ČESKÉ VYSOKÉ UČENÍ TECHNICKÉ, PRAHA
FAKULTA JADERNÁ A FYZIKÁLNĚ INŽENÝRSKÁ

VÝZKUMNÝ ÚKOL

Autor: Jan Hýbl
Školitel: Prof. RNDr. Ladislav Hlavatý, DrSc.

Praha 2005

Poděkování

Chtěl bych poděkovat všem lidem, kteří mi při mé práci jakkoliv pomohli a především pak svému školiteli, Prof. RNDr. Ladislavu Hlavatému, DrSc., za jeho cenné rady a připomínky, bez kterých bych tuto práci jen těžko dokončil.

Použití Baker-Hausdorff-Campbell formulí pro výpočet transformací souřadnic v Drinfeldových doublech

1. června 2005

Obsah

1 Úvod

Drinfeldovy doubly mají svůj nezastupitelný význam pro konstrukci Poisson - Lie T - duálních sigma modelů užívaných v teorii strun. Důležitým pojmem pro přiblížení struktury Drinfeldových doublů je Maninova trojice $(\mathcal{D}, \mathcal{G}, \widetilde{\mathcal{G}})$, což je rozklad Lieovy algebry $\mathcal{D}$, sudé dimenze, na dvě maximálně isotropní podalgebry $\mathcal{G}, \widetilde{\mathcal{G}}$, vzhledem k bilineární formě, kterou je tato algebra vybavená.

Lieova grupa Lieovy algebry, která lze napsat ve tvaru Maninovy trojice se nazývá Drinfeldův double. Jak už bylo zmíněno, Maninova trojice musí mít sudou dimenzi a proto každý Drinfeldův double také. Klasifikace dvou - dimensionálních doublů je triviální, patří tam pouze double složený ze dvou abelovských algeber dimense jedna. U čtyř - dimensionálních doublů je situace o něco komplikovanější, jejich klasifikaci můžete nalézt v [1].

V této práci se budeme zabývat šesti-dimensionálními doubly. Bylo nalezeno všech 22 neisomorfních tříd. Všechny isomorfní doubly obsažené v jedné třídě jsou spolu svázány regulární transformací [2]. Naším úkolem bude nalézt transformace souřadnic mezi některými isomorfními Drinfeldovými doubly.

2 Drinfeldův double

Definice 1 *Drinfeldův double D je spojitá Lieova grupa taková, že její Lieova algebra $\mathcal{D}$ vybavená symetrickou, ad-invariantní, nedegenerovanou formou $\langle \cdot, \cdot \rangle$, se dá rozložit na dvě podalgebry $\mathcal{G}, \widetilde{\mathcal{G}}$, maximálně isotropní vzhledem k $\langle \cdot, \cdot \rangle$ a $\mathcal{D}$ jako vektorový prostor je direktním součtem $\mathcal{G}$ a $\widetilde{\mathcal{G}}$*

$$\mathcal{D} = \mathcal{G} \oplus \widetilde{\mathcal{G}}$$

Uspořádaná trojice algeber $(\mathcal{D}, \mathcal{G}, \widetilde{\mathcal{G}})$ se nazývá Maninova trojice.

Dimenze podalgeber se rovnají a zároveň můžeme pro každou z těchto podalgeber zvolit bázi $T_a \in \mathcal{G}$ a $\widetilde{T^b} \in \widetilde{\mathcal{G}}$, takovou že platí:

$$\begin{aligned} \langle T_a, T_b \rangle = \langle T^a, T^b \rangle = 0 \\ \langle T_a, T^b \rangle = \delta_a^b \end{aligned}$$

Dále platí:

$$[T_a, T_b] = f_{ab}^c T_c \tag{1}$$

$$[\widetilde{T^a}, \widetilde{T^b}] = \widetilde{f_c^{ab}} \widetilde{T^c} \tag{2}$$

S použitím ad-invariance bilineární formy $\langle \cdot, \cdot \rangle$ můžeme odvodit vztah:

$$[T_a, \widetilde{T^b}] = f_{ca}^b \widetilde{T^c} + \widetilde{f_a^{bc}} T_c \tag{3}$$

3 Souřadnice na doublu

Drinfeldův double je Lieova grupa.

Definice 2 *Abstraktní grupa G je Lieova grupa pokud platí:*
i.G je analytická varieta
ii.Zobrazení $(x, y) \to xy^{-1}$ součinu variet $G \times G$ do G je analytické

Z této definice je zřejmé, že Drinfeldův double je varieta. Každý bod na varietě odpovídá prvku Lieovy grupy.

Drinfeld ukázal že každý prvek Drinfeldova doublu lze zapsat jako:

$$l = g\widetilde{g}, \quad kde \quad g \in G, \tilde{g} \in \widetilde{G} \tag{4}$$

Věta 1 *Každá řešitelná, spojitá Lieova grupa se dá zapsat ve tvaru součinu*

$$G = T_1 T_2 \dots T_m \tag{5}$$

jednoparametrických podgrup T_i, kde množina

$$G_k = T_{k+1} T_{k+2} \dots T_m \tag{6}$$

pro libovolné k, $1 \leq k < m$ je normální podgrupa v G. [3]

Poznámka 1 *Důležitost této věty tkví v tom, že každý prvek $g \in G$ nebo $\widetilde{g} \in \widetilde{G}$ můžeme zapsat pomocí různých parametrizací. Např. pro g uvedeme dva různé způsoby parametrizace:*

$$\begin{aligned} g &= g_1 g_2 g_3 \\ g &= g_3 g_2 g_1 \end{aligned}$$

Pokud grupu G rozložíme na jednoparametrické podgrupy tak, že obecný prvek l grupy G bude ve tvaru:

$$l = g\widetilde{g} = g_1 g_2 g_3 \widetilde{g}^1 \widetilde{g}^2 \widetilde{g}^3 = e^{x_1 T_1} e^{x_2 T_2} e^{x_3 T_3} e^{\tilde{x_1} \widetilde{T}^1} e^{\tilde{x_2} \widetilde{T}^2} e^{\tilde{x_3} \widetilde{T}^3} \tag{7}$$

potom parametry $(x_1, x_2, x_3, \tilde{x_1}, \tilde{x_2}, \tilde{x_3})$ plně určují l jako prvek grupy a tudíž jako prvek variety. Každou takovou n-tici parametrů můžeme ztotožnit s n-ticí souřadnic určujících bod na varietě. Naším úkolem tedy bude nalézt transformační vztahy souřadnic (parametrů) mezi některými Drinfeldovými doubly.

4 Baker-Hausdorff-Campbell formule

Konvence 1 *Libovolný prvek 6-dimensionálního doublu, jehož algebru lze rozložit na dvě podalgebry $\mathcal{G}$ a $\widetilde{\mathcal{G}}$ budeme psát ve tvaru,*

$$l = g\widetilde{g} = g_1 g_2 g_3 \widetilde{g}^1 \widetilde{g}^2 \widetilde{g}^3 = e^{x_1 T_1} e^{x_2 T_2} e^{x_3 T_3} e^{\tilde{x_1} \widetilde{T^1}} e^{\tilde{x_2} \widetilde{T^2}} e^{\tilde{x_3} \widetilde{T^3}} \tag{8}$$

kde $\{T_1, T_2, T_3\}$ a $\{\widetilde{T^1}, \widetilde{T^2}, \widetilde{T^3}\}$ jsou báze $\mathcal{G}$ a $\widetilde{\mathcal{G}}$, uspořádané tak, že splňují podmínku (6).

4.1 B-H-C formule

Řešení rovnice $z = ln(expX \cdot expY)$ pro nekomutativní X a Y

Věta 2 (B-H-C formule) *Nechť G je prostá a spojitá Lieova grupa s Lieovou algebrou $\mathcal{G}$.[4] Nechť*

$$exp : \mathcal{G} \rightarrow G$$

je exponenciální zobrazení, definujeme:

$$Z = X \star Y = ln(expX \cdot expY), \quad X, Y \in \mathcal{G}$$

Obecná formule je dána:

$$X \star Y = \sum_{n>0} \frac{(-1)^{n+1}}{n} \cdot \sum_{r_i+s_i>0, 1<i<n} \cdot \frac{(\sum_{i=1}^{n}(r_i+s_i))^{-1}}{r_1!s_1!\dots r_n!s_n!} \times (AdX)^{r_1} \times$$
$$\times (AdY)^{s_1} \times \dots \times (AdX)^{r_{n-1}} \times (AdY)^{s_{n-1}} \times (AdX)^{r_n} \times (AdY)^{(s_n-1)} Y \tag{9}$$

kde $ad(X)Y = [X, Y]$ je adjungovaný endomorfismus. Pokud pro členy sumy (9) platí, že $s_n = 0$, pak poslední tři členy napíšeme jako: $(AdX)^{r_n-1}X$

Uvedeme prvních sedm členů výše uvedené sumy:

$$X \star Y = X + Y + \frac{1}{2}[X, Y] - \frac{1}{12}[Y, [X, Y]] - \frac{1}{12}[X, [Y, X]] -$$
$$-\frac{1}{48}[Y, [X, [X, Y]]] - \frac{1}{48}[X, [Y, [X, Y]]] + \dots \tag{10}$$

Věta 3 (speciální případ B-H-C formule [4]) *Nechť platí předpoklady B-H-C formule. Navíc předpokládejme, že:*

$$[X,[X,Y]] = [Y,[X,Y]] = 0 \tag{11}$$

Potom platí:

$$e^X e^Y = e^{X+Y} e^{\frac{1}{2}[X,Y]} \tag{12}$$

z tohoto vztahu vyplývá:

$$e^X e^Y = e^Y e^X e^{[X,Y]} \tag{13}$$

Poznámka 2 *Podmínku (11) budeme od této chvíle označovat jako* ***podmínku záměnnosti***

5 Výsledky

V této práci se zabýváme výpočtem transformací souřadnic mezi některými Drinfeldovými doubly. Konkrétně, budeme počítat transformaci souřadnic mezi doubly.

$$
\begin{array}{ccc}
(3|1) & \rightarrow & (3|2) \\
(4|1) & \rightarrow & (4|2i) \\
(4|1) & \rightarrow & (4|2ii) \\
(5|1) & \rightarrow & (5|2i) \\
(4|1) & \rightarrow & (6_0|2)
\end{array}
\tag{14}
$$

Význam těchto označení našich doublů můžete nalézt v [2] a v [5], pro nás je nyní duléžité jen to, že první číslo nám říká, jak komutují mezi sebou vektory $\{T_1, T_2, T_3\}$ a druhé číslo v závorce udává typ komutace $\{\widetilde{T^1}, \widetilde{T^2}, \widetilde{T^3}\}$, což jsou báze $\mathcal{G}$ a $\widetilde{\mathcal{G}}$.

K našemu výpočtu budeme používat speciální tvar B-H-C formule (12),(13) a transformační vztahy, mezi jednotlivými Drinfeldovými doubly.

V této kapitole si také podrobně rozebereme některé příklady a budeme prezentovat naše výsledky transformačních vztahů mezi některými Drinfeldovými doubly. Jako první příklad uvedeme první ze vztahů (14), který si také podrobně rozebereme a objasníme všechny kroky. Dále budou následovat další tři analogické příklady. Poslední příklad $(4|1) \rightarrow (6_0|2)$ je jedinečný tím, že transformace souřadnic nejde počítat přímo. Podrobně si rozepíšeme postup a vysvětlíme si všechny kroky.

5.1 Transformace Drinfeldova doublu $(3|1) \rightarrow (3|2)$

5.1.1 Základní vztahy

Jako první věc si odvodíme komutační relace pro vektory algebry doublu $(3|1)$. Komutační relace pro bazické vektory $\{X_1, X_2, X_3\}$ a $\{\widetilde{X^1}, \widetilde{X^2}, \widetilde{X^3}\}$ jsou definovány v [1]:

$$[X_1, X_2] = -X_2 - X_3, \quad [X_2, X_3] = 0, \quad [X_3, X_1] = X_2 + X_3 \tag{15}$$

$$[\widetilde{X^1}, \widetilde{X^2}] = 0, \quad [\widetilde{X^2}, \widetilde{X^3}] = 0, \quad [\widetilde{X^3}, \widetilde{X^1}] = 0 \tag{16}$$

Protože vztahy (15) a (16) musí splňovat (1) a (2), můžeme spočítat koeficienty f_{ab}^c a $\widetilde{f_c^{ab}}$ a pomocí vztahu (3) odvodíme komutační relace mezi bazickými vektory navzájem.

Zde jsou naše nalezené komutační relace:

$$
\begin{array}{lll}
[X_1, X_2] = -X_3 - X_2 & [X_2, X_3] = 0 & [X_3, X_1] = X_2 + X_3 \\
[\widetilde{X^1}, \widetilde{X^2}] = 0 & [\widetilde{X^2}, \widetilde{X^3}] = 0 & [\widetilde{X^3}, \widetilde{X^1}] = 0 \\
[X_1, \widetilde{X^1}] = 0 & [X_1, \widetilde{X^2}] = \widetilde{X^2} + \widetilde{X^3} & [X_1, \widetilde{X^3}] = \widetilde{X^2} + \widetilde{X^3} \\
[X_2, \widetilde{X^1}] = 0 & [X_2, \widetilde{X^2}] = -\widetilde{X^1} & [X_2, \widetilde{X^3}] = -\widetilde{X^1} \\
[X_3, \widetilde{X^1}] = 0 & [X_3, \widetilde{X^2}] = -\widetilde{X^1} & [X_3, \widetilde{X^3}] = -\widetilde{X^1}
\end{array} \tag{17}
$$

Vztahy mezi bazickými vektory $\{X_1, X_2, X_3\}$, $\{\widetilde{X^1}, \widetilde{X^2}, \widetilde{X^3}\}$ odpovídající doublu $(3|1)$ a vektory $\{T_1, T_2, T_3\}$, $\{\widetilde{T^1}, \widetilde{T^2}, \widetilde{T^3}\}$ doublu $(3|2)$ jsou určeny transformační maticí [1]:

$$
(3|1) \quad \rightarrow \quad (3|2) \quad \mathbf{C} := \begin{pmatrix}
-1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
0 & \frac{1}{2} & -\frac{1}{2} & 0 & 1 & 1 \\
0 & -\frac{1}{2} & \frac{1}{2} & 0 & 1 & 1 \\
0 & 0 & 0 & -1 & 0 & 0 \\
0 & \frac{1}{2} & 0 & 0 & 0 & -1 \\
0 & \frac{1}{2} & 0 & 0 & 0 & 1
\end{pmatrix} \tag{18}
$$

Dále z definice matice (18) získáme:

$$
\begin{pmatrix} T \\ \widetilde{T} \end{pmatrix} = C \cdot \begin{pmatrix} X \\ \widetilde{X} \end{pmatrix} \tag{19}
$$

$$
\begin{array}{ll}
T_1 = -X_1, & \widetilde{T^1} = -\widetilde{X^1} \\
T_2 = \frac{1}{2}X_2 - \frac{1}{2}X_3 + \widetilde{X^2} + \widetilde{X^2} & \widetilde{T^2} = \frac{1}{2}X_2 - \widetilde{X^3} \\
T_3 = -\frac{1}{2}X_2 + \frac{1}{2}X_3 + \widetilde{X^2} + \widetilde{X^2} & \widetilde{T^3} = \frac{1}{2}X_2 + \widetilde{X^3}
\end{array} \tag{20}
$$

5.1.2 Transformace $(3|1) \rightarrow (3|2)$

Budeme postupovat podle (4) a věty o rozložitelnosti rešitelné grupy na jednoparametrické podgrupy (5). Napíšeme si obecný prvek l grupy $(3|2)$ ve tvaru (8):

$$
l = g\widetilde{g} = g_1 g_2 g_3 \widetilde{g}^1 \widetilde{g}^2 \widetilde{g}^3 = e^{y_1 T_1} e^{y_2 T_2} e^{y_3 T_3} e^{\tilde{y_1}\widetilde{T^1}} e^{\tilde{y_2}\widetilde{T^2}} e^{\tilde{y_3}\widetilde{T^3}} \tag{21}
$$

Abychom získali naše hledané transformace, budeme muset rovnici (21) převést na tvar (22) a to za pomocí speciálního tvaru B-H-C formule (12) a(13).

$$
l = g\widetilde{g} = g_1 g_2 g_3 \widetilde{g}^1 \widetilde{g}^2 \widetilde{g}^3 = e^{x_1 X_1} e^{x_2 X_2} e^{x_3 X_3} e^{\tilde{x_1}\widetilde{X^1}} e^{\tilde{x_2}\widetilde{X^2}} e^{\tilde{x_3}\widetilde{X^3}} \tag{22}
$$

Za vektory T_i a $\widetilde{T^j}$ dosadíme jejich vyjádření v bázi X_i a $\widetilde{X^j}$ podle (20). Dostaneme:

$$l = e^{-y_1 X_1} e^{y_2(\frac{1}{2}X_2 - \frac{1}{2}X_3 + \widetilde{X^2} + \widetilde{X^2})} e^{y_3(-\frac{1}{2}X_2 + \frac{1}{2}X_3 + \widetilde{X^2} + \widetilde{X^2})}$$

$$e^{-\tilde{y_1}\widetilde{X^1}} e^{\tilde{y_2}(\frac{1}{2}X_2 - \widetilde{X^3})} e^{\tilde{y_3}(\frac{1}{2}X_2 + \widetilde{X^3})} \tag{23}$$

Nejvhodnějším postupem jak prokomutovat exponenciely do tvaru (22) je:

1. Rozložit všechny exponenciely ve tvaru $e^{x_k(\alpha^i X_i + \beta_j \widetilde{X^j})}$ na exponenciely pouze s jedním vektorem v exponentu, pomocí formule (12) (lze pouze za podmínky záměnnosti (11)).
2. Prokomutovat jednotlivé exponenciely do stejného uspořádání, jaké je ve tvaru (22), podle (13)(lze také pouze za podmínky záměnnosti).
3. Všechny exponenciely se stejným vektorem v mocnině složit do jedné, rovněž pomocí (12). Podmínka záměnnosti je splněna automaticky, neboť stejné vektory spolu vždy komutují např. $e^{y_1 X_1} \cdot e^{y_2 \tilde{y_3} X_1} = e^{(y_1 + y_2 \tilde{y_3})X_1}$.

Poznámka 3 *Připomeneme, že y_i a $\tilde{y_j}$ (resp. x_i a $\tilde{x_j}$) jsou jen reálná čísla a tudíž s nimi budeme jako s čísly pracovat. Tzn. budeme je vytýkat, sčítat, nebo jimi roznásobovat. V některých případech, pokud nám půjde pouze o výsledek komutátoru vektorů, je ani nebudeme psát. Každý si je sám snadno doplní.*

Postupujme podle návodu. Vyjádříme si nejprve exponenciely s více generátory. Použijeme přitom formuli (12). Tato formule je aplikovatelná pro dva generátory, které splňují podmínku záměnnosti (11) (tuto podmínku nesmíme zapomenout ověřit). My si na tomto příkladu ukážeme zobecnění (12) na libovolný počet generátorů, pomocí obyčejného uzávorkování.

$$\begin{aligned}
&e^{(\frac{1}{2}X_2 - \frac{1}{2}X_3 + \widetilde{X^2}) + (\widetilde{X^3})} = \left\| [\tfrac{1}{2}X_2 - \tfrac{1}{2}X_3 + \widetilde{X^2}, \widetilde{X^3}] = 0 \right\| = \\
&= e^{(\frac{1}{2}X_2 - \frac{1}{2}X_3) + (\widetilde{X^2})} e^{\widetilde{X^3}} = \left\| [\tfrac{1}{2}X_2 - \tfrac{1}{2}X_3, \widetilde{X^2}] = 0 \right\| = \\
&= e^{(\frac{1}{2}X_2) - (\frac{1}{2}X_3)} e^{\widetilde{X^2}} e^{\widetilde{X^3}} = \left\| [\tfrac{1}{2}X_2, -\tfrac{1}{2}X_3] = 0 \right\| = \\
&= e^{\frac{1}{2}X_2} e^{-\frac{1}{2}X_3} e^{\widetilde{X^2}} e^{\widetilde{X^3}}
\end{aligned} \tag{24}$$

$$
\begin{aligned}
&e^{(-\frac{1}{2}X_2+\frac{1}{2}X_3+\widetilde{X^2})+(\widetilde{X^3})} = \left\|[-\tfrac{1}{2}X_2+\tfrac{1}{2}X_3+\widetilde{X^2},\widetilde{X^3}]=0\right\| = \\
&= e^{(-\frac{1}{2}X_2+\frac{1}{2}X_3)+(\widetilde{X^2})}e^{\widetilde{X^3}} = \left\|[-\tfrac{1}{2}X_2+\tfrac{1}{2}X_3,\widetilde{X^2}]=0\right\| = \\
&= e^{(-\frac{1}{2}X_2)+(\frac{1}{2}X_3)}e^{\widetilde{X^2}}e^{\widetilde{X^3}} = \left\|[-\tfrac{1}{2}X_2,\tfrac{1}{2}X_3]=0\right\| = \\
&= e^{-\frac{1}{2}X_2}e^{+\frac{1}{2}X_3}e^{\widetilde{X^2}}e^{\widetilde{X^3}}
\end{aligned}
\tag{25}
$$

U rovnic (24) a (25) nám vektory, nebo lépe řečeno, naše uzávorkování komutuje a proto jistě splňuje podmínku záměnnosti.

$$
\begin{aligned}
e^{(\frac{1}{2}X_2-\widetilde{X^3})} &= \left\|[X_2,\widetilde{X^3}]=-\widetilde{X^1}\right\| = e^{\frac{1}{2}X_2}e^{-\widetilde{X^3}}e^{-\frac{1}{2}(\frac{1}{2}[X_2,-\widetilde{X^3}])} = \\
&= e^{\frac{1}{2}X_2}e^{-\widetilde{X^3}}e^{-\frac{1}{4}\widetilde{X^1}}
\end{aligned}
\tag{26}
$$

$$
\begin{aligned}
e^{(\frac{1}{2}X_2+\widetilde{X^3})} &= \left\|[X_2,\widetilde{X^3}]=-\widetilde{X^1}\right\| = e^{\frac{1}{2}X_2}e^{\widetilde{X^3}}e^{-\frac{1}{2}(\frac{1}{2}[X_2,\widetilde{X^3}])} = \\
&= e^{\frac{1}{2}X_2}e^{\widetilde{X^3}}e^{\frac{1}{4}\widetilde{X^1}}
\end{aligned}
\tag{27}
$$

Toto je kompletní rozepsání našich exponenciel s více generátory. Podmínka záměnnosti je splněna i u (26) a (27), neboť $\widetilde{X^1}$ komutuje s každým z bazických vektorů.

Nyní se již můžeme pustit do komutování jednotlivých jednoparametrických podgrup. Jak je vidět, bude náš výpočet poněkud složitější, ale jen z důvodu velkého počtu členů. Dosadíme (24), (25), (26) a (27) do (23) a dostaneme:

$$
\begin{aligned}
l = \quad & e^{-y_1X_1}e^{\frac{1}{2}y_2X_2}e^{-\frac{1}{2}y_2X_3}e^{y_2\widetilde{X^2}}e^{y_2\widetilde{X^3}}e^{-\frac{1}{2}y_3X_2}e^{\frac{1}{2}y_3X_3}e^{y_3\widetilde{X^2}} \\
& e^{y_3\widetilde{X^3}}e^{-\tilde{y_1}\widetilde{X^1}}e^{\frac{1}{2}\tilde{y_2}X_2}e^{-\tilde{y_2}\widetilde{X^3}}e^{-\frac{1}{4}\tilde{y_2}\tilde{y_2}\widetilde{X^1}}e^{\frac{1}{2}\tilde{y_3}X_2}e^{\tilde{y_3}\widetilde{X^3}}e^{\frac{1}{4}\tilde{y_3}\tilde{y_3}\widetilde{X^1}}
\end{aligned}
\tag{28}
$$

Začneme tedy komutovat. Nejprve se pokusíme prokomutovat na první místo e^{X_1}, potom e^{X_2} a nakonec e^{X_3}, budeme se snažit o to, abychom převedli náši rovnici na tvar (22). Během našeho výpočtu budeme používat speciální tvar B-H-C formule (13) a ověřovat podmínku záměnnosti. Rovněž vidíme, z komutačních vztahů vektorů $\{X_1, X_2, X_3\}$ a $\{\widetilde{X^1}, \widetilde{X^2}, \widetilde{X^3}\}$ (17) náležících algebře grupy (3|1), že algebra $\widetilde{\mathcal{G}}$, tvořená vektory $\widetilde{X^i}$ je typu "Bianchi 1", tudíž je abelovská (16). Exponenciely s generátory $\{\widetilde{X^1}, \widetilde{X^2}, \widetilde{X^3}\}$ mezi podle (13) komutují.

Proto nám stačí prokomutovat na správn0 místo podle (13) pouze ty členy, které obsahují generátory $\{X_1, X_2, X_3\}$.

Nyní si uvedeme potřebné komutační vztahy.

$$\left\|[X_3 - X_2, \widetilde{X^2} + \widetilde{X^3}] = \widetilde{X^1} - \widetilde{X^1} + \widetilde{X^1} - \widetilde{X^1} = 0\right\|$$

$$\left\|[X_2, \widetilde{X^3}] = -\widetilde{X^1}\right\| \tag{29}$$

$$\left\|[X_2, \widetilde{X^1}] = 0\right\|$$

Těchto vztahů využijeme při úpravě naší rovnice. Uvedeme sekvenci rovnic, ve kterých budeme podtrhávat členy, ktarými se daná rovnice liší od předchozí. Jako první krok sloučíme exponenciely $e^{y_2\widetilde{X^2}}e^{y_2\widetilde{X^3}}$ a $e^{y_3\widetilde{X^2}}e^{y_3\widetilde{X^3}}$ (musíme použít formuli (12)).

$$l = e^{-y_1X_1}e^{\frac{1}{2}y_2X_2}e^{-\frac{1}{2}y_2X_3}\underline{e^{y_2(\widetilde{X^2}+\widetilde{X^3})}e^{\frac{1}{2}y_3(X_3-X_2)}}e^{y_3\widetilde{X^2}}e^{y_3\widetilde{X^3}}$$

$$e^{-\tilde{y_1}\widetilde{X^1}}e^{\frac{1}{2}\tilde{y_2}X_2}e^{-\tilde{y_2}\widetilde{X^3}}e^{-\frac{1}{4}\tilde{y_2}\tilde{y_2}\widetilde{X^1}}e^{\frac{1}{2}\tilde{y_3}X_2}e^{\tilde{y_3}\widetilde{X^3}}e^{\frac{1}{4}\tilde{y_3}\tilde{y_3}\widetilde{X^1}} \tag{30}$$

Tyto sloučené exponenciely vzájemně prokomutujeme. Podívejte se jak komutují jejich generátory (viz. (29)). Zároveň prokomutujeme i $e^{\frac{1}{2}\tilde{y_3}X_2}$ přes exponenciely obsahující vektory $\widetilde{X^1}$ a $\widetilde{X^3}$. Vektor X_2 s $\widetilde{X^1}$ komutuje, proto e^{X_2} komutuje s $e^{\widetilde{X^1}}$, ale pro komutaci $e^{\frac{1}{2}\tilde{y_3}X_2}$ s $e^{-\tilde{y_2}\widetilde{X^3}}$ musíme použít (13).

$$l = e^{-y_1X_1}e^{\frac{1}{2}y_2X_2}e^{-\frac{1}{2}y_2X_3}\underline{e^{\frac{1}{2}y_3(X_3-X_2)}e^{y_2(\widetilde{X^2}+\widetilde{X^3})}}e^{y_3\widetilde{X^2}}e^{y_3\widetilde{X^3}}e^{-\tilde{y_1}\widetilde{X^1}}$$

$$e^{\frac{1}{2}\tilde{y_2}X_2}\underline{e^{\frac{1}{2}\tilde{y_3}X_2}e^{-\tilde{y_2}\widetilde{X^3}}e^{-\frac{1}{2}\tilde{y_2}\tilde{y_3}\widetilde{X^1}}e^{-\frac{1}{4}\tilde{y_2}\tilde{y_2}\widetilde{X^1}}}e^{\tilde{y_3}\widetilde{X^3}}e^{\frac{1}{4}\tilde{y_3}\tilde{y_3}\widetilde{X^1}} \tag{31}$$

Nyní nás bude zajímat pouze druhý podtržený člen. Z $e^{\frac{1}{2}\tilde{y_3}X_2}$ a $e^{\frac{1}{2}\tilde{y_2}X_2}$ vytvoříme jednu exponencielu stejně jako v (30). Stejně tak složíme v jeden člen členy $e^{y_3\widetilde{X^3}}$ a $e^{y_3\widetilde{X^2}}$.

$$l = e^{-y_1X_1}e^{\frac{1}{2}y_2X_2}e^{-\frac{1}{2}y_2X_3}e^{\frac{1}{2}y_3(X_3-X_2)}e^{y_2(\widetilde{X^2}+\widetilde{X^3})}\underline{e^{y_3(\widetilde{X^2}+\widetilde{X^3})}}$$

$$e^{-\tilde{y_1}\widetilde{X^1}}\underline{e^{\frac{1}{2}(\tilde{y_2}+\tilde{y_3})X_2}}e^{-\tilde{y_2}\widetilde{X^3}}e^{-\frac{1}{2}\tilde{y_2}\tilde{y_3}\widetilde{X^1}}e^{-\frac{1}{4}\tilde{y_2}\tilde{y_2}\widetilde{X^1}}e^{\tilde{y_3}\widetilde{X^3}}e^{\frac{1}{4}\tilde{y_3}\tilde{y_3}\widetilde{X^1}} \tag{32}$$

Spočtěme si potřebné komutátory.

$$\left\|[\widetilde{X^2} + \widetilde{X^3}, X_2] = \widetilde{X^1} + \widetilde{X^1} = 2\widetilde{X^1}\right\|$$

A ještě jednou složíme dvě sousední exponencilely obsahující vektor $(\widetilde{X^2} + \widetilde{X^3})$. Zároveň prokomutujeme přes exponencielu s $e^{-\tilde{y_1}\widetilde{X^1}}$ druhý podrtžený člen z rovnice (32).

$$l = e^{-y_1 X_1} e^{\frac{1}{2}y_2 X_2} e^{-\frac{1}{2}y_2 X_3} e^{\frac{1}{2}y_3(X_3 - X_2)} \underline{e^{(y_2+y_3)(\widetilde{X^2}+\widetilde{X^3})}}$$

$$\underline{e^{\frac{1}{2}(\tilde{y_2}+\tilde{y_3})X_2}} e^{-\tilde{y_1}\widetilde{X^1}} e^{-\tilde{y_2}\widetilde{X^3}} e^{-\frac{1}{2}\tilde{y_2}\tilde{y_3}\widetilde{X^1}} e^{-\frac{1}{4}\tilde{y_2}\tilde{y_2}\widetilde{X^1}} e^{\tilde{y_3}\widetilde{X^3}} e^{\frac{1}{4}\tilde{y_3}\tilde{y_3}\widetilde{X^1}} \tag{33}$$

A jako poslední věc prokomutujeme mezi sebou oba podtržené členy v rovnici (33).

$$l = e^{-y_1 X_1} e^{\frac{1}{2}y_2 X_2} e^{-\frac{1}{2}y_2 X_3} e^{\frac{1}{2}y_3(X_3 - X_2)} \underline{e^{\frac{1}{2}(\tilde{y_2}+\tilde{y_3})X_2} e^{(y_2+y_3)(\widetilde{X^2}+\widetilde{X^3})}}$$

$$\underline{e^{(\tilde{y_2}+\tilde{y_3})(y_2+y_3)\widetilde{X^1}}} e^{-\tilde{y_1}\widetilde{X^1}} e^{-\tilde{y_2}\widetilde{X^3}} e^{-\frac{1}{2}\tilde{y_2}\tilde{y_3}\widetilde{X^1}} e^{-\frac{1}{4}\tilde{y_2}\tilde{y_2}\widetilde{X^1}} e^{\tilde{y_3}\widetilde{X^3}} e^{\frac{1}{4}\tilde{y_3}\tilde{y_3}\widetilde{X^1}} \tag{34}$$

Protože generátory X_2 a X_3 spolu komutují, můžeme exponencielu $e^{\frac{1}{2}y_3(X_3 - X_2)}$ roztrhnout podle formule (12), stejně tak i $e^{(y_2+y_3)(\widetilde{X^2}+\widetilde{X^3})}$. Dostaneme:

$$l = e^{-y_1 X_1} e^{\frac{1}{2}y_2 X_2} e^{-\frac{1}{2}y_2 X_3} e^{\frac{1}{2}y_3 X_3} e^{-\frac{1}{2}y_3 X_2} e^{\frac{1}{2}(\tilde{y_2}+\tilde{y_3})X_2} e^{(y_2+y_3)\widetilde{X^2}} e^{(y_2+y_3)\widetilde{X^3}}$$

$$e^{(\tilde{y_2}+\tilde{y_3})(y_2+y_3)\widetilde{X^1}} e^{-\tilde{y_1}\widetilde{X^1}} e^{-\tilde{y_2}\widetilde{X^3}} e^{-\frac{1}{2}\tilde{y_2}\tilde{y_3}\widetilde{X^1}} e^{-\frac{1}{4}\tilde{y_2}\tilde{y_2}\widetilde{X^1}} e^{\tilde{y_3}\widetilde{X^3}} e^{\frac{1}{4}\tilde{y_3}\tilde{y_3}\widetilde{X^1}} \tag{35}$$

Všechny $\widetilde{X^i}$ mezi sebou komutují, takže jejich exponenciely můžeme bez obav uspořádat do tvaru (22) a sloučit exponenciely se stejným generátorem v exponentu. Stejně tak i X_2 a X_3 spolu komutují a proto stejným způsobem uspořádáme a sloučíme. Tím dostáváme výsledný tvar a přímo i transfomační vztahy.

$$l = e^{-y_1 X_1} e^{\frac{1}{2}(y_2 - y_3 + \tilde{y_2} + \tilde{y_3})X_2} e^{\frac{1}{2}(y_3 - y_2)X_3}$$

$$e^{(-\tilde{y_1} - \frac{1}{2}\tilde{y_2}\tilde{y_3} + (\tilde{y_2}+\tilde{y_3})(y_2+y_3) - \frac{1}{4}\tilde{y_2}\tilde{y_2} + \frac{1}{4}\tilde{y_3}\tilde{y_3})\widetilde{X^1}} e^{(y_2+y_3)\widetilde{X^2}} e^{(y_2+y_3-\tilde{y_2}+\tilde{y_3})\widetilde{X^3}} \tag{36}$$

5.1.3 Výsledky

Tento výsledek odpovídá transformacím souřadnic mezi doubly (3|1) a (3|2)

$$\begin{array}{rcl} x_1 &=& -y_1 \\ x_2 &=& \frac{1}{2}(y_2 - y_3 + \tilde{y_2} + \tilde{y_3}) \\ x_3 &=& \frac{1}{2}(y_3 - y_2) \\ \tilde{x^1} &=& -\tilde{y_1} - \frac{1}{2}\tilde{y_2}\tilde{y_3} + (\tilde{y_2} + \tilde{y_3})(y_2 + y_3) - \frac{1}{4}\tilde{y_2}\tilde{y_2} + \frac{1}{4}\tilde{y_3}\tilde{y_3} \\ \tilde{x^2} &=& y_2 + y_3 \\ \tilde{x^3} &=& y_2 + y_3 - \tilde{y_2} + \tilde{y_3} \end{array} \tag{37}$$

Toto jsou naše hledané transformace pro přechod od doublu (3|1) k (3|2) při změně báze. Doufáme, že jsme alespoň částečně objasnili postup jak tyto výsledky získat. Nyní uvedeme další tři anologické příklady, podle (14).

5.2 Transformace Drinfeldova doublu $(4|1) \to (4|2i)$

5.2.1 Základní vztahy

Budeme postupovat jako v předchozím případě. Jako první si odvodíme komutační relace pro double (4|1). Tyto relace pro bazické členy doublu (4|1) můžeme nalézt v [1]. Zároveň musí splňovat (1) a (2). Z těchto vztahů můžeme spočítat koeficienty f_{ab}^{c} a $\widetilde{f_c^{ab}}$, dosadit do vztahu (3) a odvodit komutační relace mezi bazickými vektory navzájem.

Zde jsou komutační relace pro doubl (4|1):

$$\begin{array}{lll}
[X_1, X_2] = X_3 - X_2 & [X_2, X_3] = 0 & [X_3, X_1] = X_3 \\
[\widetilde{X^1}, \widetilde{X^2}] = 0 & [\widetilde{X^2}, \widetilde{X^3}] = 0 & [\widetilde{X^3}, \widetilde{X^1}] = 0 \\
[X_1, \widetilde{X^1}] = 0 & [X_1, \widetilde{X^2}] = \widetilde{X^2} & [X_1, \widetilde{X^3}] = -\widetilde{X^2} + \widetilde{X^3} \\
[X_2, \widetilde{X^1}] = 0 & [X_2, \widetilde{X^2}] = -\widetilde{X^1} & [X_2, \widetilde{X^3}] = \widetilde{X^1} \\
[X_3, \widetilde{X^1}] = 0 & [X_3, \widetilde{X^2}] = 0 & [X_3, \widetilde{X^3}] = -\widetilde{X^1}
\end{array} \tag{38}$$

Transformační matice mezi bázemi doublu (4|1) a doublu $(4|2i)$ má tvar [1]:

$$(4|1) \quad \to \quad (4|2i) \quad \mathbf{C} := \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -\frac{1}{2} & 0 & 1 & 0 \\ 0 & \frac{1}{2} & 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \tag{39}$$

Dále z definice matice (39) získáme:

$$\begin{pmatrix} T \\ \widetilde{T} \end{pmatrix} = C \cdot \begin{pmatrix} X \\ \widetilde{X} \end{pmatrix} \tag{40}$$

$$\begin{array}{ll}
T_1 = X_1, & \widetilde{T^1} = \widetilde{X^1} \\
T_2 = X_2 & \widetilde{T^2} = -\frac{1}{2} X_3 + \widetilde{X^2} \\
T_3 = X_3 & \widetilde{T^3} = \frac{1}{2} X_2 + \widetilde{X^3}
\end{array} \tag{41}$$

5.2.2 Transformace $(4|1) \to (4|2i)$

Budeme postupovat stejně jako v předchozích příkladech. Napíšeme si obecný prvek l grupy $(4|2i)$ ve tvaru (8):

$$l = g\widetilde{g} = g_1 g_2 g_3 \widetilde{g}^1 \widetilde{g}^2 \widetilde{g}^3 = e^{y_1 T_1} e^{y_2 T_2} e^{y_3 T_3} e^{\tilde{y_1} \widetilde{T^1}} e^{\tilde{y_2} \widetilde{T^2}} e^{\tilde{y_3} \widetilde{T^3}} \tag{42}$$

Abychom získali naše hledané transformace, budeme muset rovnici (42) převést na tvar.

$$l = g\widetilde{g} = g_1 g_2 g_3 \widetilde{g}^1 \widetilde{g}^2 \widetilde{g}^3 = e^{x_1 X_1} e^{x_2 X_2} e^{x_3 X_3} e^{\tilde{x_1} \widetilde{X^1}} e^{\tilde{x_2} \widetilde{X^2}} e^{\tilde{x_3} \widetilde{X^3}} \tag{43}$$

Za vektory T_i a $\widetilde{T^j}$ dosadíme jejich vyjádření v bázi X_i a $\widetilde{X^j}$ podle (41). Dostaneme:

$$l = e^{y_1 X_1} e^{y_2 X_2} e^{y_3 X_3} e^{\tilde{y_1} \widetilde{X^1}} e^{\tilde{y_2}(-\frac{1}{2} X_3 + \widetilde{X^2})} e^{\tilde{y_3}(\frac{1}{2} X_2 + \widetilde{X^3})} \tag{44}$$

Jednotlivé exponenciely s více generátory si rozepíšeme podle (12).

$$\begin{aligned} e^{\tilde{y_2}(-\frac{1}{2} X_3 + \widetilde{X^2})} &= \left\| [X_3, \widetilde{X^2}] = 0 \right\| = e^{-\frac{1}{2}\tilde{y_2} X_3} e^{\tilde{y_2}\widetilde{X^2}} e^{-\frac{1}{2}(-\frac{1}{2}\tilde{y_2}\tilde{y_2}[X_3, \widetilde{X^2}])} = \\ &= e^{-\frac{1}{2}\tilde{y_2} X_3} e^{\tilde{y_2}\widetilde{X^2}} \end{aligned} \tag{45}$$

$$\begin{aligned} e^{\tilde{y_3}(\frac{1}{2} X_2 + \widetilde{X^3})} &= \left\| [X_2, \widetilde{X^3}] = \widetilde{X^1} \right\| = e^{\frac{1}{2}\tilde{y_3} X_2} e^{\tilde{y_3}\widetilde{X^3}} e^{-\frac{1}{2}(\frac{1}{2}\tilde{y_3}\tilde{y_3}[X_2, \widetilde{X^3}])} = \\ &= e^{-\frac{1}{2}\tilde{y_2} X_3} e^{\tilde{y_2}\widetilde{X^2}} e^{-\frac{1}{4}\tilde{y_3}\tilde{y_3}\widetilde{X^1}} \end{aligned} \tag{46}$$

A dosadíme do (44), dostaneme:

$$l = e^{y_1 X_1} e^{y_2 X_2} e^{y_3 X_3} e^{\tilde{y_1} \widetilde{X^1}} e^{-\frac{1}{2}\tilde{y_2} X_3} e^{\tilde{y_2}\widetilde{X^2}} e^{\frac{1}{2}\tilde{y_3} X_2} e^{\tilde{y_3}\widetilde{X^3}} e^{-\frac{1}{4}\tilde{y_3}\tilde{y_3}\widetilde{X^1}} \tag{47}$$

Nejprve si uvedeme potřebné komutační vztahy.

$$\left\| [\widetilde{X^2}, X_2] = \widetilde{X^1} \right\|$$

Dále opět budeme psát sekvenci rovnic, ve kterých budeme podtrhávat členy, kterými se rovnice budou lišit od předcházejících.

$$l = e^{y_1 X_1} e^{y_2 X_2} e^{y_3 X_3} \underline{e^{-\frac{1}{2}\tilde{y_2} X_3} e^{\tilde{y_1} \widetilde{X^1}}} e^{\tilde{y_2}\widetilde{X^2}} e^{\frac{1}{2}\tilde{y_3} X_2} e^{\tilde{y_3}\widetilde{X^3}} e^{-\frac{1}{4}\tilde{y_3}\tilde{y_3}\widetilde{X^1}} \tag{48}$$

Podtržené členy v (48) jsme mezi sebou prokomutovali, jelikož X_3 a $\widetilde{X^1}$ spolu komutují (viz komutační vztahy (38)), tak i $e^{-\frac{1}{2}\tilde{y_2}X_3}$ a $e^{\tilde{y_1}\widetilde{X^1}}$ spolu komutují (viz (13)).

$$l = e^{y_1X_1}e^{y_2X_2}e^{y_3X_3}e^{-\frac{1}{2}\tilde{y_2}X_3}e^{\tilde{y_1}\widetilde{X^1}}\underline{e^{\frac{1}{2}\tilde{y_3}X_2}e^{\tilde{y_2}\widetilde{X^2}}e^{\frac{1}{2}\tilde{y_3}\tilde{y_2}\widetilde{X^1}}}e^{\tilde{y_3}\widetilde{X^3}}e^{-\frac{1}{4}\tilde{y_3}\tilde{y_3}\widetilde{X^1}} \tag{49}$$

V rovnici (49) jsme prokomutovali podtržené členy. Dále už nám vše komutuje, všechny vektory $\widetilde{X^i}$ mezi sebou podle komutačních vztahů (38). Z vektorů X_j budeme již potřebovat jen komutační vztahy mezi vektory X_2 a X_3, ale podle (38) tyto vektory komutují. Nyní už můžeme všechny exponenciely z rovnice (49) prokomutovat (prohodit, jelikož komutují) a sloučit ty, které mají společné generátory v exponentu.

Po prokomutování všech těchto členů dostaneme následující rovnici:

$$l = e^{y_1X_1}e^{y_2X_2}e^{\frac{1}{2}\tilde{y_3}X_2}e^{y_3X_3}e^{-\frac{1}{2}\tilde{y_2}X_3}e^{\tilde{y_1}\widetilde{X^1}}e^{\frac{1}{2}\tilde{y_3}\tilde{y_2}\widetilde{X^1}}e^{-\frac{1}{4}\tilde{y_3}\tilde{y_3}\widetilde{X^1}}e^{\tilde{y_2}\widetilde{X^2}}e^{\tilde{y_3}\widetilde{X^3}} \tag{50}$$

Po sloučení jednotlivých exponenciel:

$$l = e^{y_1X_1}e^{(y_2+\frac{1}{2}\tilde{y_3})X_2}e^{(y_3-\frac{1}{2}\tilde{y_2})X_3}e^{(\tilde{y_1}+\frac{1}{2}\tilde{y_2}\tilde{y_3}-\frac{1}{4}\tilde{y_3}\tilde{y_3})\widetilde{X^1}}e^{\tilde{y_2}\widetilde{X^2}}e^{\tilde{y_3}\widetilde{X^3}} \tag{51}$$

5.2.3 Výsledky

Což odpovídá transformaci souřadnic mezi doubly $(4|1)$ a $(4|2i)$:

$$\begin{array}{rcl} x_1 & = & y_1 \\ x_2 & = & y_2 + \frac{1}{2}\tilde{y_3} \\ x_3 & = & y_3 - \frac{1}{2}\tilde{y_2} \\ \tilde{x^1} & = & \tilde{y_1} + \frac{1}{2}\tilde{y_2}\tilde{y_3} - \frac{1}{4}\tilde{y_3}\tilde{y_3} \\ \tilde{x^2} & = & \tilde{y_2} \\ \tilde{x^3} & = & \tilde{y_3} \end{array} \tag{52}$$

5.3 Transformace Drinfeldova doublu $(4|1) \to (4|2ii)$

5.3.1 Základní vztahy

Komutační relace bazických vektorů doublu $(4|1)$ jsme již uvedli (38).

Transformační matice mezi bázemi algebry doublu $(4|1)$ a doublu $(4|2ii)$ má tvar [1]:

$$(4|1) \quad \to \quad (4|2ii) \quad \mathbf{C} := \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1}{2} & 0 & 1 & 0 \\ 0 & -\frac{1}{2} & 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \tag{53}$$

Dále z definice matice (53) získáme:

$$\begin{pmatrix} T \\ \widetilde{T} \end{pmatrix} = C \cdot \begin{pmatrix} X \\ \widetilde{X} \end{pmatrix} \tag{54}$$

$$\begin{array}{ll} T_1 = X_1, & \widetilde{T^1} = \widetilde{X^1} \\ T_2 = X_2 & \widetilde{T^2} = \frac{1}{2}X_3 + \widetilde{X^2} \\ T_3 = X_3 & \widetilde{T^3} = -\frac{1}{2}X_2 + \widetilde{X^3} \end{array} \tag{55}$$

5.3.2 Transformace $(4|1) \rightarrow (4|2ii)$

Budeme postupovat úplně totožně jako v předchozím případě, tento příklad je totiž uplně identický, až na nějaké to znaménko. Napíšeme si obecný prvek l grupy $(4|2ii)$ ve tvaru (42):

$$l = g\widetilde{g} = g_1 g_2 g_3 \widetilde{g}^1 \widetilde{g}^2 \widetilde{g}^3 = e^{y_1 T_1} e^{y_2 T_2} e^{y_3 T_3} e^{\tilde{y_1}\widetilde{T^1}} e^{\tilde{y_2}\widetilde{T^2}} e^{\tilde{y_3}\widetilde{T^3}} \tag{56}$$

Abychom získali naše hledané transformace, budeme muset rovnici (42) převést na tvar.

$$l = g\widetilde{g} = g_1 g_2 g_3 \widetilde{g}^1 \widetilde{g}^2 \widetilde{g}^3 = e^{x_1 X_1} e^{x_2 X_2} e^{x_3 X_3} e^{\tilde{x_1}\widetilde{X^1}} e^{\tilde{x_2}\widetilde{X^2}} e^{\tilde{x_3}\widetilde{X^3}} \tag{57}$$

Za vektory T_i a $\widetilde{T^j}$ dosadíme jejich vyjádření v bázi X_i a $\widetilde{X^j}$ podle (55). Dostaneme stejný výraz jako v (44), až na některé znaménka. Stejně se bude postupovat dále. Komutační relace jsou stejné. Tento příklad je totožný s transformací souřadnic mezi doubly $(4|1)$ a $(4|2i)$ a proto uvedeme jen výsledný tvar rovnice (56)

$$l = e^{y_1 X_1} e^{(y_2 - \frac{1}{2}\tilde{y_3})X_2} e^{(y_3 + \frac{1}{2}\tilde{y_2})X_3} e^{(\tilde{y_1} - \frac{1}{2}\tilde{y_2}\tilde{y_3} + \frac{1}{4}\tilde{y_3}\tilde{y_3})\widetilde{X^1}} e^{\tilde{y_2}\widetilde{X^2}} e^{\tilde{y_3}\widetilde{X^3}} \tag{58}$$

5.3.3 Výsledky

Což odpovídá transformaci souřadnic mezi doubly $(4|1)$ a $(4|2ii)$:

$$\begin{array}{lcl} x_1 &=& y_1 \\ x_2 &=& y_2 - \frac{1}{2}\tilde{y_3} \\ x_3 &=& y_3 + \frac{1}{2}\tilde{y_2} \\ \tilde{x^1} &=& \tilde{y_1} - \frac{1}{2}\tilde{y_2}\tilde{y_3} + \frac{1}{4}\tilde{y_3}\tilde{y_3}) \\ \tilde{x^2} &=& \tilde{y_2} \\ \tilde{x^3} &=& \tilde{y_3} \end{array} \tag{59}$$

Poznámka 4 *Všimli jste si, že tato transformace je rovna inverzní transformaci k (52)?*

5.4 Transformace Drinfeldova doublu $(5|1) \rightarrow (5|2i)$

5.4.1 Základní vztahy

Vypočteme transformaci souřadnic mezi doubly $(5|1)$ a $(5|2i)$. Vezmeme si algebru $(5|1)$, určenou bazickými vektory $\{X_1, X_2, X_3\}$ a $\{\widetilde{X^1}, \widetilde{X^2}, \widetilde{X^3}\}$. Napíšeme si komutační relace.

$$
\begin{array}{lllllllll}
[X_1, X_2] & = & -X_2 & [X_2, X_3] & = & 0 & [X_3, X_1] & = & -X_3 \\
[\widetilde{X^1}, \widetilde{X^2}] & = & 0 & [\widetilde{X^2}, \widetilde{X^3}] & = & 0 & [\widetilde{X^3}, \widetilde{X^1}] & = & 0 \\
[X_1, \widetilde{X^1}] & = & 0 & [X_1, \widetilde{X^2}] & = & \widetilde{X^2} & [X_1, \widetilde{X^3}] & = & \widetilde{X^3} \\
[X_2, \widetilde{X^1}] & = & 0 & [X_2, \widetilde{X^2}] & = & -\widetilde{X^1} & [X_2, \widetilde{X^3}] & = & 0 \\
[X_3, \widetilde{X^1}] & = & 0 & [X_3, \widetilde{X^2}] & = & 0 & [X_3, \widetilde{X^3}] & = & -\widetilde{X^1}
\end{array} \tag{60}
$$

Tyto komutační relace (60), jsou plně určeny typem tohoto doublu $(5|1)$, kde první řada komutačních relací vektorů $\{X_1, X_2, X_3\}$ je typu „Bianchi 5“ a druhá řada $\{\widetilde{X^1}, \widetilde{X^2}, \widetilde{X^3}\}$ je typu „Bianchi 1“ tj. je abelovská. Ostatní komutační relace se vypočtou pomocí (3). Transformační matice, která převádí algebru $(5|1)$ na $(5|2i)$ má tvar:

$$
(5|1) \quad \rightarrow \quad (5|2i) \quad \mathbf{C} := \begin{pmatrix}
-1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\
0 & 0 & 0 & -1 & 0 & 0 \\
0 & 1 & 0 & 0 & 0 & -\frac{1}{2} \\
0 & 0 & 1 & 0 & \frac{1}{2} & 0
\end{pmatrix} \tag{61}
$$

Vynásobením bazických vektorů algebry $(5|1)$ maticí $\mathbf{C}$ vyjádříme bazické vektory z $(5|2i)$:

$$
\begin{pmatrix} T \\ \widetilde{T} \end{pmatrix} = C \cdot \begin{pmatrix} X \\ \widetilde{X} \end{pmatrix} \tag{62}
$$

$$
\begin{array}{ll}
T_1 = \widetilde{X_1}, & \widetilde{T^1} = -\widetilde{X^1} \\
T_2 = \widetilde{X_2} & \widetilde{T^2} = X_2 - \frac{1}{2}\widetilde{X^3} \\
T_3 = -X_3 & \widetilde{T^3} = X_3 + \frac{1}{2}\widetilde{X^2}
\end{array} \tag{63}
$$

5.4.2 Transformace $(5|1) \rightarrow (5|2i)$

Obecný člen grupy $(5|2i)$ si napíšeme ve tvaru:

$$
l = g\widetilde{g} = g_1 g_2 g_3 \widetilde{g}^1 \widetilde{g}^2 \widetilde{g}^3 = e^{y_1 T_1} e^{y_2 T_2} e^{y_3 T_3} e^{\widetilde{y_1}\widetilde{T^1}} e^{\widetilde{y_2}\widetilde{T^2}} e^{\widetilde{y_3}\widetilde{T^3}} \tag{64}
$$

Za bazické vektory $\{T_1, T_2, T_3\}$ a $\{\widetilde{T^1}, \widetilde{T^2}, \widetilde{T^3}\}$ dosadíme výše uvedené vyjádření v bázi $\{X_1, X_2, X_3\}$ a $\{\widetilde{X^1}, \widetilde{X^2}, \widetilde{X^3}\}$ a dostaneme:

$$l = e^{-y_1 X_1} e^{y_2 \widetilde{X^2}} e^{y_3 \widetilde{X^3}} e^{-\widetilde{y_1}\widetilde{X^1}} e^{\widetilde{y_2}(X_2 - \frac{1}{2}\widetilde{X^3})} e^{\widetilde{y_3}(X_3 + \frac{1}{2}\widetilde{X^2})} \tag{65}$$

Abychom převedli toto vyjádření na tvar:

$$l = g_1 g_2 g_3 \widetilde{g^1}\widetilde{g^2}\widetilde{g^3} = e^{x_1 X_1} e^{x_2 X_2} e^{x_3 X_3} e^{\tilde{x_1}\widetilde{X^1}} e^{\tilde{x_2}\widetilde{X^2}} e^{\tilde{x_3}\widetilde{X^3}} \tag{66}$$

musíme použít speciální tvar B-H-C formule (12) a rozepsat exponenciely $e^{(\widetilde{y_2}X_2 - \frac{1}{2}\widetilde{X^3})}$ na součin dvou exponeciel. To samé uděláme pro výraz $e^{(\widetilde{y_3}X_3 + \frac{1}{2}\widetilde{X^2})}$. Dále prokomutujeme exponenciely s vektory $\{X_1, X_2, X_3\}$ a $\{\widetilde{X^1}, \widetilde{X^2}, \widetilde{X^3}\}$ do výsledného tvaru (66), použitím druhého speciálního tvaru B-H-C formule (13). Použití tohoto vztahu je omezeno podmínkou záměnnosti (11) $([X,[X,Y]] = [Y,[X,Y]] = 0)$. Tato podmínka ale není vždy splněna a proto nelze vždy říci, že lze pomocí speciálního tvaru B-H-C formule, nalézt transformační vztahy mezi jednotlivými grupami (tj.prokomutovat jednoparametrické grupy). Pokud by byla naše algebra nilpotentní v prvním řádu, pak by to samozřejmě bylo možné vždy, ale v našem případě nám bude stačit, pokud budou podmínku záměnnosti splňovat jen některé dvojice (komutujeme vždy mezi sebou jen dvě exponenciely) a to právě ty, které potřebujeme k prokomutování jednotlivých podgrup do konečného tvaru.

V našem případě e^{X_1} se nachází na prvním místě, jak ve výchozím tvaru,tak v konečném, žádnou jinou exponencielu s generátorem X_1 jinde nemáme. Naopak e^{X_2} se nám vyskytuje jako čtvrté od konce, takže musíme prokomutovat přes $e^{\widetilde{X^1}}$, $e^{\widetilde{X^2}}$, $e^{\widetilde{X^3}}$. Stejný postup provedeme pro výraz e^{X_3}. U tohoto příkladu záměrně neuvádíme postup, jakým jsme dospěli k výpočtu transformací souřadnic. Postup je zcela stejný, jako u předcházejících tří příkladů. Proto si myslíme, že tento příklad je vhodný právě jako cvičení.

5.4.3 Výsledky

Když provedeme všechny potřebné komutace a dovedeme naše výchozí vyjádření do konečného tvaru (66). Zjistíme, že poslední krok je záměna (transformace) souřadnic. Výsledek transformačních vztahů tohoto příkladu je:

$$\begin{aligned}
x_1 &= -y_1 \\
x_2 &= \tilde{y_2} \\
x_3 &= \tilde{y_3} \\
\tilde{x_1} &= -\tilde{y_1} + y_2\tilde{y_2} - \tfrac{1}{2}\tilde{y_2}\tilde{y_3} + y_3\tilde{y_3} \\
\tilde{x_2} &= y_2 + \tfrac{1}{2}\tilde{y_3} \\
\tilde{x_3} &= y_3 - \tfrac{1}{2}\tilde{y_2}
\end{aligned} \tag{67}$$

Což jsou naše hledané transformační vztahy souřadnic mezi doublem $(5|1)$ a $(5|2i)$.

5.5 Transformace Drinfeldova doublu $(4|1) \to (6_0|2)$

5.5.1 Základní vztahy

Jako poslední příklad si vypočteme transformační vztahy mezi doubly $(4|1)$ a $(6_0|2)$. Napíšeme si komutační relace pro double $(4|1)$. Komutační relace pro bazické vektory $\{X_1, X_2, X_3\}$ a $\{\widetilde{X^1}, \widetilde{X^2}, \widetilde{X^3}\}$ jsou definovány v [1]:

Zde jsou naše komutační relace:

$$\begin{array}{lll}
[X_1, X_2] = X_3 - X_2 & [X_2, X_3] = & [X_3, X_1] = X_3 \\
[\widetilde{X^1}, \widetilde{X^2}] = 0 & [\widetilde{X^2}, \widetilde{X^3}] = 0 & [\widetilde{X^3}, \widetilde{X^1}] = 0 \\
[X_1, \widetilde{X^1}] = 0 & [X_1, \widetilde{X^2}] = \widetilde{X^2} & [X_1, \widetilde{X^3}] = -\widetilde{X^2} + \widetilde{X^3} \\
[X_2, \widetilde{X^1}] = 0 & [X_2, \widetilde{X^2}] = -\widetilde{X^1} & [X_2, \widetilde{X^3}] = \widetilde{X^1} \\
[X_3, \widetilde{X^1}] = 0 & [X_3, \widetilde{X^2}] = 0 & [X_3, \widetilde{X^3}] = -\widetilde{X^1}
\end{array} \tag{68}$$

Vztahy mezi bazickými vektory $\{X_1, X_2, X_3\}$, $\{\widetilde{X^1}, \widetilde{X^2}, \widetilde{X^3}\}$ z doublu $(4|1)$ a vektory $\{T_1, T_2, T_3\}$, $\{\widetilde{T^1}, \widetilde{T^2}, \widetilde{T^3}\}$ z doublu $(6_0|2)$ jsou určeny transformační maticí [1]:

$$(4|1) \quad \to \quad (6_0|2) \quad \mathbf{C} := \begin{pmatrix} 0 & 0 & \frac{1}{2} & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1}{2} & 0 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{1}{2} & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & -\frac{1}{2} & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \end{pmatrix} \tag{69}$$

Dále z definice matice (69) získáme:

$$\begin{pmatrix} T \\ \widetilde{T} \end{pmatrix} = C \cdot \begin{pmatrix} X \\ \widetilde{X} \end{pmatrix} \tag{70}$$

$$\begin{array}{ll}
T_1 = \frac{1}{2}X_3 + \widetilde{X^2}, & \widetilde{T^1} = \frac{1}{2}X_2 + \widetilde{X^3} \\
T_2 = \frac{1}{2}X_3 - \widetilde{X^2} & \widetilde{T^2} = -\frac{1}{2}X_2 + \widetilde{X^3} \\
T_3 = X_1 & \widetilde{T^3} = \widetilde{X^1}
\end{array} \tag{71}$$

5.5.2 Transformace $(4|1) \to (6_0|2)$ *ve standartní parametrizaci*

Poznámka 5 *Uspořádání jednoparametrických podgrup v následujícím tvaru:* $e^{y_1 T_1} e^{y_2 T_2} e^{y_3 T_3} e^{\tilde{y_1}\widetilde{T^1}} e^{\tilde{y_2}\widetilde{T^2}} e^{\tilde{y_3}\widetilde{T^3}}$ *není jediné možné, je to sice podle konvence to jediné co nás zajímá, ale později uvidíme, že abychom v tomto příkladu dokázali spočítat danou transformaci souřadnic, bude nutné si zavést jiné uspořádání. Proto toto uspořádání, které je v souladu s konvencí nazveme **standartní parametrizací**.*

Dále budeme postupovat podle (4) a věty o rozložitelnosti rešitelné grupy na jednoparametrické podgrupy. Napíšeme si obecný prvek l grupy $(6_0|2)$ ve tvaru (64):

$$l = g\widetilde{g} = g_1 g_2 g_3 \widetilde{g}^1 \widetilde{g}^2 \widetilde{g}^3 = e^{y_1 T_1} e^{y_2 T_2} e^{y_3 T_3} e^{\tilde{y_1} \widetilde{T^1}} e^{\tilde{y_2} \widetilde{T^2}} e^{\tilde{y_3} \widetilde{T^3}} \qquad (72)$$

Za vektory T_i a $\widetilde{T^j}$ dosadíme jejich vyjádření v bázi X_i a $\widetilde{X^j}$ podle (71). Dostaneme:

$$l = e^{y_1(\frac{1}{2}X_3 + \widetilde{X^2})} e^{y_2(\frac{1}{2}X_3 - \widetilde{X^2})} e^{y_3 X_1} e^{\tilde{y_1}(\frac{1}{2}X_2 + \widetilde{X^3})} e^{\tilde{y_2}(-\frac{1}{2}X_2 + \widetilde{X^3})} e^{\tilde{y_3} \widetilde{X^1}} \qquad (73)$$

Nyní se pozorně zadívejme na náš obecný člen l grupy $(6_0|2)$ vyjádřený pomocí bazických vektorů algebry příslušící grupě $(4|1)$. Abychom dosáhli hledaných vztahů, musíme náš grupový člen, převést do tvaru

$$l = e^{x_1 X_1} e^{x_2 X_2} e^{x_3 X_3} e^{\widetilde{x_1} \widetilde{X^1}} e^{\widetilde{x_2} \widetilde{X^2}} e^{\widetilde{x_3} \widetilde{X^3}} \qquad (74)$$

a to za pomocí B-H-C formule (9), my se však omezíme pouze na použití jejího speciálního tvaru (12) a (13).

Znova se pozorně zadívejme na (73) a také na komutátory vektorů (38). Nyní postupujme podle návodu v kapitole 5.1.2, za prvé, zkusíme u exponenciel v jejichž exponentu se vyskytují dva vektory ověřit podmínku jejich záměnnosti. Snadno ověříme, že je opravdu splněna. Za druhé se podívejme nejprve třeba na exponencielu e^{X_1} a zamysleme se nad tím přes které členy ji budeme muset prokomutovat. Ihned vidíme, že to jsou $e^{y_1(\frac{1}{2}X_3 + \widetilde{X^2})}$ a $e^{y_2(\frac{1}{2}X_3 - \widetilde{X^2})}$. Ověřme nyní, jestli je splněna podmínka záměnnosti u dvojic vektorů $(X_1, \widetilde{X^2})$ a (X_1, X_3). Ze vztahů (38) plyne:

$$[X_1, [X_1, X^2]] = \widetilde{X^2} \neq 0 \qquad (75)$$

což je spor s podmínkou záměnnosti (11) a tudíž nelze použít speciální tvar B-H-C formule (13) a prokomutovat exponenciely do žádaného tvaru (74). Nalezli jsme překážku, přes kterou nejsme schopni jít dál. Zkusme tedy najít nějakou *okliku.*

5.5.3 Transformace $(4|1) \to (6_0|2)$ *v nestandartní parametrizaci*

Poznámka 6 ***Nestandartní parametrizací*** *budeme v tomto příkladu rozumět parametrizaci* $e^{y_3 T_3} e^{y_2 T_2} e^{y_1 T_1} e^{\tilde{y_3} \widetilde{T^3}} e^{\tilde{y_2} \widetilde{T^2}} e^{\tilde{y_1} \widetilde{T^1}}$

Vraťme se tedy o několik kroků zpět až k rovnici (72). Zkusíme si ji teď napsat trochu jinak, ale nesmíme porušit podmínky za kterých jsme ji vytvořili, a to podmínky (4) a (5). Zkusíme si tedy rozepsat obecný člen l grupy $(6_0|2)$ v nestandartní parametrizaci, zachovávajíci obě podmínky.

$$l = g\widetilde{g} = g_3 g_2 g_1 \widetilde{g}^3 \widetilde{g}^2 \widetilde{g}^1 = e^{y_3 T_3} e^{y_2 T_2} e^{y_1 T_1} e^{\tilde{y_3} \widetilde{T^3}} e^{\tilde{y_2} \widetilde{T^2}} e^{\tilde{y_1} \widetilde{T^1}} \tag{76}$$

Zkusíme pokračovat s tímto vyjádřením. S tím, že se pokusíme dojít do stejného tvaru rovnice (74), jako při předchozí nepříliš šťastné volbě. Dosadíme transformační vztahy vektorů (71) a dostaneme:

$$l = e^{y_3 X_1} e^{y_2(\frac{1}{2}X_3 - \widetilde{X^2})} e^{y_1(\frac{1}{2}X_3 + \widetilde{X^2})} e^{\tilde{y_3}\widetilde{X^1}} e^{\tilde{y_2}(-\frac{1}{2}X_2 + \widetilde{X^3})} e^{\tilde{y_1}(\frac{1}{2}X_2 + \widetilde{X^3})} \tag{77}$$

Podmínku záměnnosti vektorů vyskytujících se ve stejném exponentu ověříme snadno pomocí formule (11) a komutačních vztahů (68). Použijeme tedy vzorce (12) a rozepíšeme si následující členy:

$$\begin{aligned} e^{y_2(\frac{1}{2}X_3 - \widetilde{X^2})} &= \left\| [X_3, \widetilde{X^2}] = 0 \right\| = e^{\frac{1}{2}y_2 X_3} e^{-y_2 \widetilde{X^2}} e^{-\frac{1}{2}[\frac{1}{2}y_2 X_3, -y_2 \widetilde{X^2}]} = \\ &= e^{\frac{1}{2}y_2 X_3} e^{-y_2 \widetilde{X^2}} e^{-\frac{1}{2}(\frac{1}{2}(y_2)(-y_2)[X_3, \widetilde{X^2}])} = e^{\frac{1}{2}y_2 X_3} e^{-y_2 \widetilde{X^2}} \end{aligned} \tag{78}$$

$$e^{y_1(\frac{1}{2}X_3 + \widetilde{X^2})} = \left\| [X_3, \widetilde{X^2}] = 0 \right\| = e^{\frac{1}{2}y_1 X_3} e^{y_1 \widetilde{X^2}} \tag{79}$$

$$\begin{aligned} e^{\tilde{y^2}(-\frac{1}{2}X_2 + \widetilde{X^3})} &= \left\| [X_2, \widetilde{X^3}] = \widetilde{X^1} \right\| = e^{-\frac{1}{2}\tilde{y^2} X_2} e^{\tilde{y^2} \widetilde{X^3}} e^{\frac{1}{4}[\tilde{y^2} X_2, \tilde{y^2} \widetilde{X^3}]} = \\ &= e^{-\frac{1}{2}\tilde{y^2} X_2} e^{\tilde{y^2} \widetilde{X^3}} e^{\frac{1}{4}((\tilde{y^2})(\tilde{y^2})[X_2, \widetilde{X^3}])} = e^{-\frac{1}{2}\tilde{y^2} X_2} e^{\tilde{y^2} \widetilde{X^3}} e^{\frac{1}{4}\tilde{y^2}\tilde{y^2} \widetilde{X^1}} \end{aligned} \tag{80}$$

$$\begin{aligned} e^{\tilde{y^1}(\frac{1}{2}X_2 + \widetilde{X^3})} &= \left\| [X_2, \widetilde{X^3}] = \widetilde{X^1} \right\| = e^{\frac{1}{2}\tilde{y^1} X_2} e^{\tilde{y^1} \widetilde{X^3}} e^{-\frac{1}{2}[\frac{1}{2}\tilde{y^1} X_2, \tilde{y^1} \widetilde{X^3}]} = \\ &= e^{\frac{1}{2}\tilde{y^1} X_2} e^{\tilde{y^1} \widetilde{X^3}} e^{-\frac{1}{4}\tilde{y^1}\tilde{y^1} \widetilde{X^1}} \end{aligned} \tag{81}$$

dosadíme do naší rovnice (77) a dostaneme:

$$\begin{aligned} l = \quad & e^{y_3 X_1} e^{\frac{1}{2}y_2 X_3} e^{-y_2 \widetilde{X^2}} e^{\frac{1}{2}y_1 X_3} e^{y_1 \widetilde{X^2}} e^{\tilde{y_3} \widetilde{X^1}} e^{-\frac{1}{2}\tilde{y^2} X_2} \\ & e^{\tilde{y^2} \widetilde{X^3}} e^{\frac{1}{4}\tilde{y^2}\tilde{y^2} \widetilde{X^1}} e^{\frac{1}{2}\tilde{y^1} X_2} e^{\tilde{y^1} \widetilde{X^3}} e^{-\frac{1}{4}\tilde{y^1}\tilde{y^1} \widetilde{X^1}} \end{aligned} \tag{82}$$

Nyní si konečně můžeme odpočinout od přemýšlení, protože nám začíná "špinavá" práce. Budeme používat pouze speciální B-H-C formuli (13) a využívat komutačních relací algebry (4|1). Začneme tedy komutovat. Budeme postupovat jako v předchozích příkladech, takže postupujme podle návodu v kapitole 5.1.2. Poslední věc, co uděláme bude uspořádání $e^{\widetilde{X^1}}, e^{\widetilde{X^2}}, e^{\widetilde{X^3}}$, ale protože algebra $\widetilde{G}$ je abelovská (16) lze zaměnit pořadí jejich exponenciel zcela libovolně.

Začneme tedy komutovat, e^{X_1} se již nachází na prvním místě v naší rovnici a tudíž se můžeme pokusit prokomutovat e^{X_2}. Protože X_2 komutuje s $\widetilde{X^1}$, můžeme exponenciely e^{X_2} a $e^{\widetilde{X^1}}$ prohodit podle (13).

Nyní napíšeme sekvenci rovnic. Budeme podtrhávat členy kterými se daná rovnice liší od předchozí.

$$\begin{aligned} l &= e^{y_3 X_1} e^{\frac{1}{2} y_2 X_3} e^{-y_2 \widetilde{X^2}} e^{\frac{1}{2} y_1 X_3} e^{y_1 \widetilde{X^2}} \underline{e^{-\frac{1}{2} \tilde{y^2} X_2} e^{\tilde{y_3} \widetilde{X^1}}} \\ & e^{\tilde{y^2} \widetilde{X^3}} \underline{e^{\frac{1}{2} \tilde{y^1} X_2} e^{\frac{1}{4} \tilde{y^2} \tilde{y^2} \widetilde{X^1}}} e^{\tilde{y^1} \widetilde{X^3}} e^{-\frac{1}{4} \tilde{y^1} \tilde{y^1} \widetilde{X^1}} \end{aligned} \tag{83}$$

Podtržené členy jsme prokomutovali. Podívejte se na komutační vztahy (38). Cokoliv s $\widetilde{X^1}$ komutuje. Nyní si uvedeme potřebné komutační vztahy pro X_2, každá s těchto dvojic splňuje podmínku záměnnosti (11).

$$\begin{gathered} \left\| [\widetilde{X^2}, X_2] = \widetilde{X^1} \right\| \\ \left\| [\widetilde{X^3}, X_2] = -\widetilde{X^1} \right\| \end{gathered} \tag{84}$$

$$\begin{aligned} l &= e^{y_3 X_1} e^{\frac{1}{2} y_2 X_3} e^{-y_2 \widetilde{X^2}} e^{\frac{1}{2} y_1 X_3} \underline{e^{-\frac{1}{2} \tilde{y^2} X_2} e^{y_1 \widetilde{X^2}} e^{-\frac{1}{2} \tilde{y^2} y_1 \widetilde{X^1}}} e^{\tilde{y_3} \widetilde{X^1}} \\ & \underline{e^{\frac{1}{2} \tilde{y^1} X_2} e^{\tilde{y^2} \widetilde{X^3}} e^{-\frac{1}{2} \tilde{y^1} \tilde{y^2} \widetilde{X^1}}} e^{\frac{1}{4} \tilde{y^2} \tilde{y^2} \widetilde{X^1}} e^{\tilde{y^1} \widetilde{X^3}} e^{-\frac{1}{4} \tilde{y^1} \tilde{y^1} \widetilde{X^1}} \end{aligned} \tag{85}$$

Zde můžeme vidět, že podtržené členy nejsou nic jiného než aplikace (13) na $e^{y_1 \widetilde{X^2}} e^{-\frac{1}{2} \tilde{y^2} X_2}$ a na $e^{\tilde{y^2} \widetilde{X^3}} e^{\frac{1}{2} \tilde{y^1} X_2}$,. Budeme pokračovat v komutování, uvidíme že pro e^{X_2} nám postačí dva komutační vztahy (84).

$$\begin{aligned} l &= e^{y_3 X_1} e^{\frac{1}{2} y_2 X_3} e^{-y_2 \widetilde{X^2}} \underline{e^{-\frac{1}{2} \tilde{y^2} X_2} e^{\frac{1}{2} y_1 X_3}} e^{y_1 \widetilde{X^2}} \underline{e^{\frac{1}{2} \tilde{y^1} X_2} e^{-\frac{1}{2} \tilde{y^2} y_1 \widetilde{X^1}} e^{\tilde{y_3} \widetilde{X^1}}} \\ & e^{\tilde{y^2} \widetilde{X^3}} e^{-\frac{1}{2} \tilde{y^1} \tilde{y^2} \widetilde{X^1}} e^{\frac{1}{4} \tilde{y^2} \tilde{y^2} \widetilde{X^1}} e^{\tilde{y^1} \widetilde{X^3}} e^{-\frac{1}{4} \tilde{y^1} \tilde{y^1} \widetilde{X^1}} \end{aligned} \tag{86}$$

Protože vektor X_2 komutuje s $\widetilde{X}^1$ a s X_3, můžeme prohodit pořadí jejich exponenciel. Dále se pokusíme prokomutovat e^{X_2} přes další členy.

$$\begin{aligned} l &= e^{y_3 X_1} e^{\frac{1}{2} y_2 X_3} \underline{e^{-\frac{1}{2} \tilde{y^2} X_2} e^{-y_2 \widetilde{X^2}} e^{\frac{1}{2} \tilde{y^2} y_2 \widetilde{X^1}}} e^{\frac{1}{2} y_1 X_3} \underline{e^{\frac{1}{2} \tilde{y^1} X_2} e^{y_1 \widetilde{X^2}} e^{\frac{1}{2} \tilde{y^1} y_1 \widetilde{X^1}}} \\ & e^{-\frac{1}{2} \tilde{y^2} y_1 \widetilde{X^1}} e^{\tilde{y_3} \widetilde{X^1}} e^{\tilde{y^2} \widetilde{X^3}} e^{-\frac{1}{2} \tilde{y^1} \tilde{y^2} \widetilde{X^1}} e^{\frac{1}{4} \tilde{y^2} \tilde{y^2} \widetilde{X^1}} e^{\tilde{y^1} \widetilde{X^3}} e^{-\frac{1}{4} \tilde{y^1} \tilde{y^1} \widetilde{X^1}} \end{aligned} \tag{87}$$

Opět v rovnici (87) jsme užili stejný postup jako v (85) a nejedná se o nic jiného než o aplikaci (13) na $e^{y_1\widetilde{X^2}}e^{-\frac{1}{2}\tilde{y^2}X_2}$.

$$\begin{aligned} l \;=\;& e^{y_3X_1}\underline{e^{-\frac{1}{2}\tilde{y^2}X_2}e^{\frac{1}{2}y_2X_3}}e^{-y_2\widetilde{X^2}}\underline{e^{\frac{1}{2}\tilde{y^1}X_2}e^{\frac{1}{2}\tilde{y^2}y_2\widetilde{X^1}}e^{\frac{1}{2}y_1X_3}}e^{y_1\widetilde{X^2}}e^{\frac{1}{2}\tilde{y^1}y_1\widetilde{X^1}} \\ & e^{-\frac{1}{2}\tilde{y^2}y_1\widetilde{X^1}}e^{\widetilde{y_3}\widetilde{X^1}}e^{\tilde{y^2}\widetilde{X^3}}e^{-\frac{1}{2}\tilde{y^1}\tilde{y^2}\widetilde{X^1}}e^{\frac{1}{4}\tilde{y^2}\tilde{y^2}\widetilde{X^1}}e^{\tilde{y^1}\widetilde{X^3}}e^{-\frac{1}{4}\tilde{y^1}\tilde{y^1}\widetilde{X^1}} \end{aligned} \tag{88}$$

V rovnici (88) jsme pouze prohodili pořadí některých komutujících členů. Nakonec prokomutujeme e^{X_2} přes $e^{\widetilde{X^2}}$ a přes e^{X_3} (X_2 s X_3 komutuje).

$$\begin{aligned} l \;=\;& e^{y_3X_1}e^{-\frac{1}{2}\tilde{y^2}X_2}e^{\frac{1}{2}y_2X_3}\underline{e^{\frac{1}{2}\tilde{y^1}X_2}e^{-y_2\widetilde{X^2}}e^{-\frac{1}{2}\tilde{y^1}y_2\widetilde{X^1}}}e^{\frac{1}{2}\tilde{y^2}y_2\widetilde{X^1}}e^{\frac{1}{2}y_1X_3}e^{y_1\widetilde{X^2}} \\ & e^{\frac{1}{2}\tilde{y^1}y_1\widetilde{X^1}}e^{-\frac{1}{2}\tilde{y^2}y_1\widetilde{X^1}}e^{\widetilde{y_3}\widetilde{X^1}}e^{\tilde{y^2}\widetilde{X^3}}e^{-\frac{1}{2}\tilde{y^1}\tilde{y^2}\widetilde{X^1}}e^{\frac{1}{4}\tilde{y^2}\tilde{y^2}\widetilde{X^1}}e^{\tilde{y^1}\widetilde{X^3}}e^{-\frac{1}{4}\tilde{y^1}\tilde{y^1}\widetilde{X^1}} \end{aligned} \tag{89}$$

Zde jsme prokomutovali $e^{y_1\widetilde{X^2}}$ s $e^{-\frac{1}{2}\tilde{y^2}X_2}$. Vektory X_2 a X_3 komutují, proto podle (13) můžeme jejich exponenciely prohodit. A nyní sloučíme všechny exponenty s X_2 v jeden.

$$\begin{aligned} l \;=\;& e^{y_3X_1}e^{\frac{1}{2}(-\tilde{y^2}+\tilde{y^1})X_2}e^{\frac{1}{2}y_2X_3}e^{-y_2\widetilde{X^2}}e^{-\frac{1}{2}\tilde{y^1}y_2\widetilde{X^1}}e^{\frac{1}{2}\tilde{y^2}y_2\widetilde{X^1}}e^{\frac{1}{2}y_1X_3}e^{y_1\widetilde{X^2}} \\ & e^{\frac{1}{2}\tilde{y^1}y_1\widetilde{X^1}}e^{-\frac{1}{2}\tilde{y^2}y_1\widetilde{X^1}}e^{\widetilde{y_3}\widetilde{X^1}}e^{\tilde{y^2}\widetilde{X^3}}e^{-\frac{1}{2}\tilde{y^1}\tilde{y^2}\widetilde{X^1}}e^{\frac{1}{4}\tilde{y^2}\tilde{y^2}\widetilde{X^1}}e^{\tilde{y^1}\widetilde{X^3}}e^{-\frac{1}{4}\tilde{y^1}\tilde{y^1}\widetilde{X^1}} \end{aligned} \tag{90}$$

Tím jsme skončili s komutováním exponenciel obsahujících vektor X_2 a jak jsme si řekli, jako druhý člen budeme prokomutovávat e^{X_3}. Když se podíváme na (90) vidíme, že nám zbývá prokomutovat e^{X_3} pouze přes $e^{\widetilde{X^1}}$, (ale X_3 s $\widetilde{X^1}$ komutuje, takže jenom zaměníme jejich pořadí), a přes $\widetilde{X^2}$ (s tím ovšem také komutuje). Rovnou sloučíme exponenciely s vektorem X_3 do jedné.

$$\begin{aligned} l =\;& e^{y_3X_1}e^{\frac{1}{2}(-\tilde{y^2}+\tilde{y^1})X_2}e^{\frac{1}{2}(y_2+y_1)X_3}e^{-y_2\widetilde{X^2}}e^{-\frac{1}{2}\tilde{y^1}y_2\widetilde{X^1}}e^{\frac{1}{2}\tilde{y^2}y_2\widetilde{X^1}}e^{y_1\widetilde{X^2}} \\ & e^{\frac{1}{2}\tilde{y^1}y_1\widetilde{X^1}}e^{-\frac{1}{2}\tilde{y^2}y_1\widetilde{X^1}}e^{\widetilde{y_3}\widetilde{X^1}}e^{\tilde{y^2}\widetilde{X^3}}e^{-\frac{1}{2}\tilde{y^1}\tilde{y^2}\widetilde{X^1}}e^{\frac{1}{4}\tilde{y^2}\tilde{y^2}\widetilde{X^1}}e^{\tilde{y^1}\widetilde{X^3}}e^{-\frac{1}{4}\tilde{y^1}\tilde{y^1}\widetilde{X^1}} \end{aligned} \tag{91}$$

Naší snahou je převést rovnici (91) na tvar (74). Abychom dosáhli tohoto cíle, stačí upravit pouze podgrupu $\tilde{g}$, která se skládá z vektorů $\widetilde{X^1}, \widetilde{X^2}, \widetilde{X^3}$, tyto vektory z doublu (4|1) jsou však v Drinfeldově klasifikaci typu "Bianchi 1" (tj. abelovské) (16), proto všechny mezi sebou komutují. A tak jejich exponenciely můžeme bez obtíži zaměnit, zároveň je také sloučíme. Náš hledaný tvar je:

$$\begin{aligned} & l = e^{y_3X_1}e^{\frac{1}{2}(-\tilde{y^2}+\tilde{y^1})X_2}e^{\frac{1}{2}(y_2+y_1)X_3} \\ & e^{(\widetilde{y_3}-\frac{1}{2}\tilde{y^1}y_2+\frac{1}{2}\tilde{y^2}y_2+\frac{1}{2}\tilde{y^1}y_1-\frac{1}{2}\tilde{y^2}y_1-\frac{1}{2}\tilde{y^1}\tilde{y^2}+\frac{1}{4}\tilde{y^2}\tilde{y^2}-\frac{1}{4}\tilde{y^1}\tilde{y^1})\widetilde{X^1}}e^{(y_1-y_2)\widetilde{X^2}}e^{(\tilde{y^1}+\tilde{y^2})\widetilde{X^3}} \end{aligned} \tag{92}$$

Srovnáním s (74) dostaneme transformační vztahy:

$$
\begin{array}{rcl}
x_1 & = & y_3 \\
x_2 & = & \frac{1}{2}(\tilde{y^1} - \tilde{y^2}) \\
x_3 & = & \frac{1}{2}(y_1 + y_2) \\
\tilde{x^1} & = & \tilde{y_3} - \frac{1}{2}\tilde{y^1}y_2 + \frac{1}{2}\tilde{y^2}y_2 + \frac{1}{2}\tilde{y^1}y_1 - \frac{1}{2}\tilde{y^2}y_1 - \frac{1}{2}\tilde{y^1}\tilde{y^2} + \frac{1}{4}\tilde{y^2}\tilde{y^2} - \frac{1}{4}\tilde{y^1}\tilde{y^1} \\
\tilde{x^2} & = & y_1 - y_2 \\
\tilde{x^3} & = & \tilde{y^1} + \tilde{y^2}
\end{array}
\tag{93}
$$

Tyto nalezené transformační vztahy mezi grupami $(4|1)$ a $(6_0|2)$ *v nestandartní parametrizaci* nejsou transformačními vztahy, které jsme na začátku hledali, protože daný prvek l grupy $(6_0|2)$ *ve standartní parametrizaci* má jiné souřadnice, než ten samý prvek v jiné parametrizaci.

Otázkou je, co kdybychom nalezli transformační vztahy mezi těmito parametrizacemi? Potom správným složením této transformace a transformace $(4|1) \to (6_0|2)$ *v nestandartní parametrizaci* bychom dostali náš hledaný výsledek. Jestli dokážeme takovou transformaci napočítat, uvidíme. Jak už jsme si řekli, ne vždy lze pomocí B-H-C formule získat hledané transformační vztahy.

5.5.4 Transformace $(6_0|2)$ *v nestandartní parametrizaci* $\to$ $(6_0|2)$ *ve standartní parametrizaci*

Prvně si musíme uvědomit, co vlastně chceme spočítat. Při našem počítání vždy vyjdeme z vyjádření grupy v jedné bázi a chceme se dostat k vyjádření v druhé bázi. Kdybychom náhodou počítali opačným směrem, tj. že bychom vyšli z druhého a šli k prvního, potom bychom dostali inverzní transformaci.

Jelikož v (93) jsme vyjádřili souřadnice x náležící doublu $(4|1)$ pomocí souřadnic y z $(6_0|2)$ *v nestandartní parametrizaci*. Musíme nyní explicitně vyjádřit y z $(6_0|2)$ *v nestandartní parametrizaci* pomocí z z $(6_0|2)$ *ve standartní parametrizaci*. Což znamená, že vyjdeme z obecného prvku l grupy $(6_0|2)$ vyjádřeného pomocí *standartní parametrizace*:

$$l = g\widetilde{g} = g_1 g_2 g_3 \widetilde{g^1}\widetilde{g^2}\widetilde{g^3} = e^{z_1 T_1} e^{z_2 T_2} e^{z_3 T_3} e^{\tilde{z_1}\widetilde{T^1}} e^{\tilde{z_2}\widetilde{T^2}} e^{\tilde{z_3}\widetilde{T^3}} \tag{94}$$

a pokusíme se ho převést na tvar (76):

$$l = g\widetilde{g} = g_3 g_2 g_1 \widetilde{g^3}\widetilde{g^2}\widetilde{g^1} = e^{y_3 T_3} e^{y_2 T_2} e^{y_1 T_1} e^{\tilde{y_3}\widetilde{T^3}} e^{\tilde{y_2}\widetilde{T^2}} e^{\tilde{y_1}\widetilde{T^1}} \tag{95}$$

Transformační vztahy lze nejsou potřeba, protože se jedná o jedny a ty samé bazické vektory pouze jinak uspořádané. Začneme tedy s (94) a jediné, co ještě potřebujeme znát, jsou komutační relace bazických vektorů algebry grupy $(6_0|2)$.

$$
\begin{array}{lllllllll}
[T_1,T_2] & = & 0 & [T_2,T_3] & = & T_1 & [T_3,T_1] & = & -T_2 \\
[\widetilde{T^1},\widetilde{T^2}] & = & \widetilde{T^3} & [\widetilde{T^2},\widetilde{T^3}] & = & 0 & [\widetilde{T^3},\widetilde{T^1}] & = & 0 \\
[T_1,\widetilde{T^1}] & = & 0 & [T_1,\widetilde{T^2}] & = & -\widetilde{T^3} & [T_1,\widetilde{T^3}] & = & 0 \\
[T_2,\widetilde{T^1}] & = & -\widetilde{T^3} & [T_2,\widetilde{T^2}] & = & 0 & [T_2,\widetilde{T^3}] & = & 0 \\
[T_3,\widetilde{T^1}] & = & T^2+\widetilde{T^2} & [T_3,\widetilde{T^2}] & = & -T^1+\widetilde{T^1} & [T_3,\widetilde{T^3}] & = & 0
\end{array}
\tag{96}
$$

Výjdeme z (94) a začneme komutovat.

$$
l = g\widetilde{g} = g_1 g_2 g_3 \widetilde{g}^1 \widetilde{g}^2 \widetilde{g}^3 = e^{z_1 T_1} e^{z_2 T_2} e^{z_3 T_3} e^{\tilde{z_1}\widetilde{T^1}} e^{\tilde{z_2}\widetilde{T^2}} e^{\tilde{z_3}\widetilde{T^3}}
$$

V tomto případě budeme potřebovat pouze následující vztahy z (96).

$$
\begin{gathered}
\big\| [T_2,T_3] = T_1 \big\| \\
\big\| [T_3,T_1] = -T_2 \big\| \\
\big\| [\widetilde{T^1},\widetilde{T^2}] = \widetilde{T^3} \big\|
\end{gathered}
\tag{97}
$$

Všechny dvojice vektorů z (97) splňují podmínku záměnnosti, takže lze použít speciální tvar B-H-C formule (13).

$$
l = \underline{e^{z_2 T_2} e^{z_1 T_1}} e^{z_3 T_3} \underline{e^{\tilde{z_3}\widetilde{T^3}} e^{\tilde{z_1}\widetilde{T^1}} e^{\tilde{z_2}\widetilde{T^2}}}
\tag{98}
$$

Podtržené členy jsme prokomutovali. Podívejte se na komutační vztahy (96). Cokoliv s $\widetilde{T^3}$ komutuje. Nyní prokomutujeme e^{T_1} s e^{T_3} a $e^{\widetilde{T^1}}$ s $e^{\widetilde{T^2}}$.

$$
l = e^{z_2 T_2} \underline{e^{z_3 T_3} e^{z_1 T_1} e^{z_1 z_3 T_2}} e^{\tilde{z_3}\widetilde{T^3}} \underline{e^{\tilde{z_2}\widetilde{T^2}} e^{\tilde{z_1}\widetilde{T^1}} e^{\tilde{z_1}\tilde{z_2}\widetilde{T^3}}}
\tag{99}
$$

Jako poslední prokomutujeme $e^{T_3} e^{T_2}$. Všechny naše úpravy se nesou ve stejném duchu jako (83), (85) - (91).

$$
l = \underline{e^{z_3 T_3} e^{z_2 T_2} e^{z_3 z_2 T_1}} e^{z_1 T_1} e^{z_1 z_3 T_2} e^{\tilde{z_3}\widetilde{T^3}} \underline{e^{\tilde{z_1}\tilde{z_2}\widetilde{T^3}}} e^{\tilde{z_2}\widetilde{T^2}} e^{\tilde{z_1}\widetilde{T^1}}
\tag{100}
$$

Nyní je naše rovnice skoro ve tvaru (95), vektory T_1, T_2 spolu komutují, tak i $\widetilde{T^3}$ komutuje s každým vektorem z báze $(6_0|2)$. Proto jejich exponenciely můžeme prohodit podle (13). Jako poslední krok sloučíme jednoparametrické grupy se stejným generátorem (vektorem algebry).

$$
l = e^{z_3 T_3} e^{(z_2 + z_1 z_3) T_2} e^{(z_1 + z_3 z_2) T_1} e^{(\tilde{z_3} + \tilde{z_1}\tilde{z_2})\widetilde{T^3}} e^{\tilde{z_2}\widetilde{T^2}} e^{\tilde{z_1}\widetilde{T^1}}
\tag{101}
$$

Srovnáním s (95) dostaneme výsledek transformačních vztahů.

$$
\begin{aligned}
y_1 &= z_1 + z_2 z_3 \\
y_2 &= z_2 + z_1 z_3 \\
y_3 &= z_3 \\
\tilde{y^1} &= \tilde{z^1} \\
\tilde{y^2} &= \tilde{z^2} \\
\tilde{y^3} &= \tilde{z^3} + \tilde{z^1}\tilde{z^2}
\end{aligned} \tag{102}
$$

5.5.5 Výsledky transformace$(4|1) \rightarrow (6_0|2)$

Získali jsme transformační vztahy pro přechod od grupy $(6_0|2)$ *v nestandartní parametrizaci* k $(6_0|2)$ *ve standartní parametrizaci* (102) a vztahy pro přechod od doublu $(4|1)$ k doublu $(6_0|2)$ *v nestandartní parametrizaci* (93). Pokud tyto transformace složíme, dostaneme naši hledanou transformaci.

$$
\begin{aligned}
x_1 &= z_3 \\
x_2 &= \tfrac{1}{2}(\tilde{z^1} - \tilde{z^2}) \\
x_3 &= \tfrac{1}{2}(z_1 + z_2 z_3 + z_2 + z_1 z_3) \\
\tilde{x^1} &= \tilde{z^3} + \tilde{z^1}\tilde{z^2} - \tfrac{1}{2}\tilde{z^1}(z_2 + z_1 z_3) + \tfrac{1}{2}\tilde{z^2}(z_2 + z_1 z_3) + \tfrac{1}{2}\tilde{z^1}(z_1 + z_2 z_3) - \\
&\quad - \tfrac{1}{2}\tilde{z^2}(z_1 + z_2 z_3) - \tfrac{1}{2}\tilde{z^1}\tilde{z^2} + \tfrac{1}{4}\tilde{z^2}\tilde{z^2} - \tfrac{1}{4}\tilde{z^1}\tilde{z^1} \\
\tilde{x^2} &= z_1 + z_2 z_3 - z_2 - z_1 z_3 \\
\tilde{x^3} &= \tilde{z^1} + \tilde{z^2}
\end{aligned} \tag{103}
$$

Získali jsme tedy naši transformaci souřadnic mezi doublem $(4|1)$ a $(6_0|2)$ *ve standartní parametrizaci.* Zjistili jsme, že speciální tvar B-H-C formule není vždy použitelný a že musíme někdy jít *oklikou.* Tento příklad je ale v této práci ojedinělý. V ostatních příkladech vedla cesta výpočtu přímo.

6 Závěr

V této práci jsme si ukázali, jak pomocí Baker-Hausdorf-Campbell formule, resp. jejího speciálního tvaru, spočítat transformaci souřadnic mezi některými isomorfními Drinfeldovy doubly. V posledním příkladu jsme zjistili, že pokud se dostaneme do stavu, kdy nemůžeme použít speciální tvar B-H-C formule (12) (13), můžeme vyzkoušet, jestli neexistuje nějaká *oklika*. My ovšem můžeme hovořit o štěstí, že jsme tuto *okliku* našli. V jiných případech, pokud ovšem nějaká *oklika* existuje, ji lze jen velice těžko nalézt.

Nyní si představme, že máme spočítat transformaci souřadnic mezi dvěmy doubly a použití speciálního tvaru B-H-C formule je vyloučeno z důvodu nesplňení podmínky záměnnosti. Předpokládejme dále, že se nám nepodařilo najít jakoukoliv *okliku*. V tomto případě nám nezbývá nic jiného, něž použít přímo B-H-C formuli (9). Pokusit se sečíst sumu a zkusit vypočítat explicitní tvar komutace exponenciel. Zda tento postup vždy vede ke správnému výsledku, nevíme a odkazujeme na vlastní bádání a hledání.

V této práci jsme dále zavedli konvenci (8), ve které jsme určili v jakém tvaru budeme parametrizovat obecný prvek grupy. Jak jste viděli, museli jsme se v posledním příkladu od této konvence odklonit, ale opět jsme se k ní vrátili. Chtěli bychom Vás upozornit na skutečnost, že jiní autoři používají jiné konvence a tudíž jejich výsledky nemusí souhlasit s našimi nalezenými transformacemi (např. [6]) .

Ukázali jsme, že obecný prvek l lze parametrizovat ruznými způsoby, podle věty 1. Rovněž jsme se dozvěděli, že pokud v jedné parametrizaci, se k výsledku neprokomutujeme, v jiné parametrizaci to už pravda být nemusí.

V této práci jsme si zavedli tzv. *podmínku záměnnosti*, jedná se o podmínku dvou vektorů dané algebry, jejichž exponenciely budeme komutovat podle (13), nebo rozkládat či skládat podle (12). Tato podmínka je nejdůležitější podmínkou v průběhu našeho výpočtu a pouze na ní mohou ztroskotat naše plány, pouze ona nám může říci: "Dost, tudy cesta nevede". Pak nezbývá nic jiného než nalézt nějakou *okliku*, nebo se pustit do sečtení sumy v obecném tvaru B-H-C formule (9)

7 Souhrn

Tato práce se zabývala výpočtem transformačních vztahů mezi některými šesti-dimenzionálními Drinfeldovými doubly pomocí Baker-Hausdorf-Campbell formule.

Ve druhé kapitole jsme vysvětlili, co je to Drinfeldův double, pomocí definice z [2].

Ve třetí kapitole jsme si řekli, za jakých podmínek lze rozložit grupu na součin jednoparametrických podgrup, a že nám parametry těchto podgrup označují souřadnice obecného členu grupy v bázi tvořené generátory grupy.

V další kapitole věnované B-H-C formuli jsme si tuto formuli vyslovili ve formě věty a uvedli jsme také její speciální případ, který je pro tuto práci stěžejní.

V páté kapitole Výsledky, jsme specifikovali, kterými Drinfeldovými doubly se budeme zabývat a prezentovali jsme naše nalezené transformační vztahy. U prvního příkladu jsme podrobněji rozepsali postup, jakým jsme tento výsledek získali. Dále následovali tři podobné příklady. V posledním z těchto tří, jsme postup výpočtu již úplně vynechali a doporučili ho čtenáři jako cvičení. Poslední příklad byl ze všech příkladů ojedinělý, protože pouze u něj jsme nemohli postupovat přímo. Rovněž tento příklad jsme podrobně rozebrali.

V celé této práci je nejdůležitější odkaz na článek [2], který pojednává o klasifikaci šesti-dimensionální Drinfeldových doublech. A obsahuje, mimo jiné, vyčerpávající informace o komutačních relacích vektorů algeber přídlušejících všem typům šesti-dimensionálních doublů.

Reference

[1] L. Hlavatý, L. Šnobl, *Modern Physics Letters, A 17, 429, 2002*

[2] L. Hlavatý, L. Šnobl, *Clasification of 6-dimensional Drinfeld doubles, Int. J. Mod. Physic A17, 4043-4067, 2002*

[3] A.O.Barut, R. Raczka: *Theory of group representations and application,PWN Warszawa 1977*

[4] L. Corwin, F.P. Greenleaf: *Representation of nilpotent Lie groups and their applications, Part 1: Basic theory and examples, 1990, ISBN 052136034X*

[5] L. Hlavatý, L. Šnobl, *Nondiagonal metrics and dilaton puzzle, JHEP 10(2004)045*

[6] R.von Unge, *Poisson-Lie T-plurality, JHEP 07(2002)014*