České vysoké učení technické v Praze
Fakulta jaderná a fyzikálně inženýrská

Rešeršní práce

Petr Lenhard

České vysoké učení technické v Praze
Fakulta jaderná a fyzikálně inženýrská

Kontrakce a deformace Lieových algeber a grup

Petr Lenhard

Katedra fyziky

Akademický rok: 2003/2004
Školitel: Prof. Ing. Jiří Niederle, DrSc.

Obsah

Abstrakt

Cílem této rešeršní práce bylo nalézt ucelenou teorii kontrakcí Lieových algeber a tu zde prezentovat. Uceleností mám na mysli, že taková teorie pokrývá dostatečně širokou třídu kontrakcí a zároveň řeší otázku inverzních operací k zavedeným kontrakcím. Takto formulované požadavky splňují výsledky Evelyn Weimar-Woods publikované v roce 2000.

Za poskytnuté konzultace a pomoc s touto prací bych rád poděkoval Prof. Jiřímu Niederlemu.

Úvod

Kontrakcí grupy rozumíme proces, kdy z dané Lieovy grupy dostaneme limitním přechodem novou Lieovu grupu, která není s původní izomorfní. Myšlenka kontrakce pochází od Segala z roku 1951 [1] a od dvojice Inönü-Wigner z roku 1953 [2], přičemž motivací pro zavedení takové operace byl vztah Lorentzovy a Galileiho grupy, kdy očekáváme limitní přechod analogický jako v případě Lorentzovy a Galileiho transformace. Zobecněním konkrétně takového limitního přechodu mezi grupami lze získat tzv. jednoduchou Inönü-Wigner kontrakci. Avšak již v roce 1960 byl znám příklad kontrakce, kterou nebylo možné odvodit z jednoduché Inönü-Wigner kontrakce (dále jen IW-kontrakce), konkrétně se jednalo o kontrakci so(3) algebry v Heisenbergovu algebru. Od padesátých let minulého století našly kontrakce řadu aplikací v matematice a fyzice ovšem vždy použitím jednoduchých speciálních kontrakcí, stále se přitom nedařilo nalézt třídu takových jednoduchých kontrakcí, které by obecně zahrnovaly kontrakce všechny.

V devadesátých letech minulého století se objevily dva významné přístupy k vyřešení problému zobecnění IW-kontrakcí. Byl to z části algebraický postup pomocí tzv. gradovaných kontrakcí [3], který navíc ke spojitým kontrakcím zavádí tzv. diskrétní kontrakce, ke kterým ovšem z definice nelze hledat inverzní deformace. No a v druhém případě se jednalo o práce Evelyn Weimar-Woods [4], která původní Saletanovu definici kontrakce rozšířila a zavedla tzv. zobecněnou IW-kontrakci, přičemž ukázala, že libovolná kontrakce konečnědimenzionální algebry je ekvivalentní nějaké zobecněné IW-kontrakci. Nutno dodat, že doposud není pevně stanovena definice kontrakce konečnědimenzionální algebry, takže tvrzení Weimar-Woodsové, že zobecněné IW-kontrakce postihují všechny případy, je pravdivé vrámci definic, které používá. Ovšem spojité gradované kontrakce například patří mezi zobecněné IW-kontrakce. Výsledkům Weimar-Woodsové se věnuje tato práce především.

Spojitou trajektorii v prostoru $\mathcal{L}_V$ všech Lieových alegeber definovaných na daném vektorovém protostoru V nazýváme deformace. Speciálně analytické deformace lze systematicky studovat pomocí teorie kohomologií. Spojitá kontrakce zřejmě také představuje spojitou trajektorii ve $\mathcal{L}_V$ a tedy se ukazuje, že deformace v jistém smyslu představuje inverzní operaci ke kontrakci. Zavedení zobecněných IW-kontrakcí nám umožňuje dát vztahu kontrakce-deformace exaktní charakter.

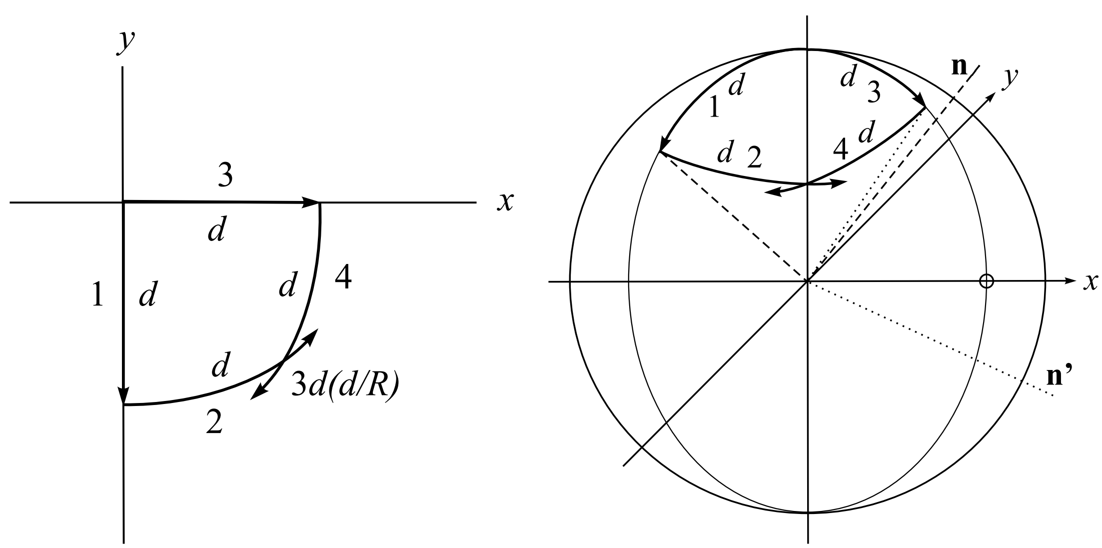
Kapitola 1

Kontrakce Lieových algeber

1.1 Motivace

Kromě ryze fyzikální motivace, která byla zmíněna v úvodu, zde popíšeme, kde se objevuje potřeba pojmu kontrakce z čistě matematického hlediska. Představme si, že se nacházíme na nějaké planetce a snažíme se určit její poloměr. Charakteristickými parametry pro nás tedy budou naše výška d a poloměr planetky R. Velikost a tvar jednoduše určíme v případě, že platí $d/R \cong 1$, naopak to bude obtížně pokud $d/R \ll 1$. Podívejme se blíže na na druhý případ.

Například na severním pólu sestavíme souřadný systém a svou výšku d vyneseme podél přímky ve směru $-y$. Postup opakujeme, ovšem tentokrát nanášíme vzdálenost d kolmo na původní úsečku. Z vnějšího pohledu na naši planetku je patrné (Obr. 1.1), že takové posunutí je ekvivalentní dvěma po sobě jdoucím rotacím:



Obrázek 1.1: Dva ortogonální způsoby posunutí

1. Bod který leží původně v našem počátku rotujeme kolem osy x o úhel $+d/R$

2. Následuje rotace kolem osy

$$\mathbf{n} = \mathbf{i_y} \cos\Theta + \mathbf{i_z} \sin\Theta \qquad \Theta = \frac{d}{R} \tag{1.1}$$

Jak již bylo řečeno předpokládáme, že Θ je malé. Potom lze první rotaci vyjádřit ve tvaru EXP ΘJ_x:

$$e^{\Theta J_x} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \cong \{I_3 + \Theta(y\partial_z - z\partial_y)\} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x \\ y - \Theta z \\ z + \Theta y \end{pmatrix} \tag{1.2}$$

Druhou rotaci můžeme zapsat analogicky a tedy složení obou rotací je dáno:

$$e^{\Theta(J_y \cos\Theta + J_z \sin\Theta)} e^{\Theta J_x} \tag{1.3}$$

Tuto grupovou operaci můžeme rozvinout do druhého řádu v Θ:

$$\begin{aligned} &\left\{ I + \Theta J_y + \Theta^2 J_z + \frac{(\Theta J_y)^2}{2!} + \cdots \right\} \left\{ I + \Theta J_x + \frac{(\Theta J_x)^2}{2!} + \cdots \right\} \\ &= I + \Theta(J_y + J_x) + \Theta^2 \left(J_z + \frac{1}{2} J_y^2 + \frac{1}{2} J_x^2 + J_y J_x \right) + \cdots \end{aligned} \tag{1.4}$$

Samozřejmě můžeme přemístění o délku d začít ve směru $+x$ a poté přemísťovat opět kolmo což je v (Obr. 1.1) naznačeno čísly $3, 4$. Takové posunutí odpovídá rotacím:

3. Bod který leží původně v našem počátku rotujeme kolem osy y o úhel Θ

4. Následuje rotace kolem osy

$$\mathbf{n}' = \mathbf{i_x} \cos\Theta - \mathbf{i_z} \sin\Theta$$

Složení těchto dvou rotací je dáno:

$$e^{\Theta(J_x \cos\Theta - J_z \sin\Theta)} e^{\Theta J_y} \tag{1.5}$$

A rozvoj do druhého řádu potom:

$$\begin{aligned} &\left\{ I + \Theta J_x - \Theta^2 J_z + \frac{(\Theta J_x)^2}{2!} + \cdots \right\} \left\{ I + \Theta J_y + \frac{(\Theta J_y)^2}{2!} + \cdots \right\} \\ &= I + \Theta(J_x + J_y) + \Theta^2 \left(-J_z + \frac{1}{2} J_x^2 + \frac{1}{2} J_y^2 + J_x J_y \right) + \cdots \end{aligned} \tag{1.6}$$

Obrazy severního pólu při transformacích $1, 2$ a $3, 4$ jsou různé a právě vzdálenost těchto obrazů je měřítkem poloměru R sféry. Pokud jsou obrazy totožné nacházíme se na rovině. Vzdálenost obrazů spočítáme odečtením výrazu (1.6) od (1.4). Tento rozdíl je roven:

$$3\left(\frac{d}{R}\right)^2 J_z \tag{1.7}$$

Měříme-li úhel ze středu sféry, je úhlová vzdálenost obrazů severního pólu:

$$3\left(\frac{d}{R}\right)^2$$

A tedy vzdálenost obou bodů na sféře je:

$$3d\left(\frac{d}{R}\right)$$

Z toho vyplývá, že znalost míry nekomutativnosti námi zavedených ortogonálních posunutí je dostačující k určení poloměru R za předpokladu, že známe délku d.

Pro vnějšího pozorovatele je výhodné měřit pohyby planetky udáním úhlů rotace kolem os x, y, z, které prochází středem. Pro lokálního pozorovatele, který se nachází na severním pólu, je zase vhodnější pohyb popsat udáním úhlu rotace kolem osy z spolu s posunutím ve směrech os x a y.

Z pohledu vnějšího pozorovatele lze tedy vyjádřit libovolnou konečnou rotaci planetky grupovou operací:

$$\mathrm{EXP}\{\Theta_x J_x + \Theta_y J_y + \Theta_z J_z\}$$

Kde J_x, J_y, J_z jsou generátory infinitezimálních rotací kolem os x, y, z a Θ_x, Θ_y, Θ_z jsou příslušné úhlové souřadnice. Jelikož J_y indukuje posunutí ve směru $+x$, které může být měřeno v násobcích délky d, můžeme psát:

$$\begin{aligned} \alpha d &= R\Theta_y \\ \Theta_y J_y &= \alpha P_x = \alpha\left(\frac{d}{R}J_y\right) \end{aligned} \tag{1.8}$$

kde P_x představuje pro lokálního pozorovatele generátor infinitezimálního posunutí ve směru $+x$. Podobně je tomu s generátorem J_x, který indukuje posunutí ve směru $-y$:

$$\begin{aligned} \beta d &= -R\Theta_x \\ \Theta_x J_x &= \beta P_y = \beta\left(\frac{-d}{R}J_x\right) \end{aligned} \tag{1.9}$$

Generátor J_z je společný pro oba pozorovatele, neboť nemění severní pól. Na základě předešlých vztahů jednoduše dostaneme komutační relace nové množiny generátorů:

$$\begin{aligned} [J_z, P_x] &= \left[J_z, \frac{d}{R}J_y\right] = \frac{d}{R}J_x = -P_y \\ [J_z, P_y] &= \left[J_z, \frac{-d}{R}J_x\right] = \frac{d}{R}J_y = +P_x \\ [P_x, P_y] &= \left[\frac{d}{R}J_y, \frac{-d}{R}J_x\right] = -\left(\frac{d}{R}\right)^2 J_z \end{aligned} \tag{1.10}$$

Je potřeba zdůraznit, že volba souřadného systému je zcela libovolná, neboť strukturní konstanty c_{ij}^k se při nesingulární transformaci transformují jako tenzor třetího řádu. Z předchozích komutací vidíme, že na podílu d/R je závislá pouze poslední z nich. Pokud je tedy d pevné a $R \to \infty$, potom se komutační relace (1.10) přibližují komutačním relacím Eukleidovy grupy $E(2) \cong ISO(2)$. Tento výsledek je možné interpertovat také tak, že R je fixní a $d \to 0$ takže *kontrahujeme* lokálního pozorovatele.

Pro $d/R \neq 0$ lze libovolný prvek algebry pozorovatele na severním pólu vyjádřit ve tvaru:

$$\begin{aligned} \alpha P_x + \beta P_y + \Theta_z J_z &= \alpha \left(\frac{d}{R} J_y \right) + \beta \left(\frac{-d}{R} J_x \right) + \Theta_z J_z \\ &= \left(\alpha \frac{d}{R} J_y \right) + \left(\beta \frac{-d}{R} J_x \right) + \Theta_z J_z \end{aligned} \tag{1.11}$$

Takže všechny konečné souřadnice α, β budou pocházet pro $d/R \to 0$ z oblasti algebry vnějšího pozorovatele, pro kterou platí:

$$\Theta_x = -\beta \frac{d}{R} \to 0 \qquad \Theta_y = \alpha \frac{d}{R} \to 0$$

Proto je algebra $iso(2)$ popsána "kontrahovanou" tedy v omezenou, zkrácenou oblastí původní algebry $so(3)$.

Tento příklad lze nalézt v [5], kde je také podrobnější komentář.

1.2 Definice

Přistupme nyní k systematickému zavedení pojmu kontrakce. Nechť V je komplexní (realný) N rozměrný vektorový prostor. Nechť je dále $L = (V, \mu)$ Lieova algebra s Lieovým součinem $\mu : V \times V \longrightarrow V$ (který je bilineární, antisymetrický a splňuje Jacobiho identitu). Strukturní konstanty C_{ij}^k, $(i,\, j,\, k = 1,\, 2, \dots,\, N)$ algebry L vzhledem k bázi $e_1,\, e_2, \dots,\, e_N$ jsou definovány:

$$\mu(e_i, e_j) = C_{ij}^k e_k \tag{1.12}$$

Definice 1.2.1. *Lieovy algebry $L = (V, \mu)$ a $L' = (V, \mu')$ nazýváme isomorfní a píšeme $L \cong L'$, právě když existuje $U \in Aut(V)$ tak, že platí:*

$$\mu'(x, y) = U^{-1} \mu(Ux, Uy); \quad x, y \in V \tag{1.13}$$

Vzhledem na stejnou bázi potom pro strukturní konstanty C_{ij}^k, resp. $C_{ij}'^k$ (1.13), příslušné k L, resp. L' platí ($U_j^i = U_{ij}$):

$$C_{ij}'^k = U_i^r U_j^s (U^{-1})_t^k C_{rs}^t \tag{1.14}$$

Definice 1.2.2. *Nechť je $T(\varepsilon) \in Aut(V)$, $0 < \varepsilon \leq 1$ množina nesingulárních lineárních zobrazení. Potom Lieovy algebry*

$$L_{T(\varepsilon)} = (V, \mu_{T(\varepsilon)}), \quad \varepsilon > 0,$$

kde

$$\mu_{T(\varepsilon)}(x,y) = T^{-1}(\varepsilon)\mu(T(\varepsilon)x, T(\varepsilon)y); \quad x, y \in V \tag{1.15}$$

jsou isomorfní s $L = (V, \mu)$. Pokud limita

$$\mu_T(x,y) = \lim_{\varepsilon \to 0} \mu_{T(\varepsilon)}(x,y) \tag{1.16}$$

existuje pro každé $x, y \in V$, potom je μ_T Lieuv součin a Lieova algebru $L_T = (V, \mu_T)$ nazýváme kontrakcí L množinou zobrazení $T(\varepsilon)$. Krátce píšeme

$$L \xrightarrow{T(\varepsilon)} L_T$$

Kontrakci nazýváme spojitou, právě když je spojité $T(\varepsilon)$ pro každé $0 < \varepsilon \leq 1$.

Triviální kontrakcí rozumíme:

(i) $L_T \cong L$
Postačující podmínkou je potom skutečnost, že $T(0) = \lim_{\varepsilon \to 0} T(\varepsilon)$ existuje a není singulární. Tato podmínka jak uvidíme není nutná.

(ii) L_T je abelovská algebra
Pro každé L, volba $T(\varepsilon) = \varepsilon\, 1$ dává kontrakci, kdy L_T je abelovská.

Netriviální kontrakcí potom tedy máme na mysli, že L_T není abelovská a zároveň neplatí $L_T \cong L$.
Saletanova definice kontrakce [6] navíc k (1.16) požaduje existenci limity

$$T(0) = \lim_{\varepsilon \to 0} T(\varepsilon) \tag{1.17}$$

přičemž $T(0)$ musí být singulární, abychom dostali netriviální kontrakci. Weimar-Woodsová tento požadavek opouští ze tří důvodů. Není totiž potřeba k dobré definici L_T, $T(0)$ nemusí v některých situacích vůbec existovat a za třetí tato podmínka není udržitelná při formulaci reciprocity kontrakce a deformace. Každopádně hlavní tvrzení 1.3.1 je formulováno pro obecný případ tak i pro případ, že $T(0)$ existuje.

Přirozený požadavek $T(1) = 1$, který lze vždy splnit nahrazením $T^{-1}(1)T(\varepsilon)$ místo $T(\varepsilon)$, neklademe, neboť není vždy vhodný.

Na závěr tohoto komentáře ještě poznamenejme, že lze relativně jednoduše ukázat, že po sobě jdoucí kontrakce dávají opět kontrakci.

U tvrzení 1.3.1 se setkáme se situací, kvůli které je nutné zavést pojem postupné kontrakce:

Definice 1.2.3. *Nechť je $T_\nu \in Aut(V)$, $\nu = 1, 2, 3, \dots$ posloupnost nesingulárních lineárních zobrazení. Pokud limita*

$$\mu_T(x,y) = \lim_{\nu\to\infty} \mu_{T_\nu}(x,y) \tag{1.18}$$

kde

$$\mu_{T_\nu}(x,y) = T_\nu^{-1}\mu(T_\nu x, T_\nu y); \quad x,y \in V \tag{1.19}$$

existuje pro každé $x, y \in V$, potom je μ_T Lieuv součin a Lieovu algebru $L_T = (V, \mu_T)$ nazýváme postupnou kontrakcí L posloupností zobrazení T_ν. Krátce píšeme

$$L \xrightarrow{T_\nu} L_T$$

Z rovnic (1.14)-(1.16) a (1.18)-(1.19) dostaneme, že strukturní konstanty algebry L_T jsou

$$(C_T)_{ij}^k = \lim_{\varepsilon\to 0} T(\varepsilon)_i^r T(\varepsilon)_j^s T^{-1}(\varepsilon)_t^k C_{rs}^t \tag{1.20}$$

pro kontrakci a

$$(C_T)_{ij}^k = \lim_{\nu\to\infty} (T_\nu)_i^r (T_\nu)_j^s (T_\nu^{-1})_t^k C_{rs}^t \tag{1.21}$$

pro postupnou kontrakci.

Definice 1.2.4. *Nechť pro dvě Lieovy algebry platí $L \cong L'$, potom kontrakce $L \xrightarrow{T(\varepsilon)} L_T$ a $L' \xrightarrow{S(\varepsilon)} L'_S$ nazýváme ekvivalentní, právě když $L_T \cong L'_S$. Pokud je zřejmě o jakých algebrách mluvíme, říkáme krátce, že $T(\varepsilon)$ a $S(\varepsilon)$ jsou ekvivalentní kontrakce. Analogicky definujeme ekvivalenci dvou postupných kontrakcí a kontrakce a postupné kontrakce.*

Uvedeme nyní dvě kritéria pro ekvivalenci kontrakcí.

Lemma 1.2.1. *Nechť je dána kontrakce $L = (V, \mu) \xrightarrow{T(\varepsilon)} L_T = (V, \mu_T)$ a nechť $A, B \in Aut(V)$. Potom je*

$$S(\varepsilon) = AT(\varepsilon)B^{-1} \tag{1.22}$$

ekvivalentní kontrakce.

Důkaz. Uvažujme Lieovu algebru $L' = (V, \mu') \cong L = (V, \mu)$ definovanou

$$\mu'(x,y) = A\mu(A^{-1}x, A^{-1}y); \quad x,y \in V. \tag{1.23}$$

Ze vztahů (1.15), (1.16), (1.22), (1.23) vidíme, že kontrakce

$$L' \xrightarrow{S(\varepsilon)} L'_S = (V, \mu'_s)$$

existuje. Dále platí:

$$\begin{aligned} B\mu_T(B^{-1}x, B^{-1}y) &= \lim_{\varepsilon\to 0} BT^{-1}(\varepsilon)\mu(T(\varepsilon)B^{-1}x, T(\varepsilon)B^{-1}y) \\ &= \lim_{\varepsilon\to 0} S^{-1}(\varepsilon)A\mu(A^{-1}S(\varepsilon)x, A^{-1}S(\varepsilon)y) \\ &= \lim_{\varepsilon\to 0} S^{-1}(\varepsilon)\mu'(S(\varepsilon)x, S(\varepsilon)y) = \mu'_S(x,y). \end{aligned}$$

z (1.13) tedy $L'_S \cong L_T$. □

Lemma 1.2.2. *Nechť je dána kontrakce* $L = (V, \mu) \xrightarrow{T(\varepsilon)} L_T = (V, \mu_T)$ *a posloupnost* $S_\nu \in Aut(V)$. *Pokud existuje posloupnost* ε_ν *taková, že*

$$0 < \varepsilon_\nu \leq 1, \quad \lim_{\nu \to \infty} \varepsilon_\nu = 0,$$

a posloupnosti A_ν, $B_\nu \in Aut(V)$ *takové, že limity*

$$A = lim_{\nu \to \infty} A_\nu \in Aut(V) \quad a \quad B = \lim_{\nu \to \infty} B_\nu \in Aut(V) \tag{1.24}$$

existují a

$$S_\nu = A_\nu T(\varepsilon_\nu) B_\nu^{-1}, \tag{1.25}$$

potom je S_ν *postupná kontrakce* L *ekvivalentní* $T(\varepsilon)$.

Důkaz. Za předpokladů (1.24), (1.25) postupná kontrakce $L' = (V, \mu') \xrightarrow{S_\nu} L'_S = (V, \mu'_s)$ existuje, takže můžeme psát:

$$\begin{aligned}
B\mu_T(B^{-1}x, B^{-1}y) &= \lim_{\varepsilon \to 0} BT^{-1}(\varepsilon)\mu(T(\varepsilon)B^{-1}x, T(\varepsilon)B^{-1}y) \\
&= \lim_{\nu \to \infty} B_\nu T^{-1}(\varepsilon_\nu)\mu(T(\varepsilon_\nu)B_\nu^{-1}x, T(\varepsilon_\nu)B_\nu^{-1}y) \\
&= \lim_{\nu \to \infty} S_\nu^{-1} A_\nu \mu(A_\nu^{-1} S_\nu x, A_\nu^{-1} S_\nu y) \\
&= \lim_{\nu \to \infty} S_\nu^{-1} A \mu(A^{-1} S_\nu x, A^{-1} S_\nu y) \\
&= \mu'_S(x, y)
\end{aligned}$$

Takže $L'_S \cong L_T$. □

Definice 1.2.5. *Kontrakci* $L \xrightarrow{T(\varepsilon)} L_T$ *nazýváme diagonální, právě když je matice* $T(\varepsilon)$, *vzhledem k nějaké pevné bázi, diagonální. Pokud navíc jsou prvky těchto diagonálních matic kladné pro* $\varepsilon > 0$, *mluvíme o pozitivně diagonální kontrakci. Analogicky definujeme příslušné pojmy pro postupné kontrakce.*

Definice 1.2.6. *Kontrakci* $L \xrightarrow{T(\varepsilon)} L_T$ *nazýváme zobecněnou* Iönü-*Wigner kontrakcí (dále jen zob. IW-kontrakce), jestliže matice automorfizmů* $T(\varepsilon)$, *vzhledem na nějakou bázi* $e_1, e_2, \ldots, e_N$, *nabývá tvaru*

$$T(\varepsilon)_{ij} = \delta_{ij}\varepsilon^{n_j}; \quad n_j \in \mathbb{R}; \; \varepsilon > 0; \; i, j = 1, 2, \ldots, N. \tag{1.26}$$

Nutno dodat, že se takové kontrakce, ovšem s podmínkou $n_j \geq 0$, objevily již v pracích [7, 8] pod názvem p-kontrakce. Snahou tehdy bylo nalézt jiné než de Sitterovy algebry, které by se kontrahovaly v Poincarého algebru. Ačkoliv v tomto konkrétním případě záporné exponenty nehrály roli, obecně je nelze opomenout.

Podle vztahů (1.12), (1.20), (1.26) máme pro zob. IW-kontrakci:

$$\mu_{T(\varepsilon)}(e_i, e_j) = \sum_{k=1}^{N} \varepsilon^{n_i + n_j - n_k} C_{ij}^k e_k. \tag{1.27}$$

Z podmínky existence limity (1.16) v definici kontrakce tedy vidíme, že se jedná o zob. IW-kontrakci algebry $L = (V, \mu)$ s exponenty n_j právě, když na pravé straně (1.27) nejsou exponenty $n_i + n_j - n_k$ záporné tzn. právě když:

$$C_{ij}^k = 0 \quad \text{jestliže} \quad n_i + n_j < n_k. \tag{1.28}$$

Takže pro kontrahovanou Lieovu algebru $L_T = (V, \mu_T)$ máme

$$(C_T)_{ij}^k = C_{ij}^k \quad \text{jestliže} \quad n_i + n_j = n_k \tag{1.29}$$

a v ostatních případech $(C_T)_{ij}^k = 0$. Takže celkem

$$\mu_T(e_i, e_j) = \sum_{\substack{k=1 \\ n_i + n_j = n_k}}^{N} C_{ij}^k e_k. \tag{1.30}$$

Jestliže jsou některé mocniny n_j rovny 0 a všechny ostatní rovny 1, mluvíme o jednoduché IW-kontrakci, která jak už bylo zmíněno v úvodu zavedena v [2].

Jestliže jsou exponenty v zob. IW-kontrakci celočíselné, potom je $\mu_{T(\varepsilon)}(e_i, e_j)$ polynom v ε, konkrétně:

$$\mu_{T(\varepsilon)}(e_i, e_j) = \sum_{\substack{k=1 \\ n_i + n_j = n_k}}^{N} C_{ij}^k e_k + \sum_{l=1}^{l_{max}} \varepsilon^l \sum_{\substack{k=1 \\ n_i + n_j - n_k = l}}^{N} C_{ij}^k e_k \tag{1.31}$$

1.3 Zobecněné Inönü-Wigner kontrakce

Věta 1.3.1. *Nechť je dána kontrakce $L \xrightarrow{T(\varepsilon)} L_T$ resp. postupná kontrakce $L \xrightarrow{T_\lambda} L_T$, potom existuje ekvivalentní zob. IW-kontrakce s celočíselnými koeficienty. Jestliže $T(0) = \lim_{\varepsilon \to 0} T(\varepsilon)$ resp. $T(0) = \lim_{\lambda \to \infty} T_\lambda$, potom lze celočíselné exponenty volit navíc kladné.*

Důkaz. Tvrzení dokážeme pro kontrakci $L \xrightarrow{T(\varepsilon)} L_T$. K jednoduché modifikaci pro postupnou kontrakci přidáme poznámku na závěr.

Důkaz rozložíme do tří kroků. V první části využijeme polárního rozkladu $T(\varepsilon)$ k získání diagonální matice $D(\varepsilon)$ s kladnými elementy $f_j(\varepsilon)$ pro $\varepsilon > 0$ ($j = 1, 2, \dots, N$). Ukážeme, že uvažujeme-li $\varepsilon_\nu \xrightarrow{\nu \to \infty} 0$ potom $D(\varepsilon)$ a $T(\varepsilon)$ splňují podmínky lemmatu 1.2.2 a tedy $T(\varepsilon)$ je ekvivalentní kladné diagonální postupné kontrakci $D_\nu = D(\varepsilon_\nu)$. Ve druhé části skonstruujeme zob. IW-kontrakci $S(\varepsilon)$ jejíž matice je tvaru $S(\varepsilon)_{ij} = \delta_{ij}\varepsilon^{n_j}$, $n_j \in \mathbb{R}$, která je ekvivalentní postupné kontrakci D_ν, a proto ekvivalentní $T(\varepsilon)$. Postup je takový, že nejdříve odvodíme konstrukci kontrakce $R(\varepsilon)$ jejíž matice splňuje $R(\varepsilon)_{ij} = \delta_{ij} c_j \varepsilon^{n_j}$, $c_j > 0$, a která vede na stejné limity strukturních konstant jako diagonální postupná kontrakce D_ν. Následně se zbavíme koeficientů c_j užitím lemmatu 1.2.1. V posledním kroku ukážeme, že reálné exponenty n_j mohou být vždy zvoleny celočíselné.

Část první. Na V zavedeme vnitřní součin. Jelikož je $T(\varepsilon)$ pro $\varepsilon > 0$ nesingulární, polární rozklad je (viz. [12]):

$$T(\varepsilon) = P(\varepsilon)U(\varepsilon), \quad \varepsilon > 0 \tag{1.32}$$

s jednoznačně určeným pozitivním (resp. realným symetrickým s kladnými vlastními čísly) oparátorem

$$P(\varepsilon) = (T(\varepsilon)T^*(\varepsilon))^{1/2} \tag{1.33}$$

a s jednoznačným unitárním (resp. reálným ortogonálním) operátorem

$$U(\varepsilon) = (T(\varepsilon)T^*(\varepsilon))^{-1/2}T(\varepsilon). \tag{1.34}$$

Nyní zkonstruujeme třídu pozitivně diagonálních matic $D(\varepsilon)$. Nechť vlastní čísla $P(\varepsilon)$ jsou

$$f_1(\varepsilon) \geq f_2(\varepsilon) \geq \cdots f_N(\varepsilon) > 0, \quad \varepsilon > 0 \tag{1.35}$$

a nechť $e_1,\ e_2, \ldots e_N$ je ortogonální báze V. Potom existují unitární operátory $W(\varepsilon)$, které diagonalizují $P(\varepsilon)$ vzhledem k této bázi následovně

$$P(\varepsilon) = W(\varepsilon)D(\varepsilon)W^*(\varepsilon), \tag{1.36}$$

kde

$$D(\varepsilon)e_j = f_j(\varepsilon)e_j \ ; \quad j = 1,\ 2, \ldots, N. \tag{1.37}$$

Protože množina unitárních resp. reálných ortogonálních operátorů na V je kompaktní, lze vybrat konvergentní posloupnost

$$W(\varepsilon(\kappa));\ \varepsilon(\kappa) \overset{\kappa\to\infty}{\longrightarrow}; \quad \kappa \in \mathbb{N}$$

s unitární resp. realnou ortogonální limitou

$$W = \lim_{k\to\infty} W(\varepsilon(\kappa)). \tag{1.38}$$

Opět na základě kompaktnosti vybereme podposloupnost κ_ν takovou, že $U(\varepsilon(\kappa_\nu))$ je konvergentní. Položme $\varepsilon_\nu = \varepsilon(\nu_\nu)$ potom je

$$U = \lim_{\nu\to\infty} U(\varepsilon_\nu) \tag{1.39}$$

unitární resp. reálný ortogonální. Spolu se vztahy (1.32,), (1.36) máme

$$T(\varepsilon_\nu) = W(\varepsilon_\nu)D(\varepsilon_\nu)W^*(\varepsilon_\nu)U(\varepsilon_\nu) \ ; \quad \varepsilon_\nu \overset{\nu\to\infty}{\longrightarrow} 0, \tag{1.40}$$

s unitárními, resp. reálnými orotgonálními operátory

$$W(\varepsilon_\nu) \quad \text{a} \quad W^*(\varepsilon_\nu)U(\varepsilon_\nu)$$

a s přihlédnutí ke vztahům (1.38), (1.39) jsou potom unitární resp. reálné ortogonálními i limity

$$W = \lim_{\nu\to\infty} W(\varepsilon_\nu) \quad W^*U = \lim_{\nu\to\infty} W^*(\varepsilon_\nu)U(\varepsilon_\nu).$$

Z lemmatu 1.2.2 potom dostaneme, že postupné kontrakce $D_\nu = D(\varepsilon_\nu)$ jsou ekvivalentní $T(\varepsilon)$.

Část druhá. Zkonstruovali jsme pozitivní diagonální postupnou kontrakci $L \xrightarrow{D_\nu} L_D$, přičemž vzhledem na bázi $e_1,\ e_2, \ldots, e_N$ zvolenou v první části důkazu, píšeme $(i,\ j = 1,\ 2, \ldots, N)$

$$(D_\nu)_{ij} = \delta_{ij} f_{j\nu}, \quad \nu \in \mathbb{N}, \tag{1.41}$$

kde

$$f_{j\nu} = f_j(\varepsilon_\nu) > 0. \tag{1.42}$$

Strukturní konstanty C_{ij}^k a $(C_D)_{ij}^k$ lieových algeber L a L_D, vzhledem na danou bázi splňují (1.21)

$$(C_D)_{ij}^k = C_{ij}^k \lim_{\nu\to\infty} \frac{f_{i\nu} f_{j\nu}}{f_{k\nu}}, \tag{1.43}$$

přičemž limita musí existovat kdykoli $C_{ij}^k \neq 0$. Odvodíme nyní koeficienty $n_j \in \mathbb{R}$ a $c_j > 0$ $(j = 1,\ 2, \ldots, N)$ takové, že platí:

$$\lim_{\nu\to\infty} \frac{f_{i\nu} f_{j\nu}}{f_{k\nu}} = \lim_{\varepsilon\to 0} \frac{c_i \varepsilon^{n_i} c_j \varepsilon^{n_j}}{c_k \varepsilon^{n_k}} \quad C_{ij}^k \neq 0. \tag{1.44}$$

Potom totiž $R(\varepsilon)_{ij} = \delta_{ij} c_j \varepsilon^{n_j}$ vede na stejné limity strukturních konstant a jedná se tedy o kontrakci ekvivalnetní D_ν. Jelikož $c_j \neq 0$, z lemmatu 1.2.1 plyne, že $R(\varepsilon)$ je ekvivalentní zob. IW kontrakci

$$S(\varepsilon)_{ij} = \delta_{ij} \varepsilon^{n_j}$$

Proto požadujeme čísla $c_j > 0$ kladná a $n_j \in \mathbb{R}$ s následujícími vlastnostmi

(i) Jestliže

$$\lim_{\nu\to\infty} \frac{f_{i\nu} f_{j\nu}}{f_{k\nu}} = 0, \quad \text{potom } n_i + n_j > n_k \tag{1.45}$$

a

(ii) jestliže

$$\lim_{\nu\to\infty} \frac{f_{i\nu} f_{j\nu}}{f_{k\nu}} > 0, \quad \text{potom} \left\{ \begin{array}{c} n_i + n_j = n_k \\ a \\ \frac{c_i c_j}{c_k} = \lim_{\nu\to\infty} \frac{f_{i\nu}}{f_{j\nu}} f_{k\nu} \end{array} \right. \tag{1.46}$$

Pokud $T(0) = \lim_{\varepsilon\to 0} T(\varepsilon)$ existuje, potom ukážeme, že můžeme n_j volit nezáporné. Tedy za předpokladu existence $T(0)$, pro uspořádané vlastní hodnoty $f_j(\varepsilon)$ existují podle [13] limity $\lim_{\varepsilon\to 0} f_j(\varepsilon) \geq 0$ a proto

$$\lim_{\nu\to\infty} f_{j\nu} \geq 0; \quad j = 1,\ 2, \ldots, N \tag{1.47}$$

existují. Takže za uvedených předpokladů stačí volit

$$n_j = 0 \quad \text{jestliže} \quad \lim_{\nu \to \infty} f_{j\nu} > 0 \tag{1.48}$$

$$n_j > 0 \quad \text{jestliže} \quad \lim_{\nu \to \infty} f_{j\nu} = 0 \tag{1.49}$$

$$n_j < 0 \quad \text{jestliže} \quad \lim_{\nu \to \infty} f_{j\nu}^{-1} > 0. \tag{1.50}$$

Protože v rovnici (1.43) je důležitý jen vztah posloupností $(f_{j\nu})_{\nu \in \mathbb{N}}$ pro $\nu \longrightarrow \infty$ zavádíme relaci ekvivalence:

Definice 1.3.1. *Nechť jsou $g = (g_\nu)_{\nu \in \mathbb{N}}$ a $h = (h_\nu)_{\nu \in \mathbb{N}}$ posloupnosti kladných čísel. Definujeme relaci ekvivalence*

$$g \sim h \quad \textit{jestliže} \quad \lim_{\nu \to \infty} \frac{g_\nu}{h_\nu} > 0, \tag{1.51}$$

a relaci dobrého uspořádání

$$g \succ h \quad \textit{jestliže} \quad \lim_{\nu \to \infty} \frac{g_\nu}{h_\nu} = 0. \tag{1.52}$$

Užíváme zápis

$$gh = (g_\nu, h_\nu)_{\nu \in \mathbb{N}} \tag{1.53}$$

$$g^\alpha = ((g_\nu)^\alpha)_{\nu \in \mathbb{N}}; \quad \alpha \in \mathbb{R}, \quad (g_\nu)^\alpha > 0. \tag{1.54}$$

Právě zavedené pojmy užijeme k postihnutí podstatných vlastností, které plynou z existence limit (1.43) a které využijeme k vyřešení (1.45) a (1.46). Zaveďme ještě speciální posloupnost f_0 definovanou $f_{0\nu} = 1,\ \nu \in \mathbb{N}$.

Jde nám nyní o to, zkonstruovat k třídě ekvivalence každé posloupnosti f_j ($j = 0, 1, 2, \ldots, N$) kladnou posloupnost $\hat{f}_j$ s vlastností

$$\hat{f}_j \sim f_j; \quad j = 0, 1, 2, \ldots, N \tag{1.55}$$

a takovou, že pro všechny indexy ($i, j, k = 0, 1, 2, \ldots, N$) platí

$$f_i \sim f_k \implies \hat{f}_i = \hat{f}_k \tag{1.56}$$

$$f_i f_j \sim f_k \implies \hat{f}_i \hat{f}_j = \hat{f}_k \tag{1.57}$$

$$f_i \succ f_k \implies \hat{f}_i \succ \hat{f}_k \tag{1.58}$$

a

$$f_i f_j \succ f_k \implies \hat{f}_i \hat{f}_j \succ \hat{f}_k. \tag{1.59}$$

Rozdělme dále množinu indexů $\{0, 1, 2, \ldots, N\}$ na dvě disjunktní podmnožiny

$$I_0 = \{j | \lim_{\nu \to \infty} f_{j\nu} > 0\} \tag{1.60}$$

a

$$I = \{0, 1, 2, \ldots, N\} \backslash I_0. \tag{1.61}$$

Pro $j \in I_0$ je volba $\hat{f}_j$ jasná, konkrétně

$$\hat{f}_j = \hat{f}_0 = f_0, \quad j \in I_0. \tag{1.62}$$

Předpokládejme na moment, že všechny $\hat{f}_j$, $j \in I$ byly zkonstruovány. Jelikož počet podmínek (1.58), (1.59) je konečný, existuje pevné $\nu_0 \in \mathbb{N}$ takové, že $(i,\ j,\ k = 0,\ 1,\ 2, \ldots, N)$

$$f_i \succ f_k \Longrightarrow 0 < \hat{f}_{i\nu_0} < \hat{f}_{k\nu_0} \tag{1.63}$$

a

$$f_i f_j \succ f_k \Longrightarrow 0 < \hat{f}_{i\nu_0} \hat{f}_{j\nu_0} < \hat{f}_{k\nu_0}. \tag{1.64}$$

Pro všechna $j = 0,\ 1,\ 2, \ldots, N$ nyní definujme

$$n_j = -\log \hat{f}_{j\nu_0} \in \mathbb{R} \tag{1.65}$$

a

$$c_j = \lim_{\nu \to \infty} \frac{f_{j\nu}}{\hat{f}_{j\nu}} > 0 \tag{1.66}$$

(limita existuje neboť $\hat{f}_j \sim f_j$).
Výrazy (1.56), (1.60)-(1.63), (1.65), (1.66) dávají

$$\begin{aligned}
\lim_{\nu \to \infty} f_{j\nu} > 0 \quad &\Longrightarrow \quad \hat{f}_j = \hat{f}_0 \Longrightarrow n_j = n_0 = 0;\ c_j = \lim_{\nu \to \infty} f_{j\nu}, \\
\lim_{\nu \to \infty} f_{j\nu} = 0 \quad &\Longrightarrow \quad f_j \succ f_0 \Longrightarrow \hat{f}_j \succ \hat{f}_0 \Longrightarrow n_j > n_0 = 0, \\
\lim_{\nu \to \infty} f_{j\nu}^{-1} = 0 \quad &\Longrightarrow \quad f_j \succ f_0 \Longrightarrow \hat{f}_j \succ \hat{f}_0 \Longrightarrow n_j < n_0 = 0,
\end{aligned}$$

Takže podmínky (1.48)-(1.50) jsou splněny.
Z (1.64) a (1.65) plyne, že $f_i f_j \succ f_k$ implikuje platnost (1.45). Podobně z (1.57), (1.65) a (1.66) dostaneme (1.46). Proto je rovnice (1.45) splněna, a tedy $S(\varepsilon)$ je požadovaná zob. IW-kontrakce.

Zbývá ke každému f_i, $i \in I$ zkonstruovat kladnou posloupnost $\hat{f}_i \sim f_i$, která splňuje (1.56)-(1.59), přičemž podmínky (1.58) a (1.59) jsou splněny díky (1.55) a (1.56), neboť stačí zvolit jednoho reprezentanta z příslušné třídy ekvivalence. Netriviální problém potom představuje pouze podmínka (1.57).

Myšlenka spočívá v tom, že chceme třídu ekvivalence příslušnou k $f_i, i \in I$ vyjádřit pomocí základní množiny, v jistém smyslu, nezávislých posloupností f_k, $k \in K \subset I$. Přesněji budeme uvažovat všechny platné relace $f_k \sim f_i f_j$; $i,\ j,\ k \in I \cup \{0\}$ a postupně z této množiny vybereme jen některé. (Protože $f_j \sim f_0, j \in I_0$, neztratíme žádnou informaci, kterou dává (1.56), pokud se omezíme na množinu indexů $I \cup \{0\}$)

Uvažujme nejprve situaci, kdy je alespoň jeden z indexů 0. Pokud jsou dva indexy nulové, musí být roven nule i třetí index a tedy dostaneme triviální relaci $f_0 \sim f_0^2$.

Nechť je jeden z indexů 0, potom rozlišíme dva případy:

(i) $f_0 \sim f_i f_j \Longleftrightarrow f_i \sim f_j^{-1}$

(ii) $f_k \sim f_0 f_j \Longleftrightarrow f_k \sim f_j$

Druhý případ je již obsažen v relacích ekvivalence. První možnost ovšem znamená, že z $f_i \sim f_j^{-1}$ plyne $\hat{f}_i = \hat{f}_j^{-1}$. Nejjednodušší způsob jak si poradit s inverzema je ke každé funkci f_i, $i \in I$ zavést "rozšířenou" třídu ekvivalence

$$\{f_j | j \in I;\ f_j \sim f_i \ nebo \ f_j \sim f_j^{-1}\}.$$

Z každé takové rozšířené třídy ekvivalence vybereme libovolný prvek f_j a nechť $J \subset I$ je množina indexů takto vybraných reprezentantů.

Uvažujme nyní platné relace ekvivalence

$$f_k^a \sim f_i^b f_j^c; \quad i,\, j,\, k \in J; \quad a,\, b,\, c = \pm 1. \tag{1.67}$$

Jakákoli relace tohoto typu s tím, že $i = j = k$ implikuje $f_k \sim f_0$, tedy k není prvkem I, a tak žádný takový případ nastat nemůže. Lze proto předpokládat, že dané relace mají nejméně dva odlišné indexy, a proto je bude vždy možné vyřešit pro libovolné f_j. Například $f_k \sim f_j^{-1} f_j^{-1}$, $j \neq k$ může být vyřešeno tak, že $f_k \sim f_j^{-2}$ nebo $f_j \sim f_k^{-1/2}$.

Případ první. Nechť řešení (1.67) nepřipouští dva různé indexy. Potom pro každé $j \in J$ definujeme $\hat{f}_j = f_j$. Pro zbývající indexy $i \in I \backslash J$ platí buď $f_i \sim f_j$ nebo $f_i \sim f_j^{-1}$ pro jisté $j \in J$. V prvním případě položíme $\hat{f}_i = \hat{f}_j$ a v druhém potom $\hat{f}_i = \hat{f}_j^{-1}$. Potom jsou tedy podmínky (1.56), (1.57) splněny.

Případ druhý. Nechť existuje alespoň jedno řešení (1.67) s nejméně dvěma různými indexy. Nechť toto řešení má na jedné straně ekvivalence f_{j_1}, výraz na druhé straně potom substituujeme za f_{j_1} ve všech zbývajících platných relacích. Položme $J_1 = J \backslash \{j_1\}$. Zbývající netriviální relace, pokud jsou nějaké, budou mít tvar

$$\prod_{j \in J_1} f_j^{\rho_j} \sim \prod_{j \in J_1} f_j^{\sigma_j}; \quad \rho_j,\, \sigma_j \in \mathbb{Q}$$

přičemž $\rho_{j_2} \neq \sigma_{j_2}$ pro nějaké $j_2 \in J_1$. Vybereme nyní jednu z těchto relací a zvolíme j_2 tak, aby platilo

$$f_{j_2} \sim \prod_{j \in J_2} f_j^{\tau_j},$$

kde $J_2 = J_1 \backslash \{j_2\}$ a

$$\tau_j = \frac{\sigma_j - \rho_j}{\rho_{j_2} - \sigma_{j_2}} \in \mathbb{Q}.$$

Opět substituujeme tento výraz za f_{j_2} ve všech ostatních platných relacích (včetně výrazu pro f_{j_1}). Postup opakujeme dokud nezbyde žádná netriviální relace. Počet kroků je konečný neboť i $J \subset I$ je konečná množina a každým krokem eliminujeme jeden index. Nejméně jedna f_j eliminována nebude, protože $f_j^\rho \sim f_j^\sigma$ s tím že $\rho \neq \sigma$ implikuje $f_j \sim f_0$ což není možné pro $j \in I$. Nechť $K \subset J \subset I$ značí množinu indexů j, které nebyly eliminovány, potom máme

$$f_j \sim \prod_{k\in K} f_k^{\rho_k(j)}; \quad \rho_k(j) \in \mathbb{Q}, \quad j \in J \subset I, \tag{1.68}$$

kde racionální mocniny $\rho_k(j)$ se vyskytují vždy pouze jednou, jelikož nejsou žádné zbývající netriviální relace pro f_k, $k \in K$.

Pro všechny zbylé indexy $i \in I\backslash J$ je buď $f_i \sim f_j$ nebo $f_i \sim f_j^{-1}$ pro nějaké $j \in J$. Takže pro každé $i \in I$ dostaneme rozklad, který je různý pro různé indexy

$$f_i \sim \prod_{k\in K} f_k^{\rho_k(i)}; \quad \rho_k(i) \in \mathbb{Q}; \quad i \in I \tag{1.69}$$

pomocí množiny v jistém smyslu nezávislých f_k, $k \in K \subset I$. Definujeme

$$\hat{f}_i = \prod_{k\in K} f_k^{\rho_k(i)}; \quad i \in I, \tag{1.70}$$

kde racionální mocniny $\rho_k(i)$ jsou určeny relací (1.69). Zřejmě $\hat{f}_k = f_k, k \in K$ a $\hat{f}_i \sim f_i$, $i \in I$. Z konstrukce tedy plyne, že podmínky (1.56) a (1.57) jsou splněny.

Část třetí. V předešlé části důkazu jsme ukázali (viz. (1.45) a (1.45)), že libovolné řešení $n_j \in \mathbb{R}$ $(j = 1, 2, \ldots, N)$ systému

$$n_i + n_j > n_j \quad \text{jestliže} \quad \lim_{\nu\to\infty} \frac{f_{i\nu} f_{j\nu}}{f_{k\nu}} = 0 \tag{1.71}$$

a

$$n_i + n_j = n_j \quad \text{jestliže} \lim_{\nu\to\infty} \frac{f_{i\nu} f_{j\nu}}{f_{k\nu}} > 0 \tag{1.72}$$

dává zob. IW-kontrakci identickou dané postupné kontrakci D_ν, a proto ekvivalentní $T(\varepsilon)$. Snažíme se nyní z nalezeného reálného řešení (viz. (1.65)) získat racionální řešení. Jelikož pro $k \in K$ máme $\hat{f}_k = f_k$, plyne z (1.70)

$$\log \hat{f}_i = \sum_{k\in K} \rho_k(i) \log \hat{f}_k, \quad i \in I.$$

Takže naše řešení z druhé části důkazu (viz. (1.65)) vypadá následovně

$$\left.\begin{array}{c} n_i = 0, \quad i \in I_0 \\ \text{a} \\ n_i = \sum_{k\in K} \rho_k(i) n_k, \quad i \in I, \end{array}\right\} \tag{1.73}$$

kde $\rho_k(i) \in \mathbb{Q}$ a n_k, $k \in K$ jsou nezávislé v tom smyslu, že pro libovolný výběr n_k, $k \in K$ takto zavedené n_i, $i \in I$ splňují (1.72). V (1.73) zavádíme n_i, $i \in I$ jako spojité funkce

n_k, $k \in K$, proto existují $n'_k \in \mathbb{Q}$, $k \in K$ dostatečně blízko hodnotám $n_k = -\log \hat{f}_{k\nu_0}$, které jsme získali v druhé části důkazu, a tedy

$$n'_i = \sum_{k \in K} \rho_k(i) n'_k, \quad i \in I,$$

spolu s

$$n'_i = n_i = 0, \quad i \in I_0$$

splňují nerovnosti (1.71), (1.48), (1.49) a (1.50). Celkem jsme získali racionální řešení se všemi požadovanými vlastnostmi a tedy i celočíselné řešení, neboť Mn'_i, $M > 0$ je řešení kdykoli je řešením i n'_i. $\square$

Poznámka 1.3.1. *Pro postupné kontrakce T_λ stačí v důkazu provést následující jednoduché změny. Posloupnost $\varepsilon(\kappa)$ zavedenou v (1.38) nahradíme podposloupností λ_κ, přičemž nyní budeme potřebovat verzi lemmatu 1.2.2 pro pro postupné kontrakce T_λ. Opět jediná změna bude spočívat v záměně posloupnosti ε_ν podposloupností λ_ν.*

Kapitola 2

Deformace Lieových algeber

2.1 Definice

Vzhledem na strukturní konstanty C_{ij}^k lze na množinu $\mathcal{L}_N$ všech komplexních, resp. reálných N-rozměrných Lieových algeber $L = (V\mu)$ nahlížet jako na podmnožinu $\mathbb{C}^{N^3}$, resp. $\mathbb{R}^{N^3}$, přičemž v $\mathcal{L}_N$ používáme eukleidovu topologoii. Akcí grupy $Aut(V) = GL(N, \mathbb{C}$ resp. $\mathbb{R})$ se $\mathcal{L}_N$ rozloží na orbity isomorfních Lieových algeber.

Deformaci definujeme jako spojitou trajektorii v $\mathcal{L}_N$ a nazýváme ji analytickou pokud je analytická i trajektorie. Deformace může procházet různými orbitami a může dokonce procházet od jedné k algbeře k druhé, která je s původní vždy neekvivalentní. Příkladem je jednoparametrická množina $A_{3,5}^a$ realných 3-rozměrných Lieových algeber definovaných $\mu(e_1, e_2) = e_1$, $\mu(e_2, e_3) = ae_2$, $0 < |a| < 1$ pokud bereme a jako parametr podél trajektorie.

Zde se budeme zabývat třídou deformací, které se nám budou hodit k problému kontrakcí. Nechť je tedy $L \xrightarrow{T(\varepsilon)} L_T$ spojitá kontrakce (dle věty 1.3.1 je každá kontrakce, resp. postupná kontrakce ekvivalentní nějaké polynomiální a tedy spojité kontrakci). Chceme nyní odvodit takovou deformaci, která bude postupovat v opačném směru ke kontrakci, tedy od L_T k L. Připomeňme , že z definice je každá spojitá kontrakce spojitá trajektorie v $\mathcal{L}_N$, která leží pro $\varepsilon > 0$ v jediné orbitě L a limitní bod $L_T = (V, \mu_T)$, kde $\mu_T = \lim_{\varepsilon \to 0} \mu_{T(\varepsilon)}$, leží v uzávěru této orbity.

Definice 2.1.1. *Deformaci, která je dána trajektorií v $\mathcal{L}_N$, která splňuje $\varepsilon \to L_\varepsilon = (V, \mu_\varepsilon)$, $0 \le \varepsilon \le 1$, přičemž $L_0 \not\cong L_1$ a zároveň $L_\varepsilon \cong L_1$ pro $0 < \varepsilon \le 1$, budeme nazývat deformace typu plateau a značit*

$$L_0 \xrightarrow{\mu_\varepsilon} L_1.$$

2.2 Vztah kontrakcí a deformací

Definice 2.2.1. *Spojitou kontrakci $L \xrightarrow{T(\varepsilon)} L_T$ a deformaci typu plateau $L_0 \xrightarrow{\mu_\varepsilon} L_1$ nazýváme vzájemně inverzní, právě když $L_0 = L_T$, $L_1 = L$ a $\mu_\varepsilon = \mu_{T(\varepsilon)}$, $0 < \varepsilon \le 1$, kde $\mu_{T(\varepsilon)}(x, y) = T(\varepsilon)^{-1}\mu(T(\varepsilon)x, T(\varepsilon)y)$; $x, y \in V$.*

Věta 2.2.1. *Nechť je dána spojitá kontrakce $L \xrightarrow{T(\varepsilon)} L_T$, potom k ní existuje inverzní deformace typu plateau $L_T \xrightarrow{\mu_\varepsilon} L$. Podobně naopak nechť je dána deformace typu plateau $L_T \xrightarrow{\mu_\varepsilon} L$, potom k ní existuje inverzní kontrakce $L \xrightarrow{T(\varepsilon)} L_T$, přičemž lze $T(\varepsilon)$ volit tak, že je stejně diferencovatelné jako μ_ε.*

Důkaz. Zřejmě každá spojitá kontrakce $L \xrightarrow{T(\varepsilon)} L_T$ má k sobě inverzní deformaci typu plateu $L_T \xrightarrow{\mu_\varepsilon} L$, kde $\mu_\varepsilon = \mu_{T(\varepsilon)}$. K důkazu opačné části tvrzení věty je potřeba zjistit, zda ke spojité trajektorii v $\mathcal{L}_N$, která je definovaná danou deformací typu plateau $L_T \xrightarrow{\mu_\varepsilon} L$, existuje množina spojitých automorfismů $T(\varepsilon) \in Aut(V)$ takových, že $\mu_\varepsilon = \mu_{T(\varepsilon)}$, $\varepsilon > 0$. Jelikož $L_\varepsilon = (V, \mu_\varepsilon) \cong L$, $\varepsilon > 0$, existuje $S(\varepsilon) \in Aut(V)$ takové, že $\mu_\varepsilon = \mu_{S(\varepsilon)}$ a $S(\varepsilon)$ je určeno jednoznačně až na násobení zleva prvkem $Aut(L)$. Dle klasického teorému pro tranzitivní akci grupy ([9], kapitola 2, věta 2.3) orbita L je homeomorfní s $Aut(V)/Aut(L)$. Takže našim úkolem je ukázat, že spojitou trajektorii v $Aut(V)/Aut(L)$ lze rozšířit na spojitou trajektorii $T(\varepsilon)$ v $Aut(\varepsilon)$. Jelikož globální řezy nemusejí existovat, není takové rozšíření přímočaré. Opět užijeme klasického výsledku z ([9], kapitola 2, lemma 4.1), podle kterého lokální analytický řez existuje, proto pro každé $x \in (0,1]$ existuje otevřený interval I_x, $x \in I_x$ a spojitá funkce $T_x : I_x \longrightarrow Aut(V)$ taková, že $\mu_{T_x} = \mu_\varepsilon$, $\varepsilon \in I_\varepsilon$. Uvažujme nyní dva překrývající se intervaly I_{x_1}, I_{x_2}. Nejednoznačnost v bodě $\varepsilon_0 \in I_{x_1} \cap I_{x_2}$ je dána operátorem $S \in Aut(L)$, takže lze $T_{x_2}(\varepsilon)$ nahradit $ST_{x_2}(\varepsilon)$, kde $ST_{x_2}(\varepsilon_0) = T_{x_1}(\varepsilon_0)$, tím "zespojitíme" obě řešení a dostaneme jedno spojité řešení na $I_{x_1} \cap I_{x_2}$. Položme

$$b = \inf\{0 < a < 1 : \text{existuje spojité řešení na } (a, 1]\}$$

potom zřejmě $b = 0$. Nechť nyní $a_n \to 0$, $0 < a_n < 1$. Víme, že existuje spojité řešení na každém intervalu $(a_n, 1]$, takže je lze všechny výše uvedeným způsobem "zespojitit" a získat tak spojité řešení $T(\varepsilon)$ na $(0,1]$ s tím, že platí $\mu_{T(\varepsilon)} = \mu_\varepsilon$. Lokální řez je analytický, takže předešlý postup lze použít k tomu, abychom sestavili $T(\varepsilon)$ stejně diferenceovatelné jako μ_ε. □

Zabývejme se nyní vztahem mezi kontrakcí a analytickou deformací typu plateau.

Věta 2.2.2. *Nechť je dána kontrakce $L \xrightarrow{T(\varepsilon)} L_T$. Potom existuje polynomiální deformace $L_T \xrightarrow{\mu_\varepsilon} L$.*

Důkaz. Podle věty 1.3.1 existuje zob. IW-kontrakce $L \xrightarrow{S(\varepsilon)} L_T$ s celočíselnými exponenty. Podle (1.31) je tato kontrakce inverzní k polynomiální deformaci $L_T \xrightarrow{\mu_\varepsilon} L$, kde $\mu_\varepsilon = \mu_{S(\varepsilon)}$. □

Z vět 2.2.1 a 2.2.2 plyne následující:

Důsledek 2.2.1. *Nechť je $L_T \xrightarrow{\mu_\varepsilon} L$ deformace typu plateu, potom existuje polynomiální deformace typu plateu z L_T do L.*

Kapitola 3

Příklady

Uveďme dva příklady zob. IW-kontrakcí s fyzikálním významem.

Příklad 3.1. Nechť je $L = (V, \mu) = A_{3,9}$ so(3) alegbra, takže

$$\mu(e_1, e_2) = e_3, \quad \mu(e_2, e_3) = e_1, \quad \mu(e_3, e_1) = e_2.$$

Je známo, že L má pouze dvě neekvivalentní netriviální kontrakce, je to iso(2) a Hesisenbergova algebra [10]. Mohou být získaný zob. IW-kontrakcemi $T(\varepsilon) = \delta_{ij}\varepsilon^{n_j}$ vzhledem na bázi e_1, e_2, e_3 následovně:

(i) $n_1 = n_2 = 1$, $n_3 = 0$ dává
$\mu_{T(\varepsilon)}(e_1, e_2) = \varepsilon^2 e_3$, $\mu_{T(\varepsilon)}(e_2, e_3) = e_1$ a $\mu_{T(\varepsilon)}(e_3, e_1) = e_2$. Takže $L_T = A_{3,6}$ (iso(2)).

(ii) $n_1 = n_2 = 1$, $n_3 = 2$ dává
$\mu_{T(\varepsilon)}(e_1, e_2) = e_3$, $\mu_{T(\varepsilon)}(e_2, e_3) = \varepsilon^2 e_1$ a $\mu_{T(\varepsilon)}(e_3, e_1) = \varepsilon^2 e_2$. Takže $L_T = A_{3,1}$ (Heisenbergova algebra).

Příklad 3.2. Ukážeme zob. IW-kontrakci de Sitterovy algebry so(3,2) v Galileiho algebru g(3). Označme generátory M_{ab}; a, $b = 1, 2, \ldots, 5$; $a < b$, a metrický tenzor $g_{11} = g_{22} = g_{33} = 1$, $g_{44} = g_{55} = -1$, položme:

$$K_i = M_{i4}, \quad P_i = M_{i5}, \quad H = M_{45}; \quad i = 1, 2, 3.$$

Společné nenulové komutátory g(3) a so(3,2) jsou (i, j, k, $l = 1$, 2, 3):

$$\begin{aligned}
[M_{ij}, M_{kl}] &= \delta_{jk}M_{il} + \delta_{il}M_{jk} - \delta_{ik}M_{jl} - \delta_{jl}M_{ik}, \\
[M_{ij}, K_k] &= \delta_{jk}K_i - \delta_{ik}M_j, \\
[M_{ij}, P_k] &= \delta_{jk}P_i - \delta_{ik}P_j, \\
[K_i, H] &= -P_i.
\end{aligned}$$

Zbylé nenulové komutátory so(3,2) jsou:

$$\begin{aligned}
[K_i, K_j] &= M_{ij}, \\
[K_i, P_j] &= -g_{ij} H, \\
[P_i, P_j] &= M_{ij}, \\
[P_i, H] &= K_i.
\end{aligned}$$

Zob. IW-kontrakce

$$T(\varepsilon)_{ab;a'b'} = \delta_{aa'} \delta_{bb'} \varepsilon^{n_{ab}},$$

kde

$$n_{ij} = 0, \quad n_{i4} = n_{45} = 1, \ a \ n_{i5} = 2$$

dává

$$\begin{aligned}
\mu_{T(\varepsilon)}(K_i, K_j) &= \varepsilon^2 M_{ij}, \\
\mu_{T(\varepsilon)}(K_i, P_j) &= -\varepsilon^2 g_{ij} H, \\
\mu_{T(\varepsilon)}(P_i, P_j) &= \varepsilon^4 M_{ij}, \\
\mu_{T(\varepsilon)}(P_i, H) &= \varepsilon^2 K_i.
\end{aligned}$$

Všechny ostatní komutátory zůstávají nezměněny takže $L_T = \mathrm{g}(3)$. Odpovídající analytická polynomiální deformace je tedy zřejmě polynomem v ε^2 stupně 2. Jedná se o deformaci odvozenou zde [11].

Závěr

Lieova grupa reprezentuje symetrie daného systému, takže metoda jak získat nové Lieovy grupy z předešlých grup symetrií je možným klíčem k získání nových fyzikálních teorií z teorií již existujících. Takovou metodu představují právě kontrakce, resp. deformace.

Zabýváme se zde pouze jednodušším problémem a sice s kontrakcemi Lieových algeber. Problém kontrakcí Lieových grup přináší řadu dalších problémů, které byly řešeny v [14]. Jak již bylo naznačeno v úvodu, otázka obecnosti kontrakcí je vyřešena pouze vrámci daných definic, které ale zároveň umožňují pracovat s velmi širokou třídou kontrakcí. Současně zde zavedené kontrakce jsou zřejmě speciálním případem deformací, takže dalším krokem k zobecnění teorie spojitých kontrakcí by mohlo být obecné studium právě deformací.

Literatura

[1] I. E. Segal, *Duke Math.* (1951)

[2] E. Inönü and E. P. Wigner, *Proc. Nat. Acad. Sci. U.S* (1953)

[3] M. de Montigny and J. Patera, *J. Phys.* (1991)

[4] E. Weimar-Woods, *J. Math. Phys.* (2000)

[5] R. Gilmore, *Lie Groups, Lie Algebras, and Some of Their Applications*, Wiley-Interscience, (1974)

[6] E. J. Saletan, *J. Math. Phys.* (1961)

[7] H. D. Doebner and O. Melsheimer, *Il Nuovo Cimento* (1967)

[8] G. C. Hegerfeld, *Il Nuovo Cimento* (1967)

[9] S. Helgason, *Differential Geometry and Symmetric Spaces*, Academic Press, (1962)

[10] E. Weimar-Woods, *J. Math. Phys.* (1991)

[11] J. M. Figueroa-O'Farril, *J. Math. Phys.* (1989)

[12] R. V. Kadison and J. R. Ringrose, *Fundamentals of the theory of Operator Algebras*, Academic Press, Inc. (1986)

[13] T. Kato, *Perturbation Theory for Linear Operators*, Springer-Verlag (1980)

[14] J. Mickelsson, J. Niederle *Commun. Math. Phys.* (1972)