ČESKÉ VYSOKÉ UČENÍ TECHNICKÉ, PRAHA
FAKULTA JADERNÁ A FYZIKÁLNĚ INŽENÝRSKÁ

Klasické řešení sigma modelu v zakřiveném pozadí

Autor: Jan Hýbl
Vedoucí: Prof. RNDr. Ladislav Hlavatý, DrSc.

V Praze dne 5.května

CZECH TECHNICAL UNIVERSITY, PRAGUE
FACULTY OF NUCLEAR SCIENCE AND
PHYSICAL ENGINEERING

Classical solution of the sigma model in a curved backround

Author: Jan Hýbl
Supervisor: Prof. RNDr. Ladislav Hlavatý, DrSc.

In Prague, 5th May

Poděkování

Chtěl bych poděkovat všem lidem, kteří mi při mé práci jakkoliv pomohli a především pak svému školiteli, Prof. RNDr. Ladislavu Hlavatému, DrSc., za jeho cenné rady a připomínky, bez kterých bych tuto práci jen těžko dokončil.

Název práce: **Klasické řešení sigma modelu v zakřiveném pozadí**

Autor: Jan Hýbl

Obor: Matematické inženýrství

Diplomová práce

Vedoucí práce: Prof. RNDr. Ladislav Hlavatý, DrSc. Katedra fyziky, Fakulta jaderná a fyzikálně inženýrská, České vysoké učení technické v Praze

Abstrakt: Naším úkolem je vyřešit pohybové rovnice σ-modelu na zakřiveném pozadí využitím faktu, že Poisson-Lieova T-dualita je transformuje na řešení plochého modelu. Řešení plochého modelu nalezneme tak, že najdeme transformaci souřadnic ve kterých je metrika konstantní. Na konci uvedeme explicitní tvar řešení σ-modelu v zakřiveném pozadí a několik jednoduchých typů řešení.

Klíčová slova: sigma model, Poisson-Lieova T-dualita, zakřivené pozadí, Drinfeldův double.

Title: **Clasical solution of Sigma model in curved backround**

Author: Jan Hýbl

Abstract: We have solved equations of motion of a σ-model in curved backround using the fact that Poisson-Lie T-duality can transform them into the equation in the flat one. For finding solution of the flat model we have used transformation of coordinates that makes the metric constant. At the end we write explicit form of solution of σ-model in curved backround and some simple types of this solution.

Key words: sigma model, Poisson-Lie T-duality, curved backround, Drinfeld double.

Obsah

1 Základní pojmy **8**

2 Sigma modely na Drinfeldově doublu **11**
- 2.1 Úvod 11
- 2.2 Sigma model odpovídající rozkladu (4|1) 12
- 2.3 Sigma model odpovídající rozkladu $(6_0|2)$ 14

3 Geometrické charakteristiky **18**
- 3.1 Základní vztahy 18
- 3.2 Sigma model odpovídající rozkladu (4|1) 19
- 3.3 Sigma model odpovídající rozkladu $(6_0|2)$ 19

4 Řešení modelu v plochém pozadí **21**

5 Řešení rovnic na Drinfeldově doublu **25**

6 Transformace souřadnic **29**

7 Řešení σ-modelu v zakřiveném pozadí **32**
- 7.1 Obecné řešení 32
- 7.2 Některé speciální volby řešení 34

8 Závěr **35**

9 Souhrn **37**

10 Summary **38**

Úvod

V této práci hledáme řešení σ-modelu šesti-dimenzionálního Drinfeldova doublu rozloženého do Maninovy trojice $(6_0|2)$. Řešení σ-modelu na tomto doublu je řešením příslušných pohybových rovnic. Toto řešení ovšem neumíme nalézt přímo a proto se budeme řídit postupem, o kterém víme, že k tomuto řešení vede. Za prvé vybereme rozklad Drinfeldova doublu takový, že bude izomorfní $(6_0|2)$ a σ-model na tomto rozkladu bude mít plochou metriku. V našem případě tento rozklad bude do Maninovy trojice $(4|1)$. Protože Maninova trojice $(4|1)$ je izomorfní $(6_0|2)$, existuje mezi nimi transformace souřadnic.

Vyřešíme tedy σ-model Drinfeldova doublu rozložený do Maninovy trojice $(4|1)$, což díky ploché metrice dokážeme. Abychom ale mohli přes transformaci souřadnic získat řešení σ-modelu rozkladu $(6_0|2)$, musíme znát ještě řešení zbývajících souřadnic doublu $(4|1)$. To znamená, že musíme vyřešit soustavu parciálních diferenciálních rovnic. Pokud tuto soustavu vyřešíme, zbývá nám už jen najít transformaci souřadnic. Použitím Poisson-Lieovy T-plurality, tj. dosazením řešení σ-modelu na rozkladu $(4|1)$ a řešení zbývajících souřadnic do transformace souřadnic, dostaneme řešení σ-modelu Drinfeldova doublu rozloženého do Maninovy trojice $(6_0|2)$.

V první kapitole se seznámíme se základními pojmy týkajícími se Drindeldova doublu, Maninovy trojice, σ-modelu a Poisson-Lieovy T-plurality. Dále je v ní uveden postup, kterého se budeme držet po celou diplomovou práci.

Druhá kapitola nazvaná Sigma modely na Drinfeldově doublu se věnuje konkrétní podobě σ-modelů na různých rozkladech Drinfeldova doublu, v tomto případě se jedná o rozklady do Maninových trojic $(4|1)$ a $(6_0|2)$. Sigma modely jsou plně určeny svým lagrangiánem a ten závisí na tenzorovém poli druhého řádu. Explicitní výpočty těchto tenzorových polí uvedeme v závěru každé podkapitoly.

Kapitola třetí, Geometrické charakteristiky, objasní pojmy jako je metrický tenzor, afinní konexe, Riemanův tenzor a plochost nebo křivost variety. Dále uvede proč je σ-model na rozkladu $(4|1)$ plochý a proč na rozkladu $(6_0|2)$ zakřivený. Nakonec napíšeme vztah mezi tenzorovým polem, metrickým tenzorem a torzí.

Další kapitola je nazvaná Řešení modelu v plochém pozadí. Shrne jeden z výsledků práce [1]. V této práci se redukoval problém nalezení řešení pohybových rovnic modelu na plochém pozadí na problém nalezení souřadnic, ve kterých má metrika konstantní tvar. V této kapitole napíšeme explicitní řešení σ-modelu Drinfeldova doublu rozloženého do Maninovy trojice $(4|1)$.

Pátá kapitola Řešení rovnic na Drinfeldově doublu hledá řešení parciálních diferenciálních rovnic pro souřadnice duální části Drinfeldova doublu $(4|1)$ po-

třebných pro transformaci souřadnic. Odvození tvaru těchto diferenciálních rovnic můžeme nalézt v článku [2].

V šesté kapitole nazvané Transformace souřadnic najdeme transformaci souřadnic pro rozklady Drinfeldova doublu $(6_0|2)$ *a* $(4|1)$*. Opět jako ve čtvrté kapitole jen zrekapitulujeme jeden z výsledků práce [3]. Uvedeme zde také explicitně vyřešenou transformaci a poznamenáme důležitost rozkladů Drinfeldova doublu na jednoparametrické grupy ve standardní a nestandardní parametrizaci.*

Závěrečná sedmá kapitola, Řešení σ*-modelu v zakřiveném pozadí, uvede explicitní řešení* σ*-modelu na Drinfeldově doublu rozloženého do Maninovy trojice* $(6_0|2)$*. Toto řešení je výsledkem Poisson-Lieovy transformace, která v našem případě transformuje řešení plochého* σ*-modelu na řešeí* σ*-modelu v zakřiveném pozadí, tj. rozkladu* $(6_0|2)$*.*

Kapitola 1

Základní pojmy

Jak už bylo v úvodu zmíněno, cílem mé diplomové práce je nalezení řešení σ-modelu na Drinfeldově doublu rozloženého do Maninovy trojice $(6_0|2)$. Tento σ-model, jak uvidíme v kapitole o geometrických vlastnostech, má neplochou metriku.

Začneme definicemi základních pojmů.

Drinfeldův double D je souvislá a jednoduše souvislá Lieova grupa, taková že její Lieova algebra $\mathcal{D}$ vybavená symetrickou, ad-invariantní, nedegenerovanou formou $\langle\cdot,\cdot\rangle$, se dá rozložit na dvě podalgebry $\mathcal{G}, \widetilde{\mathcal{G}}$, maximálně isotropní vzhledem k $\langle\cdot,\cdot\rangle$ a $\mathcal{D}$ jako vektorový prostor je direktním součtem $\mathcal{G}$ a $\widetilde{\mathcal{G}}$

$$\mathcal{D} = \mathcal{G} \oplus \widetilde{\mathcal{G}}$$

Maninova trojice je uspořádaná trojice[1] *algeber $(\mathcal{D}, \mathcal{G}, \widetilde{\mathcal{G}})$.*

Dimenze podalgeber se rovnají a zároveň můžeme pro každou z těchto podalgeber zvolit bázi $T_a \in \mathcal{G}$ a $\widetilde{T^b} \in \widetilde{\mathcal{G}}$, takovou že platí:

$$\langle T_a, T_b\rangle = \langle T^a, T^b\rangle = 0$$
$$\langle T_a, T^b\rangle = \delta_a^b$$

Máme tedy Drinfeldův double, teď si na něm zkonstruujeme σ-model. Sigma model je dán svým lagrangiánem:

$$L(F) = \partial_- \phi^\mu F_{\mu\nu} \partial_+ \phi^\nu \tag{1.1}$$

[1] V této práci budeme přejímat zažitou konvenci a Maninovu trojici budeme označovat dvojicí (.|.), kde čísla v této závorce udávají Bianchiho typy podalgeber

kde $\phi^\mu : R^2 \to R$ *,* $\mu = 1, .., dimG$ *a* $F_{\mu\nu}$ *je tensorové pole na grupě* G [2].

Jestliže $F_{\mu\nu}$ *splňuje*

$$\mathcal{L}_{\nu_i}(F)_{\mu\nu} = F_{\mu k} v_j^k \tilde{f}_i^{jk} v_k^\lambda F_{\lambda\nu} \tag{1.2}$$

kde v_i *tvoří bázi levoinvariantních polí na* G*,* $\tilde{f}_i^{jk}$ *jsou strukturní koeficienty Lieovy grupy* $\widetilde{G}$*, potom existuje vztah mezi řešeními pohybových rovnic Lagrangiánu* $L(F)$ *a* $L(F')$*, kde* F' *je tenzorové pole druhého řádu na grupě* $\widetilde{G}$

Vztah mezi řešeními $\phi(x_+, x_-)$ σ*-modelu s* F *a* $\phi'(x_+, x_-)$ σ*-modelu s* F' *je dán dvěmi možnými rozklady prvku Drinfeldova doublu d.*

$$d = g.\tilde{h} = \tilde{g}'.h' \qquad g, h' \in G, \tilde{g}', \tilde{h} \in \widetilde{G} \tag{1.3}$$

Zobrazení $\tilde{h} : R^2 \to \widetilde{G}$ *potřebné pro duální transformaci splňuje rovnice:*

$$((\partial_+ \tilde{h})\tilde{h}^{-1})_j \quad = -A_{+,j} := \quad -v_j^\lambda F_{\lambda\nu}(\phi)\partial_+\phi^\nu \tag{1.4}$$

$$((\partial_- \tilde{h})\tilde{h}^{-1})_j \quad = -A_{-,j} := \quad \partial_-\phi^\lambda F_{\lambda\nu}(\phi) v_j^\nu \tag{1.5}$$

Rovnice (1.3-1.5) definují tzv. Poisson-Lieovu T-dualitu. Pokud existují i jiné rozklady Drinfeldova doublu, můžeme jeho obecný prvek d zapsat jako:

$$d = g.\tilde{h} = \tilde{g}.h \qquad g \in G, \tilde{h} \in \widetilde{G}, \quad \tilde{g} \in \bar{G}, h \in \widetilde{\bar{G}}$$

Analogicky jako u (1.3) existuje vztah mezi řešeními $\phi(x_+, x_-)$ σ*-modelu s* F *(první rozklad) a* $\tilde{\phi}(x_+, x_-)$ σ*-modelu s* $\widetilde{F}$ [3]*(druhý rozklad). Tímto rozkladem a rovnicemi (1.3-1.5) je definována Poisson-Lieova T-pluralita viz [5].*

Pohybové rovnice σ*-modelu daného lagrangiánem (1.1) mají tvar*

$$\partial_-\partial_+\phi^\mu + \Gamma^\mu_{\nu\lambda}\partial_-\phi^\nu\partial_+\phi^\lambda = 0 \tag{1.6}$$

kde

$$\Gamma^\mu_{\nu\lambda} := \frac{1}{2} G^{\mu\rho}(F_{\rho\lambda,\nu} + F_{\nu\rho,\lambda} - F_{\nu\lambda,\rho}) \tag{1.7}$$

a $G_{\mu\rho} = \frac{1}{2}(F_{\mu\rho} + F_{\rho\mu})$ *je metrika.*

Pro libovolný model a jemu odpovídající F *ovšem může být velmi složité, někdy dokonce i nemožné, vyřešit pohybové rovnice. Mezi takové modely patří obzvláště ty se zakřiveným pozadím. Proto je nutné tuto potíž nějak obejít. Provádí se to tak, že nalezneme rozložení Drinfeldova doublu jehož model umíme vyřešit (může to být třeba to s plochou metrikou) a navíc požadujeme aby mezi těmito rozklady existovala transformace souřadnic. Mezi rozkladem do Maninovy*

[2]G a $\widetilde{G}$ jsou podgrupy grupy D jejichž algebry jsou $\mathcal{G}$ a $\widetilde{\mathcal{G}}$.

[3]Tenzorové pole $\widetilde{F}$ odpovídá σ-modelu Drinfeldova doublu rozloženého do Maninovy trojice $(\bar{\mathcal{G}}|\widetilde{\bar{\mathcal{G}}})$, zatímco F odpovídá σ-modelu k rozkladu $(\mathcal{G}|\widetilde{\mathcal{G}})$. Podalgebry Maninovy trojice budeme dále značit jen $(\mathcal{G}|\widetilde{\mathcal{G}})$ s tím, že bude zřejmé o jaké $\mathcal{G}$ a $\widetilde{\mathcal{G}}$ se jedná.

trojice $(6_0|2)$ *a rozkladem do* $(4|1)$ *s plochým pozadím taková transformace existuje.*

Uvedeme obecný postup pro vyřešení σ*-modelu na Drinfeldově doublu se zakřiveným pozadím.*

Postup:

1. *Musíme nalézt řešení* $\phi(x_+, x_-)$ *pohybových rovnic (1.6)* σ*-modelu v plochém pozadí s tenzorovým polem* F *[1].*
2. *Pro vypočtené* $\phi(x_+, x_-)$ *musíme nalézt* $\tilde{h}(x_+, x_-)$*, tj. řešení systému parciálních diferenciálních rovnic (1.4,1.5)*
3. *Mezi danými rozloženími Drinfeldova doublu* $d(x_+, x_-) = \phi(x_+, x_-)\tilde{h}(x_+, x_-)$ *a* $d(x_+, x_-) = \tilde{\phi}(x_+, x_-)h(x_+, x_-)$ *najdeme transformaci souřadnic [3].*
4. *Vyjádřením řešení* $\tilde{\phi}(x_+, x_-)$ *pomocí nalezené transforamce souřadnic jako funkci* $\phi, \tilde{h}$ *dostaneme řešení pohybových rovnic s tenzorovým polem* $\widetilde{F}$*.*

Kapitola 2

Sigma modely na Drinfeldově doublu

2.1 Úvod

Jak už jsme si řekli v minulé kapitole lagrangián σ-modelu je

$$L(F) = \partial_- \phi^\mu F_{\mu\nu} \partial_+ \phi^\nu \tag{2.1}$$

kde $F_{\mu\nu}$ je tenzorové pole druhého řádu na grupě G. Pokud F splňuje (1.2) pak jej lze podle [4] zapsat jako .

$$F_{\mu\nu}(g) = e^a_\mu(g) E_{ab}(g) (e^b_\nu(g))^T \tag{2.2}$$

e^a_μ jsou komponenty pravoinvariantních polí (vierbeinů)

$$e^a_\mu(g) = ((dg)_\mu g^{-1})^a \tag{2.3}$$

a

$$E_(g) = (E_0^{-1} + \Pi(g))^{-1}, \quad \Pi(g) \quad = b(g) a^{-1}(g) \tag{2.4}$$

Matice $a(g)$, $b(g)$ a $d(g)$ jsou $n \times n$ adjungované reprezentace grupy G na $\mathcal{D}$ v bázi $(T_i, \tilde{T}^j)$

$$Ad(g^{-1})^T = \begin{pmatrix} a(g) & 0 \\ b(g) & d(g) \end{pmatrix} \tag{2.5}$$

$$a(g)^{-1} = d(g)^T, \quad b(g)^T a(g) = -a(g)^T b(g) \tag{2.6}$$

Ze vztahů (2.1-2.4) vidíme, že lagrangián σ-modelu a tudíž i kovariantní vektorové pole F je určeno rozkladem $\mathcal{D} = (\mathcal{G}, \widetilde{\mathcal{G}})$ a konstantní maticí E_0. Zároveň F můžeme chápat jako součet metrického tensoru G_{ij} (tj. symetrická část F) a torzního potenciálu B_{ij} (antisymetrická část F), které definují geometrické vlastnosti σ-modelu.

2.2 Sigma model odpovídající rozkladu $(4|1)$

Maninova trojice $(4|1)$ se skládá ze dvou podalgeber stejné dimenze. První podalgebra $\mathcal{G}$ je typu "Bianchi 4" a je definovaná komutačními relacemi jejich bazických členů.

$$[T_1, T_2] = T_3 - T_2, \quad [T_2, T_3] = 0, \quad [T_3, T_1] = T_3 \tag{2.7}$$

a druhá podalgebra $\widetilde{\mathcal{G}}$ složená s bazických členů $(\widetilde{T}^1, \widetilde{T}^2, \widetilde{T}^3)$ je typu "Bianchi 1", tj. je abelovská.

Z definice Drinfeldova doublu plynou i ostatní komutační relace mezi prvky těchto dvou bazí. Nenulové členy jsou.

$$\begin{array}{lll} [T_1, \widetilde{T}^2] = \widetilde{T}^2, & [T_1, \widetilde{T}^3] = -\widetilde{T}^2 + \widetilde{T}^3, & [T_2, \widetilde{T}^2] = -\widetilde{T}^1 \\ [T_2, \widetilde{T}^3] = \widetilde{T}^1, & [T_3, \widetilde{T}^3] = -\widetilde{T}^1, & \end{array} \tag{2.8}$$

Pro obecný prvek l našeho doublu v Maninově trojici $(4|1)$ zvolíme rozklad do jenoparametrických podgrup v tzv. standardní parametrizaci[1].

$$l = g.\tilde{h} = e^{\phi^1 T_1} e^{\phi^2 T_2} e^{\phi^3 T_3} e^{\tilde{h}_1 \tilde{T}^1} e^{\tilde{h}_2 \tilde{T}^2} e^{\tilde{h}_3 \tilde{T}^3} \tag{2.9}$$

kde (T_1, T_2, T_3) a $(\widetilde{T}^1, \widetilde{T}^2, \widetilde{T}^3)$ jsou bazické vektory algeber $\mathcal{G}$ a $\widetilde{\mathcal{G}}$ v tom pořadí, v jakém pro ně máme definované komutační realce (2.7).

Na σ-model Drinfeldova doublu rozložen0ho do Maninovy trojice $(4|1)$ budeme klást ještě jeden požadavek a to, aby měl plochou metriku. To nastává pouze v případě vhodné volby konstatní matice E_0. Jedna z takových voleb E_0 je.

$$E_0 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & \kappa \\ 0 & \kappa & 0 \\ \kappa & 0 & 0 \end{pmatrix} \quad \kappa \in R \tag{2.10}$$

[1] Více o rozkladu řešitelných Lieových grup v [6]

Protože jsme nyní na Drinfeldově doublu rozloženém do Maninovy trojice $(4|1)$ *je* $b = 0$ *podle vzorce (2.5) a proto podle (2.4)*

$$E = E_0 \tag{2.11}$$

Podle (2.3) si spočítáme jak vypadají pravoinvariantní pole e

$$e = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & e^{-\phi^1} & \phi^1 e^{-\phi^1} \\ 0 & 0 & e^{-\phi^1} \end{pmatrix} \tag{2.12}$$

K plnému určení σ*-modelu potřebujeme znát jeho lagrangián a proto podle (2.1) i kovariantní tensorové pole* $F_{\mu\nu}$*. Prostým dosazením (2.12) a (2.11) do vzorce (2.2) spočítáme* $F_{\mu\nu}$*.*

$$F_{\mu\nu} = \begin{pmatrix} 0 & \kappa\phi^1 e^{-\phi^1} & \kappa e^{-\phi^1} \\ \kappa\phi^1 e^{-\phi^1} & \kappa e^{-2\phi^1} & 0 \\ \kappa e^{-\phi^1} & 0 & 0 \end{pmatrix} \tag{2.13}$$

Poznámka 1 *Povšimněme si některých vlastností* $F_{\mu\nu}$*, na první pohled vidíme, že je tento tensor symetrický a tudíž ho můžeme brát jako metrický tensor. Tato skutečnost vyplývá z toho, že algebra* $\widetilde{\mathcal{G}}$ *je abelovská a z naší volby* E_0*. Podíváme-li se na vzorec (2.4), vidíme, že* $\Pi(g) = 0$ *(*$b = 0$*). Z toho vyplývá, že* $E(g) = E_0$ *je symetrické. Podle (2.2) je symetrický i* $F_{\mu\nu}$*.*

Další příhodná vlastnost tensoru $F_{\mu\nu}$ *je, že závisí pouze na souřadnici* ϕ^1*. Tento fakt vyplývá z komutačních relací algeber* $\mathcal{G}$ *a* $\widetilde{\mathcal{G}}$ *(2.7) a standardní parametrizace Drinfeldova doublu (2.9).*

2.3 Sigma model odpovídající rozkladu $(6_0|2)$

Maninova trojice $(6_0|2)$ *se skládá ze dvou podalgeber stejné dimenze. První podalgebra* $\mathcal{G}$ *je typu "Bianchi* 6_0*" a je definovaná komutačními relacemi jejich bazických členů.*

$$[U_1, U_2] = 0, \quad [U_2, U_3] = U_1, \quad [U_3, U_1] = -U_2 \tag{2.14}$$

a druhá podalgebra $\widetilde{\mathcal{G}}$ *složená s bazických členů* $(\widetilde{U}^1, \widetilde{U}^2, \widetilde{U}^3)$ *je typu "Bianchi 2" a je definována komutačními relacemi jejich bazických členů.*

$$[\widetilde{U}^1, \widetilde{U}^2] = \widetilde{U}^3, \quad [\widetilde{U}^2, \widetilde{U}^3] = 0, \quad [\widetilde{U}^3, \widetilde{U}^1] = 0 \tag{2.15}$$

Z definice Drinfeldova doublu plynou i ostatní komutační relace mezi prvky těchto dvou bazí. Nenulové členy jsou.

$$\begin{array}{ll} [U_1, \widetilde{U}^2] = -\widetilde{U}^3, & [U_2, \widetilde{U}^1] = -\widetilde{U}^3 \\ [U_3, \widetilde{U}^1] = U_2 + \widetilde{U}^2, & [U_3, \widetilde{U}^2] = -U_1 + \widetilde{U}^1 \end{array} \tag{2.16}$$

Narozdíl od předchozí Maninovy trojice, pro obecný prvek l Drinfeldova doublu rozloženého do Maninovy trojice $(6_0|2)$ *použijeme tzv. nestandardní parametrizaci.*

$$l = g.\tilde{h} = e^{\tilde{\phi}^3 U_3} e^{\tilde{\phi}^2 U_2} e^{\tilde{\phi}^1 U_1} e^{h_3 \tilde{U}^3} e^{h_2 \tilde{U}^2} e^{h_1 \tilde{U}^1} \tag{2.17}$$

kde (U_1, U_2, U_3) *a* $(\widetilde{U}^1, \widetilde{U}^2, \widetilde{U}^3)$ *jsou bazické vektory algeber* $\mathcal{G}$ *a* $\widetilde{\mathcal{G}}$ *v tom pořadí, v jakém pro ně máme definované komutační realce (2.14,2.15). Důvod této volby bude zřejmý v kapitole Transformace souřadnic.*

Matici E_0 *z (2.4) si nemůžeme zvolit libovolně, jako to bylo v případě Maninovy trojice* $(4|1)$*. Ale protože algebry těchto dvou Maninových trojic jsou izomorfní ,tak existuje transformace, která nám transformuje vektory* (T_1, T_2, T_3), $(\widetilde{T}^1, \widetilde{T}^2, \widetilde{T}^3)$ *na vektory* (U_1, U_2, U_3), $(\widetilde{U}^1, \widetilde{U}^2, \widetilde{U}^3)$*. Transformace mezi jednotlivými rozklady do Maninových trojic Drinfeldových doublů jsou uvedeny v [7].*

$$\begin{pmatrix} T \\ \widetilde{T} \end{pmatrix} = \widetilde{\boldsymbol{C}} \cdot \begin{pmatrix} U \\ \widetilde{U} \end{pmatrix} \tag{2.18}$$

Matice $\widetilde{\mathbf{C}}$, *která transforuje bázi* $(6_0|2)$ *na* $(4|1)$ *má tvar.*

$$\widetilde{\mathbf{C}} \quad := \quad \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & -1 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ \frac{1}{2} & -\frac{1}{2} & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & 0 \end{pmatrix} \tag{2.19}$$

Pokud tuto matici zapíšeme v blokovém tvaru,

$$\tilde{\boldsymbol{C}} \quad := \quad \begin{pmatrix} P & Q \\ R & S \end{pmatrix} \tag{2.20}$$

potom podle [5]

$$E_0 = MN^{-1} \tag{2.21}$$

kde

$$M = S^T E_0 - Q^T \tag{2.22}$$
$$N = P^T - R^T E_0 \tag{2.23}$$

Dosazením (2.19) do vzorců (2.20 - 2.23) jednoduše zjistíme, že matice E_0 *odpovídající rozkladu* $(6_0|2)$ *má tvar:*

$$E_0 \quad := \quad \begin{pmatrix} \frac{1}{\kappa} & -\frac{1}{\kappa} & \frac{\kappa}{2} \\ -\frac{1}{\kappa} & \frac{1}{\kappa} & \frac{\kappa}{2} \\ \frac{\kappa}{2} & \frac{\kappa}{2} & 0 \end{pmatrix} \tag{2.24}$$

Jako další si spočítáme adjungovanou reprezentaci grupy G Drinfeldova doublu rozloženého do Maninovy trojice $(6_0|2)$. *Nesmíme ovšem zapomenout, že jsme narozdíl od Maninovy trojice* $(4|1)$ *rozložili Drinfeldův double do nestandadní parametrizace (2.17).*

$$Ad(g^{-1})^T = \begin{pmatrix} a(g) & 0 \\ b(g) & (a(g)^{-1})^T \end{pmatrix} \tag{2.25}$$

kde

$$a(g) = \begin{pmatrix} cosh(\tilde{\phi}^3) & sinh(\tilde{\phi}^3) & 0 \\ sinh(\tilde{\phi}^3) & cosh(\tilde{\phi}^3) & 0 \\ -\tilde{\phi}^2 & -\tilde{\phi}^1 & 0 \end{pmatrix} \tag{2.26}$$

$$b(g) = \begin{pmatrix} -\tilde{\phi}^3 sinh(\tilde{\phi}^3) & -\tilde{\phi}^3 cosh(\tilde{\phi}^3) & 0 \\ \tilde{\phi}^3 cosh(\tilde{\phi}^3) & \tilde{\phi}^3 sinh(\tilde{\phi}^3) & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \tag{2.27}$$

Dosazením (2.24),(2.26),(2.27) do (2.4) dostaneme.

$$E = \begin{pmatrix} \frac{1}{\kappa} & -\frac{1}{\kappa} & \frac{\kappa}{2} + \tilde{\phi}^3 \\ -\frac{1}{\kappa} & \frac{1}{\kappa} & \frac{\kappa}{2} - \tilde{\phi}^3 \\ \frac{\kappa}{2} - \tilde{\phi}^3 & \frac{\kappa}{2} + \tilde{\phi}^3 & -\kappa(\tilde{\phi}^3)^2 \end{pmatrix} \tag{2.28}$$

Stejně jako v předchozí části si spočítáme pravoinvariantní pole e podle vzorce (2.3), opět si připomeňme, že naše grupa je v nestandardní parametrizaci (2.17).

$$e = \begin{pmatrix} cosh(\tilde{\phi}^3) & -sinh(\tilde{\phi}^3) & 0 \\ -sinh(\tilde{\phi}^3) & cosh(\tilde{\phi}^3) & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \tag{2.29}$$

Stejným postupem jako u Maninovy trojice $(4|1)$*, tj. dosazením výsledků (2.28) a (2.29) do (2.2) dostaneme výsledný tvar tensorového pole* $\widetilde{F}$*.*

$$\widetilde{F}_{\mu\nu} = \begin{pmatrix} \frac{1}{\kappa}e^{2\tilde{\phi}^3} & -\frac{1}{\kappa}e^{2\tilde{\phi}^3} & \frac{1}{2}\kappa e^{-\tilde{\phi}^3} + \tilde{\phi}^3 e^{\tilde{\phi}^3} \\ -\frac{1}{\kappa}e^{2\tilde{\phi}^3} & \frac{1}{\kappa}e^{2\tilde{\phi}^3} & \frac{1}{2}\kappa e^{-\tilde{\phi}^3} - \tilde{\phi}^3 e^{\tilde{\phi}^3} \\ \frac{1}{2}\kappa e^{-\tilde{\phi}^3} - \tilde{\phi}^3 e^{\tilde{\phi}^3} & \frac{1}{2}\kappa e^{-\tilde{\phi}^3} + \tilde{\phi}^3 e^{\tilde{\phi}^3} & -\kappa(\tilde{\phi}^3)^2 \end{pmatrix} \tag{2.30}$$

Poznámka 2 *Stejně jako u Maninovy trojice* $(4|1)$ *se podíváme na nějaké vlastnosti tensorového pole* $\widetilde{F}_{\mu\nu}$*, tento tensor není narozdíl od* $F_{\mu\nu}$ *symetrický, ale v následující kapitole uvidíme, že pro výpočet geometrických charakteristik to nevadí.*

Další vlastnost tensoru $\widetilde{F}_{\mu\nu}$*, ale už příhodná, je, že závisí pouze na souřadnici* $\tilde{\phi}^3$*. Tento fakt vyplývá jako u předchoyzího případu z komutačních relací algeber* $\mathcal{G}$ *a* $\widetilde{\mathcal{G}}$ *(2.7) a z nestandardní parametrizace Drinfeldova doublu (2.17).*

Kapitola 3

Geometrické charakteristiky

3.1 Základní vztahy

V této kapitole popíšeme geometrické vlastnosti σ-modelu Drifeldova doublu rozloženého do obou Maninových trojic.

O geometrických vlastnostech σ-modelu vypovídá metrický tensor. Metrický tensor σ-modelu je definován jako

$$G_{ij} = \frac{1}{2}(F_{ij} + F_{ji}) \tag{3.1}$$

tj. symetrická čast tensorového pole F_{ij}

Dalším důležitým geometrický objektem je afinní konexe. Ta se dá vyjádřit pomocí metrického tensoru vztahem

$$\Gamma^i_{jk} := \frac{1}{2}G^{il}(G_{lk,j} + G_{jl,k} - G_{jk,l}) \tag{3.2}$$

A pomocí afinní konexe můžeme definovat Riemannův tensor

$$R^i_{jkl} = \Gamma^i_{jk,l} - \Gamma^i_{jl,k} + \Gamma^m_{jk}\Gamma^i_{lm} - \Gamma^m_{lk}\Gamma^i_{jm} \tag{3.3}$$

Ricciho tensor

$$R_{ij} = R^k_{ikj} \tag{3.4}$$

a Ricciho skalár.

$$R = R^i_i \tag{3.5}$$

3.2 Sigma model odpovídající rozkladu $(4|1)$

Na σ-modelu Drinfeldova doublu rozloženém do Maninovy trojice $(4|1)$ je tensor $G_{ij} = F_{ij}$, protože tensorové pole F_{ij} je symetrické.

$$G_{ij} = \begin{pmatrix} 0 & \kappa\phi^1 e^{-\phi^1} & \kappa e^{-\phi^1} \\ \kappa\phi^1 e^{-\phi^1} & \kappa e^{-2\phi^1} & 0 \\ \kappa e^{-\phi^1} & 0 & 0 \end{pmatrix} \tag{3.6}$$

Výpočtem Riemanova tensoru zjistíme, že je nulový, což podle tvrzení známeho z obecné teorie relativity znamená, že varieta je plochá. Právě o křivosti variety se v této práci vyjadřujeme jako o pozadí.

Poznámka 3 *Plochost této variety jsme v předchozí kapitole zajistili správnou volbou konstantní matice E_0.*

3.3 Sigma model odpovídající rozkladu $(6_0|2)$

Stejně jako u rozkladu $(4|1)$ použijeme vzorce (3.1) a z tensorového pole (2.30) vypočítáme metrický tensor.

$$G_{ij} = \begin{pmatrix} \frac{1}{\kappa}e^{2\tilde{\phi}^3} & -\frac{1}{\kappa}e^{2\tilde{\phi}^3} & \frac{1}{2}\kappa e^{-\tilde{\phi}^3} \\ -\frac{1}{\kappa}e^{2\tilde{\phi}^3} & \frac{1}{\kappa}e^{2\tilde{\phi}^3} & \frac{1}{2}\kappa e^{-\tilde{\phi}^3} \\ \frac{1}{2}\kappa e^{-\tilde{\phi}^3} & \frac{1}{2}\kappa e^{-\tilde{\phi}^3} & -\kappa(\tilde{\phi}^3)^2 \end{pmatrix} \tag{3.7}$$

Výpočtem Riemannova tensoru, zjistíme, že není nulový, což ukazuje že varieta není plochá.

Ricciho skalár je nulový, ale Ricciho tensor $R_{ij} = R^k_{ikj}$ je také nenulový a pro názornost ho uvedeme, protože pokud je nenulový, znamená to, že i Riemannův tensor je nenulový.

$$R_{jl} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$$

V předchozím případě jsme viděli, že tensorové pole bylo symetrické a rovnalo se tedy přímo metrickému tensoru. V případě rozkladu $(6_0|2)$ *tomu tak není, ale ukážeme, že pro výpočet afinní konexe, kterou jsme spočítali podle vzorce (3.2) můžeme použít vzorec (1.7), který se vyskytuje v pohybových rovnicích. Pro tensorové pole* $\widetilde{F}_{ij}$ *platí*

$$\widetilde{F}_{ij} = G_{ij} + B_{ij} \tag{3.8}$$

kde

$$B_{ij} = \frac{1}{2}(\widetilde{F}_{ij} - \widetilde{F}_{ji})$$

B *je tedy antisymetrická část tensorového pole* F.

Dále definujeme

$$H_{ijk} = \partial_i B_{jk} + \partial_j B_{ki} + \partial_k B_{ij} \tag{3.9}$$

a tento tensor H_{ijk} *nazveme torze.*

Lze snadno ukázat, že torze odpovídající tensorovému poli $\widetilde{F}_{ij}$ *(3.8) je rovna nule a také, že pro*

$$\begin{aligned} \widetilde{\Gamma}^i_{jk} &:= \tfrac{1}{2} G^{il}(F_{lk,j} + F_{jl,k} - F_{jk,l}) \\ \Gamma^i_{jk} &:= \tfrac{1}{2} G^{il}(G_{lk,j} + G_{jl,k} - G_{jk,l}) \end{aligned} \tag{3.10}$$

definované v (1.7) a (3.2) platí

$$\widetilde{\Gamma}^i_{jk} = \Gamma^i_{jk} \tag{3.11}$$

Tento vztah nám poslouží při ověřování řešení pohybových rovnic.

Kapitola 4

Řešení modelu v plochém pozadí

Řešení σ-modelu na Drinfeldově doublu s plochým pozadím (v tomto případě se jedná o Drinfeldův double rozložený do Maninovy trojice $(4|1)$*) se podle [1] redukuje na problém nalezení takové transformace souřadnic, kterou se metrický tensor G_{ij} převede na triviálně plochý (tj. má tvar Euklidova metrického tensoru, resp. Minkovského metrického tensoru).*

Pro nás bude ovšem dostačující nalézt, transformaci souřadnic která nám převede metrický tensor na libovolný konstantní metrický tensor. Účinnost tohoto postupu tkví v tom, že pohybové rovnice pro souřadnice ξ, ve kterých je metrický tensor konstatní, nabývají tvaru,

$$\partial_+\partial_-\xi_i = 0 \tag{4.1}$$

protože afinní konexe pro konstantní metrický tensor je rovná nule.

Řešení pohybových rovnic (4.1) lze snadno nalézt.

$$\begin{aligned} \xi_1 &= W_1(x_+) + Y_1(x_-) \\ \xi_2 &= W_2(x_+) + Y_2(x_-) \\ \xi_3 &= W_3(x_+) + Y_3(x_-) \end{aligned} \tag{4.2}$$

kde $W_i(x_+), Y_i(x_-)$ jsou libovolné funkce jediné proměnné.

Z transformačních vztahů afinní konexe a předpokladu, že v nových souřadnicích ξ bude metrika konstantní, dostaneme soustavu rovnic

$$\frac{\partial^2 \xi^i}{\partial \phi^j \partial \phi^k} = \Gamma^l_{jk} \frac{\partial \xi^i}{\partial \phi^l} \tag{4.3}$$

kterou vyřešíme vzhledem k souřadnicím ξ^i.

Metrický tensor σ*-modelu rozkladu* $(4|1)$ *je (3.6) a nenulové složky afinní konexe jsou* [1]*:*

$$\begin{array}{lll} \Gamma^1_{11} = -1 & \Gamma^2_{11} = e^{\phi^1} & \Gamma^2_{12} = -1 \\ \Gamma^3_{11} = \phi^1 e^{\phi^1} & \Gamma^3_{12} = \phi^1 & \Gamma^3_{22} = e^{-\phi^1} \end{array} \tag{4.4}$$

Rovnice (4.3) mají tvar:

$$\begin{aligned} \tfrac{\partial^2 \xi^i}{\partial \phi^1 \partial \phi^1} &= -\tfrac{\partial \xi}{\partial \phi^l} + e^{\phi^1} \tfrac{\partial \xi}{\partial \phi^2} + \phi^1 e^{\phi^1} \tfrac{\partial \xi}{\partial \phi^3} \\ \tfrac{\partial^2 \xi^i}{\partial \phi^1 \partial \phi^2} &= -\tfrac{\partial \xi}{\partial \phi^2} + \phi^1 \tfrac{\partial \xi}{\partial \phi^3} \\ \tfrac{\partial^2 \xi^i}{\partial \phi^1 \partial \phi^3} &= 0 \\ \tfrac{\partial^2 \xi^i}{\partial \phi^2 \partial \phi^2} &= e^{-\phi^1} \tfrac{\partial \xi}{\partial \phi^3} \\ \tfrac{\partial^2 \xi^i}{\partial \phi^2 \partial \phi^3} &= 0 \\ \tfrac{\partial^2 \xi^i}{\partial \phi^3 \partial \phi^3} &= 0 \end{aligned} \tag{4.5}$$

Tyto rovnice mají obecné řešení tvaru:

$$\begin{aligned} \xi^i(\phi^1, \phi^2, \phi^3) = {} & c\phi^3 + \tfrac{c}{2}(\phi^2)^2 e^{-\phi^1} + a\phi^2 e^{-\phi^1} + c\phi^1\phi^2 - c\phi^2 + \\ & + a\phi^1 + \tfrac{c}{2} e^{\phi^1} + d e^{-\phi^1} + b \end{aligned} \tag{4.6}$$

kde a,b,c,d jsou integrační konstanty. Tyto rovnice jsou stejné pro všechny indexy i. Integrační konstanty se určí z požadovaného tvaru konstantní metriky.

[1] Protože je afinní konexe symetrická vůči záměně spodních indexů, neuvádíme všechny členy

Zvolíme například

$$\left[\frac{\partial \xi^k}{\partial \phi^i}\right]_{\vec{y}=\vec{0}} = \delta_i^k \quad pak \quad G(\xi) = G(\vec{y} = \vec{0}) \tag{4.7}$$

Výsledné řešení, které nám převede metrický tensor (3.6) na konstatní tensor

$$G(\xi) = \begin{pmatrix} 0 & 0 & \kappa \\ 0 & \kappa & 0 \\ \kappa & 0 & 0 \end{pmatrix} \tag{4.8}$$

je

$$\begin{gathered} \xi_1 = -e^{-\phi^1} \\ \xi_2 = \phi^2 e^{-\phi^1} + \phi^1 + e^{-\phi^1} \\ \xi_3 = \tfrac{1}{2}e^{-\phi^1} + \phi^3 + \tfrac{1}{2}(\phi^2)^2 e^{-\phi^1} + \phi^1\phi^2 - \phi^2 + \phi^2 e^{-\phi^1} + \phi^1 - \tfrac{1}{2}e^{\phi^1} \end{gathered} \tag{4.9}$$

Z tohoto ovšem plyne, že řešení pohybových rovnic (1.6) získáme prostou inverzí transformace (4.9) a dosazením řešení pohybových rovnic v souřadnicích ξ^i *(4.1,4.2).*

$$\begin{aligned} \phi^1 = \quad & -ln(-W_1(x_+) - Y_1(x_-)) \\ \phi^2 = \quad & \tfrac{1}{(W_1(x_+)+Y_1(x_-))}(-ln(-W_1(x_+) - Y_1(x_-)) - \\ & -W_1(x_+) - Y_1(x_-) - W_2(x_+) - Y_2(x_-)) \\ \phi^3 = \quad & \tfrac{1}{2(W_1(x_+)+Y_1(x_-))}(-ln(-W_1(x_+) - Y_1(x_-))^2 - 1 + \\ & +(W_2(x_+) + Y_2(x_-))^2 - 2W_1(x_+) - 2Y_1(x_-) - \\ & -2W_2(x_+) - 2Y_2(x_-) - 2ln(-W_1(x_+) - Y_1(x_-)) + \\ & +2(W_3(x_+) + Y_3(x_-))(W_1(x_+) + Y_1(x_-))) \end{aligned} \tag{4.10}$$

Výsledek (4.10) je řešením pohybových rovnic Drinfeldova doublu rozloženého do Maninovy trojice $(4|1)$.

$$\partial_-\partial_+\phi^\mu + \Gamma^\mu_{\nu\lambda}\partial_-\phi^\nu\partial_+\phi^\lambda = 0$$

Úloha hledání řešení pohybových rovnic v plochém pozadí je pečlivě rozebrána v [1] pro různé Maninovy trojice.

Kapitola 5

Řešení rovnic na Drinfeldově doublu

Právě jsme vyřešili σ-model v plochém pozadí, tzn. našli jsme souřadnice Drinfeldova doublu (ϕ^1, ϕ^2, ϕ^3) jako funkce souřadnic světelného kužele (x_+, x_-) a to takové, že splňují pohybové rovnice σ-modelu (1.6) s afinní konexí Γ^i_{jk} závislou na tensorovém poli F_{ij} σ-modelu rozkladu $(4|1)$.

Jak už jsme si řekli, Drinfeldův double rozložený do Maninovy trojice $(4|1)$ *můžeme napsat jako součin jednoparametrických podgrup ve standardní parametrizaci.*

$$l = g.\tilde{h} = e^{\phi^1 T_1} e^{\phi^2 T_2} e^{\phi^3 T_3} e^{\tilde{h}_1 \tilde{T}^1} e^{\tilde{h}_2 \tilde{T}^2} e^{\tilde{h}_3 \tilde{T}^3} \tag{5.1}$$

My ovšem budeme potřebovat i řešení souřadnic $(\tilde{h}_1, \tilde{h}_2, \tilde{h}_3)$, které jsou řešením (1.4) a (1.5). V této chvíli máme vyřešené pohybové rovnice na Maninově trojici $(4|1)$*. V pohybových rovnicích se totiž vyskytují pouze souřadnice (ϕ^1, ϕ^2, ϕ^3) odpovídajíci podgrupě G.*

Důvod, proč se snažíme nalézt řešení souřadnic $(\tilde{h}_1, \tilde{h}_2, \tilde{h}_3)$ pomocí souřadnic světelného kužele (x_+, x_-), je ten, že podle uvedeného postupu v první kapitole, budeme provádět transformaci souřadnic z Drinfeldova doublu $(6_0|2)$ *do* $(4|1)$ *a pro tuto transformaci obecně potřebujeme všechny souřadnice.*

Dalším našim krokem bude tedy vyřešit parciální diferenciální rovnice pro souřadnice $(\tilde{h}_1, \tilde{h}_2, \tilde{h}_3)$ (viz. první kapitola).

$$
\begin{aligned}
((\partial_+\tilde{h})\tilde{h}^{-1})_j &= -A_{+,j} := & -v_j^\lambda F_{\lambda\nu}(\phi)\partial_+\phi^\nu \qquad (5.2)\\
((\partial_-\tilde{h})\tilde{h}^{-1})_j &= -A_{-,j} := & \partial_-\phi^\lambda F_{\lambda\nu}(\phi)v_j^\nu \qquad (5.3)
\end{aligned}
$$

kde ϕ^ν, ϕ^λ jsou řešení získané v předchozií kapitole, $F_{\mu\nu}$ je tensorové pole příslušné Drinfeldově doublu $(4|1)$ a v_j^λ jsou komponenty levoinvariantních polí.

$$
v_j^\lambda(g) = (g^{-1}(dg)_j)^\lambda \qquad (5.4)
$$

Vztah mezi tímto levoinvariantním polem v_j^λ a námi již spočteném pravoinvariantním polem e_i^μ (2.12) je následjící.

$$
v_j^\lambda(g)e_\lambda^i(g) = a_j^i(g) \qquad (5.5)
$$

kde matice $a(g)$, je $n\times n$ adjungovaná reprezentace grupy G na $\mathcal{D}$ v bázi $(T_i, \tilde{T}^j)$ viz. (2.5).

Díky tomu, že se pohybujeme na doublu $(4|1)$, levá strana soustavy diferenciálních rovnic, přejde na tvar

$$
\begin{aligned}
((\partial_+\tilde{h})\tilde{h}^{-1})_j &= \partial_+\tilde{h}_j\\
((\partial_-\tilde{h})\tilde{h}^{-1})_j &= \partial_-\tilde{h}_j
\end{aligned} \qquad (5.6)
$$

Uvědomme si, že souřadnice $\tilde{h}_j$ náleží podalgebře $\widetilde{\mathcal{G}}$, která je typu "Bianchi 1" tj. je Abelovská.

Vektory A_+ a A_- mají po dosazení tvar.

$$
A_+ = \begin{pmatrix}
\kappa e^{-\phi^1}((\phi^2\phi^1 - \phi^2 + \phi^3)\frac{\partial\phi^1}{\partial x_+} + (\phi^1 + e^{-\phi^1}\phi^2)\frac{\partial\phi^2}{\partial x_+} + \frac{\partial\phi^3}{\partial x_+})\\
\kappa e^{-\phi^1}(\phi^1\frac{\partial\phi^1}{\partial x_+} + e^{-\phi^1}\frac{\partial\phi^2}{\partial x_+})\\
\kappa e^{-\phi^1}\frac{\partial\phi^1}{\partial x_+}
\end{pmatrix} \qquad (5.7)
$$

$$A_- = \begin{pmatrix} -\kappa e^{-\phi^1}((\phi^2\phi^1 - \phi^2 + \phi^3)\frac{\partial\phi^1}{\partial x_-} + (\phi^1 + e^{-\phi^1}\phi^2)\frac{\partial\phi^2}{\partial x_-} + \frac{\partial\phi^3}{\partial x_-}) \\ -\kappa e^{-\phi^1}(\phi^1\frac{\partial\phi^1}{\partial x_-} + e^{-\phi^1}\frac{\partial\phi^2}{\partial x_-}) \\ -\kappa e^{-\phi^1}\frac{\partial\phi^1}{\partial x_-} \end{pmatrix} \tag{5.8}$$

Řešení těchto parciálních diferenciálních rovnic je

$$\begin{aligned} \tilde{h}_1 &= \kappa(Y_2(x_-) - W_2(x_+) + W_3(x_+)Y_1(x_-) - \\ &\quad -W_1(x_+)Y_3(x_-) - \Omega(x_+, x_-) + \alpha(x_+, x_-)) \\ \tilde{h}_2 &= \kappa(\Omega(x_+, x_-) + \beta(x_+, x_-)) \\ \tilde{h}_3 &= \kappa(Y_1(x_-) - W_1(x_+)) \end{aligned} \tag{5.9}$$

kde

$$\Omega(x_+, x_-) = W_1(x_+) - Y_1(x_-) - W_1(x_+)Y_2(x_-) + W_2(x_+)Y_1(x_-) \tag{5.10}$$

funkce $\alpha(x_+, x_-)$ *a* $\beta(x_+, x_-)$ *splňují*

$$\begin{aligned} \frac{\partial\alpha(x_+,x_-)}{\partial x_+} &= \frac{\partial W_3}{\partial x_+}W_1 - \frac{\partial W_2}{\partial x_+}W_1 - \frac{\partial W_1}{\partial x_+}W_3 + \frac{\partial W_1}{\partial x_+}W_2 \\ \frac{\partial\alpha(x_+,x_-)}{\partial x_-} &= -\frac{\partial Y_3}{\partial x_-}Y_1 + \frac{\partial Y_2}{\partial x_-}Y_1 + \frac{\partial Y_1}{\partial x_-}Y_3 - \frac{\partial Y_1}{\partial x_-}Y_2 \\ \frac{\partial\beta(x_+,x_-)}{\partial x_+} &= \frac{\partial W_2}{\partial x_+}W_1 - \frac{\partial W_1}{\partial x_+}W_2 \\ \frac{\partial\beta(x_+,x_-)}{\partial x_-} &= \frac{\partial Y_1}{\partial x_-}Y_2 - \frac{\partial Y_2}{\partial x_-}Y_1 \end{aligned} \tag{5.11}$$

Rovnice (5.11) je možno řešit až pro konkrétně zadané W_j, Y_j *(viz. kapitola Řešení* σ*-modelu v zakřiveném pozadí).*

Poznámka 4 *Povšimněme si, že matice* A_+ *a* A_- *jsou stejné až na změnu derivace a znaménka. Za tento výhodný tvar vděčíme symetrickému tensorovému poli* $F_{\mu\nu}$*.*

Kapitola 6

Transformace souřadnic

V této kapitole najdeme transformaci souřadnic Drinfeldova doublu pro různé rozklady do Maninových trojic.

Z možnosti zapsání obecného prvku Drinfeldova doublu jako

$$d(x_+, x_-) = \phi(x_+, x_-)\tilde{h}(x_+, x_-) = \tilde{\phi}(x_+, x_-)h(x_+, x_-) \tag{6.1}$$

kde $\phi(x_+, x_-) \in G, \tilde{h}(x_+, x_-) \in \widetilde{G}$ *a* $\tilde{\phi}(x_+, x_-) \in \bar{G}, h(x_+, x_-) \in \widetilde{\bar{G}}$*, vyplývá, že prvek Drinfeldova doublu rozložený na součin jednoparametrických podgrup můžeme napsat jako.*

$$l = e^{\phi^1 T_1} e^{\phi^2 T_2} e^{\phi^3 T_3} e^{\tilde{h}_1 \tilde{T}^1} e^{\tilde{h}_2 \tilde{T}^2} e^{\tilde{h}_3 \tilde{T}^3} = e^{\tilde{\phi}^3 U_3} e^{\tilde{\phi}^2 U_2} e^{\tilde{\phi}^1 U_1} e^{h_3 \tilde{U}^3} e^{h_2 \tilde{U}^2} e^{h_1 \tilde{U}^1} \tag{6.2}$$

kde $(\phi_1, \phi_2, \phi_3, \tilde{h}^1, \tilde{h}^2, \tilde{h}^3)$ *jsou souřadnice Drinfeldova doublu v Maninově trojici* $(4|1)$ *a souřadnice* $(\tilde{\phi}_1, \tilde{\phi}_2, \tilde{\phi}_3, h^1, h^2, h^3)$ *odpovídají Maninově trojici* $(6_0|2)$.

Známe transformační matici pro přechod od jedne báze Maninovy trojice ke druhé. Tuto matici můžeme najít v [7] a má tvar.

$$\begin{pmatrix} U \\ \widetilde{U} \end{pmatrix} = C \cdot \begin{pmatrix} T \\ \widetilde{T} \end{pmatrix} \tag{6.3}$$

$$\boldsymbol{C} := \begin{pmatrix} 0 & 0 & \frac{1}{2} & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1}{2} & 0 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{1}{2} & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & -\frac{1}{2} & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \end{pmatrix} \tag{6.4}$$

Poznamenáme, že matice $\boldsymbol{C}$ *je inverzní k matici* $\widetilde{\boldsymbol{C}}$ *z (2.19)*

Pokud si rozepíšeme transformaci (6.3) s maticí C (6.4) dostaneme

$$\begin{array}{ll} U_1 = \frac{1}{2}T_3 + \widetilde{T^2}, & \widetilde{U^1} = \frac{1}{2}T_2 + \widetilde{T^3} \\ U_2 = \frac{1}{2}T_3 - \widetilde{T^2} & \widetilde{U^2} = -\frac{1}{2}T_2 + \widetilde{T^3} \\ U_3 = T_1 & \widetilde{U^3} = \widetilde{T^1} \end{array} \tag{6.5}$$

a dosazením do (6.2):

$$l = e^{\tilde{\phi}^3 T_1} e^{\tilde{\phi}^2(\frac{1}{2}T_3 - \widetilde{T^2})} e^{\tilde{\phi}^1(\frac{1}{2}T_3 + \widetilde{T^2})} e^{h_3 \widetilde{T^1}} e^{h_2(-\frac{1}{2}T_2 + \widetilde{T^3})} e^{h_1(\frac{1}{2}T_2 + \widetilde{T^3})} \tag{6.6}$$

Naší snahou je převést tento prvek rozepsaný v nestandardní parametrizaci $(6_0|2)$ *do standardní parametrizace* $(4|1)$.

$$l = e^{\phi^1(\tilde{\phi},h)T_1} e^{\phi^2(\tilde{\phi},h)T_2} e^{\phi^3(\tilde{\phi},h)T_3} e^{\tilde{h}_1(\tilde{\phi},h)\tilde{T}^1} e^{\tilde{h}_2(\tilde{\phi},h)\tilde{T}^2} e^{\tilde{h}_3(\tilde{\phi},h)\tilde{T}^3} \tag{6.7}$$

Je vidět, že pokud dokážeme podgrupy v (6.6) rozepsat na jednoparametrické podgrupy a prokomutovat, lze rovnici (6.6) na tvar (6.7) převést. Velmi účinnou pomůckou je Baker-Hausdorffova formule, jejíž speciální tvar zní.

Věta *(Speciální tvar Baker-Hausdorffovy formule)*

Nechť platí podmínka záměnnosti

$$[X,[X,Y]] = [Y,[X,Y]] = 0 \tag{6.8}$$

Potom platí:

$$e^X e^Y = e^{X+Y} e^{\frac{1}{2}[X,Y]} \tag{6.9}$$

a

$$e^X e^Y = e^Y e^X e^{[X,Y]} \tag{6.10}$$

Převedením rovnice (6.6) na rovnici (6.7) za pomocí vztahů (6.9, 6.10) dostaneme transformaci souřadnic pro royklady Drinfeldovým doublem $(4|1)$ *a* $(6_0|2)$.

My ovšem potřebujeme transformaci obracenou, to je ale samozřejmě pouze inverzní transformace.

Neudělali jsme vlastně nic jiného než, že jsme zíkali souřadnice $(\tilde{\phi}^1, \tilde{\phi}^2, \tilde{\phi}^3, h_1, h_2, h_3)$ *rozkladu Drinfeldova doblu* $(6_0|2)$ *vyjádřené pomocí nám již známých souřadnic* $(\phi^1, \phi^2, \phi^3, \tilde{h}_1, \tilde{h}_2, \tilde{h}_3)$ *rozkladu* $(4|1)$.

$$\begin{aligned}
\tilde{\phi}^1 &= \phi^3 + \tfrac{1}{2}\tilde{h}_2 \\
\tilde{\phi}^2 &= \phi^3 - \tfrac{1}{2}\tilde{h}_2 \\
\tilde{\phi}^3 &= \phi^1 \\
h_1 &= \tfrac{1}{2}\tilde{h}_3 + \phi^2 \\
h_2 &= \tfrac{1}{2}\tilde{h}_3 - \phi^2 \\
h_3 &= \tilde{h}_1 - \tilde{h}_2\phi^2 - \tfrac{1}{2}\phi^2\phi^2 + \tfrac{1}{2}\phi^2\tilde{h}_3 + \tfrac{1}{8}\tilde{h}_3\tilde{h}_3
\end{aligned} \tag{6.11}$$

Poznámka 5 *Připomeňme, že volba rozepsat rozklad* $(4|1)$ *pomocí standardní parametrizace a rozklad* $(6_0|2)$ *pomocí nestandardní nebyla náhodnou věcí. Kdybychom totiž rozepsali oba rozklady pomocí stejné parametrizace, výsledků bychom pomocí Baker-Hausdorffovy formule nedosáhli.*

Kapitola 7

Řešení σ-modelu v zakřiveném pozadí

7.1 Obecné řešení

Řešení σ-modelu v zaříveném pozadí získáme když dosadíme (4.10) a (5.9) do transformačních rovnic (6.11).

Zavedeme si ještě zjednodušení.

$$W_i \equiv W_i(x_+) \quad Y_j \equiv Y_j(x_-)$$

Řešení:

$$\begin{aligned}
\tilde{\phi}^1 = \;& \tfrac{1}{2(W_1+Y_1)}(-ln(-W_1-Y_1)^2 - 2ln(-W_1-Y_1) + (W_2+Y_2)^2 - \\
& -2W_1 - 2Y_1 - 2W_2 - 2Y_2 - 1 + 2(W_3+Y_3)(W_1+Y_1)) + \\
& +\tfrac{1}{2}\kappa(\Omega(x_+,x_-) + \beta(x_+,x_-)) \\
\tilde{\phi}^2 = \;& \tfrac{1}{2(W_1+Y_1)}(-ln(-W_1-Y_1)^2 - 2ln(-W_1-Y_1) + (W_2+Y_2)^2 - \\
& -2W_1 - 2Y_1 - 2W_2 - 2Y_2 - 1 + 2(W_3+Y_3)(W_1+Y_1)) + \\
& -\tfrac{1}{2}\kappa(\Omega(x_+,x_-) + \beta(x_+,x_-)) \\
\tilde{\phi}^3 = \;& -ln(-W_1-Y_1)
\end{aligned} \tag{7.1}$$

kde

$$\Omega(x_+,x_-) = W_1 - Y_1 - W_1 Y_2 + W_2 Y_1 \tag{7.2}$$

funkce $\beta(x_+,x_-)$ *splňují*

$$\begin{aligned} \frac{\partial\beta(x_+,x_-)}{\partial x_+} &= \frac{\partial W_2}{\partial x_+} W_1 - \frac{\partial W_1}{\partial x_+} W_2 \\ \frac{\partial\beta(x_+,x_-)}{\partial x_-} &= \frac{\partial Y_1}{\partial x_-} Y_2 - \frac{\partial Y_2}{\partial x_-} Y_1 \end{aligned} \tag{7.3}$$

Jednoduše řečeno, toto je opravdu řešení pohybových rovnic

$$\partial_-\partial_+\tilde{\phi}^i + \widetilde{\Gamma}^i_{jk}\partial_-\tilde{\phi}^j\partial_+\tilde{\phi}^k = 0 \tag{7.4}$$

s afinní konexí $\widetilde{\Gamma}^i_{jk}$

$$\widetilde{\Gamma}^i_{jk} := \frac{1}{2} G^{il}(\widetilde{F}_{lk,j} + \widetilde{F}_{jl,k} - \widetilde{F}_{jk,l}) \tag{7.5}$$

která je podle (3.10) rovna (3.2) a je závislá na tensorovém poli $\widetilde{F}_{jk}$

$$\widetilde{F}_{ij} = \begin{pmatrix} \frac{1}{\kappa}e^{2\tilde{\phi}^3} & -\frac{1}{\kappa}e^{2\tilde{\phi}^3} & \frac{1}{2}\kappa e^{-\tilde{\phi}^3} + \tilde{\phi}^3 e^{\tilde{\phi}^3} \\ -\frac{1}{\kappa}e^{2\tilde{\phi}^3} & \frac{1}{\kappa}e^{2\tilde{\phi}^3} & \frac{1}{2}\kappa e^{-\tilde{\phi}^3} - \tilde{\phi}^3 e^{\tilde{\phi}^3} \\ \frac{1}{2}\kappa e^{-\tilde{\phi}^3} - \tilde{\phi}^3 e^{\tilde{\phi}^3} & \frac{1}{2}\kappa e^{-\tilde{\phi}^3} + \tilde{\phi}^3 e^{\tilde{\phi}^3} & -\kappa(\tilde{\phi}^3)^2 \end{pmatrix} \tag{7.6}$$

pro Drinfeldův double rozložený do Maninovy trojice $(6_0|2)$.

7.2 Některé speciální volby řešení

Ukažme si některé z řešení (7.1) pro speciální volby funkcí $W_i(x_+)$, $Y_j(x_+)$ *a konstanty* κ.

1.

$$\begin{aligned} \tilde{\phi}^1 &= W_3 + Y_3 - 1 \\ \tilde{\phi}^2 &= W_3 + Y_3 \\ \tilde{\phi}^3 &= 0 \end{aligned} \tag{7.7}$$

Pro volbu $\kappa = 1$, $W_1 = -1$, $Y_1 = 0$, $W_2 = 0$, $Y_2 = 0$, W_3 *a* Y_3 *jsou libovolné.*

2.

$$\begin{aligned} \tilde{\phi}^1 &= -\tfrac{1}{2(W_1+Y_1)}(4ln(-W_1 - Y_1) + 1 + (W_1^2 + Y_1^2)) \\ \tilde{\phi}^2 &= -\tfrac{1}{2(W_1+Y_1)}(4ln(-W_1 - Y_1) + 1 - (W_1^2 + Y_1^2)) \\ \tilde{\phi}^3 &= -ln(-W_1 - Y_1) \end{aligned} \tag{7.8}$$

Pro volbu $\kappa = 1$, $W_2 = -W_1$, $Y_2 = -Y_1$, $W_3 = -\frac{W_1}{2}$, $Y_3 = -\frac{Y_1}{2}$, W_1 *a* Y_1 *jsou libovolné.*

3.

$$\begin{aligned} \tilde{\phi}^1 &= -\tfrac{1}{2}(W_2 + Y_2)^2 + Y_2 \\ \tilde{\phi}^2 &= -\tfrac{1}{2}(W_2 + Y_2)^2 + W_2 - 1 \\ \tilde{\phi}^3 &= 0 \end{aligned} \tag{7.9}$$

Pro volbu $\kappa = 1$, $W_1 = 0$, $Y_1 = -1$, $W_3 = -\frac{W_2}{2}$, $Y_3 = -\frac{Y_2}{2}$, W_2 *a* Y_2 *jsou libovolné.*

Kapitola 8

Závěr

Podařilo se nám najít řešení σ-modelu Drinfeldova doublu rozloženého do Maninovy trojice $(6_0|2)$*. Zamyslíme-li se pozorně nad tím, jak jsme našich výsledků dosáhli, zjistíme, že je vlastně "náhoda", že jsme vůbec byli schopni toto řešení spočítat.*

Řešení σ-modelu Drinfeldova doublu rozloženého do Maninovy trojice $(4|1)$*, tj. na plochém pozadí, které jsme získali ve čtvrté kapitole jsme byli schopni vyřešit nejen díky plochosti pozadí, ale hlavně díky "hezkému" tvaru diferenciálních rovnic. V [1] bylo nalezeno řešení σ-modelu na plochém pozadí u několika rozkladů do Maninových trojic, takže podmínka řešitelnosti modelu na plochém pozadí se redukuje na podmínku řešitelnosti parciálních diferenciálních rovnic pro tzv. ploché souřadnice, ve kterých jsou pohybové rovnice σ-modelu triviální.*

Další případ, o kterém je třeba napsat je pátá kapitola a to Řešení rovnic na Drinfeldově doublu. Když se podíváme, jak vypadaly rovnice (5.2) a (5.3) vidíme, že levá strana nám díky abelovské podalgebře $\widetilde{\mathcal{G}}$ přešla na tvar ve kterém se vyskytují v každé rovnici pouze jedna derivace příslušné souřadnice. Díky tomu se nám systém parciálních diferenciálních rovnic (5.2) a (5.3) rozseparoval. Obecně bychom mohli dostat levé strany soustavy v takovém tvaru, že by se nám už soustavu nepodařilo rozseparovat. Navíc díky abelovské podalgebře $\widetilde{\mathcal{G}}$ a volbě E_0 byl tensor F_{ij} symetrický. Proto soustavy diferenciálních rovnic (5.2) a (5.3) jsou analogické, stačí nám tedy vyřešit pouze jednu a řešení druhé soustavy je stejné až na znaméko. Závěrem je tedy možné říci, že pokud bude podalgebra $\widetilde{\mathcal{G}}$ abelovská, potom jsme schopni tyto rovnice vyřešit.

Poslední kapitola u které musíme zmínit úskalí a těžkosti, které nás mohou potkat je Transformace souřadnic. Transformaci souřadnic lze samozřejmě u Drifeldova doublu provádět pouze mezi izomorfními rozklady. Klasifikaci rozkladů Drinfeldova doublu do izomorfních Maninových trojic najdeme v [7]. Jak už jsme v šesté kapitole řekli, rozložení Drinfeldova doublu do standardní nebo nestandardní parametrizace není náhodné a je třeba promyslet, kterou zvolíme. V [3] bylo zjišteno, že se může stát, že pokud v některých případech transformaci mezi shodnými parametrizacemi nelze provést, tak při záměně jedné parametrizace za druhou to lze. Proč tomu tak je? Je to proto, že pokud není splňena *podmínka záměnnosti (6.8) neplatí ani jedna z rovnic (6.9) a (6.10) speciálního tvaru Baker-Hausdorffovy fomule. A proto nejsme schopni příslušné jednoparametrické podgrupy prokomutovat. Ovšem pokud si napíšeme jeden z rozkladů v jiné parametrizaci, může se stát, že příslušné jednoparametrické podgrupy, u jejichž podalgeber nebyla splňena podmínka záměnnosti a jejíž podalgebry nešly prokomutovat, vůbec nebudeme muset prokomutovávat, protože se díky otočení pořadí podgrup při změně parametrizace ocitnou ve tvaru, jako bychom je prokomutovali. Může se ovšem vyskytnout ještě případ, kdy nebudeme schopni kvůli nesplnění podmínky záměnnosti použít rovnici (6.9). Potom můžeme rovnou skončit, protože pomocí Baker-Hausdorffovy formule se nám tuto transformaci nalézt nepodaří.*

To je tedy vše k podmínkám, za kterých jsme schopni nalézt řešení σ*-modelu Drinfeldova doublu rozloženého do Maninovy trojice* $(6_0|2)$*. Shrneme-li to:*

1. *Uměli jsme vyřešit soustavu parciálních diferenciálních rovnic (4.3).*

2. *Byli jsme schopni rozseparovat a vyřešit soustavu parciálních diferenciálních rovnic (5.2) a (5.3).*

3. *Nalezli jsme transformaci souřadnic pro jednotlivé rozklady Drinfeldova doublu, tzn. umíme rozepsat a prokomutovat všechny potřebné podgrupy.*

Kapitola 9

Souhrn

Cílem mé diplomové práce bylo nalezení řešení pohybových rovnic σ-modelu na zakřiveném pozadí, tímto je míněno na Drinfeldově doublu rozloženém do Maninovy trojice $(6_0|2)$. *Tetno cíl byl splňen.*

Při řešení jsem postupoval tak, že jsem, za prvé nalezl řešení σ-modelu na plochém pozadí, tj. na Drinfeldově doublu rozloženého do Maninovy trojice $(4|1)$. *Sigma model s volbou E_0 (2.10) na tomto rozkladu má plochou metriku a zároveň pro bazické vektory Maninovy trojice* $(4|1)$ *a bazické vektory trojice* $(6_0|2)$ *existuje podle [7] transformační matice. Řešení tohoto plochého doublu jsem nalezl tak, že jsem napočítal transformaci souřadnic ve kterých je metrický tensor konstantí. Celý postup je podrobně rozepsán v [1].*

Za druhé jsem vypočítal řešení parciálních diferenciálních rovnic (5.2) a (5.3) pro souřadnice $(\tilde{h}_1, \tilde{h}_2, \tilde{h}_3)$. *Čímž jsem dostal řešení pohybových rovnic na celém Drinfeldově doublu.*

Dále jsem využil Poisson-Lieovy T-plurality a nalezl transformaci souřadnic pro rozklady $(6_0|2)$ *a* $(4|1)$. *Tato transformace souřadnic existuje, ale ne vždy je možné ji najít. Podrobně je tato úloha řešena v [3].*

Nakonec jsem do této transformace souřadnic dosadil řešení σ-modelu na plochém pozadí a řešení diferenciálních rovnic (5.2) a (5.3). Uvedl jsme explicitní tvar řešení σ-modelu Drinfeldova doublu rozloženého do Maninovy trojice $(6_0|2)$. *Že tento výsledek je opravdu hledaným řešením σ-modelu na zakřiveném pozadí jsem ověřil v programu Maple 9.5 . Pro ilustraci jsem uvedl několik jednoduchých typů řešení.*

Kapitola 10

Summary

The goal of my Diploma thesis was finding solution of equations of motion in curved backround, i.e. on Drinfeld double decomposed into Manin triple $(6_0|2)$*. This goal was achieved.*

Firstly I found the solution of σ*-model in the flat backround, i.e. on the Drinfeld double decomposed into Manin triple* $(4|1)$*. Sigma model with choice* E_0 *(2.10) in this decomposition has a flat metric and the transform matrix for transition to* $(6_0|2)$ *is known [7]. I found solution of this flat model by transformation to such coordinates in which the metric tensor have a constant form. This coordinates were found in [1].*

Secondly I solved the solution of PDE's (5.2) and (5.3) for coordinates $(\tilde{h}_1, \tilde{h}_2, \tilde{h}_3)$*. In other words I found solution of equations of motion on the whole Drinfeld double.*

The next step I used Poisson-Lie T-plurality and found transformation of coordinates for decompositions $(6_0|2)$ *and* $(4|1)$*. This transformation exist, but not always it is not possible to find it [3].*

At the end, I inserted the solution of σ*-model in the flat backround and solution of PDE's (5.2) and (5.3) into the transformation of coordinates (6.11). I wrote explicit form of the solution of* σ*-model of Drinfeld double decomposed into Manin triple* $(6_0|2)$*. For illustration I wrote some simple types of solution.*

Literatura

[1] *Turek M.* Hledání plochých souřadnic σ-modelu, Diplomová práce, FJFI ČVUT Praha, hep-th/0512082, 2005

[2] *Klimčík C.,* Poisson-Lie T-duality,Nucl. Phys. Proc. Suppl. 46, 1996, 116 hep-th/9509095

[3] *Hýbl J.* Použití Baker-Hausdorff-Campbellovy formulí pro výpočet transformací souřadnic v Drinfeldových doublech,Výzkumný úkol, FJFI ČVUT Praha, 2005

[4] *Klimčík C., Ševera P.* Dual Non-Abelian Duality and the Drinfeld Double, Phys. Lett. B 351, 1995 hep-th/9502122

[5] *R.von Unge* Poisson-Lie T-plurality, JHEP 07, 014, 2002

[6] *A.O.Barut, R. Raczka:* Theory of group representations and application, PWN, Warszawa, 1977

[7] *Hlavatý, Šnobl:* Clasification of 6-dimensional Drinfeld doubles, Int. J. Mod. Phys. A17, 4043-4067, 2002

[8] *Hlavatý, Šnobl:* Mod. Phys. Lett., A 17, 429, 2002

[9] *Hlavatý L.:* Clasical solution of sigma model in curved backround, Phys. Lett. B 625, 285-290, 2005