Rešeršní práce: Indukované reprezentace, systémy imprimitivity a kvantové kinematiky na homogenních prostorech.

Stanislav Petráš

Obsah

ÚVOD: Cílem této práce bylo zevrubné pochopení teorie indukovaných reprezentací a systému imprimitivity a to jak z klasického pohledu, tak z pohledu moderní geometrie. Jak už bylo řečeno jde o zevrubné pochopení, takže v textu se nikde nezachází do hlubokých technických podrobností.

Dále bych chtěl poděkovat svému školiteli Prof. Jiřímu Tolarovi za ochotu a trpělivost.

1. FORMALIZMUS KVANTOVÉ MECHANIKY

Fyzikálnímu systému je přiřazen Hilbertův prostor $\mathcal{H}$. Stavy systému jsou reprezentovány tzv. von Neumannovými operátory (maticemi hustoty) – omezenými, samosdruženými, pozitivními operátory v $\mathcal{H}$ s jednotkovou stopou. Takto zavedená množina stavů w je konvexní, její extremální body se nazývají čistými stavy. Čisté stavy jsou reprezentovány projektory na jednorozměrné podprostory. Měření nad systémem s výsledky z množiny X, která je vybavena σ - algebrou $\mathcal{B}$(X) měřitelných množin, přísluší projekční míra na X. Každé měřitelné množině $S \in \mathcal{B}(X)$ je tak přiřazen projektor F(S) v $\mathcal{H}$ přičemž platí: F(X) = I; $F\left(\bigcup_{i=1}^{\infty} S_i\right) = \sum_{i=1}^{\infty} F(S_i)$ pokud $S_i \cap S_i = 0$ pro i $\neq$ j. Je li systém ve stavu $U \in w$, pak číslo $p_u(S) = Tr(UF(S))$ představuje pravděpodobnost toho, že výsledek měření padne do množiny $S \in \mathcal{B}(X)$. Zobrazení $p_u : \mathcal{B}(X) \to R$ je zřejmě pravděpodobnostní míra na X.

Z uvedeného výčtu je patrné, že zásadní roli v kvantově mechanickém formalismu hraje ortokomplementární svaz projektorů na podprostory Hilbertova prostoru $\mathcal{H}$. Tento svaz označíme L, částečné uspořádání je na něm definováno: $F_1 \leq F_2$ právě když $F_1F_2 = F_1$, doplněk $F^{\perp} = I - F$. Zřejmě $F_1 \leq F_2$ právě když příslušné podprostory jsou v inkluzi, $F^{\perp}$ projektuje na ortogonální doplněk. Význačnými vlastnostmi svazů jsou i) pro každou spočetnou množinu F_1, F_2, … prvků z L existuje $\wedge_n F_n$ a $\vee_n F_n$ v L; ii) pro $F_1, F_2 \in L$ a $F_1 \leq F_2$ existuje prvek $P \in L$ takový, že $P \leq F_1^{\perp}$ a $P \vee F_1 = F_2$. Tento prvek $P = F_1^{\perp}F_2 = (I-F_1)F_2 = F_2 - F_1$ je jediný s uvedenou vlastností.

2. SYMETRIE A KVANTOVÁ MECHANIKA

Nechť konfigurační varieta, kterou nadále budeme označovat M, je G – prostorem grupy symetrie G. Prvky grupy g se nazývají akce a každá akce g představuje transformaci prostoru M na sebe. Přitom požadujeme: i) ep = p; ii) $g_1(g_2p) = g_1g_2p$, kde $g_1, g_2 \in G$, $p \in M$.

Mnoho tvrzení, speciálně tvrzení o Mackeyho systému imprimitivity, lze vyslovit za předpokladu, že grupa G je lokálně kompaktní se spočetnou bází. Pro fyziku jsou nejdůležitější souvislé Lieovy grupy, na které se omezíme, tyto předchozí podmínku splňují díky tomu, že mají strukturu variety. Dále budeme požadovat, aby byla varieta M souvislá a hladká, což je jak později uvidíme důležité pro její ztotožnění s jistým faktorprostorem. Samozřejmě také platí, že zobrazení (g, p) $\mapsto$ gp je nekonečně diferencovatelné.

Základní fyzikální představa nyní je, že transformaci symetrie g konfiguračního prostoru M odpovídá transformace symetrie kvantově mechanického popisu. Pro upřesnění této představy zavedeme několik pojmů: Automorfizmem logiky L rozumíme bijekci α: $L \to L$ která splňuje i) α(I) = I; ii) $\alpha(F^{\perp}) = \alpha(F)^{\perp}$; iii) $\alpha(\vee_n F_n) = \vee_n \alpha(F_n)$. Konvexním automorfizmem množiny stavů w rozumíme bijekci β: $w \to w$, která splňuje podmínku: jsou – li čísla c1,c2,… nezáporná, $\sum_n c_n = 1$, pak $\beta\left(\sum_n c_n U_n\right) = \sum_n c_n \beta(U_n)$.

Zformulujme nyní požadavek transformace symetrie kvantově mechanického systému takto: a) existuje homomorfizmus α: g $\mapsto \alpha$(g) grupy G do grupy automorfizmů logiky L, α(g): $L \to L$: F $\mapsto F^g$.

b) existuje homomorfizmus β: g $\mapsto \beta$(g) grupy G do grupy konvexních automorfizmů množiny stavů w, β (g): $w \to w$: U $\mapsto U^g$.

c) Rozdělení pravděpodobnosti se nemění, tj. $Tr(U^g F^g) = Tr(UF)$, kde $U \in w$, $F \in L$.

d) Mějme projekční míru F na množině X, která je přiřazena jistému měření nad systémem s výsledky z této množiny. Množina X je vybavena σ - algebrou $\mathcal{B}$(X) měřitelných množin. Pak existuje homomorfizmus γ: g $\mapsto \gamma$(g) grupy G do grupy měřitelných, bijektivních zobrazení prostoru X na sebe. Jestliže se při konstrukci množiny X využívá konfiguračního prostoru M, zobrazení γ(g) nemusí být identické. Každé γ(g) indukuje automorfizmus σ - algebry $\mathcal{B}(X) \to \mathcal{B}(X)$: S $\mapsto S^g$. Přitom požadujeme aby $F(S^g) = F(S)^g$.

Automorfizmy logiky a konvexní automorfizmy stavů lze velmi dobře popsat, jak ukazuje následující (Wignerova) věta. Je – li $\mathcal{H}$ separabilní nekonečně rozměrný Hilbertův prostor, platí: Všechny automorfizmy logiky L jsou právě tvaru $\alpha(F) = TFT^{-1}$, kde $F \in L$ a T je pevně zvolený unitární (antiunitární) operátor v $\mathcal{H}$. Dva takové operátory indukují týž automorfizmus logiky, právě když se liší o fázový faktor. Všechny konvexní automorfizmy množiny stavů w jsou právě tvaru $\beta(U) = TUT^{-1}$, kde $U \in w$ a T je pevně zvolený unitární (antiunitární) operátor v $\mathcal{H}$. Dva takové operátory indukují týž konvexní automorfizmus stavů, právě když se liší o fázový faktor.

Wignerova věta a požadavky a) , b) vedou závěru, že každé akci $g\in G$ je přiřazena dvojice operátorů T(g) a T(g)´, z nichž každý je unitární nebo antiunitární. Aby bylo vyhověno požadavku c), musí se T(g), T(g)´ lišit nejvýše o fázový faktor. Můžeme tedy oba operátory ztotožnit: T(g) = T(g)´, $g\in G$. Protože jsme se omezili na souvislé Lieovy grupy, budou všechny operátory T(g) unitární. To vyplývá jednak z toho, že součin dvou antiunitárních operátorů je unitární operátor, jednak z toho, že v jistém okolí O jednotkového prvku e ke každému $b\in O$ existuje $a\in O$, $b = a^2$, přičemž prvky z O generují G. Označme nyní U($\mathcal{H}$) grupu unitárních operátorů na $\mathcal{H}$ se silnou topologií. Centrum Z této grupy tvoří operátory z.I, kde $z \in T^1$ (T^1 je Lieova grupa komplexních čísel modulu1). Faktorgrupa P($\mathcal{H}$) = U($\mathcal{H}$)/Z se nazývá projektivní grupou Hilbertova prostoru $\mathcal{H}$. Požadavky a),b),c) můžeme shrnout v požadavek abc) existuje homomorfizmus h: $G \to P(\mathcal{H})$.Po tomto homomorfizmu budeme navíc požadovat, aby byl měřitelný (v tom případě bude i spojitý).(blíže kapitola 5.)

Požadavek d) výše jsme nechali dosud stranou, to protože jeho rozbor vyžaduje popis konkrétního měření nad systémem. Pro lokalizované systémy má zásadní význam měření polohy. Výsledky měření jsou v tomto případě body konfiguračního prostoru tj. X = M. Právě v tomto případě většinou není homomorfizmus γ z bodu d) identické zobrazení. Přitom lokalizovatelnost znamená zhruba řečeno to, že pokud máme dvě transformace, které transformují danou množinu $S\in \mathcal{B}(M)$ stejně, pak jim odpovídající transformace Hilbertova podprostoru stavů příslušejícího k S jsou také stejné. Takovými systémy se nadále budeme zabývat.

3. HOMOGENNÍ PROSTORY A G-PROSTORY

V tomto odstavci bude uvedeno několik základních vlastností homogenních prostorů a G-prostorů, tj. v našem případě variet, na kterých působí Lieova grupa G jako grupa transformací.

3.1. Faktorprostory a homogenní prostory

Buď G Lieova grupa a H Lieova podgrupa G. Definujme relaci ekvivalence na G jako g ~ g´, právě když existuje prvek $h \in H$ takový, že g´=gh. Třída ekvivalence [g] je tudíž množina {gh;

$h \in H\}$. Faktorprostor G/H má strukturu variety a $\dim G/H = \dim G - \dim H$. G/H ale obecně nemusí být Lieova grupa, tou se stane, pokud podgrupa H je normální podgrupou G, tj. platí $ghg^{-1} \in H \ \forall\ g \in G$ a $\forall\ h \in H$. V tomto případě jsou operace násobení a inverzního prvku nezávislé na výběru zástupce třídy ekvivalence a tudíž dobře definované. Již bylo zmíněno, že faktorprostor je varietou, tj. je na něm definovaná topologie (Hausdorffova topologie). Topologii na G/H definujeme pomocí zobrazení β: $G \to G/H$, po kterém požadujeme, aby bylo spojité a otevřené. Definujeme dále zobrazení $\tau(g)$: $aH \mapsto gaH \ \forall\ g \in G$, potom G je grupou transformací faktorprostoru G/H. Jelikož G působí na G/H tranzitivně je G/H homogenním prostorem.

3.2. Tranzitivní G-prostory – homogenní prostory

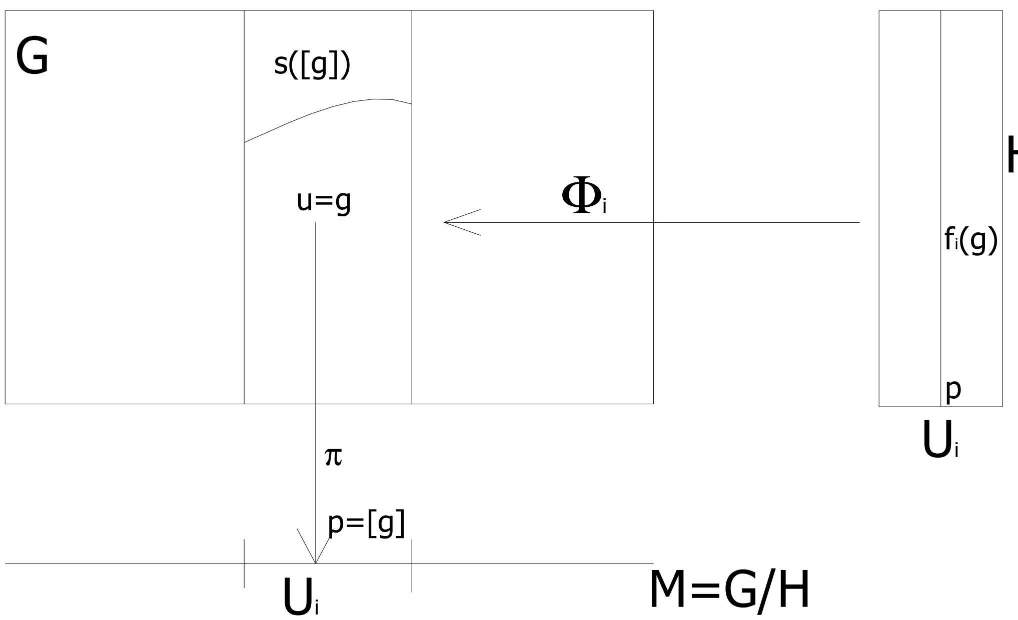
Uvažujme hladkou konfigurační varietu M a její Lieovskou konečnědimenzionální grupu symetrie G, která na varietě M působí tranzitivně tj. $\forall\ m,n \in M$ existuje $g \in G$ takové, že $m = gn$. Zvolme pevně libovolný bod m z variety M a označme H grupu stability prvku m. H je tedy podgrupa grupy G, která svou akcí na varietě M ponechává bod m beze změny. Grupa H je také Lieova a nezávislá na volbě bodu m, neboť díky tranzitivitě grupy G jsou si podgrupy stability všech prvků z variety M vzájemně izomorfní, tj. platí $H_m = gH_ng^{-1}$, kde H_m je grupa stability prvku m a H_n grupa stability prvku n a platí $m = g.n$. Obecně platí je-li G grupa, která působí tranzitivně na množině M, potom pro každý bod $m \in M$, existuje bijekce j_m: $G/H_m \to M$ definovaná jako j_m: $gH_m \mapsto g.m$, kde H_m je grupa stability bodu m. Pokud navíc M je lokálně kompaktní hladká souvislá varieta a G je lokálně kompaktní Lieova grupa, potom bijekce j_m je difeomorfismus z G/H_m na M.

3.3. Homogenní prostor jako hlavní fibrovaný prostor (Principal bundle)

Nyní bude ukázáno, že homogenní prostor lze chápat jako hlavní fibrovaný prostor, tj. jako fibrovaný prostor s vláknem difeomorfním strukturní grupě. V předchozím odstavci bylo ukázáno, že homogenní prostor M (tj. varieta, na níž působí Lieova grupa G tranzitivně) můžeme ztotožnit za jistých předpokladů s faktorprostorem G/H, tj. $M \equiv G/H$. Pokud provedeme tato ztotožnění, pak v následujícím bude ukázáno, že Lieovu grupu G lze chápat jako hlavní fibrovaný prostor s vláknem H (uzavřená Lieova grupa) a bázovým prostorem $M \equiv G/H$. Definujme nyní pravou akci podgrupy H na G jako $g \mapsto ga$, kde $g \in G$ a $a \in H$. Protože G je Lieova grupa je toto zobrazení diferencovatelné. Dále definujeme projekci π: $G \to M \equiv G/H$ jako π: $g \mapsto [g] = \{ga;\ a \in H\}$. Tudíž g a $ga \in G$ jsou zobrazeny do stejného bodu $[g]$ a platí $\pi(g) =$

= $\pi(ga)$. Abychom mohli definovat lokální trivializaci, musíme nejdříve najít zobrazení f_i: $G \to H$ na každé mapě $U_i \subset M$. To uděláme následujícím způsobem: buď s lokální řez na U_i a $g \in \pi^{-1}([g])$, tj. prvek vlákna v bodě [g]. Definujme f_i jako $f_i(g) = s([g])^{-1}g$ ($s([g])^{-1}$ je grupová inverze).

Jelikož s([g]) je řez v bodě [g] dá se napsat ve tvaru ga, kde $a \in H$, potom dostaneme $s([g]\,)^{-1}g = a^{-1}g^{-1}g = a^{-1} \in H$, tímto jsme obdrželi kýžené zobrazení f_i: $G \to H$. Můžeme tedy definovat lokální trivializaci ϕ_i: $U_i \times H \to G$ jako $\phi_i^{-1}(g) = ([g], f_i(g))$, z předchozího vyplývá, že se jedná o difeomorfismus. Dále se jednoduše ověří, že platí $f_i(ga) = f_i(g)a$ ($a \in H$) a tudíž je splněna podmínka pro lokální trivializaci na hlavních fibrovaných prostorech $\phi_i^{-1}(ua) = (p, f_i(u)a)$, kde a je prvkem strukturní grupy, p je prvkem základního prostoru M a u je prvek vlákna hlavního fibrovaného prostoru. Z této podmínky plyne, že vlákno lze zkonstruovat za pomocí jednoho bodu u a při znalosti strukturní grupy.



obr. 1

4. MÍRA NA LOKÁLNĚ KOMPAKTNÍCH GRUPÁCH

V této kapitole budou uvedena základní fakta týkající se míry na lokálně kompaktních topologických grupách, které budou potřebné pro konstrukci unitárních indukovaných reprezentací těchto grup.

Důvod proč se zabývat právě lokálně kompaktními topologickými grupami, konkrétně lcsc (definice bude uvedena později), je ten, že se velice často vyskytují ve fyzikálních aplikacích. A dále ten, že teorie jejich unitárních representací je velmi dobře propracována.

Nejprve několik pojmů z topologie. Systém τ podmnožin množiny X se nazývá topologie na X, má-li následující tři vlastnosti i) $\phi \in \tau$, $X \in \tau$. ii) Je-li $V_i \in \tau$ pro i = 1, 2, … n, potom platí $V_1 \cap V_2 \cap \ldots \cap V_n \in \tau$. iii) Je-li $\{V_a\}$ libovolný systém množin z τ, platí $U_\alpha V_\alpha \in \tau$. Je-li τ topologie na X, nazýváme X topologický prostor a prvky systému τ otevřené množiny v X.

Množina $K \subset X$ je kompaktní, jestliže každé otevřené pokrytí množiny K obsahuje konečné podpokrytí. Okolí bodu $p \in X$ je každá otevřená podmnožina X, která obsahuje p. X je Hausdorffův prostor, jestliže platí: je-li $p, q \in X$ a $p \neq q$, potom p má okolí U a q okolí V takové, že $U \cap V = \phi$. X je lokálně kompaktní, jestliže každý bod z X má okolí, jehož uzávěr je kompaktní. Systém $\mathcal{L} \subset \tau$ nazveme bází topologického prostoru (X, τ), jestliže každou neprázdnou otevřenou množinu lze vyjádřit ve tvaru sjednocení prvků systému $\mathcal{L}$. X splňuje druhý axiom spočetnosti, jestliže v něm existuje spočetná báze. Topologický prostor je lcsc, jestliže je to lokálně kompaktní Hausdorfův prostor, který splňuje druhý axiom spočetnosti.

4.1. Míra na lcsc Borelovských prostorech

K tomu, abychom mohli definovat míru zaveďme nejprve pojem Borelovský prostor. Borelovská struktura na množině X je σ-algebra $\mathcal{B}$ podmnožin X, dvojice $(X, \mathcal{B})$ se potom nazývá Borelovský prostor (jde tedy o měřitelný prostor). Prvky systému $\mathcal{B}$ se nazývají podmnožiny X. Buďte $(X, \mathcal{B})$ a $(Z, \mathfrak{C})$ Borelovské prostory, potom zobrazení $f: X \to Z$ se nazývá Borelovské, jestliže $f^{-1}(\mathfrak{C}) \subset \mathcal{B}$. Jestliže je toto zobrazení bijekce a platí $f^{-1}(\mathfrak{C}) = \mathcal{B}$, potom f je tzv. Borelovský izomorfizmus. Pokud X = Z a f je izomorfizmus, nazýváme f automorfizmus. Nechť X je navíc topologický prostor, potom existuje nejmenší σ-algebra $\mathcal{B}$ na X taková, že obsahuje všechny otevřené množiny v X. Systém $\mathcal{B}$ se nazývá přirozená Borelovská struktura na X. Speciálně jsou tedy všechny uzavřené množiny v X Borelovské (doplňky otevřených). Borelovskými množinami v X jsou rovněž spočetná sjednocení uzavřených množin a spočetné průniky otevřených množin. Protože $\mathcal{B}$ je σ-algebra, můžeme X považovat za měřitelný prostor, ve kterém roli měřitelných množin hrají Borelovské množiny. Potom je-li $f: X \to Y$

spojité zobrazení X do topologického prostoru Y je zřejmé, že $f^{-1}(V) \in \mathcal{B}$ pro každou otevřenou množinu $V \subset Y$, tudíž každé spojité zobrazení prostoru X je Borelovsky měřitelné. Dále buď T separabilní metrický prostor a $X \in \mathcal{B}$ Borelovská podmnožina T, potom Borelovký podprostor $(X, \mathcal{B}_x)$ T takový, že $\mathcal{B}_x = \{B \cap X, B \in \mathcal{B}\}$ se nazývá standardní. Jestliže X je lcsc, potom Borelovský prostor, kde $\mathcal{B}$ je přirozená borelovská struktura, je standardní.

Mírou na Borelovském prostoru rozumíme množinovou funkci definovanou na σ-algebře $\mathcal{B}$, která je spočetně aditivní a zobrazuje do intervalu $[0, \infty]$. Míra μ na $(X, \mathcal{B})$ je finitní, jestliže $\mu(X) < \infty$ a σ-finitní pokud existují Borelovské množiny X_n takové, že $X = \cup_n X_n$ a platí $\mu(X_n) < \infty$. Buď dále X lcsc, potom Borelovskou mírou na X rozumíme míru s vlastností, že každá kompaktní množina má míru v $[0, \infty)$ (má konečnou míru). Je zřejmé, že každá Borelovská míra na X je σ-finitní.

Buď ν nějaká σ-finitní míra na Borelovském prostoru $(X, \mathcal{B})$ a buď μ míra. Potom μ se nazývá absolutně spojitá vzhledem k ν, jestliže $\mu(S) = 0$ pro každou Borelovskou množinu S, pro kterou platí $\nu(S) = 0$. Nyní bude uveden důležitý Radon-Nikodymův teorém: Jestliže f je nezáporná Borelovská funkce, potom funkce $\mu: S \mapsto \int f d\nu$ je σ-finitní míra, která je absolutně spojitá vzhledem k ν. Obráceně, jestliže μ je σ-finitní míra absolutně spojitá vzhledem k ν, potom ∃ nezáporná Borelovská funkce f na X taková, že $\mu(S) = \int_S f d\nu$ pro $\forall\, S \in \mathcal{B}$.

Jestliže τ je Borelovský automorfismus na X a μ σ-finitní míra na X, potom můžeme definovat σ-finitní míru μ^τ jako $\mu^\tau(S) = \mu(\tau^{-1}(S))$, kde $S \in \mathcal{B}$. Pak μ se nazývá invariantní, jestliže $\mu^\tau = \mu$ a kvaziinvariantní pokud μ^τ a μ jsou vzájemně absolutně spojité (relace absolutní spojitosti je relací ekvivalence na množině σ-finitních měr prostoru X). Míra μ je tedy kvaziinvariantní, pokud množiny míry 0 jsou invariantní vůči automorfismu τ.

4.2. Míra na lokálně kompaktních grupách

Předpokládejme, že G je grupa a zároveň Borelovský prostor. Potom G je Borelovská grupa, jestliže zobrazení $(x, y) \mapsto xy^{-1}$ je Borelovské. Dále jestliže G je lcsc grupa, potom: 1) G je standardní Borelovská grupa; 2) existuje nenulová σ-finitní míra μ na G, která je levo (nebo pravo) invariantní, tj. $\mu(S) = \mu(xS)$ (nebo $\mu(S) = \mu(Sx)$) $\forall\ S \in \mathcal{B}$ a $x \in G$. Míra μ je dána jednoznačně až na multiplikativní konstantu $\rho > 0$ a je nazývána levá (pravá) Haarova míra na G. Obecně neplatí, že levá Haarova míra je pravoinvariantní. Pokud toto platí, nazýváme grupu G unimodulární. Dále buď G lcsc grupa a μ levá Haarova míra, potom $\forall\ x \in G$ míra $S \to \mu(Sx)$ je také levá Haarova míra, a proto musí (viz předchozí) existovat konstanta $\rho(x) > 0$ taková, že $\mu(Sx) = \rho(x)\mu(S)$. Funkce $\rho(x)$ se nazývá modulární funkce a má následující vlastnosti: $\rho(e) = 1$, $\rho(x.y) = \rho(x)\rho(y)$, $\rho(x)$je spojitá funkce.

4.3. Míra na tranzitivních G-prostorech

Dále budou uvedeny základní vlastnosti míry na tranzitivních G-prostorech. Buď G lcsc grupa a H její uzavřená podgrupa, β zobrazení z G na $X = G/H$ definované jako $\beta: g \mapsto g.H$. Potom X je lcsc prostor vzhledem k podílové topologii a β je otevřené spojité zobrazení. Podílová topologie znamená to, že $U \subset X$ je otevřená množina, právě když $\beta^{-1}(U)$ je otevřená množina v G. Navíc vzhledem k této topologii je i zobrazení $(g, x) \mapsto gx$ z $G \times X$ do X spojité. Dále existuje kvaziinvariantní Borelovská míra na $X = G/H$ s následujícími vlastnostmi: 1) Jestliže λ je finitní kvaziinvariantní míra na G a $\tilde{\lambda}$ je finitní míra na X definovaná jako $\tilde{\lambda}(S) = \lambda(\beta^{-1}(S))$, potom $\tilde{\lambda}$ je kvaziinvariantní. 2) Každé dvě kvaziinvariantní σ-finitní míry na X mají stejné množiny míry nula, a tudíž jsou vzájemně absolutně spojité.

V dalším bude naznačeno, jak se tvrzení 1) rozšíří na větší třídu měr, konkrétně na Borelovské míry. Označme $C_C(G)$ třídu všech komplexních funkcí, které jsou spojité a mají kompaktní support, $C_C(X)$ značí analogický prostor funkcí na X. Pro nějakou funkci $f \in C_C(G)$ definujme $Mf(g) = \int_{G_0} f(gh)d\mu_0(h)$, kde μ_0 je levá Haarova míra na H. Z levoinvariantnosti μ_0 vyplývá rovnost $Mf(gh) = Mf(g)\ \forall\ g \in G$. Tudíž $\exists$ funkce $\tilde{f}$ na X taková, že $\tilde{f}(\beta(g))=Mf(g)$ a $M: C_C(G) \to C_C(X)$. Zobrazení M pak použijeme pro přenos míry z X na G a definujeme α^0 pomocí rovnosti dvou lineárních funkcionálů na $C_C(G)$: $\int_G f d\alpha^0 = \int_X \tilde{f} d\alpha$, kde α je nějaká Borelovská míra na X, potom α je kvaziinvariantní právě když α^0 je kvaziinvariantní míra na G.

5. MULTIPLIKÁTORY A PROJEKTIVNÍ PEPREZENTACE

Jak už víme, z bodů a), b), c) v první kapitole, plyne požadavek na existenci měřitelného homomorfizmu h: $G \to P(\mathcal{H})$, kde $P(\mathcal{H})$ je projektivní grupa Hilbertova prostoru $\mathcal{H}$. Jestliže zavedeme kanonický homomorfizmus $\pi: U \mapsto \pi(U)$, $U \in U(\mathcal{H})$ z $U(\mathcal{H})$ do $P(\mathcal{H})$, můžeme vybavit prostor $P(\mathcal{H})$ podílovou topologií a ten se stane metrizovatelnou topologickou grupou se spočetnou bází. Zobrazení π je pak otevřené spojité zobrazení z $U(\mathcal{H})$ do $P(\mathcal{H})$.

Nyní můžeme přistoupit k formulaci pojmu projektivní reprezentace a poté ukázat jak lze přeformulovat požadavek abc) z kapitoly 1. pomocí projektivních reprezentací. Začněme nejprve s pojmem multiplikátor grupy. Buďte G, K lcsc grupy a K abelovská. K – multiplikátorem grupy G rozumíme Borelovské zobrazení m: $x,y \mapsto m(x, y)$ z $G\times G$ do K takové, že jsou splněny následující vztahy: i) $m(x,yz)m(y,z) = m(xy,z)m(x,y)$ $\forall x, y, z \in G$; ii) $m(x,e) = m(e,x) = 1$ $\forall x \in G$. Pokud bude K = T , multiplikativní grupa komplexních čísel modulu 1, budeme mluvit jednoduše o multiplikátorech. Množina všech K – multiplikátorů grupy G je zřejmě komutativní multiplikativní grupa. Označme tuto grupu $M_k'(G)$. Dále, dva K – multiplikátory m_1,m_2 se nazývají ekvivalentními a značí $m_1 \cong m_2$, jestliže existuje Borelovská funkce a : $G \to K : x \mapsto a(x)$ taková, že $m_2(x,y) = [a(x,y)/a(x)a(y)]m_1(x,y)$ $\forall x, y \in G$. Poznamenejme, že a(e) = 1. Jestliže K – multiplikátor je ekvivalentní jednotkovému, řekneme, že je exaktní. Je tedy exaktní, právě když platí $m_2(x,y) = a(x,y)/a(x)a(y)$ $\forall x, y \in G$. Je vidět, že exaktní multiplikátory tvoří podgrupu, označme ji $E_k(G)$, grupy multiplikátorů $M_k'(G)$. Zaveďme nyní faktorgrupu $M_k(G) = M_k'(G)/ E_k(G)$ a nazvěme jí K – multiplikátorovou grupou grupy G. Pokud K = T, pak budeme psát jen M(G) a tuto grupu nazveme multiplikátorovou grupou grupy G.

Předpokládejme, že m je multiplikátor grupy G. Potom zobrazení U: $g \mapsto U_g$ z G do unitární grupy $U(\mathcal{H})$ separabilního Hilbertova prostoru $\mathcal{H}$ se nazývá m – reprezentace pokud platí: i) $g \mapsto U_g$ je Borelovské tj. $g \mapsto (f', U_g f)$ je Borelovské $\forall f, f' \in H$; ii) $U_e = I$; iii) $U_{xy} = m(x, y)U_xU_y$ $\forall x, y \in G$. Borelovské zobrazení $g \mapsto U_g$ z G do $U(\mathcal{H})$ se nazývá projektivní reprezentace jestliže existuje multiplikátor m pro G takový, že U je m – reprezentace, přitom m je jednoznačně dán zobrazením U. Je vidět, že pokud U je projektivní reprezentace G v $\mathcal{H}$, pak zobrazení $\pi \circ U: g \mapsto \pi(U_g)$ je Borelovský homomorfizmus z G do $P(\mathcal{H})$. Dokonce platí, že každý Borelovský homomorfizmus z G do P($\mathcal{H}$) pochází od projektivní reprezentace definované výše. To nám naznačuje jak požadavek abc) z kapitoly 1. souvisí s projektivními reprezentacemi. Přesněji viz následující teorém.

Buď m nějaký multiplikátor grupy G a buď U m – reprezentace grupy G v $\mathcal{H}$. Potom $\pi \circ U$ je spojitý homomorfizmus z G do P($\mathcal{H}$). Jestliže V je nějaká projektivní reprezentace G v $\mathcal{H}$ taková, že $\pi \circ U = \pi \circ V$, potom multiplikátor V je ekvivalentní m. Obráceně jestliže m´ je multiplikátor ekvivalentní m, potom pro m´ - reprezentaci V platí $\pi \circ U = \pi \circ V$. Předpokládejme, že h: g $\mapsto u_g$ je Borelovský homomorfizmus z G do P($\mathcal{H}$). Potom existuje projektivní reprezentace U grupy G v H taková,že h = $\pi \circ U$, navíc U může být vybrána jako spojitá na nějaké otevřené podmnožině G obsahující jednotkový prvek. Konečně, jestliže m je nějaký multiplikátor grupy G, potom existuje m – reprezentace G.

Důsledkem předchozího teorému je například to, že pro libovolný multiplikátor m grupy G můžeme na Hilbertově prostoru $\mathcal{H} = \mathcal{L}^2(M, \mu)$, kde μ je levá Haarova míra na G, definovat projektivní reprezentaci jako $(U_g f)(x) = m(x^{-1}, g)^{-1} f(g^{-1}x)$ $\forall g \in G$ $\forall f \in \mathcal{H}$. Jak lze poměrně jednoduše ověřit jsou splněny podmínky i) ii) iii) pro m – reprezentace a také pro unitaritu operátoru, tudíž tato reprezentace je projektivní reprezentací. Tohoto vztahu využijeme v následujících kapitolách.

6.INDUKOVANÉ REPREZENTACE

6.1. Motivace + definice

V tomto odstavci bude naznačeno z čeho vychází idea indukovaných reprezentací a na závěr bude uvedena jejich přesná definice.

Na začátek uvažujme reprezentaci U (definice je obdobná jako pro projektivní reprezentaci s triviálním multiplikátorem) spojenou s G-prostorem M a invariantní mírou μ na M. Definici indukovaných reprezentací budeme motivovat přeformulováním definice U pro případ, že akce G na M je tranzitivní. Jak už bylo uvedeno užitím zobrazení j_m (kapitola 3.2.) můžeme za jistých předpokladů ztotožnit varietu M s levým faktorprostorem G/H a také „přetáhnout“ míru z M na míru na levém faktorprostoru G/H. Jak je definovaná akce G na G/H bylo uvedeno v kapitole 3.

Dále buď dána funkce f definovaná na G/H. Na tuto funkci můžeme také pohlížet jako na funkci na G, přičemž její funkční hodnota je stejná pro všechny prvky z jedné třídy ekvivalence v G. Tj. pokud platí f(gH) = C, potom můžeme říci, že f(gh) = C $\forall$ h $\in$ H (f(gh) = f(g) $\forall$ h $\in$ H a $\forall$ g $\in$ G).

Zpětně pokud máme funkci na G splňující předcházející podmínky, můžeme na ni pohlížet jako na funkci na G/H. Buď $\mathcal{F}$ množina všech funkcí f: G $\to$ C, které splňují následující podmínky: i) f(gh) = f(g) $\forall$ h $\in$ H $\forall$ g $\in$ G, ii) f je borelovská funkce a platí $\int_{G/H} |f(g)|^2 d\mu(u) < \infty$, u = gH $\in$ G/H. Díky ii) je $\mathcal{F}$ Hilbertův prostor, pokud definujeme skalární součin jako $(f_1, f_2) = \int_{G/H} \overline{f_1(g)} f_2(g) d\mu(u)$. Unitární reprezentaci U grupy G na $\mathcal{F}$ definujeme následujícím způsobem $(U_g f)(x) = f(g^{-1}x)$, x $\in$ G.

Takto zavedenou reprezentaci grupy G na prostoru $\mathcal{F}$ lze poměrně jednoduše zobecnit. Předpokládejme, že máme danou unitární representaci L uzavřené podgrupy H grupy G. Buď $\mathcal{H}$(L) nosič reprezentace L. Oproti předchozí definici uděláme několik změn. Buď f: G $\to$ $\mathcal{H}$(L) vektorová funkce a identitu i) zaměňme za i´) f(gh) = L_h^{-1} f(g) $\forall$ h $\in$ H a $\forall$ g $\in$ G.

Podmínka ii) v předchozím potom dává smysl, pouze když zaměníme $|f(g)|^2$ za $(f(g), f(g))$. Toto je dobře definováno neboť f(g) je vektor v $\mathcal{H}$(L). Potom, protože L_h je unitární operátor na $\mathcal{H}$(L) platí: (f(gh), f(gh)) = (L_h^{-1}f(g), L_h^{-1}f(g)) = (f(g), f(g)) $\forall$ g $\in$ G a $\forall$ h $\in$ H. Je vidět, že (f(g), f(g)) definuje funkci na G/H, tudíž můžeme podmínku ii) přepsat jako: ii´) buď g $\mapsto$ (f(g), f(g)) Borelovská funkce a $\int_{G/H} (f(g), f(g)) d\mu(u) < \infty$, u = [g]. Potom prostor $\mathcal{F}'$ funkcí f: G $\to$ $\mathcal{H}$(L) takto definovaných se stane Hilbertovým prostorem pokud zavedeme skalární součin $(f_1, f_2) = \int_{G/H} (f_1(g), f_2(g)) d\mu(u)$. Reprezentaci grupy G na prostoru $\mathcal{F}'$ pak definujeme jako: $(U_g f)(x) = f(g^{-1}x)$, x $\in$ G. Tato unitární representace závisí na našem výběru L, značí se U^L a nazývá se reprezentace G indukovaná pomocí unitární reprezentace L podgrupy H. Mohlo by se zdát, že takto definovaná reprezentace závisí také na míře μ (dosud uvažujeme invariantní míru), na to bychom narazili při ověřování podmínky unitarity $\left\|U_g f\right\| = \left\|f\right\|$ ∀f ∈ $\mathcal{F}'$. Ale jak vyplývá z kapitoly 4, každé dvě invariantní míry na G/H se liší pouze o nenulovou multiplikativní konstantu a změna této konstanty nemá podstatný vliv na definici U^L. Jinak je tomu v případě, že faktorprostor G/H nepřipouští invariantní míru. Jak bylo uvedeno v kapitole 4 na prostoru G/H s podílovou topologií, která indukuje σ-algebru borelovských množin, existuje kvaziinvariantní míra a každé dvě kvaziinvariantní míry jsou vzájemně absolutně spojité. Zvolme pevně jednu z kvaziinvariantních měr na G/H. Jestliže se pokusíme definovat U^L jako v předchozím, nebudeme mít potíže až do chvíle, kdy se pokusíme ověřit platnost vztahu, který zaručuje unitaritu U^L, tj. $\left\|U_g^L f\right\| = \left\|f\right\|$ ∀f ∈ $\mathcal{F}'$. V tomto případě totiž dostaneme $\left\|U^L f(x)\right\|^2 = \int_{G/H} (f(g^{-1}x), f(g^{-1}x)) d\mu(z) = \int_{G/H} (f(x), f(x) d\mu(gz)$, jelikož μ je kvaziinvariantní je $\mu(gz) = \int_{G/H} \rho_g(z) d\mu(z)$, z = [x]. Z těchto dvou vztahů vyplývá, že operátor definovaný jako $\left(U_g{}^L f\right)(x) = f(g^{-1}x)$ není unitární. K tomu, aby byla zajištěna unitarita, je třeba U^L definovat následujícím způsobem $\left(U_g f\right)(x) = \sqrt{\rho_g{}^{-1}}(g^{-1}[x]) f(g^{-1}x)$, kde $\rho_g = \frac{d\mu^g}{d\mu}$. Touto cestou obdržíme unitární reprezentaci U^L grupy G pro každý pár skládající se z unitární reprezentace L podgrupy H a kvaziinvariantní míry μ na G/H. Tato reprezentace navíc do jisté míry nezáleží na konkrétní volbě kvaziinvariantní míry, neboť jak už bylo řečeno, každé dvě kvaziinvariantní míry na G/H jsou vzájemně absolutně spojité, tj. patří do stejné třídy ekvivalence a platí $\mu = \int_S f d\nu$ ∀ S ∈ $\mathcal{B}$, takže všechny reprezentace jsou pro různou volbu míry unitárně ekvivalentní. Pokud tedy μ a μ´ jsou dvě odlišné kvaziinvariantní míry na G/H, $\mathcal{H}$, $\mathcal{H}'$ příslušné Hilbertovy prostory a U, U´ příslušné indukované reprezentace, potom existuje izometrie W z $\mathcal{H}$ do $\mathcal{H}'$ taková, že U´ = WUW^{-1} a má tvar W: $\mathcal{H} \to \mathcal{H}'$: f ↦ $f' = \left[\sqrt{\frac{d\mu}{d\mu'}} \circ \beta\right] f$, kde β: G → G/H.

Jelikož v kvantové mechanice se zajímáme nejen o obyčejné reprezentace, ale v první řadě o reprezentace projektivní, je nutné uvážit i tuto situaci. Buď tedy m multiplikátor grupy G, pokud budeme požadovat, aby L a U^L byly m reprezentace, tj. projektivní reprezentace s multiplikátorem m, musíme předchozí definice L a U^L změnit v souladu s kapitolou 5. Tedy

L jako m-reprezentace grupy H v separabilním Hilbertově prostoru $\mathcal{H}$(L) je definována vztahem $L_h^{-1}f(x) = m(x, h)^{-1}f(xh)$. U^L jako m-reprezentace grupy G v Hilbertově prostoru $\mathcal{F}'$ je definována vztahem $\left(U_g{}^L f\right)(x) = \sqrt{\rho_g^{-1}}\left(g^{-1}[x]\right)m(x^{-1}, g)^{-1} f(g^{-1}x)$. Takto definované vztahy skutečně splňují podmínky pro m-reprezentace z minulé kapitoly včetně vztahu U_{hg} = = m(h, g) U_hU_g a tudíž jsou projektivními reprezentacemi.

Výsledná definice projektivních indukovaných reprezentací tedy zní: Buď μ kvaziinvariantní míra na G/H, dále buď m multiplikátor grupy G a L m-reprezentace grupy H v separabilním Hilbertově prostoru $\mathcal{H}^L$. Pokud je Hilbertův prostor vektorových funkcí f: G → $\mathcal{H}^L$, které splňují následující podmínky:

i) $x \mapsto \langle f(x), \psi\rangle$ je borelovská funkce na G $\forall \psi \in \mathcal{H}^L$;

ii) $(L_h^{-1}f)(x) = m(x, h)^{-1}f(xh)$, kde h ∈ H.

iii) $\|f\| < \infty$, kde $\|.\|$ je norma indukovaná skalárním součinem

$$\left(f_1, f_2\right) = \int_{G/H} (f_1(x), f_2(x)) d\mu([x]) .$$

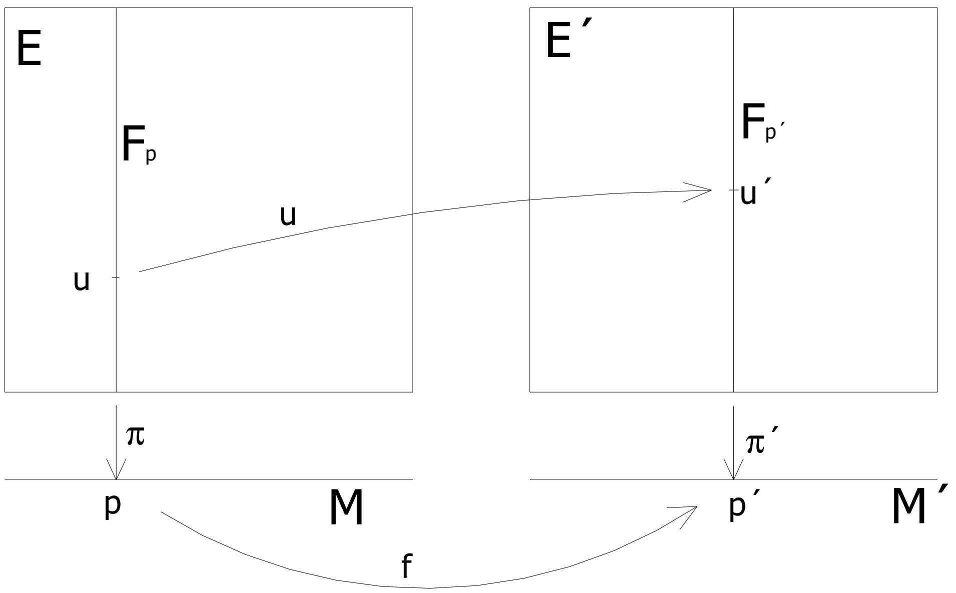
Potom U^L definované jako $\left(U_g{}^L f\right)(x) = \sqrt{\rho_g^{-1}}\left(g^{-1}[x]\right)m(x^{-1}, g)^{-1} f(g^{-1}x)$ je unitární projektivní reprezentace grupy G v Hilbertově prostoru $\mathcal{F}'$ a nazývá se indukovaná reprezentace.

6.2. Geometrický pohled na indukované reprezentace

Začneme nejprve se zobrazením mezi dvěma fibrovanými prostory. Buď ξ(E, π, M) a ξ´(E´, π´, M´) dvojice fibrovaných prostorů. Potom dvojice spojitých zobrazení (u, f), kde u: E → E´ a f: M → M´ takové, že $\pi' \circ u = f \circ \pi$ se nazývá zobrazením fibrovaných prostorů. Všimněme si, že tato podmínka je ekvivalentní s tím, že vlákno z E se zobrazí na nějaké vlákno z E´.(obr. 2)

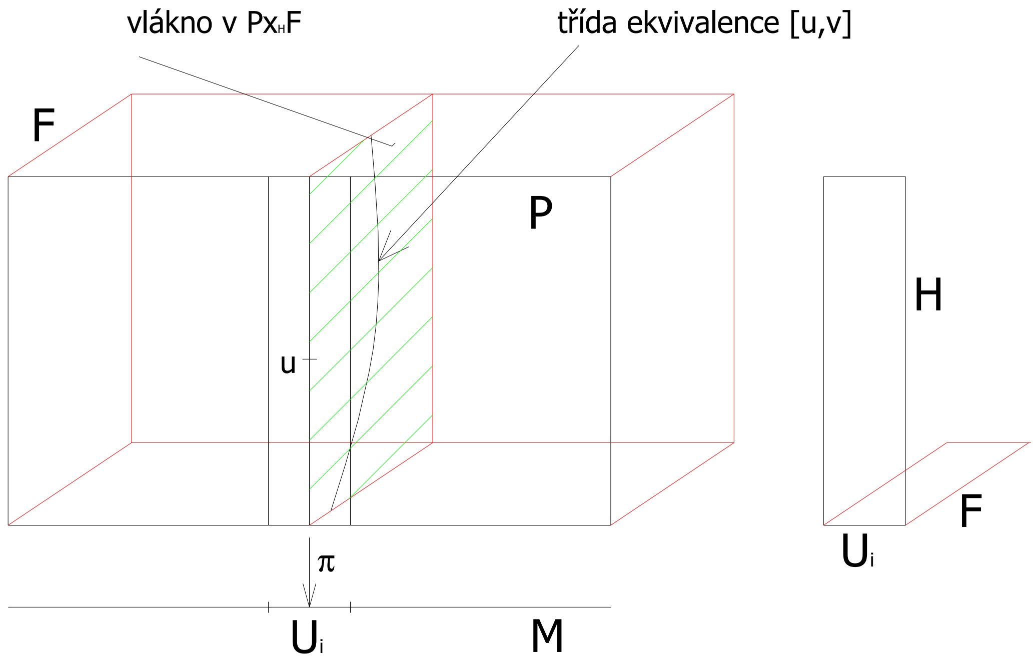
Dále Hilbertovým fibrovaným prostorem ξ = (E, π, M, $\mathcal{H}$) budeme rozumět fibrovaný prostor, kde totální prostor E a základní (bazický) prostor M jsou topologické prostory, π je spojitá surjekce z E na M a $\pi^{-1}(p)$ má strukturu Hilbertova prostoru ∀ p ∈ M. Isomorfismem

Hilbertových fibrovaných prostorů budeme rozumět zobrazení (u, f) definované výše, kde u i f jsou homeomorfismy a u zobrazuje vlákno F_p izometricky na vlákno $F_{p'}$, kde $p' = f(p)$ $\forall$ p $\in$ M. Hilbertovým G-prostorem ξ nazveme Hilbertův fibrovaný prostor, na kterém je dána spojitá akce grupy G na E a M taková, že dvojice (u, f) je automorfismus prostoru ξ $\forall$ g $\in$ G.



obr. 2

Buď $\xi = (P, \pi, M)$ hlavní (principal) fibrovaný prostor a dále buď F levý H-prostor, kde H je strukturní grupa P. Definujme $P_F := P \times_H F$ jako prostor tříd ekvivalence $(u, v) \sim (u, v)h :=$ $:= (uh, \rho(h)^{-1}v)$, kde $u \in P$, $h \in H$, $v \in F$ a $\rho(h)$ je reprezentace (lineární akce) grupy H v F. Pokud definujeme zobrazení π_F: $P_F \to M$ jako $\pi_F([u, v]) := \pi(u)$, potom $\xi(F) := (P_F, \pi, M)$ je fibrovaný prostor vzhledem k M s vláknem F, který se nazývá asociovaný fibrovaný prostor vzhledem k akci grupy H na F. To že vlákno z P_F je lineárně izomorfní F plyne z následujícího. Definujme zobrazení i_u: $F \to P_F$ jako $i_u(v) := [u, v]$ a zobrazení j_u: $\pi_F^{-1}(\{p\}) \to F$ jako $j_{uo}([u, v]) := \rho(h)v$, kde $u = u_o h$ (viz vlastnosti hlavního fibrovaného prostoru). Jak lze jednoduše ověřit i_{uo} i j_{uo} jsou vzájemně inverzní zobrazení a navíc lze pomocí nich definovat lokální trivializaci P_F tj. zobrazení $\Phi_i^{-1} : \pi_F^{-1}(p) \to U_i \times F$ jako $\Phi_i^{-1}([u,v]) := (\pi(u), j_{uo}([u,v]))$. Definice zobrazení j_{uo} vyplývá z faktu, že každou třídu ekvivalence [u, v] lze přepsat pro pevné u_o jako $[u, v] = [u_o h, v] = [u_o h h^{-1}, \rho(h^{-1})^{-1} v] = [u_o, \rho(h)v]$. Celá struktura asociovaného fibrovaného prostoru je shrnuta v následujícím obrázku (obr. 3).



obr.3

Jak už bylo uvedeno v kapitole 3, v našem případě tvoří základní prostor faktorprostor G/H, který je ekvivalentní varietě M na níž působí lokálně kompaktní (Lieova) grupa G tranzitivně. Grupa G potom tvoří hlavní fibrovaný prostor nad G/H se strukturní grupou H. Další vlastnosti tohoto hlavního fibrovaného prostoru jsou: Spojitá pravá akce $G\times H \rightarrow G$: $(g, h) \mapsto gh$. Projekce π: $G \rightarrow G/H$, kterou budeme nadále značit β (viz kapitola 4), je spojité zobrazení. Prostor G je lokálně trivializovatelný a grupa G má přirozenou akci na $M \equiv G/H$, $G\times M \rightarrow M : (a, gh) \mapsto agH$.

Z tohoto hlavního fibrovaného prostoru vytvoříme asociovaný fibrovaný prostor $\xi(F) := (P_F, \pi_F, M, \mathcal{H}(L))$, přidružíme-li k němu prostor $F = \mathcal{H}(L)$ na němž má grupa H levou akci pomocí unitární reprezentace $L_h = L(h)$ (viz. kapitola 6.1) takovou, že $H\times\mathcal{H}(L) \rightarrow \mathcal{H}(L)$: $(h, v) \mapsto L(h)v$. Vlastní přidružení provedeme tím, že stejně jako v definici zavedeme třídy ekvivalence $(g, v) \sim (gh, L(h)^{-1}v)$. Tato podmínka úzce koresponduje s podmínkou $f(gh) = L(h)^{-1}f(g)$ z odstavce 6.1, která převádí vektorovou funkci na G na vektorovou funkci na G/H. Fibrovaný asociovaný prostor P_F je potom množina tříd ekvivalence [g, v]. Projekce π_F má s ohledem na definici výše tvar $\pi_F : [g, v] \mapsto p$, kde $p = \beta(g) = gH$. Vlákno F_p v bodě $p \in G/H \equiv M$ je množina tříd ekvivalence, kde g je nějaký bod z G, pro který platí $\beta(g) = p$ a v prochází celý $\mathcal{H}(L)$. Vlákno F_p má navíc strukturu Hilbertova prostoru neboť, pokud p = = gH potom každý prvek vlákna F_p se dá napsat ve tvaru [g, v], kde $v\in \mathcal{H}(L)$ je jednoznačně dáno. Pomocí bijekce $j_g : [g, v] \mapsto v$ z F_p na $\mathcal{H}(L)$ pak vlákno F_p získá strukturu Hilbertova prostoru se skalárním součinem $(\ldots,\ldots)_p$ (skalární součin na $\mathcal{H}(L)$). Je nutné podotknout, že nezáleží na volbě prvku g, protože pokud p = gH = g´H, potom existuje $h\in H$ takové, že g´ = = gh. A třídy ekvivalence [g, v], [g´, v] jsou pak spjaty vztahem [g´, v] = [gh, v] = [g, L(h) v], z čehož plyne nezávislost výběru. Z uvedeného vyplývá, že asociovaný fibrovaný prostor má strukturu Hilbertova prostoru, který byl popsán na začátku této kapitoly.

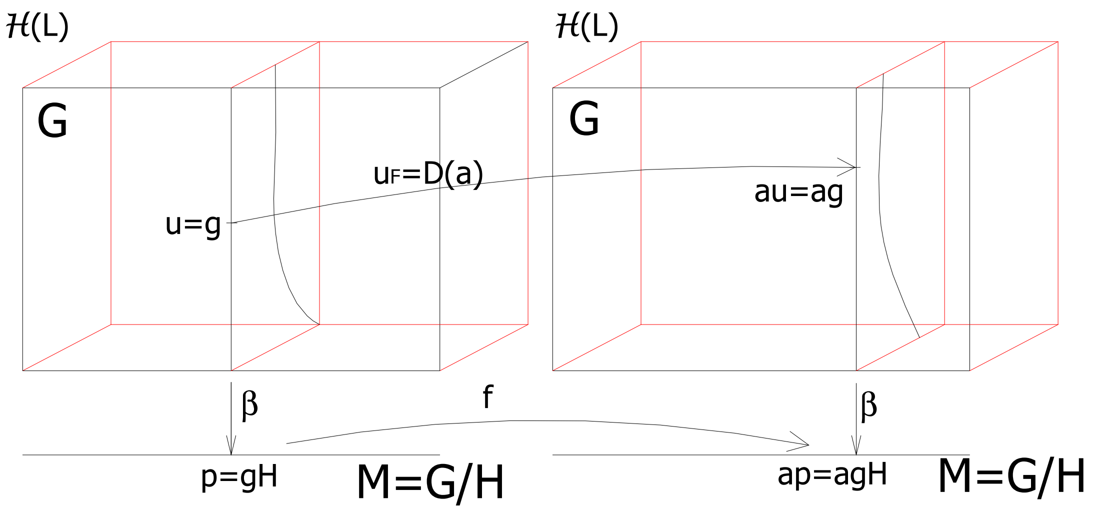
Zabývejme se nyní zobrazením mezi dvěma asociovanými fibrovanými prostory. Buď (u, f) zobrazení mezi párem hlavních fibrovaných prostorů $\xi(E, \pi, M)$ a $\xi'(E', \pi', M')$. Zobrazení mezi asociovanými prostory $P\times_H F$ a $P'\times_H F$ může být definováno jako $u_F([g, v]) := [u(g), v]$. Toto zobrazení je dobře definováno, neboť $u_F([gh, \rho(h)^{-1} v]) = [u(gh), \rho(h)^{-1} v] = [u(g)h, \rho(h)^{-1} v] = [u(g), v]$. Jednoduše se lze přesvědčit, že jsou podmínky pro zobrazení mezi fibrovanými prostory ze začátku kapitoly splněny pokud zobrazení mezi ξ a ξ' definujeme jako dvojici (u_F, f). Přirozeně se dá definovat také automorfizmus u_F asociovaného prostoru $\xi[F]$ jako $u_F([g, v]) := [u(g), v]$, kde u je automorfizmus hlavního fibrovaného prostoru příslušného k $\xi[F]$.

Využijme nyní přirozené levé akce G na M k definování automorfizmu asociovaného fibrovaného prostoru $\xi_L = (P_F, \pi_F, M, \mathcal{H}(L))$. Složku u_F na $G\times_H\mathcal{H}(L)$ definujeme jako D(a)[g, v] = = [ag, v] a složku f na G/H definujeme přirozeně jako a(gH) = agH, přičemž je samozřejmě splněna podmínka $\pi_F \circ D(a)[g,v] = a \circ \pi_F[g,v]$. S takto definovaným zobrazením získá ξ_L strukturu Hilbertova G – prostoru. Pro lepší představivost je opět připojen obrázek (obr. 4).

Dále budou uvedeny základní vlastnosti řezů na asociovaných fibrovaných prostorech. Buď (P_F, π_F, M, F) asociovaný fibrovaný prostor, potom existuje bijektivní zobrazení mezi jeho řezy $s: M \to P_F$ a zobrazením $\Phi : P\to F$, které splňuje podmínku $\Phi(uh) = \rho(h)^{-1}\Phi(u)$ $\forall u\in P$ (hlavní fibrovaný prostor) a $\forall h\in H$. Řez s_Φ korespondující s tímto zobrazením je pak ve tvaru $s_\Phi(p) = [u, \Phi(u)]$, kde u je nějaký bod z vlákna F_p. Řez s_Φ je přitom nezávislý na výběru bodu $u\in F_p$ neboť platí $[uh, \Phi(uh)] = [uh, \rho(h)^{-1}\Phi(u)] = [u, \Phi(u)]$. Z předcházejícího je vidět, že pokud $\sigma(p)$ je lokální řez na hlavním fibrovaném prostoru P, pak lze řez v asociovaném fibrovaném prostoru zapsat jako s(p) = [σ(p), Φ(σ(p))]. Lineární prostor Borelovských řezů s: M → P_F : p ↦ s(p) , π_F s = id_M může být vybaven strukturou Hilbertova prostoru $\mathcal{H}$, pokud pro danou kvaziinvariantní míru μ na M ≡ G/H zavedeme skalární součin vztahem $(s,s')=\int_{G/H}(s(p),s'(p))_p\,d\mu(p)$ ($\mathcal{H}$ tedy závisí na zvolené míře). Indukovanou reprezentaci

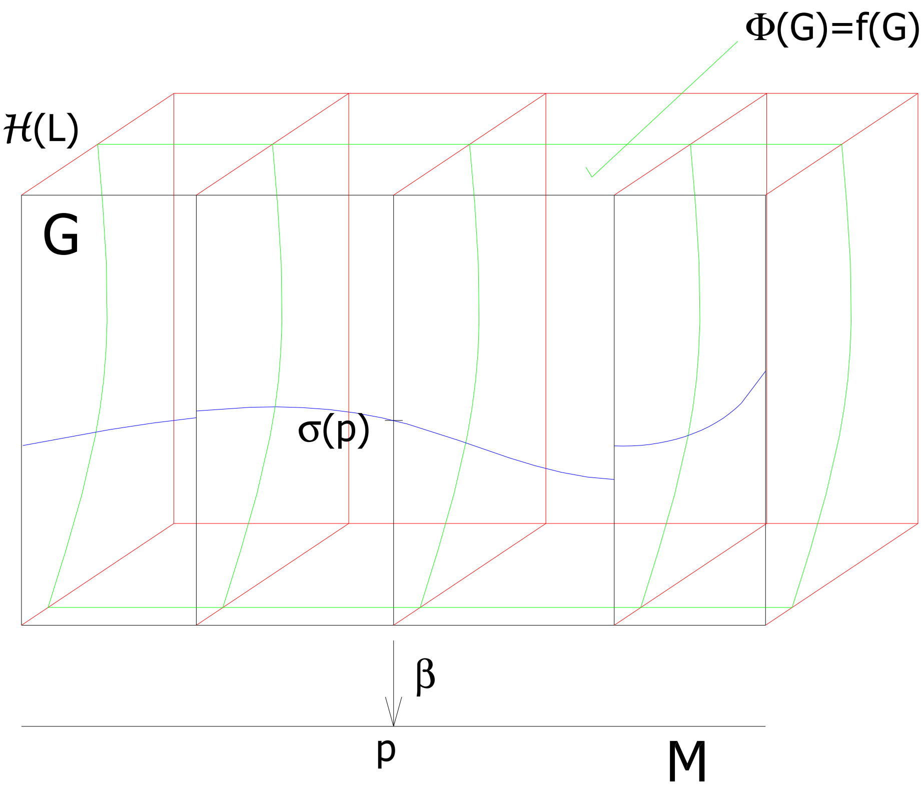
$Ind_H^G L$ v tomto Hilbertově prostoru potom definujeme jako :

$(U_g s)(p)=\sqrt{d\mu/d\mu^g}\,(g^{-1}p)[D(g)s](g^{-1}p)$, kde s∈ $\mathcal{H}$.



obr. 4

Nyní zbývá dokázat, že předcházející definice je ekvivalentní s definicí indukované reprezentace v předcházející kapitole. K tomu s výhodou užijeme vztahu s(p) = [σ(p), Φ(σ(p))] = = [σ(p), Φ_σ(p)] , kde skalární součin je dán vztahem $(s,s')=\int_{G/H}(\Phi_\sigma(p),\Phi_\sigma'(p))d\mu(p)$. Dále nebudeme uvažovat člen $\sqrt{d\mu/d\mu^g}$ představující odmocninu z Radom – Nikodymovy derivace, který na náš důkaz ekvivalence nemá vliv. Takže máme: $(U_g s)(p)$ = $(D(g)s)(g^{-1}p)$ = = $[g\sigma(g^{-1}p), \Phi_\sigma(g^{-1}p)]$ = $[\sigma(p)\sigma(p)^{-1}g\sigma(g^{-1}p), \Phi_\sigma(g^{-1}p)]$ = $[\sigma(p),L(h^{-1})\Phi_\sigma(g^{-1}p)]$, kde h^{-1} = = $\sigma(p)^{-1}g\sigma(g^{-1}p)$ ∈ H a tudíž dostáváme $(U_g\Phi_\sigma)(p)= L(\sigma(p)^{-1}g\sigma(g^{-1}p))\Phi_\sigma(g^{-1}p)$. Vraťme se nyní k definici z kapitoly 6.1. Pro tu platilo $(U_g f)(\sigma)=f(g^{-1}\sigma)$ a f(ah) = $L(h)^{-1}$ f(a), tj. pro σ = σ(p) dostáváme $(U_g f)(\sigma(p))$ = $f(g^{-1}\sigma(p))$ = $f(\sigma(g^{-1}p)\ \sigma(g^{-1}p)^{-1}g^{-1}\sigma(p))$ = $f(\sigma(g^{-1}p)h)$ = = $L(h)^{-1}f(\sigma(g^{-1}p))$ = $L(\sigma(p)^{-1}g\sigma(g^{-1}p))\ f(g^{-1}p)$. Porovnáme – li tento vztah se vztahem uvedeným výše zjistíme, že pokud položíme $f(\sigma(g^{-1}p)) = \Phi_\sigma(g^{-1}p) = \Phi(\sigma(g^{-1}p))$ jsou tyto vztahy identické. Tímto je dokázána ekvivalence obou definic. Na závěr je opět pro lepší představu uveden obrázek (obr. 5).



obr.5

7. PROJEKČNÍ MÍRA A SYSTÉM IMPRIMITIVITY

Nejprve uvedeme několik známých definic. Reprezentace (projektivní reprezentace) U v Hilbertově prostoru $\mathcal{H}$ se nazývá ekvivalentní reprezentaci U´ v Hilbertově prostoru $\mathcal{H}'$, jestliže existuje unitární izomorfizmus $W : \mathcal{H} \to \mathcal{H}'$ takový, že $U_g = WU_gW^{-1}$. Reprezentace (projektivní reprezentace) U na Hilbertově prostoru $\mathcal{H}$ se nazývá ireducibilní, jestliže jedinými uzavřenými podprostory, které jsou invariantní vůči působení U_g jsou 0 a $\mathcal{H}$.

Projekční mírou na varietě M rozumíme zobrazení ze systému všech Borelovských množin $\mathcal{B}(M)$ na varietě M do množiny omezených operátorů na nějakém Hilbertově prostoru $\mathcal{H}$, které každé Borelovské množině na M přiřadí projektor na $\mathcal{H}$, tj. $E : \mathcal{B}(M) \to$ projektory(H). Přičemž musí být splněny následující podmínky: $E(M) = I$; $E(S_1 \cap S_2) = E(S_1)E(S_2)$ $\forall$ S_1,

$S_2 \in \mathcal{B}(M)$; $E(S_1 \cup S_2) = E(S_1)+E(S_2)- E(S_1 \cap S_2)$ $\forall$ $S_1,S_2 \in \mathcal{B}$ (M). Dále buď $\mathcal{H}$ Hilbertův prostor na němž působí projekční míra E(M), stejně tak buď $\mathcal{H}'$ Hilbertův prostor na němž působí projekční míra E´(M). Řekneme, že E(M) a E´(M) jsou ekvivalentní, pokud existuje unitární izomorfizmus W : $\mathcal{H} \to \mathcal{H}'$ takový, že $E(S)= W\,E(S)'W^{-1}$. Například vezměme σ - finitní míru μ na M a separabilní Hilbertův prostor *K* (viz $\mathcal{H}$(L) kapitola 6.1 a 6.2). Buď $\mathcal{H} = \mathcal{L}^2(M,K, \mu)$ a E(M) buď projekční míra na M definovaná jako $E(S)f = \chi_S f$ $\forall f \in H$ a $\forall S \in M$. Označme E(M) takto definovanou E(*K*, μ). Potom $E(K, \mu) \cong E(K', \mu')$ právě když i) μ a μ´ patří do stejné třídy měr (jsou vzájemně absolutně spojité), ii) dim*K* = dim*K*´. Tyto podmínky jsou určitě splněny pokud $K = K'$ a $b = \sqrt{d\mu/d\mu'}$, potom zobrazení W : f → bf je unitární izomorfizmus z $\mathcal{H}$ do $\mathcal{H}'$ takový, že je splněno $E(K, \mu)'= W\,E(K, \mu)W^{-1}$.

Předpokládejme nyní, že G je lcsc grupa, M varieta s Borelovskou strukturou na níž působí grupa G tranzitivně jako grupa symetrie. Dále buď $\mathcal{H}$ separabilní Hilbertův prostor. Systémem imprimitivity pro G působící na $\mathcal{H}$ nazveme pár (U, E), kde E je projekční míra na G – prostoru M a U : $g \mapsto U_g$ je (projektivní) reprezentace grupy G v $\mathcal{H}$, které splňují podmínku:

$E(gS)= U_g\, E(S)U_g^{-1}$ (*) $\forall g \in G$ a $\forall S \in \mathcal{B}(M)$.

Dvojice (U, E) se potom nazývá příslušející M.

Ekvivalence a ireducibilita systému imprimitivity je definována následujícím způsobem. Dva systémy (U, E) na $\mathcal{H}$ a (U´, E´) na $\mathcal{H}'$ patřící stejnému G - prostoru M jsou ekvivalentní, jestliže existuje unitární izomorfizmus W : $\mathcal{H} \to \mathcal{H}'$ takový, že $U_g' = WU_gW^{-1}$ a $E(S)' = W\,E(S)W^{-1}$ platí $\forall g \in G$ a $\forall S \in \mathcal{B}(M)$. Systém (U, E) nazveme ireducibilní, jestliže jedinými invariantními podprostory jsou 0 a $\mathcal{H}$. Platí, pokud U je ireducibilní reprezentace, potom (U, E) je ireducibilmí systém imprimitivity, obráceně toto tvrzení neplatí. Dále pokud (U_i, E_i) i = 1,2,… je posloupnost systémů imprimitivity patřících k M, kde (U_i, E_i) mají akci na $\mathcal{H}_i$, potom definujeme direktní sumu jako systém (U, E) působící na $\mathcal{H}$, kde $\mathcal{H} = \oplus_i \mathcal{H}_i$ a $E(S)$: $(f_1,f_2,\ldots) \mapsto (E(S)_1 f_1, E(S)_2 f_2,\ldots)$; U_g: $(f_1,f_2,\ldots) \mapsto (U_{g1} f_1, U_{g2} f_2,\ldots)$. Symbolicky píšeme $(U, E) = \oplus_i(U_i, E_i)$. Je také užitečné definovat okruh $O(U, E)$ tvořený těmi omezenými operátory v $\mathcal{H}$, které komutují se všemi $E(S)$ a U_g pro $\forall g\in G$ a $\forall S\in \mathcal{B}(M)$. Platí, že systém imprimitivity je ireducibilní, právě když okruh $O(U, E)$ je tvořen pouze násobky jednotkového operátoru.

Nyní se budeme blíže zabývat systémem imprinitivity pro Hilbertův prostor $\mathcal{F}' = \mathcal{H} = \mathcal{L}^2(M, \mathcal{H}(L), \mu)$. Jde o prostor vektorových funkcí (s příslušnou faktorizací vůči μ) na G, které splňují podmínku $(L_h^{-1}f)(x) = m(x, h)^{-1}f(xh)$, kde L je m - reprezentace grupy H v Hilbertově prostoru $\mathcal{H}(L)$ a m je multiplikátor grupy G jejíž je H podgrupou (viz kapitola 6.1). Projekční míra na $M \equiv G/H$ je potom definována jako násobení charakteristickou funkcí množiny χ_S, tj. platí $(E(S)^L f)(x) = \chi_S(x)f(x)$, kde $\chi_S(x) = 1\ \forall[x]\in S$ a $\chi_S(x) = 0\ \forall[x]\notin S$. Z kapitoly 6.1 víme, že indukovaná projektivní reprezentace $g \mapsto U_g$ grupy G je definována jako $\left(U_g{}^L f\right)(x) = \sqrt{\rho_g^{-1}}\left(g^{-1}[x]\right)m(x^{-1}, g)^{-1} f(g^{-1}x)$. Jak lze poměrně jednoduše ověřit dvojice (U^L, E^L) splňuje vztah (*) a tudíž tvoří systém imprimitivity tzv. kanonický systém imprimitivity. Jelikož každé dvě kvaziinvariantní míry na G/H jsou vzájemně absolutně spojité, plyne z vlastností projekční míry uvedených na začátku kapitoly (viz příklad), že pro pevně zvolené L a $\mathcal{H}$ (L) nezávisí systém (U^L, E^L) na konkrétní volbě kvaziinvariantní míry.

Jak už bylo naznačeno v kapitole 6.2, na indukované reprezentace lze pohlížet jako na reprezentace grupy G v prostoru řezů asociovaného fibrovaného prostoru $\xi_L = (P_F, \pi_F, M, \mathcal{H}(L))$. Přičemž tyto řezy také tvoří Hilbertův prostor, označme ho $\mathcal{H}'$. Projekční míru příslušející varietě $M \equiv G/H$ na prostoru řezů lze potom zavést jako $(E(S)^{L'} s)(x) = \chi_S(x)s(x)$, kde $\chi_S(x) = 1\ \forall x\in S$ a $\chi_S(x) = 0\ \forall x\notin S$. Indukovaná projektivní reprezentace $g \mapsto U_g$ grupy G je dána vztahem $\left(U_g^{L'} s\right)(x) = \sqrt{d\mu/d\mu^g}\,(g^{-1}x)\left[D(g)s\right](g^{-1}x)$, $x\in M \equiv G/H$. Dvojice $(U^{L'}, E^{L'})$ také tvoří systém imprimitivity na M a je ekvivalentní systému imprimitivity (U^L, E^L), tj. existuje unitární izomorfizmus $W : \mathcal{H}' \to \mathcal{F}' = \mathcal{H}$.

Důvod proč jsme se až do teď zaobírali indukovanými reprezentacemi je následující teorém imprimitivity: Nechť G je lcsc grupa, H její uzavřená podgrupa a m multiplikátor grupy G. Nechť dvojice (U, E) tvoří projektivní systém imprimitivity pro G s multiplikátorem m. Pak existuje m – reprezentace L grupy H taková, že (U, E) je ekvivalentní kanonickému systému imprimitivity (U^L, E^L). Jsou – li L_1 a L_2 dvě m – reprezentace grupy H, pak příslušné kanonické systémy imprimitivity jsou ekvivalentní, právě když L_1 a L_2 jsou ekvivalentní.

Tento teorém je velmi důležitý pro kvantovou mechaniku neboť implikuje Stone – von Neumannovu větu o jednoznačnosti Heisenbergových komutačních relací (tj. o jednoznačnosti kvantové mechaniky na R^3). Na vztah (*) přitom můžeme pohlížet jako na zobecnění komutačních relací. Dále je vidět, že odlišné ireducibilní kvantové kinematiky na $M \equiv G/H$ se dají klasifikovat pouze pomocí ireducibilních reprezentací grupy H.

8. ZAVEDENÍ OPERÁTORŮ POLOHY A HYBNOSTI

8.1. Operátor polohy

Operátor polohy zavedeme pomocí projekční míry E na M. Mějme nějakou klasickou pozorovatelnou f, f je tedy zobrazení z $T^*M \rightarrow R$, pak f je pozorovatelná polohy, pokud je konstantní na všech vláknech T^*_mM $\forall m \in M$. Zobrazení f lze psát ve tvaru $f = f' \circ \pi$, kde π je projekce daného kotečného fibrovaného prostoru a f´ je zobrazení $f': M \rightarrow R$. Funkce f´ tedy nahrazuje funkci (0 – formu) f . Příslušný operátor polohy je pak určen spektrální funkcí E^f jako: $E^f(S) := E(f^{-1}(s))$, kde E je projekční míra daného systému imprimitivity. Samosdružený operátor polohy se zavede následovně: $Q^f\Psi = \int_R \lambda dE^f_\lambda \Psi$. Definiční obor operátoru Q^f jsou takové vektory Ψ , které vyhovují podmínce $\left\|Q^f\Psi\right\|^2 = \int_R \lambda^2 d\left(\Psi, E^f_\lambda \Psi\right) < \infty$.

8.2. Operátor hybnosti

Operátory hybnosti se definují pomocí unitární ireducibilní reprezentace U grupy G. Z Lieovy algebry $\mathfrak{g}$ vybereme pevně prvek $X \in \mathfrak{g}$. K tomuto prvku pak jednoznačně přísluší podgrupa $\gamma_X(t) = \exp(tX)$ grupy G. Podle Stoneovy věty pak existuje samosdružený operátor P(X) na Hilbertově prostoru $\mathcal{H}$, který splňuje rovnost $U\left(\gamma_X(t)\right) = \exp\left(-itP(X)\right)$. Derivací této rovnosti podle t obdržíme pak operátor P(X).

Komutační relace obou operátorů lze odvodit z podmínky imprimitivity (*) z předchozí kapitoly. Označíme – li q_X vektorové pole na M, které je pomocí akce grupy G indukováno prvkem X z Lieovy algebry $\mathfrak{g}$, pak komutační relace mají tvar $\left[P(X), Q^f\right] = -iQ^{q_X f}$. Aby vše bylo regulérní je třeba předpokládat , že oba operátory mají společný definiční obor, který je hustý v $\mathcal{H}$.