

ČESKÉ VYSOKÉ UČENÍ TECHNICKÉ V PRAZE
FAKULTA JADERNÁ A FYZIKÁLNĚ INŽENÝRSKÁ

DIPLOMOVÁ PRÁCE

KVANTOVÉ SYSTÉMY NA
MNOHONÁSOBNĚ SOUVISLÝCH
KONFIGURAČNÍCH PROSTORECH

Stanislav Petráš

Vedoucí práce: Prof. Ing. J. Tolar, DrSc.

5. ledna 2007

Prohlašuji, že jsem svou diplomovou práci vypracoval samostatně a použil jsem pouze podklady (literaturu, projekty, SW atd.) uvedené v příloženém seznamu.

Nemám závažný důvod proti použití tohoto školního díla ve smyslu §60 Zákona č.121/2000 Sb., o právu autorském, o právech souvisejících s právem autorským a o změně některých zákonů (autorský zákon).

V Praze dne

.....

Podpis

Poděkování

Rád bych poděkoval Prof. Jiřímu Tolarovi za jeho pomoc při sepisování této práce, za mé vedení během posledních třech let a také za podporu v těžkých životních a pracovních situacích.

Dále bych velmi rád poděkoval mé mamce a posmrtně i mému tatškovi za podporu a za to, že mi umožnili vystudovat tuto školu.

Název práce: **Kvantové systémy na mnohonásobně souvislých konfiguračních prostorech**

Autor: Stanislav Petráš

Obor: Matematické inženýrství

Vedoucí práce: Prof. Ing. Jiří Tolar, DrSc. Katedra fyziky, FJFI, ČVUT.

Konzultant: -

Abstrakt: V první a druhé kapitole je shrnuta kvantová kinematika na homogenních prostorech, včetně čistě geometrického přístupu k této problematice, je definován Mackeyho systém imprimitivity. V třetí části je definován takzvaný zobecněný Schrödingerův systém. Ve čtvrté části je zavedena kvantová kinematika na diferencovatelných varietách, přičemž je využito dynamických systémů na varietě a konexí v hlavním a přidruženém fibrovaném prostoru. Pátá kapitola je pokusem o nalezení kvantové kinematiky na mnohonásobně souvislých prostorech za pomoci čistě topologických metod, tj. bez potřeby zavádět konexe. Konkrétně je navrženo jisté unitární zobrazení mezi kvaziperiodickými funkcemi na univerzálním nakrývacím prostoru a funkcemi na dané varietě, která je mnohonásobně souvislým prostorem. Obecné výsledky jsou aplikovány na kvantovou mechaniku na kružnici, 2-sféře a 2-toru.

Klíčová slova: Matematická fyzika, kvantová kinematika, diferencovatelné variety, diferenciální geometrie, algebraická topologie.

Title: **Quantum systems on multiply connected configuration spaces**

Author: Stanislav Petráš

Abstract: In the first and second chapter quantum kinematics on homogeneous spaces is reviewed, including the purely geometric approach, and Mackey's system of imprimitivity is defined. In the third chapter the generalized Schrödinger system is introduced. The fourth part is devoted to quantum kinematics on differentiable manifolds, where dynamical systems on manifolds and connections in principal and associated bundles are the main ingredients. The fifth chapter contains a proposal to find quantum kinematics on multiply connected configuration spaces using only topological methods, i.e. without using connections. Namely, we employ a certain unitary mapping from quasiperiodic functions on the universal covering space to functions on the given manifold which is multiply connected. General results are applied to quantum kinematics on the 2-sphere, circle and 2-torus.

Key-words: Mathematical physics, quantum kinematics, differentiable manifolds, differential geometry, algebraic topology.

Obsah

1	Úvod do problematiky	1
1.1	Formalismus kvantové mechaniky	1
1.2	Symetrie a kvantová mechanika	2
2	Kvantová kinematika na homogenních prostorech	5
2.1	Homogenní prostory a G-prostory	5
2.1.1	Faktorprostory a homogenní prostory	5
2.1.2	Tranzitivní G-prostory - homogenní prostory	6
2.1.3	Homogenní prostor jako hlavní fibrovaný prostor	6
2.2	Několik vlastností míry na lokálně kompaktních grupách	7
2.2.1	Přehled základních pojmů	7
2.2.2	Míry na lsc Borelovských prostorech	8
2.2.3	Haarova míra	9
2.2.4	Míra na tranzitivních G-prostorech	9
2.3	Multiplikátory a projektivní reprezentace	10
2.4	Indukované reprezentace	12
2.4.1	Motivace a základní definice	12
2.4.2	Důležité pojmy z teorie fibrovaných prostorů	15
2.4.3	Geometrický pohled na indukované reprezentace	17
2.5	Projekční míra a systém imprimitivity	19
2.5.1	Definice a přehled základních pojmů	19
2.5.2	Systém imprimitivity pro $\mathcal{H} = \mathcal{L}^2(M, \mathcal{H}(L), \mu)$	21
2.6	Pozorovatelné polohy a hybnosti	22
2.6.1	Operátor polohy	22
2.6.2	Operátor hybnosti	23
2.7	Systém imprimitivity na S^2	24

3	Zobecněný Schrödingerův systém	31
3.1	Dynamické systémy na varietě	31
3.2	Zobecněný systém imprimitivity	32
3.3	Zobecněný Schrödingerův systém	33
3.4	Míra a projekční míra na varietě M	34
4	Kvantová kinematika na diferencovatelných varietách	37
4.1	Konstrukce systému imprimitivity	37
4.2	Geometrický přístup ke konstrukci systému imprimitivity . . .	38
5	Kvantová kinematika na mnohonásobně souvislých kofigu- račních prostorech	41
5.1	Úvod do geometrie nakrývacích prostorů	41
5.2	Fyzikální konstrukce Hilbertova prostoru	45
5.3	Kvantová mechanika na mnohonásobně souvislých prostorech .	47
5.3.1	Vztah řezů na $(\tilde{M} \times_{\Gamma} V, p_F, M, \Gamma)$ a na $(\tilde{M} \times V, pr_1, \tilde{M})$	47
5.3.2	Konstrukce unitárního zobrazení	51
5.4	Kvantová mechanika na 2 - toru	56
5.4.1	Kvantová kinematika na 2 - toru	56
5.4.2	Dynamika na 2 - toru	58
5.5	Konstrukce kvantové kinematiky na mnohonásobně souvislých prostorech - poněkud jiný přístup	59
5.6	Kvantová kinematika na kružnici	63

Úvod

První část této diplomové práce je věnována stručné revizi formalismu kvantové mechaniky¹ a symetriím v kvantové mechanice. Tyto úvodní kapitoly přitom beze zbytku vychází z práce [1]. V druhé části je poměrně podrobně diskutována kvantová kinematika na homogenních prostorech, tj. postup jak sestavit pozorovatelné polohy a hybnosti v případě, že konfiguračním prostorem kvantového systému je varieta, jejíž grupou symetrie je lokálně kompaktní Lieova grupa a je definován Mackeyho systém imprimitivity. Představen je jak klasický přístup k této problematice, tak i přístup používající metod moderní diferenciální geometrie. Fyzikální praxe ukazuje, že tato metoda je použitelná v poměrně širokém množství případů. K sepsání této části velmi pomohly knihy [2] a [3], kde je možné najít hlubší informace týkající se této problematiky. Třetí část se věnuje zobecnění Mackeyho systému imprimitivity, takzvanému Schrödingerovu zobecněnému systému imprimitivity, na případ, kdy není k dispozici žádná grupa symetrie konfiguračního prostoru a je nutno vyšetřovat hladká vektorová pole na varietě, která můžeme považovat za generátory transformací takovýchto konfiguračních prostorů. Na tuto část těsně navazuje část čtvrtá, ve které je explicitně ukázáno, jak zkonstruovat pozorovatelné polohy a hybnosti v tomto obecnějším případě, přičemž je zahrnuta i možnost vnějšího pole, jež se vyskytuje na konfiguračním prostoru. Při konstrukci se přitom využívá konexí na hlavním a přidruženém fibrováném prostoru, viz [4]. Více o této velmi obecné metodě je uvedeno v [1], kde je podrobně diskutována otázka ekvivalence a reducibility takových systémů. Pátá kapitola je pak autorovým pokusem o nalezení kvantové kinematiky na mnohonásobně souvislých prostorech za pomoci čistě topologických metod, tj. bez potřeby zavádět konexe. Konkrétně je využito jisté unitární zobrazení mezi kvaziperiodickými funkcemi a periodickými funkcemi na univerzálním nakrývacím prostoru. Přitom periodické funkce odpovídají funkcím na dané varietě, která je mnohonásobně souvislým prostorem.

¹Rozumí se nerelativistická kvantová mechanika.

Kapitola 1

Úvod do problematiky

1.1 Formalismus kvantové mechaniky

Fyzikálnímu systému je přiřazen Hilbertův prostor $\mathcal{H}$. Stavy systému jsou reprezentovány von Neumanovými operátory (maticemi hustoty), omezenými, samosdruženými, pozitivními operátory v $\mathcal{H}$ s jednotkovou stopou. Takto zavedená množina stavů w je konvexní a její extrémální body se nazývají čistými stavy. Čisté stavy jsou reprezentovány projektory na jednorozměrné podprostory. Měření nad systémem s výsledky z množiny X , která je vybavena σ -algebrou $\mathcal{B}(X)$ měřitelných množin, přísluší projekční míra na X . Každé měřitelné množině $S \in \mathcal{B}(X)$ je přiřazen projektor $F(S)$ v $\mathcal{H}$ přičemž platí: $F(X) = I$; $F(\bigcup_{i=1}^{\infty} S_i) = \sum_{i=1}^{\infty} F(S_i)$, pokud $S_i \cap S_j = \emptyset$ pro $i \neq j$. Je-li systém ve stavu $U \in w$, pak číslo $p_U(S) = \text{Tr}(UF(S))$ představuje pravděpodobnost toho, že výsledek měření padne do množiny $S \in \mathcal{B}(X)$. Zobrazení $p_U : \mathcal{B}(X) \rightarrow R$ je zřejmě pravděpodobnostní míra na X .

Z uvedeného výčtu je patrné, že zásadní roli v kvantově mechanickém formalismu hraje ortokomplementární svaz projektorů na podprostory Hilbertova prostoru $\mathcal{H}$. Tento svaz označíme L , částečné uspořádání na něm je definováno: $F_1 \leq F_2$ právě když $F_1 F_2 = F_1$, doplněk $F^\perp = I - F$. Zřejmě $F_1 \leq F_2$ právě když příslušné podprostory jsou v inkluzi, $F^\perp$ projektuje na ortogonální doplněk. Význačnými vlastnostmi svazů jsou: i) pro každou spočetnou množinu $F_1, F_2, \dots$ prvků z L existuje $\bigwedge_n F_n$ a $\bigvee_n F_n$ v L ; ii) pro $F_1, F_2 \in L$ a $F_1 \leq F_2$ existuje prvek $P \in L$ takový, že $P \leq F_1^\perp$ a $P \vee F_1 = F_2$. Tento prvek $P = F_1^\perp F_2 = (I - F_1)F_2 = F_2 - F_1$ je jediný s uvedenou vlastností.

1.2 Symetrie a kvantová mechanika

Nechť konfigurační varieta, kterou nadále budeme označovat M , je G - prostorem grupy symetrie G . Prvky grupy g se nazývají akce a každá akce g představuje transformaci prostoru M na sebe. Přitom požadujeme: i) $ep = p$; ii) $g_1(g_2p) = g_1g_2p$, kde $g_1, g_2 \in M$, $p \in M$. Jedná se takzvanou levou akci G na M .

Mnoho tvrzení, speciálně tvrzení o Mackeyho systému imprimitivity, lze vyslovit za předpokladu, že grupa G je lokálně kompaktní se spočetnou bází. Pro fyziku jsou nejdůležitější souvislé Lieovy grupy, na které se omezíme, tyto předchozí podmínku splňují díky tomu, že mají strukturu variety. Dále budeme požadovat, aby varieta M byla souvislá a hladká. Samozřejmě také platí, že zobrazení $(g, p) \mapsto gp$ je nekonečně diferencovatelné.

Základní fyzikální představa nyní je, že transformaci symetrie g konfiguračního prostoru M odpovídá transformace symetrie kvantově mechanického popisu. Pro upřesnění této představy zavedeme několik pojmů: Automorfismem logiky L rozumíme bijekci $\alpha : L \rightarrow L$ která splňuje: i) $\alpha(I) = I$; ii) $\alpha(F^\perp) = \alpha(F)^\perp$; iii) $\alpha(\bigvee_n F_n) = \bigvee_n \alpha(F_n)$. Konvexním automorfismem množiny stavů w rozumíme bijekci $\beta : w \rightarrow w$, která splňuje podmínku: jsou-li čísla $c_1, c_2, \dots$ nezáporná, $\sum_n c_n = 1$, pak $\beta(\sum_n c_n U_n) = \sum_n c_n \beta(U_n)$.

Zformulujme nyní požadavek transformace symetrie kvantově mechanického systému takto:

- a) existuje homomorfismus $\alpha : g \mapsto \alpha(g)$ grupy G do grupy automorfismů logiky L , $\alpha(g) : L \rightarrow L : F \mapsto F^g$.
- b) existuje homomorfismus $\beta : g \mapsto \beta(g)$ grupy G do grupy konvexních automorfismů množiny stavů w , $\beta(g) : w \rightarrow w : U \mapsto U^g$.
- c) rozdělení pravděpodobnosti se nemění, tj. $Tr(U^g F^g) = Tr(UF)$, kde $U \in w, F \in L$.
- d) mějme projekční míru F na množině X , která je přiřazena jistému měření nad systémem s výsledky z této množiny. Množina X je vybavena σ - algebrou $\mathcal{B}(X)$ měřitelných množin. Pak existuje homomorfismus $\gamma : g \mapsto \gamma(g)$ grupy G do grupy měřitelných, bijektivních zobrazení prostoru X na sebe. Jestliže se při konstrukci množiny X využívá konfiguračního prostoru M , zobrazení $\gamma(g)$ nemusí být identické. Každé

$\gamma(g)$ indukuje automorfizmus σ - algebry $\mathcal{B}(X) \rightarrow \mathcal{B}(X) : S \mapsto S^g$.
Přitom požadujeme aby $F(S^g) = F(S)^g$.

Automorfizmy logiky a konvexní automorfizmy stavů lze velmi dobře popsat, jak ukazuje následující dobře známá Wignerova věta.

Věta 1.2.1 *Je-li $\mathcal{H}$ separabilní nekonečně rozměrný Hilbertův prostor, platí: Všechny automorfizmy logiky L jsou právě tvaru $\alpha(F) = TFT^{-1}$, kde $F \in L$ a T je pevně zvolený unitární (antiunitární) operátor v $\mathcal{H}$. Dva takové operátory indukují též automorfizmus logiky, právě když se liší o fázový faktor. Všechny konvexní automorfizmy množiny stavů w jsou právě tvaru $\beta(U) = TUT^{-1}$, kde $U \in w$ a T je pevně zvolený unitární (antiunitární) operátor v $\mathcal{H}$. Dva takové operátory indukují též konvexní automorfizmus stavů, právě když se liší o fázový faktor.*

Wignerova věta a požadavky a), b) vedou k závěru, že každé akci $g \in G$ je přiřazena dvojice operátorů $T(g)$ a $\tilde{T}(g)$, z nichž každý je unitární nebo antiunitární. Aby bylo vyhověno požadavku c) musí se $T(g), \tilde{T}(g)$ lišit nejvýše o fázový faktor. Můžeme tedy oba operátory ztotožnit: $T(g) = \tilde{T}(g)$, $g \in G$. Protože jsme se omezili na souvislé Lieovy grupy, budou všechny operátory unitární. To plyne jednak z toho, že součin dvou antiunitárních operátorů je unitární operátor, jednak z toho, že v jistém okolí O jednotkového prvku e ke každému $b \in O$ existuje $a \in O$, $b = a^2$, přičemž prvky z O generují G . Označme nyní $U(\mathcal{H})$ grupu unitárních operátorů na $\mathcal{H}$ se silnou topologií. Centrum Z této grupy tvoří operátory zI , kde $z \in T^1$, kde T^1 je Lieova grupa komplexních čísel modulu 1. Faktorgrupa $P(\mathcal{H}) = U(\mathcal{H})/Z$ se nazývá projektivní grupou Hilbertova prostoru $\mathcal{H}$. Požadavky a), b), c) můžeme shrnout v požadavek abc). Existuje homomorfizmus $h : G \rightarrow P(\mathcal{H})$. Po tomto homomorfizmu budeme navíc požadovat, aby byl měřitelný (v tom případě i spojitý).

Požadavek d) výše jsme nechali dosud stranou, to protože jeho rozbor vyžaduje popis konkrétního měření nad systémem. Pro lokalizované systémy má zásadní význam měření polohy. Výsledky měření jsou v tomto případě body konfiguračního prostoru tj. $X = M$. Právě v tomto případě většinou není homomorfizmus γ z bodu d) identické zobrazení. Přitom lokalizovatelnost znamená zhruba řečeno to, že pokud máme dvě transformace, které transformují danou množinu $S \in \mathcal{B}(M)$ stejně, pak jim odpovídající transformace Hilbertova prostoru stavů příslušejícího k S jsou také stejné. Takovými systémy se nadále budeme zabývat.

Kapitola 2

Kvantová kinematika na homogenních prostorech

2.1 Homogenní prostory a G -prostory

V tomto odstavci bude uvedeno několik základních vlastností homogenních prostorů a G - prostorů, tj. v našem případě variet, na kterých působí Lieova grupa G jako grupa transformací.

2.1.1 Faktorprostory a homogenní prostory

Buď G Lieova grupa a H Lieova podgrupa G . Definujme relaci ekvivalence na G jako $g \sim g'$, právě když existuje prvek $h \in H$ takový, že $g' = gh$. Třída ekvivalence $[g]$ je tudíž množina $\{gh; h \in H\}$. Faktorprostor G/H má strukturu variety a $\dim G/H = \dim G - \dim H$. G/H ale obecně nemusí být Lieova grupa, tou se stane, pokud podgrupa H je normální podgrupou, tj. platí $ghg^{-1} \in H$, $\forall g \in G$ a $\forall h \in H$. V tomto případě jsou operace násobení a inverzního prvku nezávislé na výběru zástupce třídy ekvivalence a tudíž dobře definované. Již bylo zmíněno, že faktorprostor je varietou, tj. je na něm definovaná topologie (Hausdorfova topologie). Topologii na G/H definujeme pomocí zobrazení $\beta : G \rightarrow G/H$, po kterém požadujeme, aby bylo spojitě a otevřeně. Definujeme dále zobrazení $\tau(g) : aH \mapsto gaH$, $\forall g \in G$, potom G je grupou transformací G/H . Jelikož G působí na G/H tranzitivně je G/H homogenním prostorem.

2.1.2 Tranzitivní G-prostory - homogenní prostory

Uvažujme hladkou konfigurační varietu M a její Lieovskou konečnědimenzionální grupu symetrie G , která na varietě M působí tranzitivně tj. $\forall m, n \in M$ existuje $g \in G$ takové, že $m = gn$. Zvolme pevně libovolný bod m z variety M a označme H grupu stability prvku m . H je tedy podgrupa grupy G , která svou akcí na varietě M ponechává bod m bez změny. Grupa H je také Lieova a nezávislá na volbě bodu m , neboť díky tranzitivitě grupy G jsou si podgrupy stability všech prvků z variety M vzájemně izomorfní, tj. platí $H_m = gH_ng^{-1}$, kde H_m je grupa stability prvku m a H_n grupa stability prvku n a platí $m = gn$. Dále platí následující důležitá věta viz [4].

Věta 2.1.1 *Je-li G grupa, která působí tranzitivně na množině M , potom pro každý bod $m \in M$, existuje bijekce $j_m : G/H_m \rightarrow M$ definovaná jako $j_m : gH_m \mapsto gm$, kde H_m je grupa stability bodu m . Pokud navíc M je lokálně kompaktní hladká souvislá varieta a G lokálně kompaktní Lieova grupa, potom bijekce j_m je difeomorfizmus z G/H_m na M .*

Podle našich předpokladů můžeme tedy ztotožnit M s G/H .

2.1.3 Homogenní prostor jako hlavní fibrovaný prostor

Nyní bude ukázáno, že homogenní prostor lze chápat jako hlavní fibrovaný prostor (Principal bundle), tj. jako fibrovaný prostor s vláknem difeomorfním strukturní grupě. V předchozím odstavci bylo ukázáno, že homogenní prostor M (tj. varieta, na níž působí Lieova grupa G tranzitivně) můžeme ztotožnit za jistých předpokladů s faktorprostorem G/H , tj. $M \equiv G/H$. Pokud provedeme toto ztotožnění, pak v následujícím bude ukázáno, že Lieovu grupu G lze chápat jako hlavní fibrovaný prostor s vláknem H (uzavřená Lieova grupa) a bázovým prostorem $M \equiv G/H$. Definujme nyní pravou akci H na G jako $g \mapsto gh$, kde $g \in G$ a $h \in H$. Protože G je Lieova grupa je toto zobrazení diferencovatelné. Dále definujme projekci $\pi : G \rightarrow M \equiv G/H$ jako $g \mapsto [g] = \{gh, h \in H\}$. Tudíž $g, gh \in G$ jsou zobrazeny do stejného bodu $[g]$ a platí $\pi(g) = \pi(gh)$. Abychom mohli definovat lokální trivializaci, musíme nejdříve najít zobrazení $f_i : G \rightarrow H$ na každé mapě $U_i \subset M$. To uděláme následujícím způsobem: buď s lokální hladký řez na U_i a $g \in \pi^{-1}([g])$, tj. prvek vlákna v bodě $[g]$. Definujme f_i jako $f_i(g) = s([g])^{-1}g$, kde $s([g])^{-1}$ je grupová inverze.

Jelikož $s([g])$ je řez v bodě $[g]$ dá se napsat ve tvaru gh , kde $h \in H$, potom dostaneme $s([g])^{-1}g = h^{-1}g^{-1}g = h^{-1} \in H$, tímto jsme obdrželi kýžené zobrazení $f_i : G \rightarrow H$. Můžeme tedy definovat lokální trivializaci $\Phi_i : U_i \times H \rightarrow G$ jako $\Phi_i(g)^{-1} = ([g], f_i(g))$, z předchozího vyplývá, že se jedná o difeomorfismus. Dále se jednoduše ověří, že platí $f_i(gh) = f_i(g)h$ a tudíž je splněna podmínka pro lokální trivializaci na hlavních fibrovaných prostorech $\Phi_i(uh)^{-1} = (p, f_i(u)h)$, kde h je prvek strukturní grupy, p je prvek prostoru M a u je prvek vlákna hlavního fibrovaného prostoru. Z této podmínky plyne, že vlákno lze zkonstruovat za pomoci jednoho bodu u a při znalosti strukturní grupy.

2.2 Několik vlastností míry na lokálně kompaktních grupách

V této kapitole budou uvedena základní fakta týkající se míry na lokálně kompaktních topologických grupách, které budou potřebné pro konstrukci unitárních indukovaných reprezentací těchto grup. Důvod proč se zabývat právě lokálně kompaktními topologickými grupami, konkrétně *lcsc*, je ten, že se velice často vyskytují ve fyzikálních aplikacích. A dále ten, že teorie jejich unitárních reprezentací je velmi dobře zpracována.

2.2.1 Přehled základních pojmů

Nejprve několik pojmů z topologie. Systém τ podmnožin množiny X se nazývá topologie na X , má-li následující tři vlastnosti i) $\emptyset \in \tau$, $X \in \tau$; ii) je-li $V_i \in \tau$ pro $i = 1, 2, \dots, n$, potom platí $V_1 \cap V_2 \cap \dots \cap V_n \in \tau$; iii) je-li $\{V_\alpha\}$ libovolný systém množin z τ , platí $\bigcup_\alpha V_\alpha \in \tau$. Je-li τ topologie na X , nazýváme X topologický prostor a prvky systému τ otevřené množiny v X .

Množina $K \subset X$ je kompaktní, jestliže každé otevřené pokrytí množiny K obsahuje konečné podpokrytí. Okolí bodu $p \in X$ je každá otevřená podmnožina X , která obsahuje p . X je Hausdorffův prostor, jestliže platí: je-li $p, q \in X$ a $p \neq q$, potom p má okolí U a q okolí V takové, že $U \cap V = \emptyset$. X je lokálně kompaktní, jestliže každý bod z X má okolí, jehož uzávěr je kompaktní. Systém $\mathcal{L} \in \tau$ nazveme bází topologického prostoru (X, τ) , jestliže každou neprázdnou otevřenou množinu lze vyjádřit ve tvaru sjednocení prvků systému $\mathcal{L}$. X splňuje druhý axiom spočetnosti, jestliže v něm existuje spočetná báze.

Definice 2.2.1 *Topologický prostor je lcsc, jestliže je to lokálně kompaktní Hausdorffův prostor, který splňuje druhý axiom spočetnosti.*

2.2.2 Míry na lcsc Borelovských prostorech

K tomu, abychom mohli definovat míru zavedme nejprve pojem Borelovský prostor.

Definice 2.2.2 *Borelovská struktura na množině X je σ -algebra $\mathcal{B}$ podmnožin X , dvojice $(X, \mathcal{B})$ se potom nazývá Borelovský prostor (jde tedy o měřitelný prostor). Prvky systému $\mathcal{B}$ se nazývají podmnožiny X .*

Budťe $(X, \mathcal{B})$ a $(Z, \mathcal{C})$ Borelovské prostory, potom zobrazení $f : X \rightarrow Z$ se nazývá Borelovské, jestliže $f(C)^{-1} \in \mathcal{B}$. Jestliže je toto zobrazení bijekce a platí $f(C)^{-1} = \mathcal{B}$, potom f je tzv. Borelovský izomorfismus. Pokud $X = Z$ a f je izomorfismus, nazýváme f automorfismus. Nechť X je navíc topologický prostor, potom existuje nejmenší σ -algebra $\mathcal{B}$ na X taková, že obsahuje všechny otevřené množiny v X . Systém $\mathcal{B}$ se nazývá přirozená Borelovská struktura na X . Speciálně jsou tedy všechny uzavřené množiny v X Borelovské (doplňky otevřených). Borelovskými množinami v X jsou rovněž spočetná sjednocení uzavřených množin a spočetné průniky otevřených množin. Protože $\mathcal{B}$ je σ -algebra, můžeme X považovat za měřitelný prostor, ve kterém roli měřitelných množin hrají Borelovské množiny. Potom je-li $f : X \rightarrow Y$ spojitě zobrazení X do topologického prostoru Y je zřejmé, že $f(V)^{-1} \in \mathcal{B}$ pro každou otevřenou množinu $V \subset Y$, tudíž každé spojitě zobrazení prostoru X je Borelovsky měřitelné. Dále buď T separabilní metrický prostor a $X \in \mathcal{B}$ Borelovská podmnožina T , potom Borelovský podprostor $(X, \mathcal{B}_X)$ takový, že $\mathcal{B}_X = \{B \cap X, B \in \mathcal{B}\}$ se nazývá standardní. Jestliže X je lcsc, potom Borelovský prostor, kde $\mathcal{B}$ je přirozená borelovská struktura, je standardní.

Mírou na Borelovském prostoru rozumíme množinovou funkci definovanou na σ -algebře $\mathcal{B}$, která je spočetně aditivní a zobrazuje do intervalu $[0, \infty]$. Míra μ na $(X, \mathcal{B})$ je finitní, jestliže $\mu(X) < \infty$ a σ -finitní pokud existují Borelovské množiny X_n takové, že $X = \bigcup_n X_n$ a platí $\mu(X_n) < \infty$. Budť dále X lcsc, potom Borelovskou mírou na X rozumíme míru s vlastností, že každá kompaktní množina má míru v $[0, \infty)$ (má konečnou míru). Je zřejmé, že každá Borelovská míra na X je σ -finitní.

Budť ν nějaká σ -finitní míra na Borelovském prostoru $(X, \mathcal{B})$ a budť μ míra. Potom μ se nazývá absolutně spojitá vzhledem k ν , jestliže $\mu(S) = 0$

pro každou Borelovskou množinu S , pro kterou platí $\nu(S) = 0$. Nyní bude uveden důležitý Radon-Nikodymův teorém.

Věta 2.2.3 *Jestliže f je nezáporná Borelovská funkce, potom funkce $\mu : S \mapsto \int f d\nu$ je σ -finitní míra, která je absolutně spojitá vzhledem k ν . Obráceně, jestliže μ je σ -finitní míra absolutně spojitá vzhledem k ν , potom existuje nezáporná Borelovská funkce f na X taková, že $\mu(S) = \int_S f d\nu$, $\forall S \in \mathcal{B}$.*

Jestliže τ je Borelovský automorfismus na X a μ σ -finitní míra na X , potom můžeme definovat σ -finitní míru μ^τ jako $\mu^\tau(S) = \mu(\tau(S)^{-1})$, kde $S \in \mathcal{B}$. Pak μ se nazývá invariantní, jestliže $\mu^\tau = \mu$ a kvaziinvariantní pokud μ^τ a μ jsou vzájemně absolutně spojitě (relace absolutní spojitosti je relací ekvivalence na množině σ -finitních měr prostoru X). Míra μ je tedy kvaziinvariantní, pokud množiny míry 0 jsou invariantní vůči automorfismu τ .

2.2.3 Haarova míra

Předpokládejme, že G je grupa a zároveň Borelovský prostor. Potom G je Borelovská grupa, jestliže zobrazení $(x, y) \mapsto xy^{-1}$ je Borelovské. Dále jestliže G je *lcsc* grupa, potom: 1) G je standardní Borelovská grupa; 2) existuje nenulová σ -finitní míra μ na G , která je levo (nebo pravo) invariantní, tj. $\mu(S) = \mu(xS)$ (nebo $\mu(S) = \mu(Sx)$), $\forall S \in \mathcal{B}$ a $x \in G$. Míra μ je dána jednoznačně až na multiplikativní konstantu $\rho > 0$ a je nazývána levá (pravá) Haarova míra na G . Obecně neplatí, že levá Haarova míra je pravoinvariantní. Pokud toto platí, nazýváme grupu G unimodulární. Dále buď G *lcsc* grupa a μ levá Haarova míra, potom $\forall x \in G$ míra $S \mapsto \mu(Sx)$ je také levá Haarova míra, a proto musí (viz předchozí) existovat konstanta $\rho(x) > 0$ taková, že $\mu(Sx) = \rho(x)\mu(S)$. Funkce $\rho(x)$ se nazývá modulární funkce a má následující vlastnosti: $\rho(e) = 1$, $\rho(xy) = \rho(x)\rho(y)$, $\rho(x)$ je spojitá funkce.

2.2.4 Míra na tranzitivních G-prostorech

V tomto odstavci ukážeme jak přenést míru z G na $X = G/H$ za pomoci Haarovy míry na G . Buď G *lcsc* grupa a H její uzavřená podgrupa, β zobrazení z G na $X = G/H$ definované jako $\beta : g \mapsto gH$. Potom X je *lcsc* prostor vzhledem k podílové topologii a β je otevřené spojitě zobrazení. Podílová topologie znamená to, že $U \subset X$ je otevřená množina, právě když $\beta^{-1}(U)$ je otevřená množina v G . Navíc vzhledem k této topologii je i zobrazení

$(x, g) \mapsto gx$ z $G \times X$ do X spojitě. Dále existuje kvaziinvariantní míra na $X = G/H$ s následujícími vlastnostmi: 1) Jestliže λ je finitní kvaziinvariantní míra na G a $\tilde{\lambda}$ je finitní míra na X definovaná jako $\tilde{\lambda}(S) = \lambda(\beta^{-1}(S))$, potom $\tilde{\lambda}$ je kvaziinvariantní. 2) Každé dvě kvaziinvariantní σ -finitní míry na X mají stejné množiny míry nula, a tudíž jsou vzájemně absolutně spojitě.

V dalším bude naznačeno, podrobnosti viz [3], jak se tvrzení 1) rozšíří na větší třídu měr, konkrétně na Borelovské míry. Označme $C_C(G)$ třídu všech komplexních funkcí na G , které jsou spojitě a mají kompaktní support, $C_C(X)$ značí analogický prostor funkcí na X . Pro nějakou funkci $f \in C_C(G)$ definujeme $Mf(g) = \int_H f(gh) d\mu_0(h)$, kde μ_0 je levá Haarova míra na H . Z levoinvariantnosti μ_0 vyplývá rovnost $Mf(gh) = Mf(g)$, $\forall g \in G$. Tudíž existuje funkce $\tilde{f}$ na X taková, že $\tilde{f}(\beta(g)) = Mf(g)$ a $M : C_C(G) \rightarrow C_C(X)$. Zobrazení M pak použijeme pro přenos míry z X na G a definujeme α^0 pomocí rovnosti dvou lineárních funkcí na $C_C(G)$: $\int_G f d\alpha^0 = \int_X \tilde{f} d\alpha$, kde α je nějaká Borelovská míra na X , potom α je kvaziinvariantní právě když α^0 je kvaziinvariantní míra na G .

2.3 Multiplikátory a projektivní reprezentace

Jak už víme, z bodů a), b), c) v první kapitole, plyne požadavek na existenci měřitelného homomorfizmu $h : G \rightarrow P(\mathcal{H})$, kde $P(\mathcal{H})$ je projektivní grupa Hilbertova prostoru $\mathcal{H}$. Jestliže zavedeme kanonický homomorfizmus $\pi : U \mapsto \pi(U)$, $U \in U(\mathcal{H})$ z $U(\mathcal{H})$ do $P(\mathcal{H})$, můžeme vybavit prostor $P(\mathcal{H})$ podílovou topologií a ten se stane metrizovatelnou topologickou grupou se spočetnou bází. Zobrazení π je pak otevřené spojitě zobrazení z $U(\mathcal{H})$ do $P(\mathcal{H})$.

Nyní můžeme přistoupit k formulaci pojmu projektivní reprezentace a poté ukázat jak lze přeformulovat požadavek abc) z kapitoly 1. pomocí projektivních reprezentací. Začneme nejprve s pojmem multiplikátor grupy. Buďte G , K *lcsc* grupy a K abelovská. K - multiplikátorem grupy G rozumíme Borelovské zobrazení $m : (x, y) \mapsto m(x, y)$ z $G \times G$ do K takové, že jsou splněny následující vztahy:

- i) $m(x, yz)m(y, z) = m(xy, z)m(x, y)$, $\forall x, y, z \in G$,
- ii) $m(x, e) = m(e, x) = 1$, $\forall x \in G$.

Pokud bude $K = T$, multiplikativní grupa komplexních čísel modulu 1, budeme mluvit jednoduše o multiplikátorech. Množina všech K - multiplikátorů

grupy G je zřejmě komutativní multiplikativní grupa. Označme tuto grupu $M'_k(G)$. Dále, dva K - multiplikátory m_1, m_2 se nazývají ekvivalentními a značí $m_1 \equiv m_2$, jestliže existuje Borelovská funkce $a : G \rightarrow K : x \mapsto a(x)$ taková, že $m_2(x, y) = [a(xy)/a(x)a(y)]m_1(x, y)$, $\forall x, y \in G$. Poznamenejme, že $a(e) = 1$. Jestliže K - multiplikátor je ekvivalentní jednotkovému, řekneme, že je exaktní. Je tedy exaktní, právě když platí $m(x, y) = a(xy)/a(x)a(y)$, $\forall x, y \in G$. Je vidět, že exaktní multiplikátory tvoří podgrupu, označme ji $E_k(G)$, grupy multiplikátorů $M'_k(G)$. Zavedme nyní faktorgrupu $M_k(G) = M'_k(G)/E_k(G)$ a nazvěme jí K - multiplikátorovou grupou grupy G . Pokud $K = T$, pak budeme psát jen $M(G)$ a tuto grupu nazveme multiplikátorovou grupou grupy G .

Definice 2.3.1 *Předpokládejme, že m je multiplikátor grupy g . Potom zobrazení $U : g \mapsto U_g$ z G do unitární grupy $U(\mathcal{H})$ separabilního Hilbertova prostoru $\mathcal{H}$ se nazývá m - reprezentace pokud platí: i) $g \mapsto U_g$ je Borelovské tj. je $g \mapsto (\tilde{f}, U_g f)$ Borelovské $\forall \tilde{f}, f \in \mathcal{H}$; ii) $U_e = 1$; iii) $U_{xy} = m(x, y)U_x U_y$, $\forall x, y \in G$. Borelovské zobrazení $g \mapsto U_g$ z G do $U(\mathcal{H})$ se nazývá projekтивní reprezentace jestliže existuje multiplikátor m pro G takový, že U je m - reprezentace, přitom m je jednoznačně dán zobrazením U .*

Je vidět, že pokud U je projekтивní reprezentace G v $\mathcal{H}$, pak zobrazení $\pi \circ U : g \mapsto \pi(U_g)$ je Borelovský homomorfismus z G do $P(\mathcal{H})$. Dokonce platí, že každý Borelovský homomorfismus z G do $P(\mathcal{H})$ pochází od projekтивní reprezentace definované výše. To nám naznačuje jak požadavek abc) z kapitoly 1. souvisí s projekтивními reprezentacemi. Přesněji viz následující věta [3].

Věta 2.3.2 *Buď m nějaký multiplikátor grupy g a buď U m - reprezentace grupy G v $\mathcal{H}$. Potom $\pi \circ U$ je spojitý homomorfismus z G do $P(\mathcal{H})$. Jestliže V je nějaká projekтивní reprezentace G v $\mathcal{H}$ taková, že $\pi \circ U = \pi \circ V$, potom multiplikátor V je ekvivalentní m . Obráceně jestliže $\tilde{m}$ je multiplikátor ekvivalentní m , potom pro $\tilde{m}$ - reprezentaci V platí $\pi \circ U = \pi \circ V$. Předpokládejme, že $h : g \mapsto U_g$ je Borelovský homomorfismus z G do $P(\mathcal{H})$. Potom existuje projekтивní reprezentace U grupy G v $\mathcal{H}$ taková, že $h = \pi \circ U$, navíc U může být vybrána jako spojitá na nějaké otevřené podmnožině G obsahující jednotkový prvek. Konečně, jestliže m je nějaký multiplikátor grupy G , potom existuje m - reprezentace G .*

Důsledkem předchozí věty je například to, že pro libovolný multiplikátor m grupy G můžeme na Hilbertově prostoru $\mathcal{H} = \mathcal{L}^2(G, \mu)$, kde μ je levá Haarova

míra na G , definovat projektivní reprezentaci jako

$$U_g f(x) = m(x^{-1}, g)^{-1} f(g^{-1}x),$$

$\forall g \in G$ a $\forall f \in \mathcal{H}$. Jak lze poměrně jednoduše ověřit jsou splněny podmínky i), ii), iii) pro m - reprezentace a také pro unitaritu operátoru, tudíž tato reprezentace je projektivní reprezentací. Tohoto vztahu využijeme v následujících kapitolách.

2.4 Indukované reprezentace

2.4.1 Motivace a základní definice

V tomto odstavci bude naznačeno z čeho vychází idea indukovaných reprezentací a na závěr bude uvedena jejich přesná definice.

Na začátek uvažujme reprezentaci U (definice je obdobná jako pro projektivní reprezentaci s triviálním multiplikátorem) spojenou s G -prostorem M a G -invariantní mírou μ na M . Definici indukovaných reprezentací budeme motivovat přeformulováním definice U pro případ, že akce G na M je tranzitivní. Jak už bylo uvedeno, užitím zobrazení j_m (kapitola 2.1.2) můžeme za jistých předpokladů ztotožnit varietu M s levým faktorprostorem G/H a také "přetáhnout" míru z M na míru na levém faktorprostoru G/H . Jak je definovaná akce G na G/H bylo uvedeno v kapitole 2.1.

Dále buď dána funkce f definovaná na G/H . Na tuto funkci můžeme také pohlížet jako na funkci na G , přičemž její funkční hodnota je stejná pro všechny prvky z jedné třídy ekvivalence v G^1 . Tj. pokud platí $f(gH) = C$, potom můžeme říci, že $f(gh) = C, \forall h \in H, (f(gh) = f(g), \forall h \in H, \forall g \in G)$.

Zpětně pokud máme funkci na G splňující předcházející podmínky, můžeme na ní pohlížet jako na funkci na G/H . Buď $\mathcal{F}$ množina všech funkcí $f : G \rightarrow \mathbb{C}$, které splňují následující podmínky:

- i) $f(gh) = f(g), \forall h \in H, \forall g \in G$,
- ii) f je borelovská funkce a platí $\int_{G/H} |f(g)|^2 d\mu(u) < \infty, u = gH \in G/H$.

Díky ii) je $\mathcal{F}$ Hilbertův prostor, pokud definujeme skalární součin jako:

$$(f_1, f_2) = \int_{G/H} \overline{f_1(g)} f_2(g) d\mu(u).^2$$

¹Např. v případě akce rotační grupy na sféře

² $\overline{f_1(g)} f_2(g)$ je funkce konstantní na třídách ekvivalence v G

Reprezentace U grupy G na $\mathcal{F}$ definovaná jako $(U_g f)(x) = f(g^{-1}x)$, kde $x \in G$, je zřejmě unitární.

Takto zavedenou unitární reprezentaci grupy G na prostoru $\mathcal{F}$ lze poměrně jednoduše zobecnit. Předpokládejme, že máme danou unitární reprezentaci L uzavřené podgrupy H grupy G . Buď $\mathcal{H}(L)$ nosič reprezentace L . Oproti předchozí definici uděláme několik změn. Buď $f : G \rightarrow \mathcal{H}(L)$ vektorová funkce a identitu i) zaměňme za

$$\text{i')} \quad f(gh) = L_h^{-1} f(g), \forall h \in H, \forall g \in G.$$

Podmínka ii) v předchozím potom dává smysl, pouze když zaměníme $|f(g)|^2$ za $\langle f(g), f(g) \rangle$, skalární součin v $\mathcal{H}(L)$. Toto je dobře definováno neboť $f(g)$ je vektor v $\mathcal{H}(L)$. Potom, protože L_h je unitární operátor na $\mathcal{H}(L)$ platí: $\langle f(gh), f(gh) \rangle = \langle L_h^{-1} f(g), L_h^{-1} f(g) \rangle = \langle f(g), f(g) \rangle$, $\forall g \in G$ a $\forall h \in H$. Je vidět, že $\langle f(g), f(g) \rangle$ definuje funkci na G/H , tudíž můžeme podmínku ii) přepsat jako:

ii') buď $g \mapsto \langle f(g), f(g) \rangle$ Borelovská funkce a necht' pro ní platí

$$\int_{G/H} \langle f(g), f(g) \rangle d\mu(u) < \infty, u = [g].$$

Potom prostor $\mathcal{F}'$ funkcí $f : G \rightarrow \mathcal{H}(L)$ takto definovaných se stane Hilbertovým prostorem pokud zavedeme skalární součin

$$(f_1, f_2) = \int_{G/H} \langle f_1(g), f_2(g) \rangle d\mu(u).$$

Reprezentaci grupy G na prostoru $\mathcal{F}'$ pak definujeme v souladu s předchozími odstavci jako: $(U_g f)(x) = f(g^{-1}x)$, kde $x \in G$. Tato unitární reprezentace závisí na našem výběru L , značí se U^L a nazývá se reprezentace G indukovaná pomocí unitární reprezentace L podgrupy H . Mohlo by se zdát, že takto definovaná reprezentace závisí také na míře μ (dosud uvažujeme invariantní míru), na to bychom narazili při ověřování podmínky unitarity $\|U_g f\| = \|f\|$, $\forall f \in \mathcal{F}'$. Ale jak vyplývá z kapitoly 2.2, každé dvě invariantní míry na G/H se liší pouze o nenulovou multiplikativní konstantu a změna této konstanty nemá podstatný vliv na definici U^L . Jinak je tomu v případě, že faktorprostor G/H nepřipouští invariantní míru. Jak bylo uvedeno v kapitole 2.2 na prostoru G/H s podílovou topologií, která indukuje σ -algebru borelovských množin, existuje kvaziinvariantní míra a každé dvě kvaziinvariantní míry jsou vzájemně absolutně spojité. Zvolme pevně jednu z kvaziinvariantních měr na

G/H . Jestliže se pokusíme definovat U^L jako v předchozím, nebudeme mít potíže až do chvíle, kdy se pokusíme ověřit platnost vztahu, který zaručuje unitaritu U^L , tj. $\|U_g f\| = \|f\|$, $\forall f \in \mathcal{F}'$. V tomto případě totiž dostaneme

$$\|U^L f(x)\|^2 = \int_{G/H} \langle f(g^{-1}x), f(g^{-1}x) \rangle d\mu(z) = \int_{G/H} \langle f(x), f(x) \rangle d\mu(gz),$$

jelikož μ je kvaziinvariantní je $\mu(gz) = \int_{G/H} \rho_g(z) d\mu(z)$, $z = [x]$. Z těchto dvou vztahů vyplývá, že operátor definovaný jako $(U_g f)(x) = f(g^{-1}x)$ není unitární.

K tomu, aby byla zajištěna unitarita, je třeba U^L definovat následujícím způsobem

$$(U_g f)(x) = \sqrt{\rho_g^{-1}(g^{-1}[x])} f(g^{-1}x),$$

kde $\rho_g = d\mu^g/d\mu$ je Radon-Nikodymova derivace. Touto cestou obdržíme unitární reprezentaci U^L grupy G pro každý pár skládající se z unitární reprezentace L podgrupy H a kvaziinvariantní míry μ na G/H . Tato reprezentace navíc do jisté míry nezáleží na konkrétní volbě kvaziinvariantní míry, neboť jak už bylo řečeno, každé dvě kvaziinvariantní míry na G/H jsou vzájemně absolutně spojitě, tj. patří do stejné třídy ekvivalence a platí $\mu = \int_S f \nu$, $\forall S \in \mathcal{B}$, takže všechny reprezentace jsou pro různou volbu míry unitárně ekvivalentní. Pokud tedy μ a μ' jsou dvě odlišné kvaziinvariantní míry na G/H , $\mathcal{H}$, $\mathcal{H}'$ příslušné Hilbertovy prostory a U , U' příslušné indukované reprezentace, potom existuje izometrie W z $\mathcal{H}$ do $\mathcal{H}'$ taková, že $U' = W U W^{-1}$ a má tvar

$$W : \mathcal{H} \rightarrow \mathcal{H}' : f \mapsto f' = \left[\sqrt{\frac{d\mu}{d\mu'}} \circ \beta \right] f,$$

kde $\beta : G \rightarrow G/H$.

Jelikož v kvantové mechanice se zajímáme nejen o obyčejné reprezentace, ale v první řadě o reprezentace projektivní, je nutné uvážit i tuto situaci. Buď tedy m multiplikátor grupy G , pokud budeme požadovat, aby L a U^L byly m reprezentace, tj. projektivní reprezentace s multiplikátorem m , musíme předchozí definice L a U^L změnit v souladu s kapitolou 2.3. Tedy L jako m -reprezentace grupy H v separabilním Hilbertově prostoru $\mathcal{H}(L)$ je definována vztahem

$$(L_h^{-1} f)(x) = m(x, h)^{-1} f(xh).$$

U^L jako m -reprezentace grupy G v Hilbertově prostoru $\mathcal{F}'$ je definována

vztahem

$$(U_g f)(x) = \sqrt{\rho_g^{-1}(g^{-1}[x])} m(x^{-1}, g)^{-1} f(g^{-1}x).$$

Takto definované vztahy skutečně splňují podmínky pro m -reprezentace z minulé kapitoly včetně vztahu $U_{hg} = m(h, g)U_h U_g$ a tudíž jsou projektivními reprezentacemi.

Výsledná definice projektivních indukovaných reprezentací tedy zní:

Definice 2.4.1 *Bud' μ kvaziinvariantní míra na G/H , dále bud' m multiplikátor grupy G a L m -reprezentace grupy H v separabilním Hilbertově prostoru $\mathcal{H}(L)$. Pokud je $\mathcal{F}'$ Hilbertův prostor vektorových funkcí $f : G \rightarrow \mathcal{H}(L)$, které splňují následující podmínky:*

- i) $x \mapsto \langle f(x), \Psi \rangle$ je borelovská funkce na G , $\forall \Psi \in \mathcal{H}(L)$,
- ii) $(L_h^{-1} f)(x) = m(x, h)^{-1} f(xh)$, kde $h \in H$,
- iii) $\|f\| < \infty$, kde $\|\cdot\|$ je norma indukovaná skalárním součinem

$$(f_1, f_2) = \int_{G/H} \langle f_1(x), f_2(x) \rangle d\mu([x]).$$

Potom U^L definované jako:

$$(U_g f)(x) = \sqrt{\rho_g^{-1}(g^{-1}[x])} m(x^{-1}, g)^{-1} f(g^{-1}x),$$

je unitární projektivní reprezentace grupy G v Hilbertově prostoru $\mathcal{F}'$ a nazývá se indukovaná reprezentace.

2.4.2 Důležité pojmy z teorie fibrovaných prostorů

Začneme nejprve se zobrazením mezi dvěma fibrovanými prostory. Bud' $\xi = (E, \pi, M)$ a $\xi' = (E', \pi', M')$ dvojice fibrovaných prostorů. Potom dvojice spojitých zobrazení (u, f) , kde $u : E \rightarrow E'$ a $f : M \rightarrow M'$ takové, že $\pi' \circ u = f \circ \pi$ se nazývá zobrazením fibrovaných prostorů. Všimněme si, že tato podmínka je ekvivalentní s tím, že vlákno z E se zobrazí na nějaké vlákno z E' .

Dále Hilbertovým fibrovaným prostorem $\xi = (E, \pi, M, \mathcal{H})$ budeme rozumět fibrovaný prostor, kde totální prostor E a základní (bazický) prostor M jsou topologické prostory, π je spojitá surjekce z E na M a $\pi^{-1}(p)$ má strukturu Hilbertova prostoru $\forall p \in M$. Isomorfismem Hilbertových fibrovaných prostorů budeme rozumět zobrazení (u, f) definované výše, kde u i f

jsou homeomorfismy a u zobrazuje vlákno F_p izometricky na vlákno $F_{p'}$, kde $p' = f(p)$, $\forall p \in M$. Hilbertovým G -prostorem ξ nazveme Hilbertův fibrovaný prostor, na kterém je dána spojitá akce grupy G na E a M taková, že dvojice (u, f) je automorfismus prostoru ξ , $\forall g \in G$.

Buď $\xi = (P, \pi, M)$ hlavní (principal) fibrovaný prostor a dále buď F levý H -prostor, kde H je strukturní grupa P . Definujme $P_F := P \times_{\rho(H)} F$ jako prostor tříd ekvivalence $(u, v) \sim (u, v)h := (uh, \rho(h)^{-1}v)$, kde $u \in P$, $h \in H$, $v \in F$ a $\rho(h)$ je reprezentace (lineární akce) grupy H v F . Pokud definujeme zobrazení $\pi_F : P_F \rightarrow M$ jako $\pi_F([u, v]) := \pi(u)$, potom $\xi(F) = (P_F, \pi_F, M, F)$ je fibrovaný prostor vzhledem k M s vláknem F , který se nazývá asociovaný fibrovaný prostor vzhledem k akci grupy H na F . To že vlákno z P_F je lineárně izomorfní F plyne z následujícího. Definujme zobrazení $i_u : F \rightarrow P_F$ jako $i_{u_0}(v) := [u_0, v]$ a zobrazení $j_u : \pi_F^{-1}(p) \rightarrow F$ jako $j_{u_0}([u, v]) := \rho(h)v$, kde $u = u_0h$ (viz vlastnosti hlavního fibrovaného prostoru). Jak lze jednoduše ověřit i_{u_0} i j_{u_0} jsou vzájemně inverzní zobrazení a navíc lze pomocí nich definovat lokální trivializaci P_F tj. zobrazení $\Phi_i^{-1} : \pi_F^{-1}(p) \rightarrow U_i \times F$ jako $\Phi_i^{-1}([u, v]) := (\pi(u), j_{u_0}([u, v]))$. Definice zobrazení j_{u_0} vyplývá z faktu, že každou třídu ekvivalence $[u, v]$ lze přepsat pro pevné u_0 jako $[u, v] = [u_0h, v] = [u_0hh^{-1}, \rho(h^{-1})^{-1}v] = [u_0, \rho(h)v]$.

Zabývejme se nyní zobrazením mezi dvěma asociovanými fibrovanými prostory. Buď (u, f) zobrazení mezi párem hlavních fibrovaných prostorů $\xi = (E, \pi, M)$ a $\xi' = (E', \pi', M')$. Zobrazení mezi asociovanými prostory $P \times_{\rho(H)} F$ a $P' \times_{\rho(H)} F$ může být definováno jako $u_F([g, v]) := [u(g), v]$. Toto zobrazení je dobře definováno, neboť $u_F([gh, \rho(h)^{-1}v]) = [u(gh), \rho(h)^{-1}v] = [u(g)h, \rho(h)^{-1}v] = [u(g), v]$. Jednoduše se lze přesvědčit, že jsou podmínky pro zobrazení mezi fibrovanými prostory ze začátku kapitoly splněny pokud zobrazení mezi ξ a ξ' definujeme jako dvojici (u_F, f) . Přirozeně se dá definovat také automorfizmus u_F asociovaného prostoru $\xi[F]$ jako $u_F([g, v]) := [u(g), v]$, kde u je automorfizmus hlavního fibrovaného prostoru příslušného k $\xi[F]$.

Na závěr této části budou uvedeny základní vlastnosti řezů na asociovaných fibrovaných prostorech. Buď $\xi(F) = (P_F, \pi_F, M, F)$ asociovaný fibrovaný prostor, potom existuje bijektivní zobrazení mezi jeho řezy $s : M \rightarrow P_F$ a ekvivariantními funkcemi $\Phi : P \rightarrow F$ definovanými podmínkou $\Phi(uh) = \rho(h)^{-1}\Phi(u)$, $\forall u \in P$ (P je hlavní fibrovaný prostor) a $\forall h \in H$. Řez s_Φ korespondující s tímto zobrazením je pak ve tvaru $s_\Phi(p) = [u, \Phi(u)]$, kde u je nějaký bod z vlákna F_p . Řez s_Φ je přitom nezávislý na výběru bodu $u \in F_p \subset P$ neboť platí $[uh, \Phi(uh)] = [uh, \rho(h)^{-1}\Phi(u)] = [u, \Phi(u)]$. Z před-

cházejícího je vidět, že pokud $\sigma(p)$ je lokální řez na hlavním fibrovaném prostoru P , pak lze lokální řez v asociovaném fibrovaném prostoru zapsat jako $s(p) = [\sigma(p), \Phi(\sigma(p))]$.

2.4.3 Geometrický pohled na indukované reprezentace

Jak už bylo uvedeno v kapitole 2.1, v našem případě tvoří základní prostor faktorprostor G/H , který je ekvivalentní varietě M na níž působí lokálně kompaktní (Lieova) grupa G tranzitivně. Grupa G potom tvoří hlavní fibrovaný prostor nad G/H se strukturní grupou H . Uvedme některé další vlastnosti tohoto hlavního fibrovaného prostoru. Spojitá pravá akce $G \times H \rightarrow G : (g, h) \mapsto gh$. Projekce $\pi : G \rightarrow G/H$, kterou budeme nadále značit β (viz kapitola 2.2), je spojitě zobrazení. Prostor G je lokálně trivializovatelný a grupa G má přirozenou akci na $M \equiv G/H$, $G \times M \rightarrow M : (a, gh) \mapsto agH$.

Z tohoto hlavního fibrovaného prostoru vytvoříme asociovaný fibrovaný prostor $\xi(F) = \xi_L := (P_F, \pi_F, M, \mathcal{H}(L))$, přidružíme-li k němu prostor $F = \mathcal{H}(L)$ na němž má grupa H levou akci pomocí unitární reprezentace $L_h = L(h)$ (viz předchozí kapitola) takovou, že $H \times \mathcal{H}(L) \rightarrow \mathcal{H}(L) : (h, v) \mapsto L(h)v$. Vlastní přidružení provedeme tím, že stejně jako v definici zavedeme třídy ekvivalence $(g, v) \sim (gh, L(h)^{-1}v)$. Tato podmínka úzce koresponduje s podmínkou $f(gh) = L(h)^{-1}f(g)$ z odstavce 2.4.1, která převádí vektorovou funkci na G na vektorovou funkci na G/H . Fibrovaný asociovaný prostor P_F je potom množina tříd ekvivalence $[g, v]$. Projekce π_F má s ohledem na definici výše tvar $\pi_F : [g, v] \mapsto p$, kde $p = \beta(g) = gH$. Vláknem F_p v bodě $p \in G/H \equiv M$ je množina tříd ekvivalence $[g, v]$, kde g je nějaký bod z G , pro který platí $\beta(g) = p$ a v prochází celý $\mathcal{H}(L)$. Vláknem F_p má navíc strukturu Hilbertova prostoru neboť, pokud $p = gH$ potom každý prvek vlákna F_p se dá napsat ve tvaru $[g, v]$, kde $v \in \mathcal{H}(L)$ je jednoznačně dáno. Pomocí bijekce $j_g : [g, v] \mapsto v$ z F_p na $\mathcal{H}(L)$ pak vláknem F_p získá strukturu Hilbertova prostoru se skalárním součinem $\langle \dots, \dots \rangle_{F_p}$ (skalární součin na $\mathcal{H}(L)$). Je nutné podotknout, že nezáleží na volbě prvku g , protože pokud $p = gH = g'H$, potom existuje $h \in H$ takové, že $g' = gh$. A třídy ekvivalence $[g, v]$, $[g', v]$ jsou pak spjatý vztahem $[g', v] = [gh, v] = [g, L(h)v]$, z čehož plyne nezávislost výběru. Z uvedeného vyplývá, že asociovaný fibrovaný prostor má strukturu Hilbertova prostoru, který byl popsán v předchozí kapitole.

Využijme nyní přirozené levé akce G na M k definování automorfizmu asociovaného fibrovaného prostoru $\xi_L = (P_F, \pi_F, M, \mathcal{H}(L))$. Složku u_F na

$G \times_{L(H)} \mathcal{H}(L)$ definujeme jako $D(a)[g, v] = [ag, v]$ a složku f na G/H definujeme přirozeně jako $a(gH) = agH$, přičemž je samozřejmě splněna podmínka $\pi_F \circ D(a)([g, v]) = a \circ \pi_F([g, v])$. S takto definovaným zobrazením získá ξ_L strukturu Hilbertova G - prostoru.

Mějme nyní lineární prostor Borelovských řezů $s : M \rightarrow P_F : p \mapsto s(p)$ (lineární neboť $\xi_L = (P_F, \pi_F, M, \mathcal{H}(L))$ má strukturu Hilbertova fibrovaného prostoru), $\pi_F \circ s = id_M$, v lokálním tvaru $s(p) = [\sigma(p), \Phi(\sigma(p))]$, kde $\sigma : M \rightarrow P$ a pro $\Phi : P \rightarrow \mathcal{H}(L)$ platí $\Phi(gh) = L(h)^{-1}\Phi(g)$. Tento prostor může být vybaven strukturou Hilbertova prostoru $\mathcal{H}$, pokud pro danou kvaziinvariantní míru μ na $M \equiv G/H$ zavedeme skalární součin vztahem

$$(s, s') = \int_{G/H} \langle s(p), s'(p) \rangle d\mu(p) = \int_{G/H} \langle \Phi(\sigma(p)), \Phi'(\sigma(p)) \rangle d\mu(p),$$

$\mathcal{H}$ tedy závisí na zvolené míře. Indukovanou reprezentaci, někdy se značí $Ind_H^G L$, v tomto Hilbertově prostoru potom definujeme jako:

$$(U_g s)(p) = \sqrt{\frac{d\mu}{d\mu^g}}(g^{-1}p) [D(g)s](g^{-1}p),$$

kde $s \in \mathcal{H}$. Dostáváme se tedy k následující definici:

Definice 2.4.2 *Buď μ kvaziinvariantní míra na G/H , dále buď L unitární reprezentace grupy H v separabilním Hilbertově prostoru $\mathcal{H}(L)$. Pokud je $\mathcal{H}$ separabilní Hilbertův prostor měřitelných řezů $s : M \rightarrow P_F$, které splňují následující podmínku:*

- i) $\|s\| < \infty$, kde $\|\cdot\|$ je norma indukovaná skalárním součinem $(s, s') = \int_{G/H} \langle s(p), s'(p) \rangle d\mu(p)$.

Potom U^L definované jako:

$$(U_g s)(p) = \sqrt{\frac{d\mu}{d\mu^g}}(g^{-1}p) [D(g)s](g^{-1}p),$$

je unitární reprezentace grupy G v Hilbertově prostoru $\mathcal{H}$ a nazývá se indukovaná reprezentace.

Nyní zbývá ukázat, že předcházející definice je ekvivalentní s definicí indukované reprezentace v předcházející kapitole. K tomu s výhodou uijeme vztahu $s(p) = [\sigma(p), \Phi(\sigma(p))] = [\sigma(p), \Phi_\sigma(p)]$, kde skalární součin je dán

vztahem $\langle s, s' \rangle = \int_{G/H} \langle s(p), s'(p) \rangle d\mu(p) = \int_{G/H} \langle \Phi_\sigma(p), \Phi'_\sigma(p) \rangle d\mu(p)$. Dále nebudeme uvažovat člen $\sqrt{d\mu/d\mu^g}$ představující odmocninu z Radon - Nikodymovy derivace, který na náš důkaz ekvivalence nemá vliv. Takže máme:

$$\begin{aligned} (U_g s)(p) &= (D(g)s)(g^{-1}p) = [g\sigma(g^{-1}p), \Phi_\sigma(g^{-1}p)] = \\ &= [\sigma(p)\sigma(p)^{-1}g\sigma(g^{-1}p), \Phi_\sigma(g^{-1}p)] = [\sigma(p), L(h^{-1})\Phi_\sigma(g^{-1}p)], \end{aligned}$$

kde $h^{-1} = \sigma(p)^{-1}g\sigma(g^{-1}p) \in H$ a tudíž dostáváme

$$(U_g \Phi_\sigma)(p) = L(\sigma(p)^{-1}g\sigma(g^{-1}p))\Phi_\sigma(g^{-1}p).$$

Vraťme se nyní k definici z kapitoly 2.4.1. Pro tu platilo $(U_g f)(\sigma) = f(g^{-1}\sigma)$ a $f(\sigma h) = L(h)^{-1}f(\sigma)$, tj. pro $\sigma = \sigma(p)$ dostáváme:

$$\begin{aligned} (U_g f)(\sigma(p)) &= f(g^{-1}\sigma(p)) = f(\sigma(g^{-1}p)\sigma(g^{-1}p)^{-1}g^{-1}\sigma(p)) = \\ &= f(\sigma(g^{-1}p)h) = L(h)^{-1}f(\sigma(g^{-1}p)) = L(\sigma(p)^{-1}g\sigma(g^{-1}p))f(\sigma(g^{-1}p)). \end{aligned}$$

Porovnáme - li tento vztah se vztahem uvedeným výše zjistíme, že pokud položíme $f(\sigma(g^{-1}p)) = \Phi_\sigma(g^{-1}p) = \Phi(\sigma(g^{-1}p))$ jsou tyto vztahy identické. Tímto je dokázána ekvivalence obou definic v případě triviální multiplikátorové grupy.

2.5 Projekční míra a systém imprimitivity

2.5.1 Definice a přehled základních pojmů

Nejprve uvedeme několik známých definic.

Definice 2.5.1 *Reprezentace (projektivní reprezentace) U v Hilbertově prostoru $\mathcal{H}$ se nazývá ekvivalentní reprezentaci U' v Hilbertově prostoru $\mathcal{H}'$, jestliže existuje unitární izomorfismus $W : \mathcal{H} \rightarrow \mathcal{H}'$ takový, že $U'_g = WU_gW^{-1}$. Reprezentace (projektivní reprezentace) U na Hilbertově prostoru $\mathcal{H}$ se nazývá ireducibilní, jestliže jedinými uzavřenými podprostory, které jsou invariantní vůči působení U_g jsou 0 a $\mathcal{H}$.*

Definice 2.5.2 *Projekční mírou na varietě M rozumíme zobrazení ze systému všech Borelovských množin $\mathcal{B}(M)$ na varietě M do množiny omezených operátorů na nějakém Hilbertově prostoru $\mathcal{H}$, které každé Borelovské množině na M přiřadí projektor na $\mathcal{H}$, tj. $E : \mathcal{B}(M) \rightarrow \text{projektory}(\mathcal{H})$. Přičemž musí být splněny následující podmínky:*

- i) $E(M) = I$,
- ii) $E(S_1 \cap S_2) = E(S_1)E(S_2)$, $\forall S_1, S_2 \in \mathcal{B}(M)$,
- iii) $E(S_1 \cup S_2) = E(S_1) + E(S_2) - E(S_1 \cap S_2)$, $\forall S_1, S_2 \in \mathcal{B}(M)$.

Dále buď $\mathcal{H}$ Hilbertův prostor na němž působí projekční míra $E(M)$, stejně tak buď $\mathcal{H}'$ Hilbertův prostor na němž působí projekční míra $E'(M)$. Řekneme, že $E(M)$ a $E'(M)$ jsou ekvivalentní, pokud existuje unitární izomorfismus $W : \mathcal{H} \rightarrow \mathcal{H}'$ takový, že $E'(S) = WE(S)W^{-1}$.

Například vezměme σ -finitní míru μ na M a separabilní Hilbertův prostor $\mathcal{K}$ (viz $\mathcal{H}(L)$ kapitola 2.4.1 až 2.4.3). Buď $\mathcal{H} = \mathcal{L}^2(M, \mathcal{K}, \mu)$ a $E(M)$ buď projekční míra na M definovaná jako $E(S)f = \chi_S f$, $\forall f \in \mathcal{H}$ a $\forall S \in M$. Označme $E(M)$ takto definovanou $E(\mathcal{K}, \mu)$. Potom $E(\mathcal{K}, \mu) \equiv E(\mathcal{K}', \mu')$ právě když i) μ a μ' patří do stejné třídy měr (jsou vzájemně absolutně spojité), ii) $\dim \mathcal{K} = \dim \mathcal{K}'$. Tyto podmínky jsou určitě splněny pokud $\mathcal{K} = \mathcal{K}'$ a $b = \sqrt{d\mu/d\mu'}$, potom zobrazení $W : f \mapsto bf$ je unitární izomorfismus z $\mathcal{H}$ do $\mathcal{H}'$ takový, že je splněno $E(\mathcal{K}, \mu') = WE(\mathcal{K}, \mu)W^{-1}$.

Definice 2.5.3 Buď G lcsc grupa, M varieta s Borelovskou strukturou na níž působí grupa G tranzitivně jako grupa symetrie. Dále buď $\mathcal{H}$ separabilní Hilbertův prostor. Systémem imprimitivity pro G působící na $\mathcal{H}$ nazveme pár (U, E) , kde E je projekční míra na G - prostoru M a $U : g \mapsto U_g$ je (projektivní) reprezentace grupy G v $\mathcal{H}$, které splňují podmínku:

$$E(gS) = U_g E(S) U_g^{-1}, \quad (2.1)$$

$\forall g \in G$ a $\forall S \in \mathcal{B}(M)$. Dvojice (U, E) se potom nazývá systém imprimitivity příslušející M .

Ekvivalence a ireducibilita systému imprimitivity je definována následujícím způsobem. Dva systémy (U, E) na $\mathcal{H}$ a (U', E') na $\mathcal{H}'$ patřící stejnému G -prostoru M jsou ekvivalentní, jestliže existuje unitární izomorfismus $W : \mathcal{H} \rightarrow \mathcal{H}'$ takový, že $U'_g = WU_gW^{-1}$ a $E(S)' = WE(S)W^{-1}$ platí $\forall g \in G$ a $\forall S \in \mathcal{B}(M)$. Systém (U, E) nazveme ireducibilní, jestliže jedinými invariantními podprostory jsou 0 a $\mathcal{H}$. Platí, pokud U je ireducibilní reprezentace, potom (U, E) je ireducibilní systém imprimitivity, obráceně toto tvrzení neplatí. Dále pokud (U_i, E_i) , $i = 1, 2, \dots$ je posloupnost systémů imprimitivity patřících k M , kde (U_i, E_i) mají akci na $\mathcal{H}_i$, potom definujeme direktní sumu

jako systém (U, E) působící na $\mathcal{H}$, kde $\mathcal{H} = \oplus_i \mathcal{H}_i$ a $E(S) : (f_1, f_2, \dots) \mapsto (E_1(S)f_1, E_2(S)f_2, \dots)$, $U_g : (f_1, f_2, \dots) \mapsto (U_{1g}f_1, U_{2g}f_2, \dots)$. Symbolicky píšeme $(U, E) = \oplus_i (U_i, E_i)$. Je také užitečné definovat okruh $\mathcal{O}(U, E)$ tvořený těmi omezenými operátory v $\mathcal{H}$, které komutují se všemi $E(S)$ a U_g pro $\forall g \in G$ a $\forall S \in B(M)$. Platí, že systém imprimitivity je ireducibilní, právě když okruh $\mathcal{O}(U, E)$ je tvořen pouze násobky jednotkového operátoru.

2.5.2 Systém imprimitivity pro $\mathcal{H} = \mathcal{L}^2(M, \mathcal{H}(L), \mu)$

Jak plyne z názvu odstavce, nyní se budeme blíže zabývat systémem imprimitivity pro Hilbertův prostor $\mathcal{F}' = \mathcal{H} = \mathcal{L}^2(M, \mathcal{H}(L), \mu)$. Jde o prostor zobecněných ekvivariantních vektorových funkcí (s příslušnou faktorizací vůči μ) na G , které splňují podmínku $(L_h^{-1}f)(x) = m(x, h)^{-1}f(xh)$, kde L je m -reprezentace grupy H v Hilbertově prostoru $\mathcal{H}(L)$ a m je multiplikátor grupy G jejíž je H podgrupou (viz kapitola 2.4.1). Projekční míra na $M \equiv G/H$ je potom definována jako násobení charakteristickou funkcí množiny χ_S , tj. platí

$$(E(S)^L f)(x) = \chi_S(x)f(x),$$

kde $\chi_S(x) = 1, \forall [x] \in S$ a $\chi_S(x) = 0, \forall [x] \notin S$. Z kapitoly 2.4.1 víme, že indukovaná projektivní reprezentace $U : g \mapsto U_g$ grupy G je definována jako

$$(U_g^L f)(x) = \sqrt{\rho_g^{-1}(g^{-1}[x])} m(x^{-1}, g)^{-1} f(g^{-1}x).$$

Jak lze poměrně jednoduše ověřit, dvojice (U^L, E^L) splňuje vztah (2.1) a tudíž tvoří systém imprimitivity, zvaný kanonický. Jelikož každé dvě kvaziinvariantní míry na G/H jsou vzájemně absolutně spojitě, plyne z vlastností projekční míry uvedených na začátku kapitoly 2.5.1 (viz příklad), že pro pevně zvolené L a $\mathcal{H}(L)$ nezávisí systém (U^L, E^L) na konkrétní volbě kvaziinvariantní míry.

Jak už bylo naznačeno v kapitole 2.4.3, na indukované reprezentaci lze pohlížet jako na reprezentaci grupy G v prostoru měřitelných řezů asociovaného fibrovaného prostoru $\xi_L = (P_F, \pi_F, M, \mathcal{H}(L))$. Přičemž tyto řezy také tvoří Hilbertův prostor, označme ho $\mathcal{H}'$. Projekční míru příslušející varietě $M \equiv G/H$ na prostoru měřitelných řezů lze potom zavést jako

$$(E'(S)^L s)(p) = \chi_S(p)s(p),$$

kde $\chi_S(p) = 1, \forall p \in S$ a $\chi_S(p) = 0, \forall p \notin S$. Indukovaná projektivní reprezentace $U : g \mapsto U_g$ grupy G je dána vztahem

$$(U_g^L s)(p) = \sqrt{\rho_g^{-1}}(g^{-1}p)[D(g)s](g^{-1}p),$$

kde $p \in M \equiv G/H$. Dvojice (U^L, E^L) také tvoří systém imprimitivity na M a je ekvivalentní systému imprimitivity (U^L, E^L) , ale jen v případě, že K -multiplikátorová grupa je triviální, pak existuje unitární izomorfismus $W : \mathcal{H}' \rightarrow \mathcal{F}' = \mathcal{H}$.

Důvod, proč jsme se až dosud zaobírali indukovanými reprezentacemi, je následující teorém imprimitivity:

Teorém 2.5.4 *Nechť G je lcsc grupa, H její uzavřená podgrupa a m multiplikátor grupy G . Nechť dvojice (U, E) tvoří projektivní systém imprimitivity pro G s multiplikátorem m . Pak existuje m -reprezentace L grupy H taková, že (U, E) je ekvivalentní kanonickému systému imprimitivity (U^L, E^L) . Jsou-li L_1 a L_2 dvě m -reprezentace grupy H , pak příslušné kanonické systémy imprimitivity jsou ekvivalentní, právě když L_1 a L_2 jsou ekvivalentní.*

Tento teorém je velmi důležitý pro kvantovou mechaniku neboť implikuje Stone - von Neumannovu větu o jednoznačnosti reprezentace Heisenbergových komutačních relací, tj. o jednoznačnosti kvantové mechaniky na $\mathbb{R}^3$. Na vztah (2.1) přitom můžeme pohlížet jako na zobecnění komutačních relací. Dále je vidět, že různé ireducibilní kvantové kinematiky na $M \equiv G/H$ se dají klasifikovat pouze pomocí unitárních ireducibilních reprezentací grupy H .

2.6 Pozorovatelné polohy a hybnosti

2.6.1 Operátor polohy

Kvantový operátor polohy zavedeme pomocí projekční míry E na M . Mějme nějakou klasickou pozorovatelnou f , f je tedy zobrazení z $T^*M \rightarrow \mathbb{R}$, pak f je pozorovatelná polohy, pokud je konstantní na všech vláknech T_m^*M , $\forall m \in M$. Zobrazení f lze psát ve tvaru $f = f' \circ \pi$, kde π je projekce daného kotečného fibrovaného prostoru, tj. $\pi : T^*M \rightarrow M$ a f' je zobrazení $f' : M \rightarrow \mathbb{R}$. Funkce f' tedy nahrazuje funkci $f : T^*M \rightarrow \mathbb{R}$ a budeme ji nadále značit jen jako f . Příslušný operátor polohy je pak určen spektrální funkcí E^f jako

$E_\lambda^f(S) := E(f^{-1}(\Delta))$, kde E je projekční míra daného systému imprimitivity a $\Delta \in (-\infty, \lambda) \subset \mathbb{R}$. Samosdružený operátor polohy se zavede následovně:

$$Q^f \Psi = \int_{\mathbb{R}} \lambda dE_\lambda^f \Psi.$$

Definiční obor operátoru Q^f jsou takové vektory $\Psi \in \mathcal{H}$, které vyhovují podmínce

$$\|Q^f \Psi\|^2 = \int_{\mathbb{R}} \lambda^2 d(\Psi, E_\lambda^f \Psi) < \infty.$$

Poznamenejme, že pokud je projekční míra definována jako násobení charakteristickou funkcí množiny $f^{-1}(\Delta)$, kde $\Delta \in (-\infty, \lambda) \subset \mathbb{R}$, podobně jako v předchozí kapitole. Pak se dá ukázat, že operátor polohy působí jednoduše jako $Q^f \Psi = f\Psi$. Dále pak z komutativnosti projekční míry, tj. ze vztahu $E(S_1)E(S_2) = E(S_1 \cap S_2) = E(S_2 \cap S_1) = E(S_2)E(S_1)$, $\forall S_1, S_2 \in \mathcal{B}(M)$, dostaneme $[Q^f, Q^{f'}] = 0$, kde $f, f' : M \rightarrow \mathbb{R}$ jsou omezené.

2.6.2 Operátor hybnosti

K zavedení kvantového operátoru hybnosti použijeme známou Stoneovu větu, jíž nyní explicitně uvedeme.

Věta 2.6.1 *Ke každé silně spojitě unitární grupě $\{U(t), t \in \mathbb{R}\}$ existuje právě jeden v podstatě samosdružený operátor P takový, že $U(t) = \exp(itP)$ pro všechna $t \in \mathbb{R}$.*

Operátory hybnosti se definují pomocí unitární ireducibilní reprezentace U grupy G . Z Lieovy algebry $\mathcal{L}(G)$ vybereme pevně prvek $X \in \mathcal{L}(G)$. K tomuto prvku pak jednoznačně přísluší podgrupa $\gamma_X(t) = \exp(tX)$ grupy G . Podle Stoneovy věty pak existuje samosdružený operátor $P(X)$ na Hilbertově prostoru $\mathcal{H}$, který splňuje rovnost

$$U(\gamma_X(t)) = \exp(-itP(X)).$$

Derivací této rovnosti podle t a položením $t = 0$ obdržíme operátor $P(X)$. Komutační relace obou operátorů lze odvodit z podmínky imprimitivity 2.1 z předchozí kapitoly, kterou lze za pomoci definice operátoru Q^f přepsat jako

$$U_g Q^f U_g^{-1} = Q^{f^g},$$

kde $f^g(p) = f(g^{-1}p)$, $p \in M$. Označíme-li q_X vektorové pole na M , které je pomocí akce grupy G indukováno prvkem X z Lieovy algebry $\mathcal{L}(G)$, pak komutační relace mají tvar

$$[P(X), Q^f] = -iQ^{q_X f}.$$

Aby vše bylo regulérní, je třeba předpokládat, že oba operátory mají společný definiční obor, který je hustý v $\mathcal{H}$.

2.7 Systém imprimitivity na S^2

Buď $M = S^2$. Ukážeme, že dvojrozměrnou sféru můžeme ztotožnit s homogenním prostorem tvaru $M \equiv SU(2)/U(1)$. Budeme přitom S^2 považovat za vnoření do $\mathbb{R}^3$. Potom jednotková sféra je definována podmínkou $x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 = 1$, kde $(x_1, x_2, x_3) \in \mathbb{R}^3$. Díky této podmínce můžeme S^2 ztotožnit s maticí

$$\mathbb{S}^2 = \begin{pmatrix} x_3 & x_1 - ix_2 \\ x_1 + ix_2 & -x_3 \end{pmatrix},$$

která je unitární a jejíž determinant $\det \mathbb{S}^2 = -1$. Tuto matici můžeme napsat pomocí Pauliho matic jako $\mathbb{S}^2 = \sum_i x_i \sigma_i$, kde

$$\sigma_1 = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \sigma_2 = \begin{pmatrix} 0 & -i \\ i & 0 \end{pmatrix}, \sigma_3 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}.$$

Akce $SU(2)$ na S^2 je potom definována následovně

$$\mathbb{S}^2 = \sum_i x_i \sigma_i \mapsto T \left(\sum_i x_i \sigma_i \right) T^\dagger,$$

kde $T \in SU(2)$, vše je dobře definováno neboť $\det T = 1$. Přičemž T můžeme psát ve tvaru

$$T = \begin{pmatrix} \alpha & -\bar{\beta} \\ \beta & \bar{\alpha} \end{pmatrix},$$

kde $\alpha, \beta \in \mathbb{C}$ takové, že $|\alpha|^2 + |\beta|^2 = 1$.

Jednoduše se ověří, že grupu stability prvku $(x_1, x_2, x_3) = (0, 0, 1)$ tvoří matice $T \in SU(2)$ ve tvaru

$$T = \begin{pmatrix} \tau & 0 \\ 0 & \bar{\tau} \end{pmatrix},$$

kde $\tau \in U(1)$. $SU(2)$ díky tomu tvoří hlavní fibrovaný prostor nad S^2 s vláknem izomorfním $U(1)$, tento prostor označíme $\xi_{SU(2)} = (SU(2)/U(1), \pi, S^2, U(1))$. V literatuře je často nazýván Hopfův fibrovaný prostor. Jelikož akce grupy $SU(2)$ na S^2 je tranzitivní, můžeme každý bod $p \in S^2$ ztotožnit s maticí $T \in SU(2)$ jako $p = T\sigma_3T^\dagger$, kde matice σ_3 odpovídá bodu $(x_1, x_2, x_3) = (0, 0, 1)$. Projekce $\pi : SU(2) \rightarrow S^2$ je tedy definována jako

$$\pi(T) = T\sigma_3T^\dagger = \begin{pmatrix} |\alpha|^2 - |\beta|^2 & 2\alpha\bar{\beta} \\ 2\bar{\alpha}\beta & -|\alpha|^2 + |\beta|^2 \end{pmatrix} = (2\Re(\bar{\alpha}\beta), 2\Im(\bar{\alpha}\beta), |\alpha|^2 - |\beta|^2).$$

Na tomto místě poznamenejme, že souřadnice (x_1, x_2, x_3) lze parametrizovat pomocí sférických souřadnic $\vartheta \in \langle 0, \pi \rangle$, $\varphi \in \langle 0, 2\pi \rangle$ jako $(x_1, x_2, x_3) = (\sin \vartheta \cos \varphi, \sin \vartheta \sin \varphi, \cos \vartheta)$. Přístupme nyní k určení lokální trivializace, tj. zobrazení $f_i : SU(2) \rightarrow U(1)$ na nějaké mapě U_i , které je definováno ve shodě s kapitolou 2.1.3 pomocí lokálního spojitého řezu na U_i jako $f_i(T) = s_i(p)^{-1}T$, kde $p \in S^2$. Trivializační řezy budeme volit na množinách $U_S = S^2 \setminus (0, 0, -1)$ a $U_J = S^2 \setminus (0, 0, +1)$. K nalezení řezů užijeme vztahu

$$(x_1, x_2, x_3) = (\sin \vartheta \cos \varphi, \sin \vartheta \sin \varphi, \cos \vartheta) = (2\Re(\bar{\alpha}\beta), 2\Im(\bar{\alpha}\beta), |\alpha|^2 - |\beta|^2),$$

mezi jednotlivými parametrizacemi S^2 . To vede k nutnosti řešit soustavu rovnic

$$\begin{aligned} \cos \vartheta &= |\alpha|^2 - |\beta|^2, \\ \sin \vartheta e^{-i\varphi} &= 2\alpha\bar{\beta}. \end{aligned}$$

Řešení najdeme ve tvaru

$$\alpha = \cos(\vartheta/2)e^{i\varphi_\alpha}, \beta = \sin(\vartheta/2)e^{i\varphi_\beta},$$

kde $e^{i\varphi_\alpha}, e^{i\varphi_\beta}$ jsou fázové faktory, které musí splňovat podmínku

$$e^{i\varphi} = e^{i(-\varphi_\alpha + \varphi_\beta)}.$$

Fázový faktor volíme s výhodou pro $s_S : U_S \rightarrow SU(2)$ jako $\varphi_\alpha = 0, \varphi_\beta = \varphi$. Pro $s_S : U_S \rightarrow SU(2)$ potom dostaneme pomocí $T(\alpha, \beta)$ vztah

$$s_S(p) = T(\cos(\vartheta/2), \sin(\vartheta/2)e^{i\varphi}) = \begin{pmatrix} \cos(\vartheta/2) & -\sin(\vartheta/2)e^{-i\varphi} \\ \sin(\vartheta/2)e^{i\varphi} & \cos(\vartheta/2) \end{pmatrix},$$

kde $0 \leq \varphi < 2\pi$ a $0 \leq \vartheta < \pi$.

Pro $s_J : U_J \rightarrow SU(2)$ volíme fázový faktor jako $\varphi_\alpha = -\varphi, \varphi_\beta = 0$ a celkově $s_J : U_J \rightarrow SU(2)$ má tvar

$$s_J(p) = T(\cos(\vartheta/2)e^{-i\varphi}, \sin(\vartheta/2)) = \begin{pmatrix} \cos(\vartheta/2)e^{-i\varphi} & -\sin(\vartheta/2) \\ \sin(\vartheta/2) & \cos(\vartheta/2)e^{i\varphi} \end{pmatrix},$$

kde $0 \leq \varphi < 2\pi$ a $0 < \vartheta \leq \pi$. Samozřejmě musí být splněno $\pi \circ s_S = Id_{U_S}$ a $\pi \circ s_J = Id_{U_J}$, což se jednoduše ověří.

Je známo, že dva rozdílné trivializační řezy na $U_S \cap U_J$, jsou spojeny pomocí takzvané přechodové funkce $t : S^2 \rightarrow U(1)$ jako $s_S = s_J t_{JS}$, kde v našem případě

$$t_{JS} = \begin{pmatrix} e^{i\varphi} & 0 \\ 0 & e^{-i\varphi} \end{pmatrix}.$$

Poznamenejme jen, že akce $U(1)$ na $SU(2)$ je v našem případě definována jako $(\Phi = e^{i\varphi}, T(\alpha, \beta)) \mapsto T(\alpha, \beta) \begin{pmatrix} e^{i\varphi} & 0 \\ 0 & e^{-i\varphi} \end{pmatrix}$. Toto je dobře definované neboť platí $\pi(T\Phi) = T\Phi\sigma_3(T\Phi)^\dagger = T\sigma_3T$.

K hlavnímu fibrovanému prostoru $\xi_{SU(2)} = (SU(2)/U(1), \pi, S^2, U(1))$ nyní přidružíme prostor $\mathbb{C}$ za pomoci unitární reprezentace $U(1)$ na $\mathbb{C}$. Na tomto místě ještě uvedme, že tento přístup je dostatečně obecný, neboť všechny multiplikátory grupy $SU(2)$ jsou triviální.

Nejprve tedy prostudujme unitární reprezentace $L : U(1) \rightarrow Aut\mathbb{C}$. Unitární ireducibilní reprezentace grupy stability $U(1)$ lze číslovat celými čísly $n \in \mathbb{Z}$ jako $L : \tau = e^{i\alpha} \mapsto \tau^n = e^{in\alpha}$.

Vlastní přidružení provedeme tak, že na $SU(2) \times \mathbb{C}$ zavedeme třídy ekvivalence jako $[T, v] := (T, v) \sim (T\tau, L(\tau)^{-1}v) = (T\tau, e^{-in\alpha}v)$. Tím dostáváme přidružený fibrovaný prostor $\xi_{\mathbb{C}} = (SU(2) \times_{L^n} \mathbb{C}, \pi_{\mathbb{C}}, S^2, \mathbb{C})$, kde $\pi_{\mathbb{C}}([T, v]) = \pi(T)$, pro L^n pevně danou. Řezy na tomto prostoru jsou v 1-1 korespondenci s funkcemi $\Psi : SU(2) \rightarrow \mathbb{C}$, které splňují $\Psi(T\tau) = \tau^{-n}\Psi(T)$. Lokální řez na množině $U_S(U_J)$ pak můžeme napsat pomocí řezu $s_{S(J)} : S^2 \rightarrow SU(2)$ jako $\sigma_\Psi(p) = [s_{S(J)}(p), \Psi(s_{S(J)}(p))]$. Lokálně tedy každý měřitelný řez v $\xi_{\mathbb{C}}$ můžeme ztotožnit s dvojicí $(\Psi_S(p), \Psi_J(p))$, kde $\Psi_S(p) = \Psi(s_S(p))$ a $\Psi_J(p) = \Psi(s_J(p))$. Přičemž pro $p \in U_S \cap U_J$ platí

$$\begin{aligned} \Psi_S(p) &= \Psi(s_S(p)) = \Psi(s_J(p)t_{JS}(p)) = \\ &= t_{JS}^{-n}(p)\Psi(s_J(p)) = e^{-in\varphi}\Psi_J(p), \end{aligned}$$

a $\Psi_{S,J} \in L^2(U_{S,J}, \sin \vartheta d\vartheta d\varphi)$.

Projekční míru na S^2 zavedeme podle 2.5.2 jako násobení charakteristickou funkcí množiny $U \subset S^2$

$$(E^L \sigma)(p) = \chi_U(p) \sigma(p).$$

A indukovanou reprezentaci $SU(2)$ na S^2 podle kapitoly 2.4.3 jako

$$(U^L(g)\sigma)(p) = (D(g)\sigma)(g^{-1}p),$$

což je ekvivalentní lokálnímu zápisu

$$(U^L(g)\Psi)(s(p)) = L(s(p)^{-1}gs(g^{-1}p))\Psi(s(g^{-1}p)),$$

kde $g^{-1}p := g^{-1}p(g^{-1})^\dagger$. Z tohoto tedy díky Mackeyho teorému (2.5.4) dostáváme, že všechny neekvivalentní kvantové kinematiky na $S^2 \equiv SU(2)/U(1)$ odpovídají různým unitárním ireducibilním reprezentacím $U(1)$ na $\mathbb{C}$. Tvar obecného operátoru hybnosti pak dostaneme pomocí Stoneovy věty derivací vztahu

$$U^L(\gamma_X(t)) = \exp(-i\frac{t}{\hbar}P(X)),$$

podle t pro $t = 0$, kde $\gamma_X(t) = \exp(tX)$, $X \in \mathcal{L}(SU(2))$. Potom

$$P(X)\Psi(p) = i\hbar \frac{d}{dt} \{L(s(p)^{-1}\gamma_X(t)s(\gamma_X(t)^{-1}p))\Psi(s(\gamma_X(t)^{-1}p))\}|_{t=0} =$$

$$i\hbar \{ \frac{d}{dt} \Psi(s(\gamma_X(-t)p))|_{t=0} + n[s(p)^{-1} \frac{d}{dt} \gamma_X(t)|_{t=0} s(p) + s(p)^{-1} \frac{d}{dt} s(\gamma_X(-t)p)|_{t=0}] \Psi(p) \},$$

kde jsme využili toho, že pro $L : A(t) \mapsto A(t)^n$ a $A(t)|_{t=0} = e$ platí $\frac{d}{dt} A(t)^n|_{t=0} = nA(t)^{n-1}|_{t=0} i \frac{d}{dt} A(t)|_{t=0} = ni \frac{d}{dt} A(t)|_{t=0}$.

Lieova algebra $\mathcal{L}(SU(2))$ je tvořena antihermitovskými maticemi 2×2 s nulovou stopou, $\dim \mathcal{L}(SU(2)) = 3$ a za bázi lze volit matice $i\sigma_1, i\sigma_2, i\sigma_3$. Ukažme si jak postupovat při určování operátoru $P(X_3)$ na U_S pro $X_3 = -i\frac{1}{2}\sigma_3$. Prvek $X_3 = -i\frac{1}{2}\sigma_3$ z této algebry indukuje na S^2 vektorové pole $-J_3$, které má v souřadnicích (x_1, x_2, x_3) tvar $J_3 = x_1 \frac{\partial}{\partial x_2} - x_2 \frac{\partial}{\partial x_1}$. Dále platí

$$\gamma_{X_3}(t) = \exp(-it\frac{1}{2}\sigma_3) = \begin{pmatrix} \cos(t/2) - i \sin(t/2) & 0 \\ 0 & \cos(t/2) + i \sin(t/2) \end{pmatrix},$$

$$\gamma_{X_3}^{-1}(t) = \exp(it\frac{1}{2}\sigma_3) = \begin{pmatrix} \cos(t/2) + i \sin(t/2) & 0 \\ 0 & \cos(t/2) - i \sin(t/2) \end{pmatrix}.$$

Nyní určíme člen $s(p)^{-1} \frac{d}{dt} \gamma_X(t)|_{t=0} s(p)$, kde $s(p) = s_S(p)$. Dosadíme a dostaneme

$$s(p)^{-1} \frac{d}{dt} \gamma_X(t)|_{t=0} s(p) = \frac{i}{2} \begin{pmatrix} \cos(\vartheta) & -\sin(\vartheta)e^{-i\varphi} \\ -\sin(\vartheta)e^{i\varphi} & -\cos(\vartheta) \end{pmatrix}.$$

Víme, že $p = s(p)\sigma_3 s(p)^\dagger$, potom

$$p = \begin{pmatrix} \cos(\vartheta) & \sin(\vartheta)e^{-i\varphi} \\ \sin(\vartheta)e^{i\varphi} & -\cos(\vartheta) \end{pmatrix},$$

$$\gamma_{X_3}^{-1}(t)p := \gamma_{X_3}^{-1}(t)p\gamma_{X_3}(t) = \begin{pmatrix} \cos(\vartheta) & \sin(\vartheta)e^{-i(\varphi+t)} \\ \sin(\vartheta)e^{i(\varphi+t)} & -\cos(\vartheta) \end{pmatrix},$$

a tedy

$$\begin{aligned} s(\gamma_X(-t)p) &= \begin{pmatrix} \cos(\vartheta) & -\sin(\vartheta)e^{-i(\varphi+t)} \\ \sin(\vartheta)e^{i(\varphi+t)} & \cos(\vartheta) \end{pmatrix}, \\ \frac{d}{dt} s(\gamma_X(-t)p)|_{t=0} &= \begin{pmatrix} 0 & i\sin(\vartheta)e^{-i(\varphi)} \\ i\sin(\vartheta)e^{i(\varphi+t)} & 0 \end{pmatrix}, \\ s(p)^{-1} \frac{d}{dt} s(\gamma_X(-t)p)|_{t=0} &= \frac{i}{2} \begin{pmatrix} 2\sin(\vartheta/2)^2 & i\sin(\vartheta)e^{-i(\varphi)} \\ i\sin(\vartheta)e^{i(\varphi+t)} & -2\sin(\vartheta/2)^2 \end{pmatrix}. \end{aligned}$$

Celkově tedy

$$\begin{aligned} s(p)^{-1} \frac{d}{dt} \gamma_X(t)|_{t=0} s(p) + s(p)^{-1} \frac{d}{dt} s(\gamma_X(-t)p)|_{t=0} &= \\ &= \frac{i}{2} \begin{pmatrix} 2\sin(\vartheta/2)^2 + \cos \vartheta & 0 \\ 0 & -2\sin(\vartheta/2)^2 - \cos \vartheta \end{pmatrix}. \end{aligned}$$

Jelikož platí $\sin(\vartheta/2)^2 = (1 - \cos \vartheta)/2$ dostáváme pro operátor $P(X_3)$ vztah

$$P(X_3)\Psi_S(\vartheta, \varphi) = \{-i\hbar J_3 - \frac{n\hbar}{2}(1 - \cos \vartheta) - \frac{n\hbar}{2}(\cos \vartheta)\}\Psi_S(\vartheta, \varphi),$$

což můžeme přepsat jako

$$P(X_3)\Psi_S(\vartheta, \varphi) = \{-i\hbar J_3 - e\alpha_S(J_3) - \frac{n\hbar}{2}(\cos \vartheta)\}\Psi_S(\vartheta, \varphi),$$

kde $\alpha_S = \frac{n\hbar}{2e}(1 - \cos \vartheta)d\varphi$. Obdobně postupujeme pro $X_1 = -i\frac{1}{2}\sigma_1$ a $X_2 = -i\frac{1}{2}\sigma_2$, obecný tvar operátoru určíme díky tomu, že pro $P : X \mapsto P(X)$ musí platit $P(X + aY) = P(X) + aP(Y)$. Má tedy pro $X = \sum_i a_i X_i$ tvar

$$P(X)\Psi_{S,J}(\vartheta, \varphi) = \{-i\hbar J - e\alpha_{S,J}(J) - \frac{n\hbar}{2}a.p\}\Psi_S(\vartheta, \varphi),$$

kde $p \in U_{S,J}$, $a.p = \sum_i a_i p_i$ a $\alpha_J = -\frac{n\hbar}{2e}(1 + \cos \vartheta)d\varphi$. Dvojice $(i\alpha_S, i\alpha_J)$ odpovídá lokalizaci formy konexe v přidruženém fibrovaném prostoru $\xi_{\mathbb{C}}$ až na faktor $e/\hbar$, přitom na $U_S \cap U_J$ platí

$$i\alpha_J = i\alpha_S + \frac{e}{\hbar}e^{in\varphi}(de^{-in\varphi}).$$

Dále na $U_S \cap U_J$ také platí

$$\beta = d\alpha_S = d\alpha_J = \frac{n\hbar}{2e} \sin \vartheta d\vartheta \wedge d\varphi.$$

Položme $g = \int_{S^2} \beta = \frac{n\hbar}{2e}4\pi$, tj. $ge = 2\pi n\hbar$. Fyzikální interpretace tohoto příkladu je následující. Ve středu sféry je umístěn Diracův magnetický monopol o velikosti g , částice nese elektrický náboj o velikosti e . Na povrchu sféry je pak magnetické pole $B(p) = (g/4\pi)p$, kde $p \in S^2$. Podmínka $ge = 2\pi n\hbar$, $n \in \mathbb{Z}$ je vlastně Diracovo kvantování magnetického náboje. Operátory $P(X_i)$ jsou kvantové operátory složek momentu hybnosti nabitě částice v poli magnetického monopolu. Obyčejnou kvantovou kinematiku dostáváme pro $n = 0$.

Kapitola 3

Zobecněný Schrödingerův systém

3.1 Dynamické systémy na varietě

V případě obecné variety M nemáme grupu symetrie. V tomto případě je účelné vyšetřovat hladká vektorová pole na M (můžeme je totiž považovat za generátory jistých infinitesimálních transformací M). Označme Lieovu algebru vektorových polí na M jako $\chi(M)$, $\chi_0(M)$ Lieovu podalgebru polí s kompaktním nosičem a $\chi_c(M)$ množinu úplných vektorových polí (to proto, že úplná vektorová pole nemusí tvořit vektorový prostor, tj. lineární kombinace dvou úplných vektorových polí nemusí být úplné vektorové pole). Přitom platí, je-li M kompaktní varieta, potom každé vektorové pole na M je úplné. Důsledkem tohoto tvrzení je $\chi_0(M) \subset \chi_c(M)$. Tok φ^X každého úplného vektorového pole X představuje jednoparametrickou grupu difeomorfismů. Jednoparametrická grupa difeomorfismů se také nazývá dynamickým systémem na M . Každý dynamický systém je naopak tokem jednoznačně určeného úplného vektorového pole. Množinu dynamických systémů budeme značit $D(M)$. Platí následující věta.

Věta 3.1.1 *Nechť $f : M \rightarrow N$ je difeomorfismus dvou variet. Potom $f_* : \chi(M) \rightarrow \chi(N)$, kde $(f_*X)_{f(q)} := f_*X_q$, je izomorfismus Lieových algeber, zúžení $f_* : \chi_0(M) \rightarrow \chi_0(N)$ je rovněž izomorfismus Lieových algeber a $f_* : \chi_c(M) \rightarrow \chi_c(N)$ je vzájemně jednoznačné zobrazení. Dále zobrazení $f^D : D(M) \rightarrow D(N) : \{\varphi\}_{t \in \mathbb{R}} \mapsto \{f \circ \varphi_t \circ f^{-1}\}_{t \in \mathbb{R}}$ je vzájemně jednoznačné. Je-li φ^X tok úplného vektorového pole X , potom platí $f^D(\varphi^X) = \varphi^{f_*X}$.¹*

¹První část tvrzení je dobře známa z diferenciální geometrie, ověříme tedy pouze

3.2 Zobecněný systém imprimitivity

S každým dynamickým systémem φ se varieta M stává $\mathbb{R}$ - prostorem $(t, u) \mapsto t.u = \varphi(t, u)$. Podle [1] budeme požadovat, aby existoval Hilbertův prostor $\mathcal{H}$, projekční míra E na M a unitární reprezentace U_φ aditivní grupy $\mathbb{R}$ v $\mathcal{H}$, přičemž E, U_φ jsou svázány rovností

$$U_\varphi(t)E(S)U_\varphi(-t) = E(\varphi_t.S).$$

Předpokládáme, že objekty $\mathcal{H}, E$ nezávisí na volbě $\varphi \in D(M)$. Každému toku φ přísluší jednoznačně úplné vektorové pole X a podle Stoneovy věty samosdružený operátor $P(X)$, který je definován vztahem $U_\varphi(t) = \exp(-i\frac{t}{\hbar}P(X))$, kde $t \in \mathbb{R}$.

Dále požadujeme, aby zobrazení $P : X \mapsto P(X)$ z Lieovy algebry $\chi_0(M)$ do prostoru samosdružených operátorů (přesněji do prostoru v podstatě samosdružených operátorů se společným, invariantním, v $\mathcal{H}$ hustým definičním oborem) bylo lineární. Při ověřování samosdruženosti operátoru $P(X)$ můžeme s výhodou užít Stoneovu větu.

Věta 3.2.1 *Nechť $\mathcal{H} = L^2(M, d\mu)$, potom operátor $P(X)$ je samosdružený jestliže vektorové pole X je úplné.*

Dalším omezením je podmínka lokalizace: jestliže dva toky $\varphi_1, \varphi_2 \in D(M)$ po zúžení na množinu $(-d, d) \times S, d > 0, S \in \mathcal{B}(S)$ ($\mathcal{B}$ značí sigma algebru borelovských množin na M) se shodují, pak se shodují rovněž zobrazení $\mathbb{R} \times \mathcal{H} \rightarrow \mathcal{H} : (t, \psi) \mapsto U_{\varphi_i}(t)\psi, i = 1, 2$ po zúžení na množinu $(-d, d) \times \mathcal{H}_S$, kde $\mathcal{H}_S$ je podprostor $\mathcal{H}$, na který projektuje $E(S)$. Poznamenejme, že z podmínky lokalizace plyne: jestliže známe U_φ pro všechna $\varphi = \varphi^X$, kde $X \in \chi_0(M)$, potom U_φ známe pro všechna $\varphi \in D(M)$. Jelikož dynamické systémy působí na M tranzitivně (M je souvislá hladká varieta bez hranice a navíc parakompaktní), pro každé dva body $p, q \in M$ existuje $X \in \chi_0(M)$, $\varphi = \varphi^X \in D(M)$ tak, že $\varphi(1, p) = q$. To značí, že se můžeme omezit pouze na vektorová pole s kompaktním nosičem.

Definujme nyní zobecněný systém imprimitivity příslušející k varietě M .

Definice 3.2.2 *Dvojici (E, U) , kde E je projekční míra na M v Hilbertově prostoru $\mathcal{H}$, U přiřazuje každému toku $\varphi \in D(M)$ homomorfismus $U_\varphi : \mathbb{R} \rightarrow$*

poslední část. Nechť $X' = f_*X, q' = f(q)$, potom $X'_{q'} = \frac{d}{dt}(f \circ \varphi_t \circ f^{-1})(q')|_{t=0} = \frac{d}{dt}(f \circ \varphi_t)(q)|_{t=0} = (f_*X)(q')$.

$U(\mathcal{H})$, kde $U(\mathcal{H})$ je grupa unitárních operátorů na $\mathcal{H}$, a pro kterou jsou splněny požadavky: lineárnost P , podmínka lokalizace a rovnost

$$U_\varphi(t)E(S)U_\varphi(-t) = E(\varphi_t.S), \quad (3.1)$$

budeme nazývat systém imprimitivity dynamických systémů $D(M)$ (zkráceně (zobecněný) systém imprimitivity).

3.3 Zobecněný Schrödingerův systém

Označme C_0^∞ algebru s involucí (komplexní sdružení) tvořenou hladkými komplexními funkcemi na M s kompaktním nosičem, tudíž omezenými. Projekční míra E umožňuje zavést homomorfismus Q $*$ - algebry C_0^∞ do $*$ - algebry omezených operátorů v $\mathcal{H}$. Zobrazení $f \mapsto Q(f)$ je definováno vztahem

$$(Q(f)\psi, \phi) = \int_M f(q)d\nu(q),$$

kde $\nu : \mathcal{B}(M) \rightarrow \mathbb{C} : S \mapsto (E(S)\psi, \phi)$ je komplexní míra. Přitom je splněna nerovnost $\|Q(f)\| < \sup|f(q)|$. Pokud je navíc f reálná, pak $Q(f)$ takto definovaný, je samosdružený operátor na $\mathcal{H}$. Pro takto definované $Q(f)$ lze rovnost 3.1 nahradit rovností

$$U_\varphi(t)Q(f)U_\varphi(-t) = Q(f \circ \varphi_{-t}).$$

Derivací této rovnosti a položíme-li $t = 0$, dostaneme komutační relaci pro operátory $P(X)$ a $Q(f)$:

$$[P(X), Q(f)] = -i\hbar Q(X.f).$$

Zde se předpokládá, že operátory $P(X)$ a $Q(f)$ mají společný, invariantní, v $\mathcal{H}$ hustý definiční obor. O dvojici $(P(f), Q(f))$, jestliže navíc vyhovuje rovnosti

$$[P(X), P(Y)] = -i\hbar P([X, Y]),$$

kde $X, Y \in \chi_0(M)$, se mluví jako o zobecněném Schrödingerově systému. Poznamenejme, že předpokládat poslední rovnost nemusí být vždy ku prospěchu věci, neboť může vést k nulovosti kalibračního pole na varietě.

3.4 Míra a projekční míra na varietě M

Na začátek zopakujme požadavky, které klademe na varietu M , M je souvislá, hladká, konečně dimenzionální a navíc parakompaktní varieta (díky této vlastnosti ji lze považovat za podvarietu $\mathbb{R}^n$). Jinak celý tento odstavec je věnován pomocným tvrzením, přičemž důležitá je zejména otázka existence kvaziinvariantní míry μ na M , jedná se o kvaziinvariantnost vůči působení všech difeomorfismů $\varphi_1 : q \mapsto \varphi(1, q)$, $\varphi \in D(M)$. Za daných předpokladů platí následující věta, kterou uvedeme bez důkazu.

Věta 3.4.1 *Na M existuje kvaziinvariantní míra. Každé dvě kvaziinvariantní míry jsou vzájemně absolutně spojitě, tj. ekvivalentní. Existuje tedy jediná třída měr na M , která je invariantní vůči všem φ_1 . Mluví se o ní jako o Lebesgueově třídě měr. O kvaziinvariantní míře μ se mluví jako o lebesgueovské míře.*

O míře řekneme, že je diferencovatelná, jestliže zobrazení $\mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^+ : t \mapsto \mu(\varphi_t.S)$ je hladké pro každé $S \in \mathcal{B}$, $\varphi \in D(M)$. Lokálně je varieta orientovatelná, potom při zvolené orientaci na otevřené množině $U \subset M$ existuje k dané diferencovatelné lebesgueovské míře μ jediná k -forma w na U ($\dim M = k$) taková, že platí $\int_M f.w = \int_M f(q)d\mu(q)$, $\forall f \in C_0^\infty(U)$, kde $w(X_1, \dots, X_k) > 0$ pro každou kladně orientovanou bázi z $T_q U$. Pro $X \in \chi(M)$ definujeme funkci $\operatorname{div}_\mu X$ na U vztahem

$$\operatorname{div}_\mu X.w = dw_X,$$

kde $k-1$ forma $w_X = i_X w$ je rovna $w_X(X_1, \dots, X_{k-1}) = w(X, X_1, \dots, X_{k-1})$. Poznamenejme, že takto jsme definovali funkci $\operatorname{div}_\mu X$ nezávisle na souřadnicích, což je naším cílem. Funkci $\operatorname{div}_\mu X$, $X \in \chi(M)$ lze zřejmě definovat jednoznačně na celé varietě M . Je-li v lokálních souřadnicích

$$w = \rho(q) dq_1 \wedge \dots \wedge dq_k, \rho > 0,$$

pak

$$\operatorname{div}_\mu X = X.\ln \rho + \sum \frac{\partial X_j}{\partial q_j}.$$

Výpočtem lze ověřit, že pro $\varphi = \varphi^X \in D(M)$ je

$$\frac{d}{dt} \left(\frac{d\mu}{d\mu \circ \varphi_t} \right) (\varphi_{-t}.q) |_{t=0} = \frac{-\mathcal{L}_X w}{w} = -\operatorname{div}_\mu X,$$

kde $\mathcal{L}_X w$ je Lieova derivace formy w podél vektorového pole X . Naznačíme schematicky důkaz tohoto vztahu. Vztah

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{d\mu}{d\mu \circ \varphi_t}\right)(\varphi_{-t}.q) = \frac{d}{dt}\left(\frac{d\mu \circ \varphi_{-t}}{d\mu}\right)(q),$$

lze přepsat jako

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{w \circ \varphi_{-t}}{w}\right) = \frac{1}{w}\left(\lim_{t \rightarrow 0} \frac{w - t\mathcal{L}_X w - w}{t}\right) = -\frac{\mathcal{L}_X w}{w}.$$

Nechť E je projekční míra na M v separabilním Hilbertově prostoru $\mathcal{H}$. Je známo, že pak existují dvě posloupnosti $\{\mathcal{K}_n\}, \{\nu_n\}, n = \infty, 1, 2, \dots$, z nichž první tvoří Hilbertovy prostory, druhou míry na M . Přitom platí: $\dim \mathcal{K}_n = n$; ν_m, ν_n jsou vzájemně disjunktí pro $m \neq n$, tj. existují $S_n, S_m \in \mathcal{B}(M)$, $S_n \cap S_m = \emptyset$, $\nu_n(S_m) = \nu_m(S_n) = 0$. Projekční míra E je ekvivalentní míře E^0 , $E \simeq E^0$, E^0 působí jako násobení charakteristickou funkcí v Hilbertově prostoru $\mathcal{H}^0 = \oplus \mathcal{H}_n$, $\mathcal{H}_n = L^2(M, \mathcal{K}_n, \nu_n)$. Míry ν_n jsou určeny jednoznačně až na ekvivalenci. Jestliže mezi mírami ν_n existuje jedna jediná nenulová, říkáme, že projekční míra E je homogenní. Díky tranzitivnosti dynamických systémů platí následující věta.

Věta 3.4.2 *Je-li (U, E) systém imprimitivity pro $D(M)$, pak je E homogenní. Přitom nenulová míra je lebesgueovská.*

Kapitola 4

Kvantová kinematika na diferencovatelných varietách

4.1 Konstrukce systému imprimitivity

Tento odstavec obsahuje přímé zobecnění matematických struktur uvedených v kapitole 2. Mějme varietu M s vlastnostmi uvedenými na začátku kapitoly 3.4, na M zvolme lebesgueovskou míru μ . Buď $\xi = (P, \pi, M, G)$, zkráceně $P(M, G)$, hlavní fibrovaný prostor s bází M a vláknem difeomorfním G , kde G je Lieova grupa. Omezíme se na abelovské nebo kompaktní Lieovy grupy, neboť jejich unitární reprezentace mají konečnou dimenzi. Na P nechť je definována konexe $\omega : P \rightarrow \mathcal{L}(G)$, kde $\mathcal{L}(G)$ je Lieova algebra grupy G . Dále buď L unitární reprezentace grupy G v Hilbertově prostoru $\mathcal{H}(L)$ konečné dimenze. Podobně jako v odstavci 2.4.1 sestrojíme separabilní Hilbertův prostor $\mathcal{H}$ jako prostor vektorových funkcí $f : P \rightarrow \mathcal{H}(L)$, které splňují:

- i) $u \mapsto \langle f(u), \Psi \rangle$ je borelovská funkce na P pro $\forall \Psi \in \mathcal{H}(L)$, $u \in P$,
- ii) $f(ug) = L_g^{-1}f(u)$, $g \in G$,
- iii) $\|f\| < \infty$, kde $\|\cdot\|$ je norma indukovaná skalárním součinem $(f, f') = \int_M \langle f(u), f'(u) \rangle d\mu(p)$, kde $\pi(u) = p$.

Důležitou vlastností integrálu iii) je obdobně jako v 2.4.1 to, že intergand zůstává konstantní na vláknech $F_p = \pi^{-1}(p)$, $p \in M$. Dvě funkce f, f' , které se shodují skoro všude, ztotožňujeme. Projekční míru E na M definujeme jako násobení charakteristickou funkcí χ_S na P jako:

$$E(S)f = \chi_S f,$$

kde $\chi_S = 1$ pro $\pi(u) \in S \subset M$ a $\chi_S = 0$ pro $\pi(u) \notin S$. Pro $\varphi \in D(M)$ je unitární reprezentace grupy $\mathbb{R}$ definována jako:

$$(U_\varphi(t)f)(u) = \sqrt{\frac{d\mu}{d\mu \circ \varphi_t}}(\varphi_{-t} \cdot p)f(\varphi_{-t}^\dagger \cdot u), p = \pi(u).$$

Symbol $\varphi^\dagger$ značí horizontální zdvih toku φ na M do P za pomoci konexe ω .

Jednoduše se ověří, že takto definovaná dvojice (U, E) tvoří systém imprimitivity pro $D(M)$ ve smyslu definice 3.1. Přičemž linearitu zobrazení P , které je definováno pomocí $U_\varphi(t) = \exp(-itP(X)/\hbar)$, vyšetříme v následujícím odstavci 4.2.

Podobně jako v 2.5.2 třída ekvivalence systému imprimitivity (U, E) nezávisí na volbě konkrétní lebesgueovské míry. Je-li totiž μ' jiná lebesgueovská míra, pak $\mathcal{H} \rightarrow \mathcal{H}' : f \mapsto \sqrt{d\mu/d\mu'}f$ je hledané unitární zobrazení. O míře μ přitom budeme předpokládat, že je diferencovatelná. Poznamenejme, že prostor $\mathcal{H}(L)$ budeme pro potřeby kvantové mechaniky ztotožňovat s prostorem $\mathbb{C}^r$. O dvojici (U, E) budeme hovořit jako o systému imprimitivity určeném čtveřicí (P, G, ω, L) . Celá tato konstrukce má topologický charakter v tom smyslu, že třída takto nalezených systémů imprimitivity je společná pro dvě difeomorfní variety.

4.2 Geometrický přístup ke konstrukci systému imprimitivity

Tento odstavec je zobecněním odstavce 2.4.3. Přesně jako v 2.4.2 sestojíme k hlavnímu fibrovanému prostoru $\xi = (P, \pi, M, G)$ přidružený fibrovaný prostor $\xi_{\mathbb{C}^r} = (P_{\mathbb{C}^r}, \pi_{\mathbb{C}^r}, M, \mathbb{C}^r)$ tak, že zavedeme třídy ekvivalence $(u, v) \sim (ug, L_g^{-1}v)$, kde $g \in G$ a položíme $P_{\mathbb{C}^r} := P \times_G \mathbb{C}^r$. Projekce $\pi_{\mathbb{C}^r}$ je definována jako $\pi_{\mathbb{C}^r} : P_{\mathbb{C}^r} \rightarrow M : [u, v] \mapsto \pi(u)$, $u \in P$ a $v \in \mathbb{C}^r$. Každé vlákno má strukturu Hilbertova fibrovaného prostoru neboť platí:

$$\lambda[u, v] + [u, v'] = [u, \lambda v + v'],$$

$$\langle [u, v], [u, v'] \rangle = \langle v, v' \rangle,$$

kde $\pi(u) = p$. Přičemž tento skalární součin je dobře definován, neboť L je unitární reprezentace grupy G v $\mathbb{C}^r$. Obdobně jako v 2.4.2 definujme zobrazení $i_u : \mathbb{C}^r \rightarrow P_{\mathbb{C}^r}$ jako $i_u : v \mapsto [u, v]$, platí $i_{ug}(v) = [ug, v] = [u, L_g v] =$

$i_u \circ L_g$ a toto zobrazení je unitární, jak je vidět z definice skalárního součinu. Inverzní zobrazení $j_u : \pi_{\mathbb{C}^r}^{-1}(p) \rightarrow \mathbb{C}^r$ má tvar $j_{u_0}([u, v]) = L_{g_0}v$, kde $u = u_0g_0$.

Bud' $\mathcal{H}'$ Hilbertův prostor měřitelných řezů (tříd měřitelných řezů modulo míry 0) v přidruženém fibrovaném prostoru $\xi_{\mathbb{C}^r}$, které mají konečnou normu indukovanou skalárním součinem

$$(s, s') = \int_M \langle s(p), s'(p) \rangle d\mu(p).$$

Jak vyplývá z kapitol 2.4.2 a 2.4.3 lze přirozeně definovat unitární zobrazení mezi Hilbertovými prostory $\mathcal{H}$ (z kapitoli 4.1) a $\mathcal{H}'$ jako: $T : \mathcal{H} \rightarrow \mathcal{H}' : f(u) \mapsto s(p) = [u, f(u)]$ tj. $T(f(u)) = i_u(f(u))$, kde $f \in \mathcal{H}$ a splňuje podmínku $f(ug) = L_g^{-1}f(u)$. Zobrazení je dobře definováno neboť platí $(u, f(u)) \sim (ug, L_g^{-1}f(u)) \sim (ug, f(ug))$. Inverzní zobrazení $T^{-1} : \mathcal{H}' \rightarrow \mathcal{H} : s(p) \mapsto f(u)$ je tvaru $f(u) = j_u(s(\pi(u)))$. Při unitárním zobrazení T přejde systém imprimitivity (U, E) v $\mathcal{H}$ na ekvivalentní systém (U', E') v $\mathcal{H}'$.

S přihlédnutím k předchozímu odstavci definujeme E' jako:

$$E'(S)s(p) = \chi_S s(p),$$

kde $\chi_S = 1$ pro $p \in S \subset M$ a $\chi_S = 0$ pro $p \notin S$. Při vyšetřování U' využijeme hermitovské kovariantní derivace v $P_{\mathbb{C}^r}$. Kovariantní derivace $\nabla_X : \sec P_{\mathbb{C}^r} \rightarrow \sec P_{\mathbb{C}^r}$, kde $\sec P_{\mathbb{C}^r}$ značí lineární prostor hladkých řezů v $P_{\mathbb{C}^r}$ a $X \in \chi(M)$, je hermitovská pokud navíc k základním podmínkám, které musí splňovat, splňuje ještě:

$$X\langle s, s' \rangle = \langle \nabla_X s, s' \rangle + \langle s, \nabla_X s' \rangle.$$

Bud' $\alpha : [a, b] \rightarrow M$ křivka v M a bud' $[u, v] \in \pi_{\mathbb{C}^r}^{-1}(\alpha(a))$, pomocí konexe ω na P lze definovat jednoznačně horizontální lift $\alpha^\uparrow$ křivky α do P takový, že $\alpha^\uparrow(a) = u$. Potom křivka $\alpha_{\mathbb{C}^r}^\uparrow(t) := [\alpha^\uparrow(t), v]$ je horizontální lift α do $P_{\mathbb{C}^r}$, který prochází bodem $[u, v]$ pro $t = a$. To vede k definici paralelního přenosu $\tau_{\mathbb{C}^r} : \pi_{\mathbb{C}^r}^{-1}(\alpha(a)) \rightarrow \pi_{\mathbb{C}^r}^{-1}(\alpha(b)) : [\alpha^\uparrow(a), v] \mapsto [\alpha^\uparrow(b), v]$, $\alpha^\uparrow(a) = u$, $\forall [u, v] \in \pi_{\mathbb{C}^r}^{-1}(\alpha(a))$. Vezměme jeden pevný zdvih křivky $\alpha^\uparrow$, pak můžeme $\tau_{\mathbb{C}^r}$ definovat explicitně jako $\tau_{\mathbb{C}^r}^b = i_{\alpha^\uparrow(b)} \circ j_{\alpha^\uparrow(a)}$. Toto zobrazení je dobře definováno, neboť zvolíme-li jiný zdvih α , označme ho $\beta^\uparrow$, pak platí $\beta^\uparrow = \alpha^\uparrow g$, $g \in G$ a dále $j_{\beta^\uparrow(a)}([u, v]) = L_{g^{-1}g_a}v$, kde $u = \alpha^\uparrow g_a = \alpha^\uparrow g g^{-1} g_a = \beta^\uparrow g^{-1} g_a$. Potom $i_{\beta^\uparrow(b)}(L_{g^{-1}g_a}v) = [\beta^\uparrow(b), L_{g^{-1}g_a}v] = [\alpha^\uparrow, L_{g_a}v]$. Tudíž $\tau_{\mathbb{C}^r}^{\beta(b)} = \tau_{\mathbb{C}^r}^{\alpha(b)}$, navíc toto zobrazení je unitární díky unitaritě L . Bud' $\alpha : [0, t] \rightarrow M$ křivka v M taková, že $\alpha(0) = p$. Potom hermitovská kovariantní derivace podél α

v bodě $p \in M$ je definována jako:

$$(\nabla_X s)(p) = \lim_{t \rightarrow 0} \frac{1}{t} \{(\tau_{\mathbb{C}^r}^{\alpha(t)})^{-1} \circ s(\alpha(t)) - s(p)\},$$

kde $\dot{\alpha}|_{t=0} = X$.

Nyní s ohledem na kapitolu 2.4.3 jsme schopni napsat jak působí operátor $U'_\varphi(t)$. Označme $\tau(\varphi_t p)^{-1} = (\tau_{\mathbb{C}^r}^{\varphi_t p})^{-1}$, pak $U'_\varphi(t)$ definujeme jako:

$$(U'_\varphi(t)s)(p) = \tau(\varphi_{-t}p)^{-1} \left[\sqrt{\frac{d\mu}{d\mu \circ \varphi_t}} s \right](\varphi_{-t}p).$$

Označme $sec_0 P_{\mathbb{C}^r}$ lineární prostor hladkých řezů v $P_{\mathbb{C}^r}$ s kompaktním nosičem. Tato množina je hustá v $\mathcal{H}'$. Operátor $P'(X)$ opět dostaneme derivací vztahu $U'_\varphi(t) = \exp(itP(X)/\hbar)$, kde $\varphi = \varphi^X$, podle t a položením $t = 0$. Pak $P'(X)$ je tvaru:

$$P'(X)s = -i\hbar(\nabla_X + \frac{1}{2}divX)s,$$

kde $s \in sec_0 P_{\mathbb{C}^r}$. Tento operátor je symetrický a podle Stoneovy věty v podstatě samosdružený. Z rovnice pro $P'(X)$ je zřejmé, že $P' \sim P$ závisí lineárně na $X \in \chi_0$.

Kapitola 5

Kvantová kinematika na mnohonásobně souvislých kofiguračních prostorech

V této kapitole bude ukázáno, jak zkonstruovat kvantovou kinematiku na mnohonásobně souvislých kofiguračních prostorech za pomoci pouze topologických metod, tj. bez nutnosti zavedení konexe. Uvidíme ale, že takto zkonstruované kvantové kinematiky jsou méně 'bohaté'. Tento přístup je možné srovnat s přístupem, který využívá metod dráhového integrálu viz např. [10].

5.1 Úvod do geometrie nakrývacích prostorů

K nalezení kvantové kinematiky na mnohonásobně souvislých kofiguračních prostorech M (tj. v našem případě na souvislých hladkých varietách, které nejsou jednoduše souvislé) použijeme univerzální nakrývací prostor $\tilde{M}$.

Uveďme tedy nejprve definici nakrývacího (univerzálního nakrývacího) prostoru CS (UCS).

Definice 5.1.1 *Budťe M a $\tilde{M}$ souvislé topologické prostory. Potom dvojice $(\tilde{M}, p)$, kde navíc v případě UCS $\tilde{M}$ je jednoduše souvislý topologický prostor, se nazývá nakrývacím prostorem prostoru M , jestliže existuje spojitě zobrazení $p : \tilde{M} \rightarrow M$ takové, že:*

- i) *p je surjektivní*
- ii) *pro každé $q \in M$ existuje souvislá otevřená množina $U \subset M$ obsahující q taková, že $p^{-1}(U)$ je sjednocení otevřených podmnožin $\tilde{M}$, nemajících*

společný průnik, přičemž každá z nich je homeomorfně zobrazena na U pomocí zobrazení p .

Pokud prostory v předchozí definici jsou topologické grupy a zobrazení $p : \tilde{M} \rightarrow M$ je navíc grupový homomorfismus, potom se univerzální nakrývací prostor nazývá univerzální nakrývací grupa.

Z teorie nakrývacích prostorů [6] plyne, že prostor M lze ztotožnit s faktorprostorem $\tilde{M}/\Gamma$, kde Γ je diskrétní grupa tzv. deck transformace. Tato grupa je přitom izomorfní fundamentální grupě prostoru M . Uvedme několik definicí a vět týkajících se tohoto problému.

Nejprve poznamenejme, co znamená pojem jednoduše souvislý topologický prostor.

Definice 5.1.2 *Topologický prostor X se nazývá jednoduše souvislý, jestliže je křivkově souvislý a jeho fundamentální grupa je triviální (fundamentální grupu prostoru X v daném bodě $x \in X$ značíme $\pi_1(X, x)$).*

Dále je pro nás důležité vědět, že platí následující. Buď X křivkově souvislý topologický prostor a buďte $x_0, x_1 \in X$. Pak $\pi_1(X, x_0)$ je izomorfní $\pi_1(X, x_1)$. Nezáleží tedy na volbě bázevého bodu x .

Dále si definujme tzv. indukovaný homomorfismus.

Definice 5.1.3 *Předpokládejme, že $\varphi : X \rightarrow Y$ je spojitě zobrazení, které zobrazuje bázevý bod $x_0 \in X$ na bázevý bod $y_0 \in Y$, což budeme zapisovat jako $\varphi : (X, x_0) \rightarrow (Y, y_0)$. Potom φ indukuje homomorfismus fundamentálních grup $\varphi_* : \pi_1(X, x_0) \rightarrow \pi_1(Y, y_0)$, definovaný jako složení zobrazení $f : [0, 1] \rightarrow X$, jež definuje křivku v $x_0 \in X$, se zobrazením φ tj. $\varphi_* \circ [f] = [\varphi \circ f]$, kde $[f]$ značí třídu homotopicky ekvivalentních uzavřených křivek.*

Toto zobrazení je dobře definováno, neboť není těžké ověřit, že zobrazuje třídu ekvivalence křivek na X na třídu ekvivalence křivek na Y . Je také jednoduché ověřit, že jde skutečně o homomorfismus.

Po této definici můžeme s čistým svědomím uvést jednu ze základních vět teorie nakrývacích prostorů.

Věta 5.1.4 *Zobrazení $p_* : \pi_1(\tilde{M}, \tilde{q}_0) \rightarrow \pi_1(M, q_0)$ indukované zobrazením $p : \tilde{M} \rightarrow M$ mezi nakrývacím prostorem $\tilde{M}$ a prostorem M je prosté. Obraz podgrupy $p_*(\pi_1(\tilde{M}, \tilde{q}_0))$ v $\pi_1(M, q_0)$ tvoří třída homotopicky ekvivalentních uzavřených křivek na M v bodě q_0 , jejichž zdvih do $\tilde{M}$ v bodě $\tilde{q}_0$ jsou uzavřené*

křivky. Pokud je prostor $\tilde{M}$ jednoduše souvislý, jak je tomu v našem případě, pak $p_(\pi_1(\tilde{M}, \tilde{q}_0))$ je triviální podgrupa (jednotka) v $\pi_1(M, q_0)$.*

Další definicí, již je nutné uvést, je definice izomorfismu mezi dvěma nakrývacími prostory.

Definice 5.1.5 *Izomorfismem mezi nakrývacími prostory $p_1 : \tilde{M}_1 \rightarrow M$ a $p_2 : \tilde{M}_2 \rightarrow M$ rozumíme homeomorfismus $f : \tilde{M}_1 \rightarrow \tilde{M}_2$ takový, že platí $p_1 = p_2 \circ f$. Tato podmínka znamená, že f zachovává strukturu nakrývacího prostoru, tj. zobrazuje vlákno $p_1^{-1}(q)$ na vlákno $p_2^{-1}(q)$ pro každé $q \in M$.*

Protože inverzní zobrazení f^{-1} je izomorfismus a taktéž složení dvou izomorfismů, obrželi jsme relaci ekvivalence mezi nakrývacími prostory. Tohoto izomorfismu se týká i následující důležitá věta.

Věta 5.1.6 *Jestliže M je křivkově souvislý a lokálně křivkově souvislý, potom dva křivkově souvislé nakrývací prostory $p_1 : \tilde{M}_1 \rightarrow M$ a $p_2 : \tilde{M}_2 \rightarrow M$ jsou izomorfní pomocí zobrazení $f : \tilde{M}_1 \rightarrow \tilde{M}_2$, které zobrazuje bázeový bod $\tilde{q}_1 \in p_1^{-1}(q_0)$ na bázeový bod $\tilde{q}_2 \in p_2^{-1}(q_0)$, právě když $p_{1*}(\pi_1(\tilde{M}_1, \tilde{q}_1)) = p_{2*}(\pi_1(\tilde{M}_2, \tilde{q}_2))$.*

To znamená, že ve všech rozumných případech je univerzální nakrývací prostor vždy izomorfní univerzálnímu nakrývacímu prostoru. Připomeňme, že topologický prostor Y je lokálně jednoduše souvislý pokud $\forall y \in Y$ a $\forall U \subset Y$ otevřené množiny takové, že $y \in U$ existuje otevřená množina $V \subset U$ taková, že $y \in V$ a V je jednoduše souvislá. Obdobně je definována lokální křivková souvislost. Dále připomeňme, že topologický prostor Y je semilokálně jednoduše souvislý pokud $\forall y \in Y$ existuje otevřená množina $U \subset Y$ taková, že $\pi_1(U, y) \hookrightarrow \pi_1(Y, y)$ je triviální. Např. pro vrchol kužele platí, že je semilokálně jednoduše souvislý, ale není lokálně jednoduše souvislý. Pro to, aby k topologickému prostoru Y existoval univerzální nakrývací prostor, musí být Y alespoň semilokálně jednoduše souvislý.

Nyní přejdeme k definici již zmíněné deck transformace.

Definice 5.1.7 *Pro nakrývací prostor $p : \tilde{M} \rightarrow M$ se izomorfismus $\tilde{M} \rightarrow \tilde{M}$ nazývá nazývá deck transformace nebo nakrývací transformace. Tyto transformace tvoří grupu $G(\tilde{M})$ vzhledem k operaci skládání zobrazení.*

Například pro univerzální nakrývací prostor $p : \mathbb{R} \rightarrow S^1$, který si lze představit jako projekci svislé šroubovice na kružnici, je deck transformace vertikální translace zobrazující šroubovici samu na sebe a $G(\mathbb{R}) \simeq \mathbb{Z}$.

Definice 5.1.8 *Nakrývací prostor $p : \tilde{M} \rightarrow M$ se nazývá normální, jestliže pro každé $q \in M$ a každou dvojici $\tilde{q}, \tilde{q}'$ zdvihů bodu q existuje deck transformace zobrazující $\tilde{q}$ na $\tilde{q}'$.*

Například nakrývací prostor $p : \mathbb{R} \rightarrow S^1$ je normální.

Platí následující věta.

Věta 5.1.9 *Bud' $p : (\tilde{M}, \tilde{q}_0) \rightarrow (M, q_0)$ křivkově souvislý nakrývací prostor křivkově souvislého a lokálně křivkově souvislého prostoru M , dále bud' H podgrupa $p_*(\pi_1(\tilde{M}, \tilde{q}_0)) \subset \pi_1(M, q_0)$. Potom platí:*

- i) *Tento nakrývací prostor je normální, právě když H je normální podgrupa v $\pi_1(M, q_0)$.*
- ii) *$G(\tilde{M})$ je izomorfní faktorgrupě $N(H)/H$ kde $N(H)$ je normalizátor H v $\pi_1(M, q_0)$.*

To znamená, že $G(\tilde{M})$ je izomorfní s $\pi_1(M, q_0)/H$, pokud $\tilde{M}$ je normální nakrytí. Z předchozího potom vyplývá důležitý závěr, že pro univerzální nakrývací prostory $\tilde{M} \rightarrow M$ máme $G(\tilde{M}) \simeq \pi_1(M)$.

Dále uveďme několik poznámek týkajících se akce grupy na nějakém prostoru X . Mějme grupu G a prostor X , potom akce grupy G na X je homomorfismus ϱ z G do grupy všech homeomorfismů prostoru X na sebe. Každý prvek $g \in G$ je tedy spojen s homeomorfismem $\varrho(g) : X \rightarrow X$, pro jednoduchost budeme psát $g : X \rightarrow X$ (neboli $x' = gx$). Nás bude zajímat hlavně speciální druh akcí G na X , které splňují: (5.1) Každé $x \in X$ má okolí U takové, že průniky obrazů množiny $g(U)$ pro různá $g \in G$ jsou prázdné množiny. Jinými slovy, $g_1(U) \cap g_2(U) \neq \emptyset$ implikuje $g_1 = g_2$.

Mějme danou akci grupy G na prostoru X , potom můžeme vytvořit prostor X/G jako faktorprostor X , kde každý bod x tvoří třídu ekvivalence společně se svými obrazy $g(x)$, kde g probíhá celou grupu G . Body z X/G jsou tedy orbity $Gx = \{g(x) : g \in G\}$ v X . V souvislosti s akcí G na X platí následující věta.

Věta 5.1.10 *Jestliže akce grupy G na prostoru X splňuje (5.1), potom platí:*

- i) *Zobrazení $p : X \rightarrow X/G$, $p(x) = Gx$, je normální nakrývací prostor.*
- ii) *G je grupa deck transformací tohoto nakrývacího prostoru $X \rightarrow X/G$, jestliže X je křivkově souvislý.*

- iii) G je izomorfní $\pi_1(X/G)/p_*(\pi_1(X))$ jestliže X je křivkově souvislý a lokálně křivkově souvislý.

Z předchozích odstavců a vět v nich uvedených vyplývá, že pro náš univerzální nakrývací prostor $\tilde{M} \rightarrow M$ můžeme faktorprostor $\tilde{M}/G(\tilde{M})$ ztotožnit s prostorem M (tzv. bázevým prostorem). Takže budeme psát $M \equiv \tilde{M}/\Gamma$, kde pomocí Γ budeme od teď značit grupu deck transformace. Potom rovnost $M \equiv \tilde{M}/\Gamma$ znamená, že každý bod q z M jednoznačně koresponduje s třídou ekvivalence bodů z $\tilde{M}$, která je dána jako $[\tilde{q}] = \{\tilde{q} \in \tilde{M} : \tilde{q} = \tilde{q}\gamma, \forall \gamma \in \Gamma\}$. Přitom $\tilde{q}.\gamma$ značí pravou akci Γ na $\tilde{M}$, čímž se lišíme od předchozích obecných vět (kde byla uvažována levá akce), tato odlišnost však není nikterak podstatná a všechny předchozí věty platí bez změny. Body svázané touto podmínkou ekvivalence přitom tvoří vlákno fibrovaného prostoru $(\tilde{M}, p, M, \Gamma)$, který má strukturu hlavního fibrovaného prostoru (principal bundle).

Ztotožnění M s $\tilde{M}/\Gamma$ vzhledem k akci Γ na $\tilde{M}$, kde $\tilde{M}$ je UCS pak dává vzniknout tzv. fundamentální oblasti faktorprostoru $\tilde{M}/\Gamma$. Tato je definována jako uzávěr $\bar{F}$ souvislé množiny $F \subset \tilde{M}$, pro kterou platí: $\bigcup_{\gamma} F\gamma = \tilde{M}$ a $F\gamma_1 \cap F\gamma_2 = \emptyset$, $\forall \gamma_i, \gamma_j \in \Gamma$: $\gamma_i \neq \gamma_j$ (zde jen připomeňme, že deck transformace splňuje podmínky (5.1)).

Zvolme dále řez ve fibrovaném prostoru $(\tilde{M}, p, M, \Gamma)$ tj. zobrazení $s : M \rightarrow \tilde{M}$ splňující $p(s(q)) = q$. Z definice je patrné, že všechny body z množiny $S = \{s(q), q \in U \subset M\}$ jsou v 1–1 korespondenci s body v $U \subset M$. Dále budeme požadovat, aby množina S byla souvislá (to je ekvivalentní s tím, že požadujeme lokální spojitost řezů). Z předchozího tedy vyplývá, že otevřenou množinu $U \subset M$ můžeme pomocí lokálního homeomorfizmu p (čímž se myslí restrikce zobrazení p na $s(U)$) ztotožnit s $p^{-1}(U) \subset \tilde{M}$. Celou varietu M pak můžeme ztotožnit s $\bar{F}$ tím způsobem, že ztotožníme body $\bar{F} \setminus \mathcal{O}(F)$, kde $\mathcal{O}(F)$ je vnitřek množiny F , které patří do stejné třídy ekvivalence.

5.2 Fyzikální konstrukce Hilbertova prostoru

Uvedme nejprve intuitivní konstrukci prostoru vlnových funkcí kvantového systému na konfiguračním prostoru M . Buď $\tilde{\Psi}(\tilde{q})$ vlnová funkce na $\tilde{M}$, tedy měřitelné zobrazení $\tilde{\Psi} : \tilde{M} \rightarrow \mathbb{C}$. Definujme dále mnohoznačnou vlnovou funkci na M tak, že $\Psi(q) = \tilde{\Psi}(s(q))$, kde $s(q)$ je spojitý řez (lokální podle potřeby) na $(\tilde{M}, p, M, \Gamma)$. Tato funkce je mnohoznačná, protože $\tilde{\Psi}(s(q)\gamma)$ je

také funkcí na M (zvolme např. $\gamma = 1$). Pro jednoduchost požadujeme, aby funkce $\Psi(q)$ měla kompaktní nosič a byla spojitá na mapě $U \subset M$, potom také $\tilde{\Psi}(\tilde{q})$ bude spojitá na $S \subset \tilde{M}$. Tento požadavek vede na požadavek souvislosti množiny $S = \{s(q), q \in U \subset M\}$ (to je ekvivalentní s tím, že požadujeme lokální spojitost řezů). Množinu $U \subset M$ lze volit tak, že uzávěr $\bar{S}$ pak tvoří fundamentální oblast $\bar{F}$. Odtud je vidět, že množina F se v $\tilde{M}$ opakuje tolikrát, kolik různých prvků má grupa Γ .

Z předchozího vyplývá, že vlnové funkce na M korespondují s jistými třídami funkcí na $\tilde{M}$, konkrétně $\Psi(q) = \tilde{\Psi}(s(q))$ patří do stejné třídy funkcí jako $\Psi'(q) = \tilde{\Psi}(s(q)\gamma)$. Z fyzikálního pohledu na věc je přirozené, aby se fyzika daná funkcemi $\Psi(q)$ a $\Psi'(q)$ nelišila, tj. aby platilo $|\Psi(q)| = |\Psi'(q)|$. Toto je ekvivalentní s požadavkem

$$\tilde{\Psi}(s(q)\gamma) = a(\gamma)^{-1}\tilde{\Psi}(s(q)), |a(\gamma)| = 1,$$

na vlnové funkce $\tilde{\Psi}(\tilde{q})$. Je jednoduché dokázat, že $a(\gamma)$ je reprezentace grupy Γ , neboť:

$$a(\gamma_1\gamma_2)^{-1}\tilde{\Psi}(\tilde{q}_0) = \tilde{\Psi}(\tilde{q}_0\gamma_1\gamma_2) = a(\gamma_2)^{-1}a(\gamma_1)^{-1}\tilde{\Psi}(\tilde{q}_0) = \{a(\gamma_1)a(\gamma_2)\}^{-1}\tilde{\Psi}(\tilde{q}_0),$$

tj. máme $a(\gamma_1\gamma_2) = a(\gamma_1)a(\gamma_2)$ a $a(e) = 1$, $a(\gamma^{-1}) = a(\gamma)^{-1}$. Fyzikálním stavům potom odpovídají funkce $\tilde{\Psi}(\Psi)$, pro které platí

$$\begin{aligned} \int_M \overline{\Psi(q)}\Psi(q)d\mu_M(q) &= \int_M \overline{\tilde{\Psi}(s(q))}\tilde{\Psi}(s(q))d\mu_M(q) = \\ &= \int_{\tilde{q}}^{\tilde{q}\gamma} \overline{\tilde{\Psi}(\tilde{q})}\tilde{\Psi}(\tilde{q})d\mu_{\tilde{M}}(\tilde{q}) = \int_{\bar{F}} \overline{\tilde{\Psi}(\tilde{q})}\tilde{\Psi}(\tilde{q})d\mu_{\tilde{M}}(\tilde{q}) < \infty. \end{aligned}$$

Přitom vztah míry μ_M a $\mu_{\tilde{M}}$ je následující: $\mu_{\tilde{M}} = \mu_M \circ p$, tj. jde o tzv. pullback pomocí lokálního homeomorfizmu $p : \tilde{M} \rightarrow M$ (čímž se opět myslí restrikce zobrazení p na fundamentální oblast).

Tímto jsme tedy intuitivně dospěli k podmínce na funkce na $\tilde{M}$ splňující $\tilde{\Psi}(\tilde{q}\gamma) = a(\gamma)^{-1}\tilde{\Psi}(\tilde{q})$, které korespondují úzce s vlnovými funkcemi popisujícími fyzikální stav na M . Funkce, které tuto podmínku splňují, se nazývají ekvivariantní funkce na bundlu $(\tilde{M}, p, M, \Gamma)$. V podstatě se tedy jedná o funkce na F , které na hranici $\bar{F}$ splňují podmínku $\tilde{\Psi}(\tilde{q}\gamma) = a(\gamma)^{-1}\tilde{\Psi}(\tilde{q})$, kde $\tilde{q}, \tilde{q}\gamma \in \bar{F} \setminus \mathcal{O}(F)$. Je vidět, že se nejedná přímo o funkce na M , neboť ty logicky splňují hraniční podmínku $\Psi(p(\tilde{q}\gamma)) = \Psi(p(\tilde{q}))$, která je ekvivalentní podmínce $\tilde{\Psi}(\tilde{q}\gamma) = \tilde{\Psi}(\tilde{q})$, kde $\tilde{q}, \tilde{q}\gamma \in \bar{F} \setminus \mathcal{O}(F)$, protože na M jsou body

$p(\tilde{q})$ a $p(\tilde{q}\gamma)$ ztotožněny. Abychom převedli kvantovou mechaniku z funkcí na $\tilde{M}$ splňujících podmínku $\tilde{\Psi}(s(q)\gamma) = a(\gamma)^{-1}\tilde{\Psi}(s(q))$ a $|a(\gamma)| = 1$, musíme najít zobrazení mezi těmito funkcemi a funkcemi na M (respektive Γ - periodickými funkcemi na $\tilde{M}$), které povede ke stejným kvantově mechanickým systémům.

5.3 Kvantová mechanika na mnohonásobně souvislých prostorech

5.3.1 Vztah řezů na $(\tilde{M} \times_{\Gamma} V, p_F, M, \Gamma)$ a na $(\tilde{M} \times V, pr_1, \tilde{M})$

Nejprve ukážeme velmi podstatnou 1-1 korespondenci, na které se zakládá celý tento speciální případ kvantování na mnohonásobně souvislých prostorech.

Mějme hlavní fibrovaný prostor popsáný v kapitole 5.1, tj. prostor $(\tilde{M}, p, M, \Gamma)$, kde $\tilde{M}$ je USC prostoru M a přidružíme k němu konečně rozměrný vektorový prostor V nad komplexními čísly. Toto přidružení provedeme následovně. Označme $\tilde{M} \times_{\Gamma} V$ prostor tříd ekvivalence definovaných podmínkou $(\tilde{q}, v) \sim (\tilde{q}\gamma, L(\gamma)^{-1}v)$, kde $\tilde{q} \in \tilde{M}$ a $v \in V$, tyto třídy ekvivalence budeme značit jako $[\tilde{q}, v]_{\Gamma}$. Zde $L(\gamma)$ značí unitární reprezentaci grupy Γ na V , tj. operátory $L(\gamma) : V \rightarrow V$ jsou unitární. Potom $(\tilde{M} \times_{\Gamma} V, p_F, M, \Gamma)$ tvoří tzv. asociovaný fibrovaný prostor s vláknem izomorfním prostoru V (viz např. [4] str. 234 nebo kapitola 2.4.2), kde $p_F : [\tilde{q}, v] \mapsto q$ tj. $p_F([\tilde{q}, v]) = p(\tilde{q})$. Poznamenejme, že ve skutečnosti nám jde o tzv. Hilbertův fibrovaný prostor (viz 2.4.2), tj. prostor, kde totální prostor a báze jsou topologické prostory, projekce je spojitá a surjektivní a vlákno v každém bodě má strukturu Hilbertova prostoru (v tomto případě V nad $\mathbb{C}$ se skalárním součinem $\langle \cdot, \cdot \rangle_V$).

Nyní ukážeme, že řezy v tomto asociovaném fibrovaném prostoru jsou v 1-1 korespondenci s řezy v bundlu $(\tilde{M} \times V, pr_1, \tilde{M})$, které splňují jisté speciální "kvaziperiodické" podmínky. Buď $s : M \rightarrow \tilde{M}$ řez v bundlu $(\tilde{M}, p, M, \Gamma)$, potom je množina $S = \{s(q), q \in U \subset M\} \subset \tilde{M}$. Z předchozího víme, že jelikož $\tilde{M}$ je UCS prostoru M , pak existuje souvislá množina $F \subset \tilde{M}$, pro kterou platí $\bigcup_{\gamma} F\gamma = \tilde{M}$. Označme dále $A := \mathcal{O}(F)$, kde $\mathcal{O}(F)$ značí vnitřek množiny F , potom $A \subset \tilde{M}$ je otevřená množina a platí $p(A) \subset M$ je také otevřená souvislá množina. Fundamentální oblast není na $\tilde{M}$ dána jednoznačně, můžeme ji totiž po $\tilde{M}$ libovolně "posouvat" pomocí transformací prostoru $\tilde{M}$. Potom tedy existují souvislé množiny $F_i \subset \tilde{M}$, $i = 1, 2, \dots, n$, $F_i \neq F_j$ takové, že

pro každou platí $\bigcup_{\gamma} F_i \gamma = \tilde{M}$ a tím pádem existují i množiny $A_i := \mathcal{O}(F_i)$, $A_i \subset \tilde{M}$. Množiny $F_i \subset \tilde{M}$ můžeme volit tak, aby obraz množin $A_i \subset \tilde{M}$ při lokálním homeomorfismu p , tj. $p(A_i) \subset M$, tvořil otevřené pokrytí variety M . Na množinách $p(A_i) \subset M$ potom existují spojitě řezy $s : p(A_i) \subset M \rightarrow \tilde{M}$ (na M obecně existovat nemusí, existují totiž právě tehdy, jde-li o triviální fibrovaný prostor). Dále je jasné, že množina $S = \{s(q), q \in p(A) \subset M\}$ se pro spojitě řezy stane souvislou množinou (neboť $p(A)$ je souvislá množina, $p|_A$ je lokální homeomorfismus a platí $p(s(q)) = q$, $\forall q \in p(A) \subset M$) a že $\bar{S}$ tvoří zmíněnou fundamentální oblast na $\tilde{M}$.

Z teorie asociovaných fibrovaných prostorů víme (viz [4] str. 246 nebo 2.4.2), že řezy v asociovaném fibrovaném prostoru jsou v 1-1 korespondenci s ekvivariantními funkcemi na hlavním fibrovaném prostoru. V našem případě konkrétně platí. Je-li $(\tilde{M} \times_{\Gamma} V, p_F, M, \Gamma)$ fibrovaný prostor asociovaný s hlavním fibrovaným prostorem $(\tilde{M}, p, M, \Gamma)$, potom řezy jsou v bijektivní korespondenci se zobrazeními $\Psi : \tilde{M} \rightarrow V$, která splňují

$$\Psi(\tilde{q}\gamma) = L^{-1}(\gamma)\Psi(\tilde{q}),$$

$\forall \gamma \in \Gamma$. Řez $\nu_{\Psi}(q)$ korespondující se zobrazením Ψ je definován jako $\nu_{\Psi}(q) = [\tilde{q}, \Psi(\tilde{q})]$, kde $\tilde{q} \in p^{-1}(\{q\})$, $q \in M$. Dále, pokud $s : U \subset M \rightarrow \tilde{M}$ je řez v $(\tilde{M}, p, M, \Gamma)$, můžeme každý řez na množině $U \subset M$ v asociovaném fibrovaném prostoru $(\tilde{M} \times_{\Gamma} V, p_F, M, \Gamma)$ psát jako $\nu_{\Psi}(q) = [s(q), \Psi(s(q))]$, kde $\Psi(s(q)\gamma) = L^{-1}(\gamma)\Psi(s(q))$. Uvažujme nyní spojitý řez $s : p(A) \subset M \rightarrow \tilde{M}$, pak množina $\bar{S}$ tvoří fundamentální oblast, jak již bylo ukázáno v předchozím. Potom zobrazení k definované jako

$$k : \nu_{\Psi}(q) = [s(q), \Psi(s(q))] \mapsto \Psi(s(q)),$$

přiřazuje každému řezu ν_{Ψ} funkci Ψ na S , pro kterou platí $\Psi(s(q)\gamma) = L^{-1}(\gamma)\Psi(s(q))$ pro $s(q) \in \bar{S}/A$, kde $A = \mathcal{O}(S)$. Zvolíme-li tedy za $s : p(A) \subset M \rightarrow \tilde{M}$ libovolný pevný spojitý řez v $(\tilde{M}, p, M, \Gamma)$, pak pomocí zobrazení k můžeme ztotožnit řezy $\nu(q)$ bijektivně s funkcemi na fundamentální oblasti $\bar{S} = \overline{\{s(q), q \in p(A) \subset M\}} \subset \tilde{M}$, pro které platí na hranicích podmínky $\Psi(\tilde{q}\gamma) = L^{-1}(\gamma)\Psi(\tilde{q})$, kde $\tilde{q}, \tilde{q}\gamma \in \bar{S} \setminus \mathcal{O}(S)$. Pokud tyto funkce "kvaziperiodicky" prodloužíme na celé $\tilde{M}$, bude každému řezu $\nu(q)$ v $(\tilde{M} \times_{\Gamma} V, p_F, M, \Gamma)$ odpovídat právě jedna funkce na $\tilde{M}$, která splňuje podmínku kvaziperiodicity

$$\tilde{\Psi}(\tilde{q}\gamma) = L^{-1}(\gamma)\tilde{\Psi}(\tilde{q}).$$

Ukážeme, že kvantový Hilbertův prostor na M jednoznačně koresponduje s Hilbertovým prostorem na $\tilde{M}$, kde klademe jisté speciální podmínky na řezy v triviálním (!) bundlu $(\tilde{M} \times V, pr_1, \tilde{M})$, které hrají roli vlnových funkcí kvantově mechanického systému. Na závěr tohoto odstavce ještě uvedme tvar inverzního zobrazení k zobrazení k , tj. $k^{-1} : \Psi(\tilde{q}) \mapsto [\tilde{q}, \Psi(\tilde{q})]$, $\forall \tilde{q} \in F \subset \tilde{M}$.

Lineární prostor řezů na $(\tilde{M} \times_{\Gamma} V, p_F, M, \Gamma)$ můžeme vybavit strukturou Hilbertova prostoru, pro danou míru μ_M ¹ na M zavedeme skalární součin vztahem

$$\langle \nu_{\Psi}, \nu'_{\Psi} \rangle_{\Gamma} = \int_M \langle \nu_{\Psi}(q), \nu'_{\Psi}(q) \rangle_V d\mu_M = \int_M \langle \Psi(s(q)), \Psi'(s(q)) \rangle_V d\mu_M.$$

Do tohoto Hilbertova prostoru, označme ho $\mathcal{H}_{\Gamma}^M$, tedy spadají všechny řezy, pro které platí

$$\|\nu_{\Psi}\|_{\Gamma} = \int_M \langle \nu_{\Psi}(q), \nu_{\Psi}(q) \rangle_V d\mu_M = \int_M \langle \Psi(s(q)), \Psi(s(q)) \rangle_V d\mu_M < \infty.$$

V předchozím bylo ukázáno, že každému řezu na $(\tilde{M} \times_{\Gamma} V, p_F, M, \Gamma)$ ve tvaru $\nu_{\Psi}(q) = [s(q), \Psi(s(q))]$ lze přiřadit jednoznačně kvaziperiodickou funkci na $\tilde{M}$ tj. řez na $(\tilde{M} \times V, pr_1, \tilde{M})$. Prostor těchto řezů lze vybavit hilbertovskou strukturou, když zavedeme skalární součin přirozeně jako

$$\begin{aligned} \langle \tilde{\Psi}_1(\tilde{q}), \tilde{\Psi}_2(\tilde{q}) \rangle_{\Gamma} &= \int_M \langle \tilde{\Psi}_1(s(q)), \tilde{\Psi}_2(s(q)) \rangle_V d\mu_M = \\ &= \int_{p(A)} \langle \tilde{\Psi}_1(s(q)), \tilde{\Psi}_2(s(q)) \rangle_V d\mu_M = \\ &= \int_{s(p(A))} \langle \tilde{\Psi}_1(\tilde{q}), \tilde{\Psi}_2(\tilde{q}) \rangle_V d(\mu_M \circ p) = \\ &= \int_F \langle \tilde{\Psi}_1(\tilde{q}), \tilde{\Psi}_2(\tilde{q}) \rangle_V d\mu_{\tilde{M}}, \end{aligned}$$

kde $F \subset \tilde{M}$ volíme libovolně pevně pomocí lokálně spojitého řezu s , platí $\bar{F}$ tvoří fundamentální oblast na $\tilde{M}$. Přitom funkce $\tilde{\Psi}$ splňují podmínky:

$$\tilde{\Psi}(\tilde{q}\gamma) = L^{-1}(\gamma)\tilde{\Psi}(\tilde{q}),$$

$$\|\tilde{\Psi}(\tilde{q})\|_{\Gamma} = \int_F \langle \tilde{\Psi}(\tilde{q}), \tilde{\Psi}(\tilde{q}) \rangle_V d\mu_{\tilde{M}} < \infty.$$

¹Bude-li M homogenní prostor Lieovy grupy, budeme pro jednoduchost uvažovat invariantní míru.

Prostor těchto funkcí označíme $\mathcal{H}^\Gamma$. Poznamenejme jen, že vztah měr $d\mu_M$ a $d\mu_{\tilde{M}}$ je následující $d\mu_{\tilde{M}} = d\mu_M \circ p$, tj. jde o pullback pomocí lokálního homeomorfizmu $p : \tilde{M} \rightarrow M$.

Aby bylo vše korektní, je u takto zvoleného skalárního součinu a normy nutné ověřit jejich nezávislost na volbě fundamentální oblasti. Přitom budeme uvažovat $\mu_{\tilde{M}}$ jako Γ - invariantní míru na $\tilde{M}$. Buďte tedy $\bar{F}_i, \bar{F}_j \subset \tilde{M}$ fundamentální oblasti na $\tilde{M}$, kde $F_i = F_j\gamma$ a $\gamma \in \Gamma$, pak

$$\begin{aligned} \|\tilde{\Psi}(\tilde{q})\|_\Gamma &= \int_{\bar{F}_i} \langle \tilde{\Psi}(\tilde{q}), \tilde{\Psi}(\tilde{q}) \rangle_V d\mu_{\tilde{M}}(\tilde{q}) = \int_{\bar{F}_i} \langle \tilde{\Psi}, \tilde{\Psi} \rangle_V(\tilde{q}) d\mu_{\tilde{M}}(\tilde{q}) = \\ &= |\bar{F}_i = F_j\gamma = \sigma_\gamma(F_j)| = \int_{\sigma_\gamma(F_j)} \langle \tilde{\Psi}, \tilde{\Psi} \rangle_V(\tilde{q}) d\mu_{\tilde{M}}(\tilde{q}) = \\ &= \int_{F_j} \langle \tilde{\Psi}, \tilde{\Psi} \rangle_V(\sigma_\gamma^{-1}(\tilde{q})) d\mu_{\tilde{M}}(\sigma_\gamma^{-1}(\tilde{q})) = \int_{F_j} \langle \tilde{\Psi}(\tilde{q}), \tilde{\Psi}(\tilde{q}) \rangle_V d\mu_{\tilde{M}}(\tilde{q}). \end{aligned}$$

Tímto jsme ukázali nezávislost na volbě fundamentální oblasti $F_i \subset \tilde{M}$.

Zavedme dále prostor $(\tilde{M} \times_T V, p_F, M, \Gamma)$, kde třídy ekvivalence na $\tilde{M} \times V$, jež tvoří prostor $\tilde{M} \times_T V$, jsou definovány jako $(\tilde{q}, v) \sim (\tilde{q}\gamma, Id(\gamma)^{-1}v) \sim (\tilde{q}\gamma, v)$, $\tilde{q} \in \tilde{M}$ a $v \in V$ a značíme je $[\tilde{q}, v]_T$. Zde Id značí triviální reprezentaci grupy Γ na V . Poznamenejme jen, že asociovaný fibrovaný prostor $(\tilde{M} \times_T V, p_F, M, \Gamma)$ je triviální, to jest je izomorfní fibrovanému prostoru $(\tilde{M} \times V, pr_1, M)$, kde odpovídající izomorfismus je definován jako $[\tilde{q}, v] \mapsto (p_F(\tilde{q}), v)$.

Lineární prostor řezů v $(\tilde{M} \times_T V, p_F, M, \Gamma)$ má opět strukturu Hilbertova prostoru, kde skalární součin je zaveden obdobně jako v předchozím

$$\langle \sigma_\Phi, \sigma'_\Phi \rangle_T = \int_M \langle \sigma_\Phi(q), \sigma'_\Phi(q) \rangle_V d\mu_M = \int_M \langle \Phi(s(q)), \Phi'(s(q)) \rangle_V d\mu_M.$$

I do tohoto Hilbertova prostoru, označme ho $\mathcal{H}_M^T$, tedy patří všechny řezy, pro které platí

$$\|\sigma_\Phi\|_T = \int_M \langle \sigma_\Phi(q), \sigma_\Phi(q) \rangle_V d\mu_M = \int_M \langle \Phi(s(q)), \Phi(s(q)) \rangle_V d\mu_M < \infty.$$

Poznamenejme jen, že zavedení skalárního součinu na prostorech řezů je ekvivalentní se zavedením skalárního součinu na prostoru ekvivariantních funkcí příslušejících k danému asociovanému fibrovanému prostoru, jak jednoduše vyplývá z předchozích dvou odstavců.

Také každému řezu $\sigma_\Phi(q) = [s(q), \Phi(s(q))]$ na $(\tilde{M} \times_T V, p_F, M, \Gamma)$ lze přiřadit jednoznačně tentokrát periodickou funkci na $\tilde{M}$ tj. řez na $(\tilde{M} \times V, p_{r_1}, \tilde{M})$. Na prostoru těchto řezů je skalární součin obdobně jako v předěšlém zaveden jako

$$\langle \tilde{\Phi}_1(\tilde{q}), \tilde{\Phi}_2(\tilde{q}) \rangle_T = \int_F \langle \tilde{\Phi}_1(\tilde{q}), \tilde{\Phi}_2(\tilde{q}) \rangle_V d\mu_{\tilde{M}},$$

kde fundamentální oblast $\bar{F} \subset \tilde{M}$ volíme libovolně pevně. Přičemž funkce $\tilde{\Phi}$ splňují podmínky:

$$\begin{aligned} \tilde{\Phi}(\tilde{q}\gamma) &= \tilde{\Phi}(\tilde{q}), \\ \|\tilde{\Phi}(\tilde{q})\|_T &= \int_F \langle \tilde{\Phi}(\tilde{q}), \tilde{\Phi}(\tilde{q}) \rangle_V d\mu_{\tilde{M}} < \infty. \end{aligned}$$

Prostor těchto funkcí označíme $\mathcal{H}^T$.

5.3.2 Konstrukce unitárního zobrazení

Nejprve je vhodné připomenout definici zobrazení mezi fibrovanými prostory. Zobrazení mezi párem fibrovaných prostorů (E, π, M) a (E', π', M') je pár zobrazení (u, f) , kde $u : E \rightarrow E'$ a $f : M \rightarrow M'$ takové, že platí $\pi' \circ u = f \circ \pi$. Dále izomorfismem fibrovaných prostorů nazýváme zobrazení (u, f) z (E, π, M) do (E', π', M') , pro které existuje další zobrazení (u', f') z (E', π', M') do (E, π, M) a platí $u' \circ u = id_E$, $u \circ u' = id_{E'}$, $f' \circ f = id_M$ a $f \circ f' = id_{M'}$. Pokud navíc $f = id_M$ tj. $(u, id_M) : (E, \pi, M) \rightarrow (E', \pi', M)$, pak (u, id_M) nazýváme silným izomorfismem fibrovaných prostorů.

My se dále budeme zabývat tímto silným izomorfismem mezi $(\tilde{M} \times_\Gamma V, p_F, M, \Gamma)$ a $(\tilde{M} \times_T V, p_F, M, \Gamma)$. V případě, že prostor $(\tilde{M} \times_\Gamma V, p_F, M, \Gamma)$ nebude triviální, se omezíme pouze na otevřenou množinu $U \subset M$, pro kterou tvoří uzávěr jejího souvislého zdvihu do $\tilde{M}$ fundamentální oblast na $\tilde{M}$. Budeme tedy hledat zobrazení $(u, f) = (u, id_M)$, případně $(u, f) = (u, id_{U \subset M})$, tak, aby jednotlivá vlákna v bodech $q \in M$, tj. $p_F^{-1}(q)$, zobrazovalo vzájemně jednoznačně. Nadále budeme tedy uvažovat pouze složku u , tj. $u : \tilde{M} \times_\Gamma V \rightarrow \tilde{M} \times_T V$. Pro zobrazení u tedy budeme požadovat, aby platilo

$$u([\tilde{q}, v]_\Gamma) = [\tilde{q}, v']_T \Leftrightarrow u[(\tilde{q}\gamma, L(\gamma)^{-1}v)] = (\tilde{q}\gamma, v').$$

Je vidět, že toto zobrazení u má dvě složky (restrikce) U_1 a U_2 , $U_1 : \tilde{M} \rightarrow \tilde{M}$ a $U_2 : V \rightarrow V$. Tyto složky musí splňovat následující: $U_1(\tilde{q}\gamma) = \tilde{q}\gamma$ tj.

$$U_1 = Id_{\tilde{M}} \Leftrightarrow U_1(\tilde{q}) = \tilde{q}.$$

Složka zobrazení U_2 potom musí splňovat

$$U_2(L(\gamma)^{-1}v) = v'.$$

Protože jde o zobrazení na vektorovém prostoru, musí platit $U_2.L(\gamma)^{-1}v = v'$, kde U_2 je lineární operátor na V . Z předchozího taktéž vyplývá, že lineární zobrazení je funkcí $\tilde{q} \in \tilde{M}$, tj. jde o zobrazení $\tilde{M} \times V \rightarrow V$. Dále, protože jsme volili $U_1 = Id_{\tilde{M}}$, bude složka U_2 splňovat $U_2(\tilde{q}\gamma)L(\gamma)^{-1}v = v'$. Takže stačí požadovat, aby pro U_2 platilo

$$U_2(\tilde{q}\gamma) = U_2(\tilde{q})L(\gamma) \Leftrightarrow U_2|_{\tilde{q}\gamma} = U_2|_{\tilde{q}} \circ L(\gamma),$$

to znamená, že bude splněno $U_2(\tilde{q})v = v'$. Tímto jsme dostali bijektivní zobrazení

$$U : \tilde{M} \times_{\Gamma} V \rightarrow \tilde{M} \times_T V :$$

$$(\tilde{q}\gamma, L(\gamma)^{-1}v) \mapsto (U_1(\tilde{q}\gamma), U_2(\tilde{q}\gamma)L(\gamma)^{-1}v) = (\tilde{q}\gamma, v').$$

Vraťme se nyní k řezům ve fibrovaném prostoru $(\tilde{M} \times_{\Gamma} V, p_F, M, \Gamma)$. V předchozím jsme ukázali, že každý takový řez lze napsat pomocí lokálního spojitého řezu $s : M \rightarrow \tilde{M}$ v hlavním fibrovaném prostoru $(\tilde{M}, p, M, \Gamma)$ jako $\nu_{\Psi}(q) = [s(q), \Psi(s(q))]$, kde $\Psi(s(q))$ je tzv. ekvivariantní funkce na $\tilde{M}$, tj. platí $\Psi(s(q)\gamma) = L^{-1}(\gamma)\Psi(s(q))$. Podívejme se na obrazy řezů ν_{Ψ} v $(\tilde{M} \times_{\Gamma} V, p_F, M, \Gamma)$ při zobrazení $(u, id_{U \subset M}) : (\tilde{M} \times_{\Gamma} V, p_F, M, \Gamma) \rightarrow (\tilde{M} \times_T V, p_F, M, \Gamma)$. Platí

$$\begin{aligned} u(\nu_{\Psi})(q) &= u([s(q), \Psi(s(q))]) = [U_1(s(q)), U_2(s(q))\Psi(s(q))] = \\ &= [s(q), U_2(s(q))\Psi(s(q))] = \sigma(q), \end{aligned}$$

přičemž pro třídy ekvivalence, jimiž je definováno σ , platí

$$\begin{aligned} (s(q), U_2(s(q))\Psi(s(q))) &\sim (s(q)\gamma, U_2(s(q)\gamma)\Psi(s(q)\gamma)) = \\ &= (s(q)\gamma, U_2(s(q))\Psi(s(q))), \end{aligned}$$

jak je vidět z definice U_2 a Ψ . Zobrazení $(u, id_{U \subset M})$ tedy zobrazuje lokální řezy v prostoru $(\tilde{M} \times_{\Gamma} V, p_F, M, \Gamma)$ na lokální řezy v prostoru $(\tilde{M} \times_T V, p_F, M, \Gamma)$. Označíme-li dále $\Phi(\tilde{q}) = U_2(\tilde{q})\Psi(\tilde{q})$, pak platí $\Phi(\tilde{q}\gamma) = U_2(\tilde{q}\gamma)\Psi(\tilde{q}\gamma) = U_2(\tilde{q})\Psi(\tilde{q}) = \Phi(\tilde{q})$ a označení Φ tedy přísluší ekvivariantní funkci patřící k $(\tilde{M} \times_T V, p_F, M, \Gamma)$. Složka U_2 zobrazení u tedy zobrazuje bijektivně ekvivariantní funkce patřící k $(\tilde{M} \times_{\Gamma} V, p_F, M, \Gamma)$ na ekvivariantní funkce patřící k $(\tilde{M} \times_T V, p_F, M, \Gamma)$.

Zavedení skalárního součinu na prostoru ekvivariantních funkcí $\Psi \in \mathcal{H}_M^\Gamma$ a $\Phi \in \mathcal{H}_M^T$ nám dává další podmínku na složku zobrazení U_2 . Požadujeme totiž, aby platilo že, $\Psi \in \mathcal{H}_M^\Gamma$ a $\Phi \in \mathcal{H}_M^T$ popisují tentýž kvantový systém, tj. musí platit

$$\begin{aligned} \langle U_2 \Psi_1, U_2 \Psi_2 \rangle_T &= \langle \Psi_1, \Psi_2 \rangle_\Gamma \Leftrightarrow \\ \int_M \langle U_2(s(q)) \Psi_1(s(q)), U_2(s(q)) \Psi_2(s(q)) \rangle_V d\mu_M &= \\ &= \int_M \langle \Psi_1(s(q)), \Psi_2(s(q)) \rangle_V d\mu_M. \end{aligned}$$

To implikuje, že $\forall q \in M$ je $U_2 \circ s$ unitární zobrazení na V , tj. $U_2 \circ s : \mathcal{H}_M^\Gamma \rightarrow \mathcal{H}_M^T$. Shrňme nyní vlastnosti, které požadujeme od zobrazení U_2 :

- i) $U_2 : \tilde{M} \times V \rightarrow V$ a platí $U_2(\tilde{q}\gamma) = U_2(\tilde{q})L(\gamma)$, kde L je unitární reprezentace grupy Γ na V .
- ii) $\forall \tilde{q} \in \tilde{M}$ je $U_2 : V \rightarrow V$ unitární izomorfismus na V .

Jelikož funkce $\tilde{\Phi} \in \mathcal{H}^T$ a $\tilde{\Psi} \in \mathcal{H}^\Gamma$ odpovídají ekvivariantním funkcím na $\tilde{M}$ (pro různé unitární reprezentace Γ na V), pak je vidět, že zobrazení U_2 hraje také roli unitárního izomorfismu $U_2 : \mathcal{H}^\Gamma \rightarrow \mathcal{H}^T$. Dále je nutné zabývat se (alespoň částečně) otázkou jednoznačnosti a existence U_2 .

Věta 5.3.1 *Bud' $(\tilde{M} \times_\Gamma \mathbb{C}^r, p_{\mathbb{C}^r}, M, \Gamma)$ přidružený fibrovaný prostor k hlavnímu fibrovanému prostoru $(\tilde{M}, p, M, \Gamma)$ a $L : \mathbb{C}^r \rightarrow \mathbb{C}^r$ pevně daná unitární reprezentace grupy Γ v $\mathbb{C}^r$. Potom zobrazení s vlastnostmi uvedenými v předchozím existuje a je dáno jednoznačně až na násobek operátorovou funkcí χ na $\tilde{M}$ (myšleno násobek maticovou funkcí na $V = \mathbb{C}^r$), která splňuje $\chi(\tilde{q}\gamma) = \chi(\tilde{q})$ a $\chi^\dagger = \chi^{-1}$.*

dk. Důkaz provedeme tak, že ukážeme jak toto zobrazení explicitně konstruovat a z konstrukce též vyplyne otázka jednoznačnosti tohoto zobrazení. Bud' $(\tilde{M}, p, M, \Gamma)$ hlavní fibrovaný prostor s vláknem izomorfním strukturní grupě Γ . Přidružíme k tomuto hlavnímu fibrovanému prostoru prostor-grupu automorfizmů prostoru $\mathbb{C}^r$, tj. prostor-grupu unitárních matic $r \times r$, který budeme značit $U(r)$, jak je obvyklé.

Definujme nejprve pravou akci grupy Γ na $U(r)$ jako $r_\gamma : (\gamma, A) \mapsto A.L(\gamma)$, kde $L : \gamma \mapsto L(\gamma)$ je homomorfismus z grupy Γ do $U(r)$, tj. platí $L(\gamma_1\gamma_2) = L(\gamma_1)L(\gamma_2)$ a $L(\gamma)^\dagger = L(\gamma)^{-1}$, $A \in U(r)$ a $\gamma \in \Gamma$. Poznamenejme jen, že L

lze také chápat jako unitární reprezentaci grupy Γ na $\mathbb{C}^r$ (!) neboť $U(r)$ je grupa automorfismů prostoru $\mathbb{C}^r$. Toto zobrazení splňuje všechny požadavky pro pravou akci Γ na $U(r)$, jelikož

- i) $r_e(A) = A.L(e) = A$, kde $A \in \Gamma$,
- ii) $r_{\gamma_2} \circ r_{\gamma_1}(A) = A.L(\gamma_1).L(\gamma_2) = A.L(\gamma_1\gamma_2) = r_{\gamma_1\gamma_2}(A)$.

Nyní definujeme třídy ekvivalence na $\tilde{M} \times U(r)$ jako $(\tilde{q}, A) \sim (\tilde{q}, A)\gamma := (\tilde{q}\gamma, A.L(\gamma))$, kde $\tilde{q} \in \tilde{M}$ a $A \in U(r)$, L je definované v předchozím odstavci. Jednotlivé třídy ekvivalence označíme $[\tilde{q}, A]$. Tímto dostáváme přidružený fibrovaný prostor $(\tilde{M} \times_{\Gamma} U(r), p_{U(r)}, M, U(r))$, kde projekce je definovaná jako $p_{U(r)}([\tilde{q}, A]) = p(\tilde{q})$, kde p je projekce na $(\tilde{M}, p, M, \Gamma)$. Z teorie fibrovaných prostorů je známo, že $\forall q \in M$ je vlákno $p_{U(r)}^{-1}(q)$ homeomorfní $U(r)$. Také je dobře známo, že jednotlivé řezy v $(\tilde{M} \times_{\Gamma} U(r), p_{U(r)}, M, U(r))$ jsou v 1-1 korespondenci se zobrazeními $\mathcal{A} : \tilde{M} \rightarrow U(r)$, které splňují podmínku

$$\mathcal{A}(\tilde{q}\gamma) = \mathcal{A}(\tilde{q})L(\gamma),$$

$\forall \tilde{q} \in \tilde{M}$ a $\gamma \in \Gamma$. Přičemž řezy $\nu_{\mathcal{A}}$ korespondující takovému zobrazení $\mathcal{A}$ jsou definovány jako

$$\nu_{\mathcal{A}}(q) = [\tilde{q}, \mathcal{A}(\tilde{q})],$$

kde $\tilde{q} \in p_{U(r)}^{-1}(q)$. Lehce se ověří, že takto definovaný řez je nezávislý na výběru $\tilde{q} \in p_{U(r)}^{-1}(q)$, neboť

$$\nu_{\mathcal{A}}(q) = [\tilde{q}\gamma, \mathcal{A}(\tilde{q}\gamma)] = [\tilde{q}\gamma, \mathcal{A}(\tilde{q})L(\gamma)] = [\tilde{q}, \mathcal{A}(\tilde{q})].$$

Buď podobně jako v 5.3.1 $s : M \rightarrow \tilde{M}$ řez v $(\tilde{M}, p, M, \Gamma)$ na množině $U \subset M$ takový, že uzávěr množiny $S = \{s(q) \in \tilde{M} : q \in U \subset M\}$ tvoří fundamentální oblast v $\tilde{M}$. Potom lokální řez na $U \subset M$ má tvar $\nu_{\mathcal{A}U} = \mathcal{A}(s(q))$ a platí $\mathcal{A}(s(q)\gamma) = \mathcal{A}(s(q))L(\gamma)$, tento vztah můžeme také chápat, stejně jako v kapitole 5.3.1, jako hraniční podmínku pro maticovou funkci $\mathcal{A}$ na $\tilde{S} \setminus \mathcal{O}(S)$. Prodloužíme-li tuto maticovou funkci kvaziperiodicky na celé $\tilde{M}$. Dostáváme pro pevně zvolené $\mathcal{A} : \tilde{M} \rightarrow U(r)$ unitární operátor na $\mathbb{C}^r$ s vlastnostmi:

- i) $\mathcal{A} : \tilde{M} \times \mathbb{C}^r \rightarrow \mathbb{C}^r$ a platí $\mathcal{A}(\tilde{q}\gamma) = \mathcal{A}(\tilde{q})L(\gamma)$, kde L je pevně zvolená unitární reprezentace grupy Γ na $\mathbb{C}^r$.
- ii) $\forall \tilde{q} \in \tilde{M}$ je $\mathcal{A} : \mathbb{C}^r \rightarrow \mathbb{C}^r$ unitární izomorfismus na $\mathbb{C}^r$.

Položíme-li tedy $U_2(\tilde{q}) := \mathcal{A}(\tilde{q})$, dostáváme hledané zobrazení pro $V = \mathbb{C}^r$.

Nyní přistupme k otázce jednoznačnosti. Na prostor $(\tilde{M} \times_{\Gamma} U(r), p_{U(r)}, M, U(r))$ můžeme také pohlížet jako na hlavní fibrovaný prostor se strukturní grupou $U(r)$, pokud definujeme akci $U(r)$ na třídách ekvivalence tohoto fibrovaného prostoru jako

$$r_B([\tilde{q}, A]) = [\tilde{q}, A]B := [\tilde{q}, B^{-1}A],$$

kde $B, A \in U(r)$. Jelikož je tato akce volná, dostane $(\tilde{M} \times_{\Gamma} U(r), p_{U(r)}, M, U(r))$ strukturu hlavního fibrovaného prostoru. Je jednoduché ověřit, že se jedná o pravou akci $U(r)$ na vláknech $p_{U(r)}^{-1}(q)$, $q \in M$.

Bud' $s : M \rightarrow \tilde{M}$ lokální řez v $(\tilde{M}, p, M, \Gamma)$, porovnejme dva různé řezy $\nu_{\mathcal{A}} = [s(q), \mathcal{A}(s(q))]$ a $\nu_{\mathcal{B}} = [s(q), \mathcal{B}(s(q))]$ v $(\tilde{M} \times_{\Gamma} U(r), p_{U(r)}, M, U(r))$. Jelikož se jedná o dva lokální řezy v lokálně trivializovatelném hlavním fibrovaném prostoru, musí existovat funkce $\chi : \tilde{M} \times_{\Gamma} U(r) \rightarrow U(r)$ taková, že

$$\nu_{\mathcal{B}}(p_{U(r)}([s(q), \mathcal{B}(s(q))])) = \nu_{\mathcal{A}}(p_{U(r)}([s(q), \mathcal{A}(s(q))]))\chi([s(q), \mathcal{A}(s(q))]),$$

což je ekvivalentní vztahu

$$[s(q), \mathcal{B}(s(q))] = [s(q), \chi^{-1}([s(q), \mathcal{A}(s(q))])\mathcal{A}(s(q))],$$

kde $\mathcal{A}(\tilde{q}\gamma) = \mathcal{A}(\tilde{q})L(\gamma)$ a $\mathcal{B}(\tilde{q}\gamma) = \mathcal{B}(\tilde{q})L(\gamma)$. Přičemž musí platit

$$\begin{aligned} [s(q)\gamma, \chi^{-1}([s(q)\gamma, \mathcal{A}(s(q)\gamma)])\mathcal{A}(s(q)\gamma)] &= \\ = [s(q)\gamma, \chi^{-1}([s(q), \mathcal{A}(s(q))])\mathcal{A}(s(q))L(\gamma)] &= \\ = [s(q), \chi^{-1}([s(q), \mathcal{A}(s(q))])\mathcal{A}(s(q))] &= \end{aligned}$$

Takže χ můžeme považovat za unitární maticovou funkci na $\tilde{M}$, která splňuje podmínku $\chi_{\mathcal{A}\mathcal{B}}(\tilde{q}\gamma) = \chi_{\mathcal{A}\mathcal{B}}(\tilde{q})$. Z tohoto tedy vyplývá, že operátor $U_2 : \tilde{M} \times \mathbb{C}^r \rightarrow \mathbb{C}^r$ je dán jednoznačně až na násobení maticovou funkcí, která splňuje $\chi(\tilde{q}\gamma) = \chi(\tilde{q})$ a $\chi^{\dagger} = \chi^{-1}$. ■

V následujícím odstavci objasníme smysl zobrazení u , respektive jeho restrikce U_2 , na příkladu kvantové mechaniky na 2-toru. Nejprve ale poznamenejme, že se ukazuje zajímavý vztah mezi zobrazením $p : \tilde{M} \rightarrow M$ a $U_2 : \mathcal{H}^{\Gamma} \rightarrow \mathcal{H}^T$. Navíc jedinému $\tilde{M}$ odpovídá tolik prostorů $\mathcal{H}^{\Gamma}$, kolik je neekvivalentních ireducibilních unitárních reprezentací $L : V \rightarrow V$. Smysl zobrazení U_2 spočívá v tom, že pomocí něj přeneseme topologické vlastnosti prostoru M skryté ve stavových funkcích z $\mathcal{H}^{\Gamma}$ na operátory působící na $\mathcal{H}^T$. Přičemž $\mathcal{H}^T$ je ve vzájemně jednoznačné korespondenci s vlnovými funkcemi na M .

5.4 Kvantová mechanika na 2 - toru

5.4.1 Kvantová kinematika na 2 - toru

Univerzálním nakrývacím prostorem pro torus je $\mathbb{R}^2$. Fundamentální grupou toru je grupa $\Gamma = \mathbb{Z} \times \mathbb{Z}$, jejíž akce na $\mathbb{R}^2$ je dána jako $\gamma_{mn}(x_1, x_2) = (x_1 + 2\pi n, x_2 + 2\pi m)$. Ireducibilní unitární reprezentace grupy Γ lze číslvat dvojicí reálných čísel, která označíme $(\frac{e\Phi_1}{2\pi\hbar}, \frac{e\Phi_2}{2\pi\hbar})$, kde $\Phi_1, \Phi_2 \in \mathbb{R}$ mají smysl magnetických toků nezávislými nehraničními cykly na 2 - toru. Pak reprezentace $L^{(\Phi_1, \Phi_2)} : \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}$ bude mít tvar:

$$L^{(\Phi_1, \Phi_2)}(2\pi n, 2\pi m) : z \in \mathbb{C} \mapsto \exp(i \frac{ne\Phi_1}{\hbar}) \exp(i \frac{me\Phi_2}{\hbar}) z.$$

Potom je-li $\frac{e}{\hbar}(\Phi_1 - \Phi'_1) \in 2\pi\mathbb{Z}$ a $\frac{e}{\hbar}(\Phi_2 - \Phi'_2) \in 2\pi\mathbb{Z} \Rightarrow L^{(\Phi_1, \Phi_2)} \cong L^{(\Phi'_1, \Phi'_2)}$. Proto neekvivalentní reprezentace jsou číslvány dvojicí čísel z $\langle 0, 2\pi \rangle \times \langle 0, 2\pi \rangle$.

Funkce na UCS $\mathbb{R}^2$ tvořící Hilbertův prostor $\mathcal{H}^\Gamma$ budou tedy splňovat podmínku ekvivariance:

$$\Psi(x_1 + 2\pi n, x_2 + 2\pi m) = \exp(-i \frac{ne\Phi_1}{\hbar}) \exp(-i \frac{me\Phi_2}{\hbar}) \Psi(x_1, x_2),$$

kde $\Psi : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{C}$ takové, že norma daná skalárním součinem

$$(\Psi_1, \Psi_2) = \int_a^{2\pi+a} \int_b^{2\pi+b} \overline{\Psi_1(x_1, x_2)} \Psi_2(x_1, x_2) dx_1 dx_2,$$

je konečná. Přitom $a, b \in \mathbb{R}$ jsou libovolně pevně zvolené.

Tranzitivní geometrickou grupou symetrie systému s Hilbertovým prostorem $\mathcal{H}^\Gamma$ na $\mathbb{R}^2$ je translační grupa $\mathbb{R}^2$. Operátor hybnosti tedy zavedeme jako indukovanou reprezentaci na homogenním prostoru $\mathbb{R}^2 / \{(0, 0)\}$. Nejprve tedy nalezneme unitární operátor $(U_y \Psi)(x) = \Psi(x - y)$, kde $y \in \mathbb{R}^2$. Tedy $(U_{y_1, y_2} \Psi)(x_1, x_2) = \Psi(x_1 - y_1, x_2 - y_2)$.

Obecné konstantní vektorové pole na $\mathbb{R}^2$ má tvar $V = V_1 + V_2$, kde $V_1 = a_1 \frac{\partial}{\partial y_1}$, $V_2 = a_2 \frac{\partial}{\partial y_2}$, a_1 a a_2 reálné konstanty. Zobrazení $\exp$ má v tomto případě pro V_1 a V_2 tvar: $\exp(tV_1) = (a_1 t, 0)$; $\exp(tV_2) = (0, a_2 t)$. Operátor $P(V_1)$ obecné hybnosti odpovídající V_1 nyní dostaneme derivací následujícího vztahu podle t :

$$(U_{\exp(tV_1)} \Psi)(x_1, x_2) = \Psi(x_1 - a_1 t, x_2) = \exp(-t \frac{i}{\hbar} P(V_1)),$$

pro $t = 0$. Potom $P(V_1)$ je tedy tvaru:

$$P(V_1) = -i\hbar a_1 \frac{\partial}{\partial x_1}.$$

Obdobným způsobem dostaneme $P(V_2)$ jako:

$$P(V_2) = -i\hbar a_2 \frac{\partial}{\partial x_2}.$$

Pro obecný tvar vektorového pole V pak máme:

$$P(V) = -i\hbar V.$$

Tímto jsme tedy dostali obecný tvar operátoru hybnosti na $\mathcal{H}^\Gamma$.

Dalším krokem je nalezení unitárního zobrazení $U_2 : \mathcal{H}^\Gamma \rightarrow \mathcal{H}^T : \Psi \mapsto \Phi$, kde pro funkce z $\mathcal{H}^T$ platí

$$\Phi(x_1 + 2\pi n, x_2 + 2\pi m) = \Phi(x_1, x_2).$$

Zobrazení $U_2 : \mathcal{H}^\Gamma \rightarrow \mathcal{H}^T$ bude mít v tomto případě tvar

$$\Psi(x_1, x_2) \mapsto \exp(i \frac{x_1 e \Phi_1}{2\pi \hbar}) \exp(i \frac{x_2 e \Phi_2}{2\pi \hbar}) \Psi(x_1, x_2).$$

Jednoduše se ověří, že takto definované zobrazení splňuje podmínky z kapitoly 5.3.2. Tamtéž bylo také ukázáno, že toto zobrazení lze obohatit o člen $\exp(i \frac{e}{\hbar} f(x_1, x_2))$, kde $f(x_1 + 2\pi n, x_2 + 2\pi m) = f(x_1, x_2)$.

Nyní převedeme operátory hybnosti z prostoru $\mathcal{H}^\Gamma$ do prostoru $\mathcal{H}^T$ pomocí tohoto unitárního zobrazení jako: $P(V_1)_T = U_2 P(V_1) U_2^{-1}$. Jednoduchým výpočtem zjistíme, že $P(V_1)_T$ bude mít tvar:

$$P(V_1)_T = -i\hbar a_1 \frac{\partial}{\partial x_1} - \frac{e a_1 \Phi_1}{2\pi}.$$

Obdobně pro $P(V_2)_T$ dostaneme:

$$P(V_2)_T = -i\hbar a_2 \frac{\partial}{\partial x_2} - \frac{e a_2 \Phi_2}{2\pi}.$$

Potom obecný tvar operátoru obecné hybnosti na toru má tvar:

$$P(V)_T = -i\hbar V - e\beta(V),$$

kde $\beta = \frac{\Phi_1}{2\pi} dx_1 + \frac{\Phi_2}{2\pi} dx_2$, $d\beta = 0$, přičemž V má stále tvar $V = a_1 \frac{\partial}{\partial x_1} + a_2 \frac{\partial}{\partial x_2}$.

Dále ukážeme, jak se změní výraz pro $P(V)_T$ pokud budeme uvažovat příspěvek od $\exp(i\frac{e}{\hbar}f(x_1, x_2))$, kde $f(x_1 + 2\pi n, x_2 + 2\pi m) = f(x_1, x_2)$. Zobrazení $U_2 : \mathcal{H}^\Gamma \rightarrow \mathcal{H}^T$ poté bude mít tvar:

$$\Psi(x_1, x_2) \mapsto \exp(i\frac{e}{\hbar}f(x_1, x_2)) \exp(i\frac{x_1 e \Phi_1}{2\pi \hbar}) \exp(i\frac{x_2 e \Phi_2}{2\pi \hbar}) \Psi(x_1, x_2).$$

Operátory $P(V_1)_T$, $P(V_2)_T$ pak nabudou tvaru:

$$P(V_1)_T = -i\hbar a_1 \frac{\partial}{\partial x_1} - \frac{ea_1 \Phi_1}{2\pi} - ea_1 \frac{\partial f(x_1, x_2)}{\partial x_1},$$

$$P(V_2)_T = -i\hbar a_2 \frac{\partial}{\partial x_2} - \frac{ea_2 \Phi_2}{2\pi} - ea_2 \frac{\partial f(x_1, x_2)}{\partial x_2},$$

a $P(V)_T$ tvaru:

$$P(V)_T = -i\hbar V - e\beta(V) - e\gamma(V),$$

kde $\gamma = \frac{\partial f(x_1, x_2)}{\partial x_1} dx_1 + \frac{\partial f(x_1, x_2)}{\partial x_2} dx_2$, $d\gamma = 0$. Tímto jsme dostali dosti obecný tvar operátoru obecné hybnosti - momentu hybnosti na toru za předpokladu translační symetrie. Fyzikální interpretace může být pomocí vnějších magnetických polí: Φ_1 respektive Φ_2 můžeme považovat za magnetické toky v solenoidech procházející smyčkami $x_1 = \textit{kost.}$ respektive $x_2 = \textit{konst.}$, funkce f pak určuje (nefyzikální) kalibrační transformaci. Operátor polohy na $\mathcal{H}^T$ pak opět obdržíme jako $Q_T = U_2 Q U_2^{-1}$, kde Q je operátor polohy na $\mathcal{H}^\Gamma$. Výsledek tohoto odstavce možno srovnat s prací [7] a [8].

5.4.2 Dynamika na 2 - toru

Na prostoru $\mathcal{H}^\Gamma$ je dynamika volné částice dána hamiltoniánem:

$$H = -\frac{\hbar^2}{2M} \Delta = -\frac{\hbar^2}{2M} \left(\frac{\partial^2}{\partial x_1^2} + \frac{\partial^2}{\partial x_2^2} \right).$$

Dynamiku na $\mathcal{H}^T$ v tomto jednoduchém případě obdržíme opět jako $H_T = U_2 H U_2^{-1}$, kde U_2 je zobrazení $U_2 : \mathcal{H}^\Gamma \rightarrow \mathcal{H}^T$ definované stejně jako dříve vztahem

$$\Psi(x_1, x_2) \mapsto \exp(i\frac{x_1 e \Phi_1}{2\pi \hbar}) \exp(i\frac{x_2 e \Phi_2}{2\pi \hbar}) \Psi(x_1, x_2).$$

Po provedení této unitární transformace obdržíme formuli pro H_T ve formě:

$$H_T = -\frac{\hbar^2}{2M} \frac{\partial^2}{\partial x_1^2} + \frac{e\Phi_1}{4\pi M} i\hbar \frac{\partial}{\partial x_1} + \frac{1}{2M} \left(\frac{e\Phi_1}{2\pi} \right)^2 - \frac{\hbar^2}{2M} \frac{\partial^2}{\partial x_2^2} + \frac{e\Phi_2}{4\pi M} i\hbar \frac{\partial}{\partial x_2} + \frac{1}{2M} \left(\frac{e\Phi_2}{2\pi} \right)^2.$$

Kompaktněji zapsáno:

$$H_T = \sum_{i=1}^2 \left(-\frac{\hbar^2}{2M} \frac{\partial^2}{\partial x_i^2} + \frac{e\Phi_i}{4\pi M} i\hbar \frac{\partial}{\partial x_i} + \frac{1}{2M} \left(\frac{e\Phi_i}{2\pi} \right)^2 \right).$$

Je vidět, že v tomto jednoduchém případě jsme operátor dynamiky na toru, jež má netriviální tvar, dostali "téměř zadarmo".

5.5 Konstrukce kvantové kinematiky na mnohonásobně souvislých prostorech - poněkud jiný přístup

V předchozích kapitolách 5.1 - 5.3 bylo ukázáno, že ke konstrukci kvantové mechaniky na mnohonásobně souvislé varietě M lze s výhodou využít jejího univerzálního nakrývacího prostoru $\tilde{M}$, konkrétně toho, že čtveřice $(\tilde{M}, p, M, \Gamma)$ tvoří hlavní fibrovaný prostor s vláknem izomorfním Γ , kde Γ je grupa tzv. deck transformace variety $\tilde{M}$ a ta je izomorfní fundamentální grupě variety M . V této kapitole, ukážeme jiný přístup k nalezení kvantové kinematiky s využitím univerzálního nakrývacího prostoru, který bude také založen na zobrazení U_2 .

Kapitoly 5.2 a 5.3 ukázaly, krom jiného, že vlnovou funkci popisující kvantově mechanický stav můžeme ztotožnit s řezy v asociovaném fibrovaném prostoru $(\tilde{M} \times_{\Gamma} V, p_F, M, \Gamma)$, které jsou navíc v 1 - 1 korespondenci s ekvivariantními funkcemi na $\tilde{M}$. Připomeňme ještě jednou několik faktů týkajících se asociovaného fibrovaného prostoru $(\tilde{M} \times_{\Gamma} V, p_F, M, \Gamma)$. $\tilde{M} \times_{\Gamma} V$ značí prostor tříd ekvivalence definovaných podmínkou $(\tilde{q}, v) \sim (\tilde{q}\gamma, L^{-1}(\gamma)v)$, kde $\tilde{q} \in \tilde{M}$, $v \in V$, tyto třídy ekvivalence značíme $[\tilde{q}, v]_{\Gamma}$. Přitom V je libovolný konečně dimenzionální vektorový prostor nad $\mathbb{C}$, $L(\gamma)$ značí unitární reprezentaci grupy Γ na V . My se budeme zabývat Hilbertovým fibrovaným prostorem, kde totální prostor a báze jsou topologické prostory, projekce je spojitá a surjektivní a vlákno v každém bodě má strukturu Hilbertova prostoru (zde V nad $\mathbb{C}$ se skalárním součinem $\langle \cdot, \cdot \rangle_V$). Buď $s : M \rightarrow \tilde{M}$ měřitelný řez v $(\tilde{M}, p, M, \Gamma)$, bez újmy na obecnosti budeme uvažovat pouze spojitě řezy na otevřených množinách $U \subset M$, které jsou součástí otevřeného pokrytí variety M (tj. budeme uvažovat řezy na M , které jsou po částech spojitě). Každý řez v $(\tilde{M} \times_{\Gamma} V, p_F, M, \Gamma)$ na množině $U \subset M$ pak budeme psát jako $\nu_{\Psi}(q) = [s(q), \Psi(s(q))]$, kde Ψ je ekvivariantní funkce na $\tilde{M}$, která

splňuje podmínku $\Psi(\tilde{q}\gamma) = L^{-1}(\gamma)\Psi(\tilde{q})$. Víme, že lineární prostor řezů v $(\tilde{M} \times_{\Gamma} V, p_F, M, \Gamma)$ můžeme vybavit strukturou Hilbertova prostoru, když pro danou kvazinvariantní míru μ_M na M zavedeme skalární součin jako

$$\langle \nu_{\Psi}, \nu'_{\Psi} \rangle_{\Gamma} = \int_M \langle \nu_{\Psi}(q), \nu'_{\Psi}(q) \rangle_V d\mu_M = \int_M \langle \Psi(s(q)), \Psi'(s(q)) \rangle_V d\mu_M.$$

Do tohoto Hilbertova prostoru tedy spadají všechny řezy, pro které platí

$$\|\nu_{\Psi}\|_{\Gamma} = \int_M \langle \nu_{\Psi}(q), \nu_{\Psi}(q) \rangle_V d\mu_M = \int_M \langle \Psi(s(q)), \Psi(s(q)) \rangle_V d\mu_M < \infty.$$

Zopakujme ještě několik faktů týkajících se zobrazení mezi asociovanými fibrovanými prostory. Zobrazení mezi asociovanými fibrovanými prostory je definováno následovně. Buď (u, f) zobrazení mezi párem hlavních G - bundlů $\zeta = (P, \pi, M)$ a $\zeta' = (P', \pi', M')$. Potom zobrazení mezi párem asociovaných bundlů $P \times_G V$ a $P' \times_G V$ může být definováno jako $u_V([p, v]) := [u(p), v]$. Toto zobrazení je dobře definované, neboť platí $u_V([pg, g^{-1}v]) = [u(pg), g^{-1}v] = [u(p)g, g^{-1}v] = [u(p), v]$. Zobrazení mezi $\zeta[V]$ a $\zeta'[V]$ je tak definováno jako dvojice (u_V, f) .

Přejděme nyní již k definici operátorů kinematiky na M jakožto mnoho-násobně souvislé varietě. Nejprve je nutné podotknout, že nelze použít obecné kvantování na diferencovatelných varietách, kde se sice využívá hlavního fibrovaného prostoru s bází M a konexí v něm, ale zde má vlákno strukturu Lieovy grupy a to v našem případě $(\tilde{M}, p, M, \Gamma)$ není pravda, neboť Γ je diskrétní grupa. Poznamenejme ještě, že použít tohoto kvantování na diferencovatelných varietách by bylo možné, ale tvar hlavního fibrovaného prostoru by byl jiný, podrobně viz kapitola 4.

V dalším se nám ještě bude hodit definice "horizontálního" zdvihu křivky $\delta : [a, b] \subset \mathbb{R} \rightarrow M$ v hlavním fibrovaném prostoru $(\tilde{M}, p, M, \Gamma)$ s diskrétní strukturní grupou Γ . Buď $\sigma : U \subset M \rightarrow \tilde{M}$ spojitý řez v $(\tilde{M}, p, M, \Gamma)$, pak $\tilde{\delta}(t) = \sigma \circ \delta(t)$ nazveme zdvihem křivky δ . Vše je dobře definováno, neboť platí $p \circ \tilde{\delta} = \delta$ a tečný vektor k $\tilde{\delta}$ je díky spojitosti σ dobře definován a patří do "horizontálního" tečného prostoru $T_{\tilde{q}}\tilde{M}$. To odpovídá obecné definici zdvihu obvykle uváděné v literatuře např. [5]. Pro $\tilde{q}_0 \in p^{-1}(\delta(a))$ existuje jednoznačný zdvih $\tilde{\delta}(t)$ k $\delta(t)$ procházející bodem $\tilde{q}_0$ a tudíž i jednoznačně daný bod $\tilde{q}_1 = \tilde{\delta}(b) \in p^{-1}(\delta(b))$. Tím je vlastně definován paralelní přenos $D : p^{-1}(\delta(a)) \rightarrow p^{-1}(\delta(b)) : q_0 \mapsto q_1$.

Pomocí tohoto zobrazení, pak můžeme definovat automorfismus asociovaného fibrovaného prostoru $(\tilde{M} \times_{\Gamma} V, p_F, M, \Gamma)$. Je-li tudíž $\delta : [a, b] \subset \mathbb{R} \rightarrow M$

křivka v M , $[\tilde{q}_0, v]$ nějaký bod z $p_F^{-1}(\delta(a))$ a $\tilde{\delta}$ lift křivky δ do $\tilde{M}$ takový, že $\tilde{\delta}(a) = \tilde{q}_0$, potom křivka $\delta_V(t) := [\tilde{\delta}(t), v]$ je "horizontální" zdvih δ v $\tilde{M} \times_\Gamma V$ a zobrazení $D_V : \tilde{M} \times_\Gamma V \rightarrow \tilde{M} \times_\Gamma V : [\tilde{q}_0, v] \mapsto [D(\delta)(\tilde{q}_0), v]$, $\forall \tilde{q}_0 \in p_F^{-1}(\delta(a))$ je požadovaný automorfismus, neboli paralelní přenos v asociovaném bundlu $\tilde{M} \times_\Gamma V$.

Kdybychom nyní definovali unitární operátor U_{φ_t} na $\mathcal{H}_M^\Gamma$ jako:

$$(U_{\varphi_t}\nu)(q) := D_V^{-1}(\varphi_{-t}q)\nu(\varphi_{-t}q),$$

kde $\varphi \in D(M)$ a ν je měřitelný řez v $(\tilde{M} \times_\Gamma V, p_F, M, \Gamma)$, dospějeme k tomu, že tato definice vede ke ztrátě veškeré topologické informace o varietě M , která vystupuje jako jisté členy v samosdruženém operátoru obecné hybnosti $P(X)$, který je definován vztahem $(U_{\varphi_t}\nu)(q) = \exp(-\frac{i}{\hbar}tP(V))\nu(q)$, kde $V \in \chi_c(M)$ a φ_t jemu odpovídající tok.

Ukazuje se, že tato definice je konzistentní jedině v případě, kdy reprezentace grupy Γ je triviální, tj. je to dobře definovaný operátor v asociovaném fibrovaném prostoru $(\tilde{M} \times_T V, p_F, M, \Gamma)$ z kapitoly 5.3. Připomeňme jen, že třídy ekvivalence z $\tilde{M} \times_T V$ jsou definovány jako $(\tilde{q}, v) \sim (\tilde{q}\gamma, Id^{-1}(\gamma)v)$, kde $\tilde{q} \in \tilde{M}$, $v \in V$ a Id triviální reprezentace grupy Γ na V . To nás přivádí k myšlence, která se ukazuje jako správná, použít silný izomorfismus $(u, id_{U \subset M})$ na otevřené množině $U \subset M$ mezi prostory $(\tilde{M} \times_\Gamma V, p_F, M, \Gamma)$ a $(\tilde{M} \times_T V, p_F, M, \Gamma)$, definovaný v kapitole 5.3, k definici operátoru U_{φ_t} na Hilbertově prostoru měřitelných řezů v $(\tilde{M} \times_\Gamma V, p_F, M, \Gamma)$, který značíme $\mathcal{H}_M^\Gamma$.

Jak bylo ukázáno zobrazení $u : \tilde{M} \times_\Gamma V \rightarrow \tilde{M} \times_T V$ má dvě složky (restrikce), $U_1 = Id_{\tilde{M}} \Leftrightarrow U_1(\tilde{q}) = \tilde{q}$ a složku U_2 , která splňuje následující vlastnosti:

- i) $U_2 : \tilde{M} \times V \rightarrow V$ a platí $U_2(\tilde{q}\gamma) = U_2(\tilde{q})L(\gamma)$, kde L je unitární reprezentace grupy Γ na V .
- ii) $\forall \tilde{q} \in \tilde{M}$ je $U_2 : V \rightarrow V$ unitární izomorfismus na V .

Tamtéž bylo také ukázáno, že zobrazení $(u, id_{U \subset M}) = ((U_1, U_2), id_{U \subset M})$ zobrazuje Hilbertův prostor měřitelných řezů $\mathcal{H}_M^\Gamma$ v $(\tilde{M} \times_\Gamma V, p_F, M, \Gamma)$ izomorfne na Hilbertův prostor měřitelných řezů $\mathcal{H}_M^T$ v $(\tilde{M} \times_T V, p_F, M, \Gamma)$, respektive, což je důležité pro tento přístup, zobrazuje prostor hladkých řezů s kompaktním nosičem v $\mathcal{H}_M^\Gamma$, tyto jsou husté v $\mathcal{H}_M^\Gamma$, na prostor hladkých řezů s kompaktním nosičem v $\mathcal{H}_M^T$, tyto jsou husté v $\mathcal{H}_M^T$.

Po tomto nezbytném úvodu již můžeme přistoupit k samotné lokální definici operátoru U_{φ_t} , tj. k definici unitární indukované reprezentace aditivní grupy $\mathbb{R}$ v $\mathcal{H}_M^\Gamma$, pro $\varphi \in D(M)$. Buď $\nu(q) = [s(q), \Psi(s(q))] \in \mathcal{H}_M^\Gamma$, potom $u(\nu)(q) = \sigma(q) = [s(q), U_2(s(q))\Psi(s(q))] = [s(q), \Phi(s(q))] \in \mathcal{H}_M^\Gamma$, kde $\Phi(\tilde{q}\gamma) = \Phi(\tilde{q})$. Operátor $U : \mathcal{H}_M^\Gamma \rightarrow \mathcal{H}_M^\Gamma$ definujeme pomocí $u = (U_1, U_2)$:

$$(U_{\varphi_t}\nu)(q) := u^{-1}(D_V^{-1}(\varphi_{-t}\cdot q)u(\nu)(\varphi_{-t}\cdot q)).$$

Rozepíšeme nyní explicitně tento vztah, aby se ujasnil jeho význam:

$$\begin{aligned} (U_{\varphi_t}\nu)(q) &= u^{-1}(D_V^{-1}(\varphi_{-t}\cdot q)([s(\varphi_{-t}\cdot q), U_2(s(\varphi_{-t}\cdot q))\Psi(s(\varphi_{-t}\cdot q))])) = \\ &= u^{-1}(D_V^{-1}(\varphi_{-t}\cdot q)([\sigma(\varphi_{-t}\cdot q)\gamma^{-1}, U_2(s(\varphi_{-t}\cdot q))\Psi(s(\varphi_{-t}\cdot q))])) = \\ &= u^{-1}([\sigma(q), Id(\gamma)^{-1}U_2(s(\varphi_{-t}\cdot q))\Psi(s(\varphi_{-t}\cdot q))]) = \\ &= u^{-1}([s(q)\gamma, U_2(s(\varphi_{-t}\cdot q))\Psi(s(\varphi_{-t}\cdot q))]) = \\ &= [s(q), U_2^{-1}(s(q))U_2(s(\varphi_{-t}\cdot q))\Psi(s(\varphi_{-t}\cdot q))]. \end{aligned}$$

V případě, že míra μ není invariantní vůči $\varphi \in D(M)$ musíme z důvodu unitarity přidat ještě člen $\sqrt{(\frac{d\mu}{d\mu \circ \varphi_t})}(q)$ kompenzující změnu míry podél φ , pak:

$$(U_{\varphi_t}\nu)(q) := u^{-1}(D_V^{-1}(\varphi_{-t}\cdot q)(\sqrt{(\frac{d\mu}{d\mu \circ \varphi_t})}u(\nu))(\varphi_{-t}\cdot q)).$$

Projekční míra E na M , tj. $E : U \subset M \rightarrow B(\mathcal{H}_M^\Gamma)$, kde B značí omezené operátory, je definována jako násobení charakteristickou funkcí $\tilde{\chi}_S$, kde $S \in \mathcal{B}(M)$:

$$E(S)\nu = \tilde{\chi}_S\nu,$$

kde $\tilde{\chi}_q = 1$ pro $q \in S$ jinak $\tilde{\chi}_q = 0$.

Není těžké ověřit, že dvojice takto definovaných operátorů (U_φ, E) tvoří systém imprimitivity definovaný v kapitole 3. Operátory hybnosti a polohy potom obdržíme z definic uvedených v této kapitole. Přitom operátor obecné hybnosti dostaneme derivací vztahu

$$(U_{\varphi_t}\nu)(q) = \exp(-\frac{i}{\hbar}tP(V))\nu(q),$$

podle t a položením $t = 0$. Z definice operátoru polohy se dá ukázat, že pro danou $f \in C_0^\infty(M)$ a projekční míru definovanou jako $E(S)\nu = \tilde{\chi}_S\nu$, se jedná o operátor násobení funkcí, tj. $Q(f)\nu = f\nu$.

5.6 Kvantová kinematika na kružnici

Na tomto jednoduchém příkladě ukážeme, jak definovat operátory kinematiky metodou popsanou v kapitole 5.5.

Univerzálním nakrývacím prostorem pro kružnici je $\mathbb{R}$. Fundamentální grupou kružnice je grupa $\Gamma = \mathbb{Z}$, jejíž akce na $\mathbb{R}$ je dána jako $\gamma_n x = x + 2\pi n$. Ireducibilní unitární reprezentace grupy Γ lze číslovat pomocí reálných čísel, která označíme $\frac{e\Phi}{2\pi\hbar}$, kde $\Phi \in \mathbb{R}$ má smysl magnetického toku středem kružnice. Pak reprezentace $L^\Phi : \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}$ bude mít tvar:

$$L^\Phi(2\pi n) : z \in \mathbb{C} \rightarrow \exp(-i\frac{ne\Phi}{\hbar})z.$$

Potom je-li $\frac{e}{\hbar}(\Phi - \Phi') \in 2\pi\mathbb{Z} \Rightarrow L^\Phi \cong L^{\Phi'}$. Proto neekvivalentní reprezentace jsou číslovány číslem z $\langle 0, 2\pi \rangle$.

Místo přímo s S^1 budeme pracovat s fundamentální oblastí $\langle a, a + 2\pi \rangle \subset \mathbb{R}$, která převezme roli S^1 jako konfiguračního prostoru. Funkce na UCS $\mathbb{R}$ tvořící Hilbertův prostor ekvivariantních funkcí $\mathcal{H}_{S^1}^\Gamma$ budou tedy splňovat podmínku:

$$\Psi(x + 2\pi n) = \exp(-i\frac{ne\Phi}{\hbar})\Psi(x),$$

kde $\Psi : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{C}$ takové, že norma daná skalárním součinem

$$(\Psi_1, \Psi_2) = \int_a^{2\pi+a} \overline{\Psi_1(x)}\Psi_2(x)dx,$$

je konečná. Přitom $a \in \mathbb{R}$ je libovolně pevně zvolené. Dále funkce na $\mathbb{R}$ tvořící Hilbertův prostor periodických funkcí $\mathcal{H}_{S^1}^T$ mají splňovat podmínku:

$$\Phi(x + 2\pi n) = \Phi(x).$$

Dalším krokem je nalezení unitárního zobrazení $U_2 : \mathcal{H}^\Gamma \rightarrow \mathcal{H}^T : \Psi \mapsto \Phi$. Zobrazení $U_2 : \mathcal{H}^\Gamma \rightarrow \mathcal{H}^T$ bude mít v tomto případě tvar

$$\Psi(x) \mapsto \exp(i\frac{xe\Phi}{2\pi\hbar})\Psi(x).$$

Jednoduše se ověří, že takto definované zobrazení splňuje podmínky z kapitoly 5.3. Tamtéž bylo také ukázáno, že toto zobrazení lze obohatit o člen $\exp(i\frac{e}{\hbar}f(x))$, kde $f(x + 2\pi n) = f(x)$. V souladu s kapitolou 5.5. definujeme nyní operátor

$$(U_{\varphi_t}\Psi)(x) =$$

$$= \exp(-i\frac{e}{\hbar}f(x)) \exp(-i\frac{xe\Phi}{2\pi\hbar}) \exp(i\frac{e}{\hbar}f(x-at)) \exp(i\frac{(x-at)e\Phi}{2\pi\hbar}) \Psi(x-at).$$

Pak operátor obecné hybnosti dostaneme pomocí vztahu

$$\frac{d}{dt}(U_{\varphi_t}\Psi)(x)|_{t=0} = \frac{d}{dt} \exp(-\frac{i}{\hbar}tP(V))|_{t=0} \Psi(x).$$

Po zderivování obdržíme operátor $P(V)$ ve tvaru

$$P(V) = -i\hbar a \frac{d}{dx} - \frac{ea\Phi}{2\pi} - ea \frac{df(x)}{dx}.$$

Operátor polohy je definován, pro danou $f \in C_0^\infty(S^1)$ a projekci míru $E(I)\Psi = \tilde{\chi}_I\Psi$, $I \subset S^1$, jako operátor násobení funkcí, tj. $Q(f)\Psi(x) = f(x)\Psi(x)$.

Literatura

- [1] H.D. Doebner, P. Šťovíček, J. Tolar, Quantization of kinematics on configuration manifolds, *Reviews in Mathematical Physics*, Vol.13, No. 4 (2001), pp. 1-47.
- [2] G.W. Mackey, *Induced Representations and Quantum Mechanics*, W.A. Benjamin, Inc., New York (1968).
- [3] V.S. Varadarajan, *Geometry of Quantum Theory II. Quantum Theory of Covariant Systems*, Van Nostrand Reinhold Co., New York (1970).
- [4] Chris J. Isham, *Modern Differential Geometry for Physicists*, World Scientific, Singapore (1999).
- [5] M. Nakahara, *Geometry, Topology and Physics*, Institute of Physics Publishing, Bristol and Philadelphia, (1998).
- [6] Allen Hatcher, *Algebraic Topology*, Cambridge University Press, Cambridge (2002).
- [7] H.D. Doebner, J. Tolar, Quantum particle on a torus in a magnetic field, in: *Quantization and Coherent States Methods*, (Edited by S.T. Ali, I.M. Mladenov and A. Odziejewicz), World Scientific, Singapore (1993).
- [8] Christoph Schulte, Quantum mechanics on special topologically non-trivial manifolds, Ph.D. Thesis, Technical University, Clausthal (1997).
- [9] B. Angermann, H.D. Doebner, Homotopy groups and quantization of localizable systems, in *Proc. Xth Coll. Group Theoretical Methods in Physics*, *Physica A* **114** 433 (1982).
- [10] J.S. Dowker, Quantum mechanics and field theory on multiply connected and on homogenous spaces, *J.Phys.A*, December,(1971).

- [11] J. Blank, P. Exner, M. Havlíček, *Lineární operátory v kvantové fyzice*, Karolinum, Praha (1993).