezávislých řešení tvoří například Besselovy funkce prvního a druhého druhu: J_ν a Y_ν, které jsou holomorfní na $\mathbb{C} \setminus \mathbb{R}^-$. Další významnou dvojicí nezávislých řešení jsou Hankelovy funkce $H_\nu^{(1)}$ a $H_\nu^{(2)}$, které s Besselovými funkcemi souvisí vztahy

$$H_\nu^{(1)} = J_\nu + iY_\nu, \quad H_\nu^{(2)} = J_\nu - iY_\nu$$

Hankelovy funkce jsou vzájemně svázány vztahem [7]

$$H_\nu^{(1)}(-z) = -\mathrm{e}^{-\nu\pi i} H_\nu^{(2)}(z) \tag{D.10}$$

Lehce pozměněná diferenciální rovnice (D.9)

$$u'' + \frac{1}{z}u' - \left(1 + \frac{\nu^2}{z^2}\right) u = 0$$

má za nezávislá řešení tzv. modifikované Besselovy funkce I_ν a K_ν.

D.2.1 Některé Wronskiho determinanty [7]

$$\begin{aligned}
W\{J_\nu(z),\ Y_\nu(z)\} &= \frac{2}{\pi z} \\
W\left\{H_\nu^{(1)}(z),\ H_\nu^{(2)}(z)\right\} &= -\frac{4i}{\pi z} \\
W\{K_\nu(z),\ I_\nu(z)\} &= \frac{1}{z}
\end{aligned}$$

D.2.2 Asymptotické rozvoje pro velké argumenty $|z| \to \infty$ [7]

$$J_\nu(z) \sim \sqrt{\frac{2}{\pi z}} \left\{ \cos\left(z - \frac{1}{2}\nu\pi - \frac{1}{4}\pi\right) + \mathrm{e}^{|\Im z|} O(|z|^{-1}) \right\} \quad \text{pro } |\arg z| < \pi \tag{D.11}$$

$$Y_\nu(z) \sim \sqrt{\frac{2}{\pi z}} \left\{ \sin\left(z - \frac{1}{2}\nu\pi - \frac{1}{4}\pi\right) + \mathrm{e}^{|\Im z|} O(|z|^{-1}) \right\} \quad \text{pro } |\arg z| < \pi$$

$$H_\nu^{(1)}(z) \sim \sqrt{\frac{2}{\pi z}} \mathrm{e}^{i\left(z - \frac{1}{2}\nu\pi - \frac{1}{4}\pi\right)} \quad \text{pro } -\pi < \arg z < 2\pi \tag{D.12}$$

$$H_\nu^{(2)}(z) \sim \sqrt{\frac{2}{\pi z}} \mathrm{e}^{-i\left(z - \frac{1}{2}\nu\pi - \frac{1}{4}\pi\right)} \quad \text{pro } -2\pi < \arg z < \pi \tag{D.13}$$

$$I_\nu(z) \sim \frac{\mathrm{e}^z}{\sqrt{2\pi z}} \left\{ 1 + O(|z|^{-1}) \right\} \quad \text{pro } |\arg z| < \frac{1}{2}\pi$$

$$K_\nu(z) \sim \sqrt{\frac{\pi}{2z}} \mathrm{e}^{-z} \left\{ 1 + O(|z|^{-1}) \right\} \quad \text{pro } |\arg z| < \frac{3}{2}\pi$$

D.2.3 Asymptotické rozvoje pro malé argumenty $z \to 0$ [7]

$$\begin{aligned}
J_\nu(z) &\sim \frac{\left(\frac{1}{2}z\right)^\nu}{\Gamma(\nu+1)} \quad \text{pro } \nu \neq -1,\ -2,\ -3, \dots \\
Y_0(z) &\sim -iH_0^{(1)}(z) \sim iH_0^{(2)}(z) \sim \frac{2}{\pi} \ln z \\
Y_\nu(z) &\sim -iH_\nu^{(1)}(z) \sim iH_\nu^{(2)}(z) \sim -\frac{1}{\pi}\Gamma(\nu) \left(\frac{1}{2}z\right)^{-\nu} \quad \text{pro } \Re\nu > 0 \\
I_\nu(z) &\sim \frac{\left(\frac{1}{2}z\right)^\nu}{\Gamma(\nu+1)} \quad \text{pro } \nu \neq -1,\ -2,\ -3, \dots \\
K_0(z) &\sim -\ln z \\
K_\nu(z) &\sim \frac{1}{2}\Gamma(\nu) \left(\frac{1}{2}z\right)^{-\nu} \quad \text{pro } \Re\nu > 0
\end{aligned} \tag{D.14}$$

Poznámka D.11 *S pomocí software Maple 9 dostaneme přesněji*

$$H_0^{(1)}(z) \overset{z\to 0}{\sim} 1 + \frac{2i}{\pi} \left(\ln\frac{z}{2} - \Psi(1) \right) + O(z^2 \ln z) \tag{D.15}$$

$$H_1^{(1)}(z) \overset{z\to 0}{\sim} -\frac{2i}{\pi z} + \frac{1}{2\pi} \left(\pi - i - 2i\Psi(1) + 2i \ln\frac{z}{2} \right) z + O(z^3 \ln z)$$

kde $\Psi(z) := \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}z} \ln\Gamma(z)$ *značí digamma funkci.* $(-\Psi(1))$ *se rovná Eulerově konstantě* $\gamma \doteq 0.5772$.

D.2.4 Vyjádření K_ν pomocí Hankelových funkcí [7]

$$K_\nu(z) = \frac{1}{2}\pi i e^{\frac{1}{2}\nu\pi i} H_\nu^{(1)}(iz) \quad \text{pro} \ -\pi < \arg z \leq \frac{1}{2}\pi \tag{D.16}$$

$$K_\nu(z) = -\frac{1}{2}\pi i e^{-\frac{1}{2}\nu\pi i} H_\nu^{(2)}(-iz) \quad \text{pro} \ -\frac{1}{2}\pi < \arg z \leq \pi \tag{D.17}$$

D.2.5 Některá užitečná integrální vyjádření [7]

$$J_m(z) = \frac{1}{\pi}\int_0^\pi \cos(z\sin\alpha - m\alpha)\mathrm{d}\alpha \quad \text{pro } \Re z > 0,\ m \in \mathbb{Z} \tag{D.18}$$

$$K_0(Z|x|) = \int_0^\infty \frac{tJ_0(t|x|)}{t^2+Z^2}\mathrm{d}t \quad \text{pro } \Re Z > 0 \tag{D.19}$$

Další poznatky o cylindrických i dalších speciálních funkcí nalezneme například v [8].

D.3 Kreinova formule

Věta D.12 (Kreinova formule) *Buď H uzavřený, symetrický a hustě definovaný operátor na Hilbertově prostoru $\mathscr{H}$. Pro $z \in \mathbb{C}\setminus\mathbb{R}$ libovolné a libovolnou dvojici samosdružených rozšíření H_α, H_∞ operátoru H označme $V_\alpha(z)$ (resp. $V_\infty(z)$) izometrii z $Ker(H^\dagger - z)$ do $Ker(H^\dagger - \bar{z})$ určující rozšíření H_α (resp. H_∞), $P(z)$ ortogonální projektor na $Ker(H^\dagger - z)$ a $P^*(z)$ vnoření $Ker(H^\dagger - z)$ do $\mathscr{H}$. Mezi rezolventami operátorů H_α a H_∞ v bodě z potom platí vztah*

$$(H_\alpha - z)^{-1} = (H_\infty - z)^{-1} + P^*(z)\frac{V_\alpha(\bar{z}) - V_\infty(\bar{z})}{\bar{z} - z}P(\bar{z})$$

Důkaz Formuli postupně ověříme na podprostorech v rozkladu $\mathscr{H} = Ker(H^\dagger - \bar{z}) \oplus \big(Ker(H^\dagger - \bar{z})\big)^\perp$.

Buď nejprve

$$f \in \Big(Ker(H^\dagger - \bar{z})\Big)^\perp = \Big((Ran(H - z))^\perp\Big)^\perp = \overline{Ran(H - z)} = Ran(H - z).$$

Poslední rovnost platí díky tomu, že H je uzavřený, symetrický operátor a $z \in \mathbb{C}\setminus\mathbb{R}$ [3]. Existuje tedy $g \in Dom(H)$ tak, že $(H - z)g = f$ a protože $H \subset H_{\alpha,\infty}$, platí i

$$(H_\alpha - z)g = (H_\infty - z)g = f.$$

Jelikož $z \in \mathbb{C}\setminus\mathbb{R} \subset \varrho(H_{\alpha,\infty})$, můžeme rovnost invertovat na Kreinovu formuli pro $f \in \big(Ker(H^\dagger - \bar{z})\big)^\perp$:

$$(H_\alpha - z)^{-1}f = (H_\infty - z)^{-1}f$$

Pro $f \in Ker(H^\dagger - \bar{z})$ použijeme druhou von Neumannovu formuli [3]

$$H_{\alpha,\infty}(f + V_{\alpha,\infty}(\bar{z})f) = \bar{z}f + zV_{\alpha,\infty}(\bar{z})f,$$

kterou převedeme na tvar

$$(H_{\alpha,\infty} - z)^{-1}f = \frac{f + V_{\alpha,\infty}(\bar{z})f}{\bar{z} - z},$$

odkud již okamžitě dostaneme Kreinovu formuli na $f \in Ker(H^\dagger - \bar{z})$:

$$(H_\alpha - z)^{-1} = (H_\infty - z)^{-1} + \frac{V_\alpha(\bar{z}) - V_\infty(\bar{z})}{\bar{z} - z}$$

$\blacksquare$

Poznámka D.13 *Pro* $\dim\big(Ker(H^\dagger - z)\big) = \dim\big(Ker(H^\dagger - \bar{z})\big) = 1$ *můžeme Kreinovu formuli zapsat ve tvaru*

$$(H_\alpha - z)^{-1} = (H_\infty - z)^{-1} + \lambda(z)\langle\phi(\bar{z}), .\rangle\phi(z),$$

kde $0 \neq \phi(z) \in Ker(H^\dagger - z)$ *a* $\lambda(z) \in \mathbb{C}$

D.4 Sobolevovy prostory

Nejprve standardně zavedeme multiindexové značení. Multiindexem α nazveme uspořádanou n-tici nezáporných celých čísel: $\alpha = (\alpha_1, \dots, \alpha_n)$. Symboly $|\alpha|$, x^α a D^α potom mají následující význam:

$$|\alpha| := \sum_{i=1}^{n} \alpha_i$$
$$x^\alpha := x_1^{\alpha_1} \cdots x_n^{\alpha_n} \quad \text{pro } x = (x_1, \dots, x_n)$$
$$D^\alpha := \frac{\partial^{|\alpha|}}{\partial x_1^{\alpha_1} \cdots \partial x_n^{\alpha_n}}$$

Definice D.14 *Temperovaná distribuce* $f \in \mathscr{S}'(\mathbb{R}^n)$ *leží v* m*-tém Sobolevově prostoru* $H^m(\mathbb{R}^n)$ $(m \in \mathbb{N}_0)$[10], *pokud* $\mathscr{F}f$ *je měřitelná funkce a platí*

$$\|f\|^2_{H^m(\mathbb{R}^n)} := \int\limits_{\mathbb{R}^n} (1 + |\xi|^2)^m |(\mathscr{F}f)(\xi)|^2 \mathrm{d}^n\xi < \infty$$

Poznámka D.15 *Podle Plancherelova teorému [9], který říká, že Fourierovu transformaci lze jednoznačně rozšířit na unitární zobrazení z* $L^2(\mathbb{R}^n, \mathrm{d}^n x)$ *na* $L^2(\mathbb{R}^n, \mathrm{d}^n\xi)$*, splývá Sobolevův prostor* H^0 *s prostorem* $L^2(\mathbb{R}^n, \mathrm{d}^n x)$*.*

[10] Obecně se stejným způsobem definuje Sobolevův prostor pro $m \in \mathbb{R}$.

Poznámka D.16 *Prostory $H^m(\mathbb{R}^n)$ jsou úplné.*

Důkaz Vezměme libovolnou cauchyovskou posloupnost $\{f_l\} \subset H^m(\mathbb{R}^n) \subset L^2(\mathbb{R}^n, \mathrm{d}x)$. Vzhledem k unitaritě Fourier-Plancherelova operátoru je potom cauchyovská i posloupnost $\{\mathscr{F} f_l\} \subset \mathscr{F}(H^m(\mathbb{R}^n)) = L^2(\mathbb{R}^n, (1+|\xi|^2)^m \mathrm{d}^n\xi)$. Poslední prostor je ovšem úplný [3], existuje $f \in H^m(\mathbb{R}^n)$ takové, že

$$\lim_{l\to\infty} \int_{\mathbb{R}^n} |(\mathscr{F} f_l - \mathscr{F} f)(\xi)|^2 (1+|\xi|^2)^m \mathrm{d}^n\xi = 0.$$

Posloupnost $\{f_l\}$ tedy v $H^m(\mathbb{R}^n)$ konverguje.

■

Věta D.17 *$f \in H^m(\mathbb{R}^n)$ právě tehdy, když $D^\alpha f \in L^2(\mathbb{R}^n, \mathrm{d}^n x)$ pro všechny multiindexy α splňující $|\alpha| \le m$, kde D^α značí derivaci v zobecněném smyslu.*

Důkaz Buď $f \in H^m(\mathbb{R}^n)$, potom podle definice $\xi^\alpha(\mathscr{F} f) \in L^2(\mathbb{R}^n, \mathrm{d}^n\xi)$ pro $|\alpha| \le m$. Jelikož $\mathscr{F}(D^\alpha f) = (-i\xi)^\alpha \mathscr{F} f$ pro $f \in \mathscr{S}'(\mathbb{R}^n)$, podle Plancherelova teorému potom $D^\alpha f \in L^2(\mathbb{R}^n, \mathrm{d}^n x)$.

Nechť nyní $D^\alpha f \in L^2(\mathbb{R}^n, \mathrm{d}^n x)$ pro $|\alpha| \le m$. Obráceným postupem než v předchozí části důkazu ukážeme, že $\xi^\alpha(\mathscr{F} f) \in L^2(\mathbb{R}^n, \mathrm{d}^n\xi)$, odkud již $\|f\|_{H^m(\mathbb{R}^n)} < \infty$.

■

Lemma D.18 *Buď $f \in H^1(\mathbb{R}^n)$ a $g \in L^2(\mathbb{R}^n, \mathrm{d}^n x)$. Pokud*

$$\langle \nabla f, \nabla \varphi \rangle = \langle g, \varphi \rangle \quad \forall \varphi \in H^1(\mathbb{R}^n), \tag{D.20}$$

potom $f \in H^2(\mathbb{R}^n)$

Důkaz Díky unitaritě Fourier-Plancherelova operátoru $\mathscr{F}$ můžeme podmínku (D.20) přepsat na

$$\langle \mathscr{F}(\nabla f), \mathscr{F}(\nabla \varphi) \rangle = \langle \mathscr{F} g, \mathscr{F} \varphi \rangle \quad \forall \varphi \in H^1(\mathbb{R}^n)$$

neboli

$$\langle \xi(\mathscr{F} f), \xi(\mathscr{F} \varphi) \rangle = \langle |\xi|^2 \mathscr{F} f, \mathscr{F} \varphi \rangle = \langle \mathscr{F} g, \mathscr{F} \varphi \rangle \quad \forall \varphi \in H^1(\mathbb{R}^n).$$

Uvážíme-li ještě, že $\mathscr{F}(H^1(\mathbb{R}^n)) = L^2(\mathbb{R}^n, (1+|\xi|^2)\mathrm{d}^n\xi)$ je hustý podprostor $L^2(\mathbb{R}^n, \mathrm{d}^n\xi)$, platí rovnost $|\xi|^2 \mathscr{F} f = \mathscr{F} g$ čili

$$(1+|\xi|^2)\mathscr{F} f = \mathscr{F} g + \mathscr{F} f \in L^2(\mathbb{R}^n, \mathrm{d}^n\xi)$$

a tudíž skutečně $f \in H^2(\mathbb{R}^n)$.

■

D.5 Věta o representaci formy

Věta D.19 (o reprezentaci formy) *Nechť s je hustě definovaná uzavřená symetrická a zdola omezená forma na $\mathscr{H}$. Potom existuje samosdružený operátor A takový, že*

i. $Dom(A) \subset Dom(s)$ a pro všechna $f \in Dom(s)$ a $g \in Dom(A)$ platí

$$s(f,g) = \langle f, Ag \rangle$$

ii. $Dom(A)$ tvoří jádro s, tj. $\overline{s \restriction Dom(A)} = s$

iii. jestliže existují vektory $f \in Dom(s)$ a $h \in \mathscr{H}$ takové, že pro všechna $g \in Dom(s)$ platí

$$s(f,g) = \langle h, g \rangle$$

potom $f \in Dom(A)$ a $h = Af$.

Samosdružený operátor A je podmínkou (i) určen jednoznačně.

Důkaz Důkaz této významné věty nalezneme například v [3], [5] nebo [10].

D.6 Greenova funkce rezolventy volného hamiltoniánu

Hamiltonián volné částice v rovině je dán operátorem

$$H_\infty = -\Delta, \quad Dom(H_\infty) = H^2(\mathbb{R}^2).$$

Integrální jádro operátoru $(H_\infty - z)^{-1}$ (tj. Greenovu funkci rezolventy operátoru H_∞ v bodě z) najdeme pomocí Fourierovy transformace $\mathscr{F}$. Hledaná Greenova funkce musí splňovat zobecněnou rovnici

$$(-\Delta - z)\mathcal{G}_z(x-y) = \delta(x-y) \quad \text{pro } y \in \mathbb{R}^2 \text{ pevné,}$$

čili po působení zpětné Fourierovy transformace

$$\mathscr{F}^{-1}(-\Delta - z)\mathscr{F}\mathscr{F}^{-1}(\mathcal{G}_z(x-y)) = (k^2 - z)\mathscr{F}^{-1}(\mathcal{G}_z(x-y)) = \frac{1}{2\pi}.$$

Odtud již přímo vyjádříme $\mathcal{G}_z(x-y)$ jako

$$\mathcal{G}_z(x-y) = \frac{1}{(2\pi)^2} \int\limits_{\mathbb{R}^2} \frac{1}{k^2 - z} \mathrm{e}^{i\langle k, x-y \rangle} \mathrm{d}^2 k = \left\{ sub.: \ k = (\sqrt{v}\cos\varphi, \sqrt{v}\sin\varphi) \right\}$$

$$= \frac{1}{2(2\pi)^2} \int\limits_0^\infty \mathrm{d}v \int\limits_0^{2\pi} \mathrm{d}\varphi \frac{1}{v-z} \mathrm{e}^{i\sqrt{v}\langle(\cos\varphi, \sin\varphi), x-y\rangle} = \frac{1}{2(2\pi)^2} \int\limits_0^\infty \mathrm{d}v \int\limits_{-\pi}^{\pi} \mathrm{d}\alpha \frac{1}{v-z} \mathrm{e}^{i\sqrt{v}|x-y|\sin\alpha}$$

$$= \frac{1}{(2\pi)^2} \int\limits_0^\infty \mathrm{d}v \, \frac{1}{v-z} \int\limits_0^\pi \mathrm{d}\alpha \cos(\sqrt{v}|x-y|\sin\alpha) = \{(D.18)\} = \frac{1}{4\pi} \int\limits_0^\infty \frac{1}{v-z} J_0(\sqrt{v}|x-y|)\mathrm{d}v$$

$$= \left\{ sub.: \ \sqrt{v} = t \right\} = \frac{1}{2\pi} \int\limits_0^\infty \frac{t}{t^2 - z} J_0(t|x-y|)\mathrm{d}t.$$

Pro $z \in \mathbb{C} \setminus \mathbb{R}$ použijeme k výpočtu posledního integrálu formuli (D.19), ve které za Z dosadíme $-i\sqrt{z}$ ($\Im\sqrt{z} > 0$, a proto $\Re Z > 0$):

$$\mathcal{G}_z(x-y) = \frac{i}{4} H_0^{(1)}(\sqrt{z}|x-y|), \quad \Im\sqrt{z} > 0.$$

Pro $z > 0$ poslední integrál diverguje, $(H_\infty - z)^{-1} \notin \mathscr{B}(\mathscr{H})$, tj.rezolventa neexistuje. Nicméně integrál můžeme regularizovat přičtením (resp. odečtením) malého ryze imaginárního čísla $i\varepsilon$ ke jmenovateli:

$$\mathcal{G}_z(x-y)^{\pm} := \lim_{\varepsilon\to 0} \frac{1}{2\pi} \int_0^\infty \frac{t}{t^2 - z \mp i\varepsilon} J_0(t|x-y|)\mathrm{d}t = \{(D.19)\} = \frac{1}{2\pi} K_0\left(-i\sqrt{z \pm i\varepsilon}|x-y|\right)$$

$$= \{(D.16),\ (D.17)\} = \pm\frac{i}{4} H_0^{\binom{(1)}{(2)}}(\sqrt{z}|x-y|) = \frac{i}{4} H_0^{(1)}(\pm\sqrt{z}|x-y|),$$

pokud Hankelovu funkci $H_0^{(1)}$ na $\mathbb{R}^-$ dodefinujeme limitou z horní poloroviny roviny komplexních čísel:

$$H_0^{(1)}(-z) := \lim_{\varepsilon\to 0+} H_0^{(1)}(-z + i\varepsilon) \quad \text{pro } z > 0. \tag{D.21}$$

D.7 Základy teorie rozptylu

V tomto dodatku shrneme základní pojmy a postupy stacionární i časově závislé teorie rozptylu. Většinu výsledků budeme formulovat pro rovinnný případ. Podrobnější výklad nalezneme např. v [11], [12], [13] nebo [3].

D.7.1 Stacionární teorie rozptylu

Uvažujme potenciál V konečného dosahu, tj. $V(x) = 0$ pro $|x| > a \in \mathbb{R}^+$. Vlnovou funkci dopadající částice, která je v pevném čase t_0 lokalizována mimo dosah potenciálu označme ψ_0. Její časový vývoj v oblasti $|x| >> a$ je řízen volným hamiltoniánem H_∞:

$$i\psi_0'(t) = H_\infty \psi_0(t), \quad \psi_0(t_0) = \psi_0 \tag{D.22}$$

kde čárka značí časovou derivaci v silném smyslu

$$\lim_{h\to 0} \|\frac{1}{h}\left(\psi_0(t+h) - \psi_0(t)\right) - \psi_0'(t)\| = 0.$$

V této oblasti můžeme řešení (D.22) rozložit na

$$\psi_0(x,t) = \int_{\mathbb{R}^2} \varphi(k) \mathrm{e}^{i\langle k,x\rangle - ik^2(t-t_0)} \mathrm{d}^2k, \quad \text{kde } \varphi(k) = \frac{1}{(2\pi)^2} \int_{\mathbb{R}^2} \mathrm{e}^{-i\langle k,x\rangle} \psi_0(x) \mathrm{d}^2x.$$

V oblasti působení potenciálu musíme zobecněné vlastní funkce $\mathrm{e}^{i\langle k,x\rangle}$ hamiltoniánu H_∞ nahradit zobecněnými vlastními funkcemi F_k hamiltoniánu $-\Delta + V$:

$$(-\Delta + V)F_k^{\pm} = k^2 F_k^{\pm}[11]. \tag{D.23}$$

[11] Řešení $F^{\pm}$ mají předepsanou asymptotiku (D.26), kterou níže určíme.

Přesný časový vývoj částice je potom dán funkcemi

$$\psi_+(x,t) = \int_{\mathbb{R}^2} \varphi_+(k) F_k^+(x) \mathrm{e}^{-ik^2(t-t_0)} \mathrm{d}^2 k$$
$$\psi_-(x,t) = \int_{\mathbb{R}^2} \varphi_-(k) F_k^-(x) \mathrm{e}^{-ik^2(t-t_0)} \mathrm{d}^2 k,$$

kde spojité koeficienty $\varphi_\pm$ jsou dány počáteční podmínkou.

Schrödingerovu rovnici (D.23) můžeme přepsat do integrálního tvaru (Lippmann-Schwingerova rovnice)

$$F_k^\pm(x) = \mathrm{e}^{i\langle k,x\rangle} + \int_{\mathbb{R}^2} \mathcal{G}_k^\pm(x-y) V(y) F_k^\pm(y) \mathrm{d}^2 y =: \mathrm{e}^{i\langle k,x\rangle} + G_\pm(k;x), \tag{D.24}$$

kde $\mathcal{G}_k^\pm$ je tzv. retardovaná (resp. advancovaná) Greenova funkce Schrödingerovy rovnice

$$\mathcal{G}_k^\pm(x-y) = \frac{i}{4} H_0^{(1)}(\pm|k||x-y|).$$

Pro y pevné a $|x| =: r \to \infty$ můžeme funkce $\mathcal{G}_z^\pm$ s pomocí (D.12) rozvinout na

$$\mathcal{G}_k^\pm(x-y) \overset{r\to\infty}{\sim} \frac{1}{2\sqrt{2\pi}} \mathrm{e}^{i\frac{\pi}{4}} \mathrm{e}^{\pm i|k||x-y|} \frac{1}{\sqrt{\pm|k||x-y|}} + O\left(\frac{1}{(|k||x-y|)^{\frac{3}{2}}}\right) \tag{D.25}$$

a protože zároveň $|x-y| \overset{r\to\infty}{\sim} r - \langle n, y\rangle$, kde $n := \frac{x}{r}$, pro asymptotická vyjádření funkcí $F_k^\pm$ dostaneme

$$F_k^\pm(x) \overset{r\to\infty}{\sim} \mathrm{e}^{i\langle k,x\rangle} + f^\pm(k',k) \frac{\mathrm{e}^{\pm i|k|r}}{\sqrt{r}}, \quad \text{kde} \tag{D.26}$$
$$f^\pm(k',k) = \frac{1}{2\sqrt{\pm 2\pi|k|}} \mathrm{e}^{i\frac{\pi}{4}} \int_{\mathbb{R}^2} \mathrm{e}^{\mp i\langle k',y\rangle} V(y) F_k^\pm(y) \mathrm{d}^2 y, \quad k' := |k|\frac{x}{r} = |k|n$$

Vyjádříme-li vektor k jako $k = l\omega$, $l = |k|$ a zapíšeme-li polohový vektor x v polárních souřadnicích $x = r(\cos\Omega, \sin\Omega)$, vidíme, že funkce $f^\pm$ jsou ve skutečnosti funkcemi pouze proměnných l, ω, Ω: $f^\pm(k',k) = f^\pm(l,\omega,\Omega)$.

Pro rotačně symetrický potenciál můžeme bez újmy na obecnosti uvažovat hybnost nalétavající částice k ve směru první souřadné osy a vztah (D.26) potom přejde na

$$F_k^\pm(r,\Omega) \overset{r\to\infty}{\sim} \mathrm{e}^{ilr\cos\Omega} + f^\pm(l,\Omega) \frac{\mathrm{e}^{\pm ilr}}{\sqrt{r}},$$

.

Funkce $f(k',k) \equiv f^+(k',k)$ (tzv. amplituda rozptylu) má v teorii rozptylu zásadní význam, neboť pro diferenciální účinný průřez srážky platí

$$\frac{\mathrm{d}\sigma}{\mathrm{d}\Omega} = |f(k',k)|^2$$

Poznámka D.20 *Ve dvoudimenzionální teorii rozptylu se často hodí následující rozvoj:*

$$e^{ir\cos\Omega} = \sum_{m=-\infty}^{\infty} i^m J_m(r) e^{im\Omega} \quad \text{pro } r > 0$$

Důkaz S pomocí integrálního vyjádření (D.18) napočítáme Fourierovu řadu

$$e^{ir\sin\Omega} = \sum_{m=-\infty}^{\infty} J_m(r) e^{im\Omega},$$

odkud již plyne tvrzení

$$e^{ir\cos\Omega} = e^{ir\sin(\Omega+\frac{\pi}{2})} = \sum_{m=-\infty}^{\infty} i^m J_m(r) e^{im\Omega}$$

■

Poznámka D.21 *Z asymptotického vyjádření pro Besselovy funkce (D.11) dostaneme*

$$e^{ir\cos\Omega} \overset{r\to\infty}{\sim} \frac{1}{\sqrt{2\pi r}} \sum_{m=-\infty}^{\infty} \left(e^{-i\frac{\pi}{4}} e^{ir} + (-)^m e^{i\frac{\pi}{4}} e^{-ir} \right) e^{im\Omega} \tag{D.27}$$

D.7.2 Časově závislá teorie rozptylu

Opět uvažujme potenciál konečného dosahu. Časový vývoj vlnové funkce rozptylované částice ψ je řízen totálním hamiltoniánem H

$$\psi(t) = e^{-itH}\psi(0).$$

Před dosažením interakční oblasti se částice pohybuje přibližně jako volná a může tedy existovat stav g_- řízený volným hamiltoniánem H_∞ takový, že

$$\lim_{t\to-\infty} \|\psi(t) - g_-(t)\| = \lim_{t\to-\infty} \|e^{-itH}\psi(0) - e^{-itH_\infty} g_-(0)\| = 0. \tag{D.28}$$

Jestliže takovýto stav existuje, nazýváme jej vstupním asymptotickým stavem stavu ψ. Analogicky zavedeme výstupní asymptotický stav g_+

$$\lim_{t\to\infty} \|\psi(t) - g_+(t)\| = \lim_{t\to\infty} \|e^{-itH}\psi(0) - e^{-itH_\infty} g_+(0)\| = 0. \tag{D.29}$$

Má-li stav ψ vstupní i výstupní asymptotický stav, nazývá se stavem rozptylovým. Podmínky (D.28) a (D.29) potom můžeme zapsat pomocí tzv. vlnových operátorů $W_\pm$

$$\psi = W_\pm g_\pm, \quad \text{kde } W_\pm = \operatorname*{s-lim}_{t\to\pm\infty} e^{itH} e^{-itH_\infty}.$$

Asymptotické stavy $g_\pm$ rozptylového stavu ψ jsou svázány operátorem rozptylu S:

$$g_+(0) = W_+^{-1} W_- g_-(0) =: S g_-(0).$$

D.7.3 Souvislost stacionární a časově závislé teorie rozptylu

Lemma D.22 *Buď $\varphi \in D(\mathbb{R}^+ \times S^1)$. Definujme uzavřenou kouli $B_K := \left\{x \in \mathbb{R}^2 | \ |x| \leq K\right\}$ Pokud pro funkce $G_\pm$ z obecného vyjádření (D.24) zobecněných vlastních funkcí $F^\pm$ totálního hamiltoniánu H platí $G_\pm, \frac{\partial}{\partial l}G_\pm \in L^1_{loc}(\mathbb{R}^+ \times S^1, \mathrm{d}l\mathrm{d}\omega)$ pro každé $x \in \mathbb{R}^2$, $\sqrt{r}G_\pm, \sqrt{r}\frac{\partial}{\partial l}G_\pm$ jsou spojité v x na $\mathbb{R}^2$ pro $k \in B_b \setminus B_a$ a pokud jsou navíc funkce $\left(f^\pm, \frac{\partial}{\partial l}f^\pm, \frac{\partial^2}{\partial l^2}f^\pm\right)(l, \omega, \Omega)$ esenciálně omezené na $(B_b \setminus B_a) \times \langle 0, 2\pi)$, kde $\infty > b > a > 0$ libovolné, potom vlnová funkce*

$$g(x) := \int_0^\infty \int_{S^1} \mathrm{e}^{il\langle\omega, x\rangle}\varphi(l, \omega)\mathrm{d}\omega l\mathrm{d}l \tag{D.30}$$

popisuje vstupní (resp. výstupní) asymptotický stav stavu ψ^- (resp. ψ^+):

$$\psi^\pm(x) = \int_0^\infty \int_{S^1} F_k^\mp(x)\varphi(l, \omega)\mathrm{d}\omega l\mathrm{d}l.$$

Důkaz Chceme ukázat, že

$$\lim_{t\to\pm\infty} \|\mathrm{e}^{-itH_\infty}g - \mathrm{e}^{-itH}\psi^\pm\| = 0.$$

Důkaz provedeme například pro limitu v $-\infty$, pro druhou z limit se provede přesně analogicky. Funkci

$$\Delta(x) := \left(\mathrm{e}^{-itH_\infty}g - \mathrm{e}^{-itH}\psi^-\right)(x) = \int_0^\infty \mathrm{e}^{-itl^2} \int_{S^1} \varphi(l, \omega)G_+(l, \omega; x)\mathrm{d}\omega l\mathrm{d}l = \{per\ partes\}$$

$$= \frac{1}{2it}\int_0^\infty \mathrm{e}^{-itl^2} \int_{S^1} \left(\frac{\partial\varphi}{\partial l}G_+ + \varphi\frac{\partial G_+}{\partial l}\right)(l, \omega; x)\mathrm{d}\omega\mathrm{d}l$$

na libovolné uzavřené kouli B_K odhadneme pomocí spojité nezáporné konečné funkce C_K

$$|\Delta(x)| \leq \frac{1}{2|t|}\int_a^b \int_{S^1} \left|\frac{\partial\varphi}{\partial l}G_+ + \varphi\frac{\partial G_+}{\partial l}\right|(l, \omega; x)\mathrm{d}\omega\mathrm{d}l < \frac{1}{|t|}\frac{C_K(x)}{\sqrt{r}}.$$

Body a, b jsou koncové body intervalu, který obsahuje v proměnné l omezený nosič funkce $\int_{S^1} \varphi(l, \omega)G_+(l, \omega; x)\mathrm{d}\omega$.

Integrál pro normu funkce Δ rozdělíme do dvou částí I_1 a I_2

$$\|\Delta\|^2 = I_1 + I_2 = \int_0^{K_0}\int_0^{2\pi} |\Delta(r, \Omega)|^2\mathrm{d}\Omega r\mathrm{d}r + \int_{K_0}^\infty\int_0^{2\pi} |\Delta(r, \Omega)|^2\mathrm{d}\Omega r\mathrm{d}r,$$

$$\text{kde } K_0 > 0 \text{ takové, že } \sup_{x\in\mathbb{R}^2\setminus B(K_0)} \left|G_+(k; x) - f^+(k', k)\frac{\mathrm{e}^{ilr}}{\sqrt{r}}\right| < \frac{konst.}{(lr)^{\frac{3}{2}}}.$$

Existence takového K_0 plyne z asymptotického rozvoje pro Greenovu funkci (D.25).

Nezáporná funkce C_{K_0} je spojitá na kompaktní množině B_{K_0} (a je na ní tudíž omezená), proto můžeme provést odhad

$$I_1 < \frac{1}{|t|}\int_0^{K_0}\int_0^{2\pi} C_{K_0}(r,\Omega)^2 \mathrm{d}\Omega \mathrm{d}r \overset{t\to-\infty}{\longrightarrow} 0.$$

V integrálu I_2 dosadíme do výrazu Δ za ψ^- z (D.26), v závěru důkazu potom ukážeme, že zbytek řádu $O\left(\frac{1}{(lr)^{\frac{3}{2}}}\right)$ v limitě $t \to -\infty$ k I_2 rovněž nepřispívá.

Zkoumejme tedy dále funkci

$$\tilde{\Delta}(r,\Omega) := \left(\mathrm{e}^{-itH_\infty}g - \mathrm{e}^{-itH}\psi^-_{(r\to\infty)}\right)(r,\Omega) = \int_0^\infty \mathrm{e}^{-itl^2}\int_{S^1}\varphi(l,\omega)f^+(l,\omega,\Omega)\frac{\mathrm{e}^{ilr}}{\sqrt{r}}\mathrm{d}\omega l\mathrm{d}l.$$

Funkci $\varphi(l,\omega)f^+(l,\omega,\Omega)$ rozložme ve Fourierovu řadu

$$\varphi(l,\omega)f^+(l,\omega,\Omega) =: s(l,\omega,\Omega) = \sum_{m=-\infty}^{\infty} s_m(l,\Omega)\mathrm{e}^{im\omega}.$$

Po integraci po kružnici dostaneme

$$\begin{aligned}\tilde{\Delta}(r,\Omega) &= 2\pi\int_0^\infty \mathrm{e}^{-itl^2}s_0(l,\Omega)\frac{\mathrm{e}^{ilr}}{\sqrt{r}}l\mathrm{d}l = \{s(l,\Omega) := 2\pi l s_0(l,\Omega),\ 2\times \textit{per partes}\}\\ &= \frac{1}{\sqrt{r}}\int_0^\infty \mathrm{e}^{-itl^2+ilr}\frac{\partial}{\partial l}\left[\frac{1}{i(r-2tl)}\frac{\partial}{\partial l}\left(\frac{1}{i(r-2tl)}s(l,\Omega)\right)\right]\mathrm{d}l\end{aligned}$$

Vzhledem k tomu, že $supp(s) \subset B_b \setminus B_a,\ 0 < a < b < \infty$, a s ohledem na předpokladané vlastnosti f^+ můžeme učinit odhad (bereme $t < 0$)

$$|\tilde{\Delta}(r,\Omega)| \leq \frac{1}{\sqrt{r}}\int_a^\infty \frac{M}{(r-2tl)^2}\mathrm{d}l = -\frac{1}{\sqrt{r}}\frac{1}{2t}\frac{M}{r-2ta},$$

kde $0 < M = konst$. Pro příspěvek k I_2 potom platí

$$\int_K^\infty\int_0^{2\pi}|\tilde{\Delta}(r,\Omega)|^2\mathrm{d}\Omega r\mathrm{d}r \leq \frac{\pi M^2}{2t^2}\int_0^\infty\frac{1}{(r-2ta)^2}\mathrm{d}r = -\frac{\pi M^2}{4at^3} \overset{t\to-\infty}{\longrightarrow} 0.$$

Část funkce Δ obsahující již jen zbytek řádu $\frac{1}{(lr)^{\frac{3}{2}}}$ označíme $\tilde{\tilde{\Delta}}$

$$\tilde{\tilde{\Delta}}(r) := \int_0^\infty \mathrm{e}^{-itl^2} \int_{S^1} \varphi(l,\omega)\frac{1}{(lr)^{\frac{3}{2}}}\mathrm{d}\omega l\mathrm{d}l = \left\{ \tilde{\varphi}(l) := \int_{S^1} \varphi(l,\omega)\mathrm{d}\omega \in D(\mathbb{R}^+),\ \mathit{per\ partes} \right\}$$
$$= \frac{1}{2it}\int_0^\infty \mathrm{e}^{-itl^2}\frac{\partial}{\partial l}\left(\tilde{\varphi}(l)\frac{1}{(lr)^{\frac{3}{2}}}\right)\mathrm{d}l$$

Poněvadž uvažujeme $r > K_0$ a funkce $\tilde{\varphi}$ má omezený nosič, můžeme provést snadný odhad

$$|\tilde{\tilde{\Delta}}(r)| \leq \frac{konst.}{|t|r^{\frac{3}{2}}},$$

odkud již pro příspěvek k I_2 dostaneme

$$\int_{K_0}^\infty \int_0^{2\pi} |\tilde{\tilde{\Delta}}|^2 \mathrm{d}\Omega r \mathrm{d}r \leq \frac{2\pi\ konst.}{K_0|t|} \overset{t\to-\infty}{\longrightarrow} 0.$$

Celkem tudíž skutečně $\lim_{t\to-\infty}\|\Delta\| = 0$.

■

Poznámka D.23 *Zobecněné vlastní funkce $F^{\pm}$ tak představují integrální jádra vlnových operátorů $\tilde{W}_{\pm}$ na "impulzovém prostoru":*

$$W_{\pm} = \tilde{W}_{\pm}\mathscr{F}^{-1}.$$

Lemma D.24 *Splňují-li zobecněné vlastní funkce $F^{\pm}$ totálního hamiltoniánu H předpoklady lemmatu D.22 a jsou-li navíc svázány integrálním operátorem na S^1 s jádrem $\mathcal{S}^{(l)}$:*

$$F^+(l,\omega;x) = \int_{S^1} \mathcal{S}^{(l)}(\omega,\omega')F^-(l,\omega';x)\mathrm{d}\omega', \tag{D.31}$$

potom pro g tvaru (D.30) je operátor rozptylu S bodové interakce dán předpisem

$$(Sg)(x) = \int_0^\infty \int_{S^1} \mathrm{e}^{il\langle\omega',x\rangle}\left(\int_{S^1}\mathcal{S}^{(l)}(\omega,\omega')\varphi(l,\omega)\mathrm{d}\omega\right)\mathrm{d}\omega' l\mathrm{d}l. \tag{D.32}$$

Důkaz Pomocí lemmatu D.22 dostaneme

$$(W_-g)(x) = \psi^-(x) = \int_0^\infty\int_{S^1} F^+(l,\omega;x)\varphi(l,\omega)\mathrm{d}\omega l\mathrm{d}l$$
$$= \int_0^\infty\int_{S^1} F^-(l,\omega';x)\left(\int_{S^1}\mathcal{S}^{(l)}(\omega,\omega')\varphi(l,\omega)\mathrm{d}\omega\right)\mathrm{d}\omega' l\mathrm{d}l$$
$$= W_+\int_0^\infty\int_{S^1} \mathrm{e}^{il\langle\omega',x\rangle}\left(\int_{S^1}\mathcal{S}^{(l)}(\omega,\omega')\varphi(l,\omega)\mathrm{d}\omega\right)\mathrm{d}\omega' l\mathrm{d}l,$$

což již dává obecný tvar (D.32) operátoru S, neboť $S = W_+^{-1} W_-$.

■

Poznámka D.25 *V případě rotačně symetrického potenciálu má integrální jádro $\mathcal{S}^{(l)}$ tvar [4]*

$$\mathcal{S}^{(l)}(\omega, \omega') = \delta_{S^1}(\omega, \omega') + \sqrt{\frac{il}{2\pi}} f(l, \operatorname{arc}\omega - \operatorname{arc}\omega'), \tag{D.33}$$

kde $\delta_{S^1}(\omega, \omega')$ značí jádro identického operátoru na S^1.

Poděkování

Za důkladné vedení, pomoc při řešení problémů, studijní materiály a v neposlední řadě za pečlivou kontrolu preprintu děkuji Prof. Pavlu Šťovíčkovi.
Za zapůjčení knih děkuji Ing. Ondřeji Lvovi.

Literatura

[1] S. Albeverio, F. Getsztesy, R. Hoegh-Krohn a H. Holden. *Solvable Models in Quantum Mechanics.* Springer-Verlag, Berlin-Heidelberg-New York, 1987.

[2] A. Teta. Quadratic Forms for Singular Perturbations of the Laplacian. *Preprint S.I.S.S.A.*, 165 FM, 1988.

[3] J. Blank, P. Exner a M. Havlíček. *Lineární operátory v kvantové fyzice.* Karolinum, Praha, 1993.

[4] S.N.M. Ruijsenaars. The Aharonov-Bohm Effect and Scattering Theory. *Annals of Physics*, 146, 1983.

[5] T. Kato. *Perturbation Theory for Linear Operators.* Springer-Verlag, Berlin-Heidelberg-New York, 1995.

[6] Gerd Grubb. *Introduction to Distribution Theory, Lecture Notes.* http://www.math.ku.dk/~grubb/distribution.htm, 2003.

[7] M. Abramowitz a I.A. Stegun. *Handbook of Mathematical Functions.* National Bureau of Standards, 1964.

[8] N.N. Lebeděv. *Speciální funkce a jejich použití.* SNTL, 1956.

[9] M. Reed a B. Simon. *Methods of Modern Mathematical Physics II.* Academic Press, London, 1975.

[10] M. Reed a B. Simon. *Methods of Modern Mathematical Physics I.* Academic Press, London, 1972.

[11] M. Reed a B. Simon. *Methods of Modern Mathematical Physics III.* Academic Press, London, 1979.

[12] J. Formánek. *Úvod do kvantové teorie.* Academia, Praha, 2004.

[13] M. Schechter. *Operator Methods in Quantum Mechanics.* Dover Publications, New York, 2002.