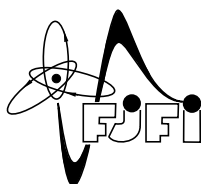


ČESKÝ VYSOKÉ UČENÍ TECHNICKÉ V PRAZE
FAKULTA JADERNÁ A FYZIKÁLNĚ INŽENÝRSKÁ
KATEDRA FYZIKY

REŠERŠNÍ PRÁCE

Matematický popis lineárních optických prvků



1. srpna 2004

Matěj Tušek

Obsah

1	Úvod	2
2	Od klasického ke kvantovému popisu světla	2
3	Základní prvky optických sítí	5
3.1	Dělič svazku	5
3.2	Posunovač fáze	13
3.3	Akce děliče svazku jakožto rotace stavového vektoru	15
4	Optické sítě	18
4.1	Experimentální realizace konečnědimenzionálního unitárního operátoru	19
4.2	Úplně symetrický $2N$ port	21
4.3	Redukce počtu optických prvků nutných ke konstrukci úplně symetrického $2N$ portu	23
5	Hamiltonovský model	26
5.1	Interakční hamiltonián pro dělič svazku	26
5.2	Interakční hamiltonián pro úplně symetrický $2N$ port	27
6	Závěr	29

1 Úvod

Cílem práce je matematicky popsat některá optická zařízení a seznámit se přitom se základy kvantové optiky. Nejvíce prostoru je věnováno základním prvkům pasivních optických sítí: děliči svazku a posunovači fáze. Ukážeme si, jak pomocí těchto elementárních prvků experimentálně realizovat libovolný unitární operátor na konečné dimenzi. Fyzicky bude unitární operátor reprezentován tzv. $2N$ portem. Pro technickou praxi je zajímavá otázka počtu elementárních prvků nutných ke konstrukci libovolného $2N$ portu, neboť s rostoucím počtem prvků rostou i energetické ztráty a nepřesnosti způsobené nedokonalostí geometrie experimentu. Ukazuje se, že ve zvláštních případech lze počet potřebných prvků redukovat.

Úvodní kapitola shrnuje poznatky o klasickém a kvantovém popisu světla v míře dostačující pro popis optických prvků. Využil jsme ji i k zavedení a připomenutí některých potřebných pojmů. Oddíl (3.1) se věnuje děliči svazku, který je klíčovým prvkem v řadě interferometrů (např. Michelsonově či Mach-Zehnderově) a základním stavebním kamenem pro složitější pasivní sítě (např. sítě pro demonstraci náhodného kvantového chování v analogii optických interferometrů [6]). Je tedy přirozené a užitečné hledat pro popis děliče nějaký matematický model. Seznámíme se hned s několika možnými přístupy. Oddíly (4.2) a (4.3) se potom zabývají popisem a konstrukcí matematicky i fyzikálně zajímavého úplně symetrického $2N$ portu. V kapitole (5) nakonec popíšeme některé jednoduché optické prvky pomocí hamiltoniánů, které charakterizují interakci zúčastněných módů elektromagnetického pole.

2 Od klasického ke kvantovému popisu světla

Klasický pohled na světlo jakožto na elektromagnetické vlnění nabízí Maxwellova teorie elektromagnetismu. Jelikož cílem práce není ji zde opakovat, odvolám se například na [2] či [3] a omezím se na shrnutí poznatků, které jsou potřebné k představě o klasickém a následně i kvantovém popisu optických prvků.

Vycházíme z Maxwellových rovnic, které řešíme pomocí vektorového potenciálu $\vec{A}$ a skalárního potenciálu φ . Maxwellovy rovnice neurčují tyto potenciály jednoznačně, což umožňuje zavedení dalších tzv. kalibračních podmínek, které mohou usnadnit řešení. V případě prostředí bez proudů a nábojů je výhodné použít tzv. Coulombovu kalibraci ($\text{div} \vec{A} = 0$). Skalární potenciál je potom identicky roven nule a vektorový potenciál musí splňovat

vlnovou rovnici

$$\Delta \vec{A} = \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 \vec{A}}{\partial t^2} \quad , \quad (1)$$

kterou obvykle řešíme separací proměnných. Mějme tedy ansatz

$$\vec{A}(\vec{r}, t) = \gamma q(t) \vec{v}(\vec{r}) \quad , \quad (2)$$

kde γ je konstanta, q funkce času (označovaná jako amplituda) a $\vec{v}$ funkce souřadnic (tzv. módová funkce, která určuje prostorové rozložení elektromagnetického pole). Součin $q(t)\vec{v}(\vec{r})$ udává tzv. mód elektromagnetického pole (dále jen mód).

Dosadíme-li (2) do (1), dojdeme po separaci k výsledku

$$\frac{\Delta v_j(\vec{r})}{v_j(\vec{r})} = \frac{1}{c^2} \frac{\ddot{q}(t)}{q(t)} = konst. = -|\vec{k}|^2, \quad j = x, y, z \quad (3)$$

Reálný vektor $\vec{k}$ se nazývá vlnový. Vlastní čísla Laplaceova operátoru jsou záporná, proto před výrazem $|\vec{k}|^2$ stojí záporné znaménko. Z rovnosti (3) plyne

$$\Delta \vec{v}(\vec{r}) + |\vec{k}|^2 \vec{v}(\vec{r}) = 0 \quad (4)$$

$$\ddot{q}(t) + \Omega^2 q(t) = 0, \quad \text{kde } \Omega = c|\vec{k}| \quad (5)$$

První z rovnic se říká Helmholtzova, druhá rovnice představuje pohybovou rovnici harmonického oscilátoru se zobecněnou souřadnicí q .

V případě elektromagnetického pole v dutině (rezonátoru) vedou okrajové podmínky na diskretizaci možných hodnot složek vlnového vektoru a následně i na diskretizaci příslušných módových funkcí. Celkovou energii pole uvnitř rezonátoru lze potom vyjádřit jako spočetnou sumu energií harmonických oscilátorů přidružených jednotlivým módům [2]

$$\mathcal{H} = \sum_l \left(\frac{1}{2} \dot{q}_l^2 + \frac{1}{2} \Omega_l^2 q_l^2 \right) \quad (6)$$

Energie každého módu je tedy rovna energii harmonického oscilátoru se zobecněnou souřadnicí q_l .

Pro přechod ke kvantovému popisu elektromagnetického pole se nyní jeví celkem přirozené kvantovat dílčí harmonické oscilátory stejným způsobem jako oscilátory mechanické. Postup načrtnu pro jeden mód s amplitudou q_l (podrobněji v [2], [4]).

Nejprve zavedeme bezrozměrné komplexní amplitudy

$$a_l = \frac{1}{\sqrt{2\hbar\Omega_l}}(\Omega_l q_l + ip_l), \quad a_l^* = \frac{1}{\sqrt{2\hbar\Omega_l}}(\Omega_l q_l - ip_l), \quad (7)$$

kde $p_l \equiv \dot{q}_l$ je konjugovaná proměnná k zobecněné souřadnici q_l ¹. Hamiltonián má v termínech komplexních amplitud tvar

$$\mathcal{H}_l = \frac{1}{2}\hbar\Omega_l(a_l^* a_l + a_l a_l^*) \quad (8)$$

Pořadí amplitud v hamiltoniánu jsme zachovali pro pozdější nahrazení operátory, které nemusí (a také nebudou) komutovat.

Nyní začneme s vlastním kvantováním. Pozorovatelným q_l a p_l přiřadíme operátory polohy $\hat{q}_l$ a hybnosti $\hat{p}_l$ splňující komutační relace

$$[\hat{q}_l, \hat{p}_m] = i\hbar\delta_{lm}\mathbf{1} \quad (9)$$

Komplexní amplitudy nahradíme anihilačními a kreačními operátory

$$\hat{a}_l = \frac{1}{\sqrt{2\hbar\Omega_l}}(\Omega_l\hat{q}_l + i\hat{p}_l), \quad \hat{a}_l^\dagger = \frac{1}{\sqrt{2\hbar\Omega_l}}(\Omega_l\hat{q}_l - i\hat{p}_l), \quad (10)$$

pro které vzhledem (9) platí

$$[\hat{a}_l, \hat{a}_m] = [\hat{a}_l^\dagger, \hat{a}_m^\dagger] = \mathbf{0}, \quad [\hat{a}_l, \hat{a}_m^\dagger] = \delta_{lm}\mathbf{1} \quad (11)$$

Operátor energie l -tého módu bude v souladu s klasickým hamiltoniánem (8) tvaru

$$\hat{\mathcal{H}}_l = \frac{1}{2}\hbar\Omega_l(\hat{a}_l^\dagger\hat{a}_l + \hat{a}_l\hat{a}_l^\dagger), \quad (12)$$

což lze pomocí komutačních relací (11) upravit na

$$\hat{\mathcal{H}}_l = \hbar\Omega_l(\hat{a}_l^\dagger\hat{a}_l + \frac{1}{2}) \quad (13)$$

Příspěvky základních hladin jednotlivých módů $\frac{1}{2}\hbar\Omega_l$ k celkovému hamiltoniánu dávají divergentní člen $\mathcal{H}_0 = \sum_l \frac{1}{2}\hbar\Omega_l$. Nicméně je možné renormalizovat energii a člen $\mathcal{H}_0$ odečíst [2]. Hamiltonián módu potom nabude tvaru

$$\hat{\mathcal{H}}_l = \hbar\Omega_l\hat{a}_l^\dagger\hat{a}_l \quad (14)$$

¹Poněvadž magnetické pole je úměrné q a elektrické pole je úměrné $p \equiv \dot{q}$, chovají se tyto dvě pole jako konjugované proměnné poloha a hybnost mechanického harmonického oscilátoru.[2]

Ukázali jsme si, jak lze postupovat při kvantovém popisu elektromagnetického pole v dutině. Vycházeli jsme z klasické Maxwellovy teorie, kvantová fyzika do našeho popisu vstoupila až prostřednictvím časově závislé složky (amplitudy) separovaného vektorového potenciálu $\vec{A}$. Kvantověmechanická amplituda q již nemůže nabývat libovolné hodnoty, její hodnoty jsou omezeny na body spektra příslušného operátoru v závislosti na stavu pole. To následně platí i pro komplexní amplitudy a a a^* , se kterými budeme výhradně pracovat (proto budu přívlastek komplexní v dalším textu vynechávat).

Amplituda módu a plně určuje prvky význačné třídy stavů elektromagnetického pole, tzv. koherentní (či jinak Glauberovy) stavy. Obvykle je značíme řeckými písmeny (například $|\alpha\rangle$). Koherentní stavy jsou stavy s minimální neurčitostí dvojice komplementárních veličin: fáze a čtverce modulu amplitudy α^2 a tudíž se nejvíce přibližují klasickým (nekvantovým) stavům s ostrou hodnotou energie a fáze elektrického pole. Pro koherentní stavy platí vztah, který Glauber použil jakožto jejich definici

$$\hat{a}|\alpha\rangle = \alpha|\alpha\rangle, \quad (15)$$

neboli koherentní stavy jsou vlastní stavy anihilačního operátoru.

3 Základní prvky optických sítí

Základními optickými prvky rozumíme dělič svazku a posunovač fáze. Jaká je jejich funkce, jaké mají vlastnosti a zejména jak se matematicky popisují, bude zodpovězeno v této kapitole.

3.1 Dělič svazku

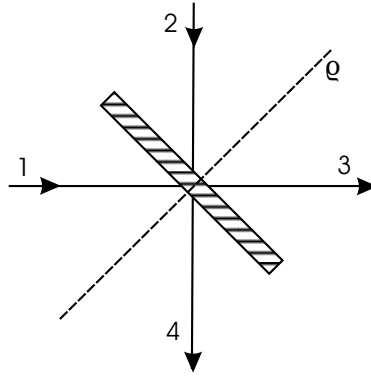
Při popisu děliče svazku budeme postupovat podobně jako při popisu pole v dutině. Nejprve pro něj musíme najít nějaký model. V elementárním případě je dělič svazku tvořen tenkou destičkou dielektrika, rovina ρ (viz obrázek (1)) kolmá k této destičce dělí prostor našeho zájmu na vstupní a výstupní poloprostor. Okrajové podmínky Helmholtzovy rovnice (4) pro módové funkce plynou právě z tohoto modelu. Vně vlastního děliče mají módové funkce tvar rovinné vlny $\exp(\pm i\vec{k} \cdot \vec{r})$ s vlnovým vektorem $\vec{k}$. Tvar řešení uvnitř děliče závisí na vlastnostech použitého dielektrika. Požadavek spojitosti řešení v celém prostoru vede na hledané okrajové podmínky. Jak již bylo uvedeno, kvantová povaha světla se skrývá v amplitudách, proto se věnujme jim.

²Čtverec modulu amplitudy je úměrný střední hodnotě energie pole, fáze amplitudy odpovídá fázi elektrického pole jakožto kvantové pozorovatelné [1].

Dělič svazku spojuje módy ve vstupním a výstupním poloprostoru. V nejjednodušším případě můžeme předpokládat, že mezi amplitudami vstupních a výstupních módů existuje lineární závislost

$$a_m = \sum_l T_{ml} a_l \quad (16)$$

Uvažujme situaci zachycenou na obrázku (1). Slovy klasické fyziky mů-



Obrázek 1: Dělič svazku

žeme říci: "Do děliče vstupují dva světelné paprsky, přičemž část každého z nich se odrazí a část projde na druhou stranu." Módy číslo 1 a 2 nazýváme vstupní, zbylé dva označujeme jako výstupní. Amplitudy vstupních a výstupních módů spojuje podle (16) opět lineární transformace

$$\begin{pmatrix} a_3 \\ a_4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \beta_1 & \gamma_1 \\ \beta_2 & \gamma_2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \end{pmatrix} \quad (17)$$

Energie každého z módů je podle (8)

$$\mathcal{H}_l = \frac{1}{2} \hbar \Omega_l (a_l^* a_l + a_l a_l^*) = \hbar \Omega_l a_l^* a_l \quad (18)$$

Přidáme-li podmínku $\Omega_1 = \Omega_2 = \Omega$, bude i $\Omega_3 = \Omega_4 = \Omega$, neboť z klasické fyziky víme, že odraz světla nebo průchod světla dielektrikem nemění jeho frekvenci, a zákon zachování energie pro bezztrátový dělič nabude tvaru

$$a_1^* a_1 + a_2^* a_2 = a_3^* a_3 + a_4^* a_4, \quad (19)$$

Za použití vztahu (17) dostaneme

$$\begin{aligned} a_3^* a_3 + a_4^* a_4 &= (a_3^* a_4^*) \begin{pmatrix} a_3 \\ a_4 \end{pmatrix} \\ &= (\beta_1^* \beta_1 + \beta_2^* \beta_2) a_1^* a_1 + (\beta_1^* \gamma_1 + \beta_2^* \gamma_2) a_1^* a_2 \\ &\quad + (\gamma_1^* \beta_1 + \gamma_2^* \beta_2) a_2^* a_1 + (\gamma_1^* \gamma_1 + \gamma_2^* \gamma_2) a_2^* a_2 \end{aligned}$$

Ze zákona zachování energie (19) potom plynou podmínky

$$\begin{aligned} |\beta_1|^2 + |\beta_2|^2 &= |\gamma_1|^2 + |\gamma_2|^2 = 1 \\ \beta_1^* \gamma_1 + \beta_2^* \gamma_2 &= \gamma_1^* \beta_1 + \gamma_2^* \beta_2 = 0 \end{aligned}$$

Není zbylí než, aby transformace (17) byla unitární. Můžeme ji tedy zapsat v obecném tvaru

$$\begin{pmatrix} a_3 \\ a_4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} e^{i\varphi} t & e^{i\varphi} r \\ -r^* & t^* \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \end{pmatrix}, \quad (20)$$

kde t a r jsou komplexní čísla splňující $|t|^2 + |r|^2 = 1$.

Matici transformace (20) lze napsat jako součin dvou unitárních matic

$$\begin{pmatrix} e^{i\varphi} t & e^{i\varphi} r \\ -r^* & t^* \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} e^{i\varphi} & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} t & r \\ -r^* & t^* \end{pmatrix} \quad (21)$$

První matice popisuje tzv. posunovač fáze (viz oddíl (3.2)), druhá z matic (s determinanem rovným 1) představuje dělič svazku. Uvedené rozdělení je spíše věcí terminologie. Pro působení čistého děliče svazku dostaneme ze vztahu (20)

$$\begin{pmatrix} a_3 \\ a_4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} t & r \\ -r^* & t^* \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \end{pmatrix}, \quad (22)$$

Pokud do děliče svazku vstupuje jen jeden svazek, například číslo 1, přejde transformace (22) na tvar

$$\begin{pmatrix} a_3 \\ a_4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} t a_1 \\ -r^* a_1 \end{pmatrix} \quad (23)$$

Čísla $|t|^2$ a $|r|^2$ udávají poměr energie prošlého (resp. odraženého) světla ku energii světla dopadajícího. Klasicky tedy můžeme na dělič svazku nahlížet jako na polopropustné zrcadlo s koeficienty propustnosti $|t|^2$ a odrazu $|r|^2$, jejichž součet je v bezztrátovém případě jednička.

Přechod ke kvantové fyzice učiníme nahrazením amplitud jednotlivých módů a_l odpovídajícími anihilačními operátory $\hat{a}_l$ [1] podobně, jako jsme to přirozeným způsobem provedli pro pole v dutině.

$$\begin{pmatrix} \hat{a}_3 \\ \hat{a}_4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} t & r \\ -r^* & t^* \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \hat{a}_1 \\ \hat{a}_2 \end{pmatrix} \quad (24)$$

Matice ze vztahu (24) se obvykle nazývá transfer matice. Transfer matice obecně popisuje časový vývoj anihilačních operátorů pro jednotlivé módy jakožto lineární transformaci. V kapitole (5) si ukážeme, že působení optického zařízení si lze představit jako interakci zúčastněných módů. V tomto smyslu, řečeno v termínech teorie rozptylu, představuje matice (24) transfer matici pro asymptotické anihilační operátory před a po interakci.

Dospěli jsme k jistému kvantovému popisu děliče svazku. Čistě matematicky je dělič svazku se dvěma vstupními módy popsán unitární maticí 2×2 s jedničkovým determinantem, tedy prvkem grupy $\mathbf{SU}(2)$. Tato matice indukuje lineární transformaci, jež převádí anihilační operátory pro vstupní módy na anihilační operátory pro módy výstupní. Transformace operátorů je jen jeden z možných přístupů, ekvivalentní, ale ve zkoumaném případě daleko komplikovanější přístup spočívá v transformaci stavového vektoru nebo matice hustoty celkového pole.

V nejjednodušším případě jsou kvantové stavy dvojice vstupních módů vzájemně nezávislé, celkový stav vstupujícího pole je potom dán tenzorovým součinem dílčích vlnových funkcí (znaménko tenzorového součinu budu vynechávat)

$$|\Psi_{in}\rangle = |\phi\rangle_1 |\psi\rangle_2 \quad (25)$$

Obecně však stavy vstupních módů mohou být svázány nebo se může jednat o stavy smíšené. V prvním případě nelze stav vstupujícího pole zapsat ve faktorizovaném tvaru (25), v druhém případě musíme vstupující pole reprezentovat maticí hustoty $\hat{\rho}_{in}$. V následujících odstavcích nalezneme celkový kvantový stav dvou výstupních módů v několika speciálních případech.

Zabývejme se nejprve případem, kdy jeden ze vstupních módů (například číslo 1) je ve stavu o n fotonech (Fockův stav) a na druhém vstupu je vakuum. Speciálně tak vyšetříme, jak působí dělič svazku na jeden foton ($n = 1$). Stavy o n fotonech jsou vlastní stavy hamiltoniánu (14)

$$\hat{\mathcal{H}}|n\rangle = \hbar\Omega\hat{a}^\dagger\hat{a}|n\rangle = \hbar\Omega n|n\rangle \quad (26)$$

Pro stavy o n fotonech se snadno odvodí vztahy [1]

$$\hat{a}|n\rangle = \sqrt{n}|n-1\rangle \quad (27)$$

$$\hat{a}^\dagger|n\rangle = \sqrt{n+1}|n+1\rangle \quad (28)$$

Odtud pro anihilační $\hat{a}$ a kreační $\hat{a}^\dagger$ operátory pochází jejich pojmenování.

Necht je tedy celková vlnová funkce tvaru $|n\rangle_1|0\rangle_2|0\rangle_3|0\rangle_4$, to znamená, že vstupnímu módu číslo 1 přísluší stav o n fotonech a ostatním módům vakuum. Vlnovou funkci můžeme pomocí vztahu (28) n -krát aplikovaného na vakuum přepsat na

$$|n\rangle_1|0\rangle_2|0\rangle_3|0\rangle_4 = \frac{\hat{a}_1^{\dagger n}}{\sqrt{n!}}|0\rangle_1|0\rangle_2|0\rangle_3|0\rangle_4 \quad (29)$$

Pomocí transformace inverzní k transformaci (24) zapsané pro hermitovskysdružené operátory vyjádříme kreační operátory vstupních módů jako

$$\begin{pmatrix} \hat{a}_1^\dagger \\ \hat{a}_2^\dagger \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} t & -r \\ r^* & t^* \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \hat{a}_3^\dagger \\ \hat{a}_4^\dagger \end{pmatrix}, \quad (30)$$

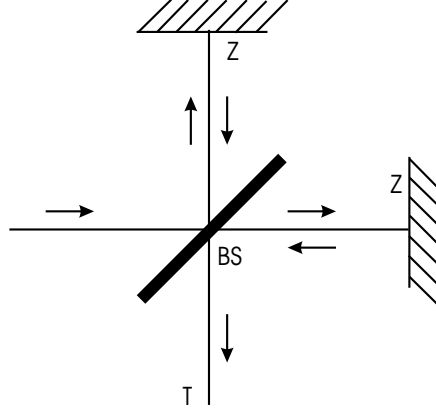
Vlnovou funkci (29) můžeme pomocí rovnosti (30), binomického rozvoje a vztahu (28) postupně upravit na

$$\begin{aligned} |n\rangle_1|0\rangle_2|0\rangle_3|0\rangle_4 &= \frac{(t\hat{a}_3^\dagger - r\hat{a}_4^\dagger)^n}{\sqrt{n!}}|n\rangle_1|0\rangle_2|0\rangle_3|0\rangle_4 \\ &= \frac{1}{\sqrt{n!}} \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} t^k (-r)^{n-k} \hat{a}_3^{\dagger k} \hat{a}_4^{\dagger(n-k)} |0\rangle_1|0\rangle_2|0\rangle_3|0\rangle_4 \\ &= \sum_{k=0}^n \sqrt{\binom{n}{k}} t^k (-r)^{n-k} |0\rangle_1|0\rangle_2|k\rangle_3|n-k\rangle_4 \end{aligned} \quad (31)$$

Poslední výraz dává celkovou vlnovou funkci po působení děliče, neboť na vstupech je již vakuum. Stavů výstupních módů již nejsou faktorizovatelné.

Vzájemné provázání výstupních módů lze přímo pozorovat například prostřednictvím Michelsonova interferometru (viz obrázek (2)). Je-li vstupní vlnová funkce tvaru (29), pozorujeme po uplynutí dostatečného času v dalekohledu interferometru interferenční obrazec.

Klasicky se interferenční jevy úspěšně objasňují vlnovým pojetím světla. Zároveň však víme, že energie elektromagnetického záření není atomy přijímána nebo vyzařována spojitě, nýbrž po nedělitelných energetických kvantech, fotonech. Pokud bychom na fotony naivně nahlíželi jako na klasicky lokalizovatelné částice, působení děliče svazku by se redukovalo na funkci "propustí foton-odrazí foton", foton pohybující se podél jednoho ramene "by neměl ponětí o rameni druhém" a na stínítku za dalekohledem Michelsonova interferometru bychom pozorovali neuspořádaně rozmístěné světelné body. To je však v rozporu s pozorováním. K výsledku ve shodě k experimentem (interferenční obrazec bez ohledu na intenzitu, samozřejmě probíhá-li



Obrázek 2: Michelsonův interferometr. Funkce Michelsonova interferometru řečí klasické fyziky: Dopadající světlo je děličem svazku **BS** rozděleno na dvě dílčí vlny, které jsou posléze odraženy od zrcadel **Z** a po sjednocení děličem směřovány do pozorovacího dalekohledu **T**. Jelikož zrcadla nejsou vzájemně přesně kolmá, pozorujeme v důsledku fázového rozdílu sjednocených vln interferenční obrazec.

experiment dostatečně dlouho), dospějeme zavedeným kvantověmechanickým popisem, kdy dopadajícímu fotonu a celkovému poli přiřadíme vlnovou funkci.

Nechť tedy do dělič Michelsonova interferometru vstupuje jeden foton $|1\rangle_1$. Podle odvození (31), bude vlnová funkce výstupních módů

$$|\Psi_{out}\rangle = t|1\rangle_3|0\rangle_4 - r|0\rangle_3|1\rangle_4, \quad (32)$$

vstupující foton "absolvuje cestu oběma rameny interferometru", aby poté slovy Diraca "interferoval sám se sebou".

Odvodili jsme, že pokud do vstupního portu číslo 1 dopadá n fotonů, nabude dle (31) vlnová funkce vystupujícího pole tvaru

$$|\Psi_{out}\rangle = \sum_{k=0}^n \sqrt{\binom{n}{k}} t^k (-r)^{n-k} |k\rangle_3 |n-k\rangle_4 = \sum_{k=0}^n \alpha_{k,n-k} |k\rangle_3 |n-k\rangle_4 \quad (33)$$

Můžeme se ptát v jakém stavu se nachází jednotlivé výstupní módy. Odpověď dává tzv. redukční formule [5]. Celkový systém (vystupující pole) je v čistém stavu popsaném vektorem $|\Psi_{out}\rangle$, který jsme vyjádřili v bázi sestavené z tenzorových součinů bazických vektorů $(\{|k\rangle\}_{k=0}^\infty)$ dílčích podsystémů (výstupní módy). Stav výstupního módu číslo 3 je potom dle zmiňované redukční formule jednoznačně určen maticí hustoty $\hat{\rho}_3$ (Matice hustoty jakožto

lineární operátor na stavovém prostoru je plně určena svým působením na bazické vektory stavového prostoru.)

$$\hat{\rho}_3|i\rangle = \sum_{k=0}^{\infty} b_{ik}|k\rangle, \text{ kde } b_{ik} = \sum_{l=0}^{\infty} \alpha_{kl}^* \alpha_{il} \quad (34)$$

Jelikož vzhledem k (33) platí $\alpha_{kl} = 0$ pro $k + l \neq n$, tvar koeficientů b_{ik} se zjednoduší na $b_{ik} = \delta_{ik} \alpha_{k,n-k}^* \alpha_{i,n-i}$ a matice hustoty $\hat{\rho}_3$ splňuje

$$\hat{\rho}_3|i\rangle = \begin{cases} |\alpha_{i,n-i}|^2|i\rangle & \text{pro } i = 0, \dots, n \\ 0 & \text{pro } i > n \end{cases} \quad (35)$$

Vynásobíme-li každou z rovností (35) bra vektorem $\langle i|$ a sečteme-li výsledné rovnice, dostaneme za použití relace úplnosti $\sum_{i=0}^{\infty} |i\rangle\langle i| = \mathbf{1}$ vyjádření matice hustoty pro stav výstupního módu číslo 3

$$\hat{\rho}_3 = \sum_{i=0}^n |\alpha_{i,n-i}|^2 |i\rangle_{33} \langle i| = \sum_{i=0}^n \binom{n}{i} |t^i r^{n-i}|^2 |i\rangle_{33} \langle i| \quad (36)$$

Matici hustoty pro stav druhého výstupního módu bychom odvodili analogicky.

Libovolný čistý vstupní stav tvaru $|\Psi\rangle_{in} = \sum_{n=0}^{\infty} c_n |n\rangle_1 |0\rangle_2$ přejde na druhé straně děliče svazku podle (31) ve stav

$$|\Psi\rangle_{out} = \sum_{n=0}^{\infty} c_n \sum_{k=0}^n \sqrt{\binom{n}{k}} t^k (-r)^{n-k} |k\rangle_3 |n-k\rangle_4 \quad (37)$$

Přejdeme nyní k dalšímu zajímavému případu, kdy stav jednoho ze vstupních módů je koherentní

$$|\Psi\rangle_{in} = |\alpha\rangle_1 |0\rangle_2 \quad (38)$$

Koherentní stav lze v bázi stavů o n fotonech zapsat jako [1]

$$|\alpha\rangle = e^{-|\alpha|^2/2} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{\alpha^n}{\sqrt{n!}} |n\rangle, \quad (39)$$

z čehož mimo jiné plyne, že pravděpodobnostní rozdělení energie koherentního stavu se řídí diskrétním Poissonovým rozdělením [1],[2].

Vztah (39) pomocí (28) přepíšeme na

$$|\alpha\rangle = e^{-|\alpha|^2/2} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{\alpha^n}{n!} |0\rangle = e^{-|\alpha|^2/2} e^{\alpha \hat{a}^\dagger} |0\rangle \quad (40)$$

Stav výstupních módů po působení děliče svazku nalezneme podobným způsobem jako v předchozím případě. Výchozí celkový stav převedeme pomocí operátorové transformace (30) na stav takový, že na vstupech děliče bude vakuum. V následujících úpravách značí $|0\rangle$ vakuum všech módů.

$$\begin{aligned} |\alpha\rangle_1|0\rangle_2|0\rangle_3|0\rangle_4 &= e^{-|\alpha|^2/2}e^{\alpha\hat{a}_1^\dagger}|0\rangle = e^{-|\alpha|^2(|t|^2+|r|^2)/2}e^{\alpha(t\hat{a}_3^\dagger-r\hat{a}_4^\dagger)}|0\rangle \\ &= e^{-|\alpha t|^2/2}e^{\alpha t\hat{a}_3^\dagger}e^{-|\alpha r|^2/2}e^{-\alpha r\hat{a}_4^\dagger}|0\rangle \\ &= |0\rangle_1|0\rangle_2|t\alpha\rangle_3|-r\alpha\rangle_4 \end{aligned} \quad (41)$$

Exponenciálu součtu operátorů $\hat{a}_3^\dagger$ a $\hat{a}_4^\dagger$ jsme mohli rozdělit na součin, neboť operátory $\hat{a}_3^\dagger$ a $\hat{a}_4^\dagger$ podle (11) komutují [5].

Celková vlnová funkce výstupních módů je $|\Psi\rangle_{out} = |t\alpha\rangle_3|-r\alpha\rangle_4$. Výstupní módy nejsou provázány, jsou faktorizovatelné a nachází se v koherentních stavech. Pomocí vícenásobného užití děliče svazku tedy lze na jednom z výstupů připravit jiný koherentní stav o libovolně malé energii (například $|t^n\alpha\rangle_3$).

Pokud bychom plně využili toho, že koherentní stavy jsou vlastní stavy anihilačního operátoru a tudíž se transformují stejně jako amplitudy (tj. dle (17)) [2], mohli jsme si ušetřit práci s předchozím odvozováním a navíc vyšetřit obecnější případ, kdy oba vstupní módy jsou v libovolném koherentním stavu. Působením děliče svazku se vstupní stav $|\Psi\rangle_{in} = |\beta\rangle_1|\gamma\rangle_2$ transformuje v souladu s (22) na výstupní stav

$$|\Psi\rangle_{out} = |t\beta + r\gamma\rangle_3|-r^*\beta + t^*\gamma\rangle_4 \quad (42)$$

Ještě zbývá odpovědět, jak se transformuje libovolný vstupní stav popsaný maticí hustoty $\hat{\rho}_{in}$. Poněvadž již víme, jak se transformují koherentní stavy, je výhodné matici hustoty $\hat{\rho}_{in}$ zapsat pomocí Glauber-Sudarhanovy distribuční funkce³ pro vstupní módy $P_{1,2}(\beta, \gamma)$ [2]

$$\hat{\rho}_{in} = \int d^2\beta \int d^2\gamma P_{1,2}^{(in)}(\beta, \gamma) |\beta\rangle_{11}\langle\beta| \otimes |\gamma\rangle_{22}\langle\gamma| \quad (43)$$

Použijeme-li výsledek (42), dostaneme pro matici hustoty výstupních módů výraz

$$\hat{\rho}_{in} = \int d^2\beta \int d^2\gamma P_{1,2}^{(in)}(\beta, \gamma) |t\beta + r\gamma\rangle_{33}\langle t\beta + r\gamma| \otimes |-r^*\beta + t^*\gamma\rangle_{44}\langle -r^*\beta + t^*\gamma| \quad (44)$$

³Jedná se o funkci distribuční v zobecněném smyslu.

Za předpokladu existence a znalosti Glauber-Sudarhanovy distribuce jsme vyšetřili působení děliče svazku pro obecný vstupní stav, tedy i stav, kdy jsou oba vstupní módy využity. Pokud se oba vstupní módy nachází ve stavech různých od vakua, říkáme, že dělič svazku pracuje jako optický směšovač, neboť stavy výstupních módů nejsou nezávislé. Výjimku tvoří koherentní stavy (viz (42)), které tak zůstávají nejbližší klasické fyzice, jež žádné provázání nepředpovídá.

Zajímavého výsledku se dočkáme, pustíme-li do obou vstup; symetrického děliče svazku ($t = r = 1/\sqrt{2}$) po jednom fotonu. Stav vstupních módů tedy bude $|\Psi\rangle_{in} = |1\rangle_1|1\rangle_2$. S pomocí (30) najdeme stav výstupních módů po působení děliče postupem analogickým odvození (31).

$$\begin{aligned} |1\rangle_1|1\rangle_2|0\rangle_3|0\rangle_4 &= \hat{a}_1^\dagger \hat{a}_2^\dagger |0\rangle \\ &= \left(\frac{1}{\sqrt{2}} \hat{a}_3^\dagger - \frac{1}{\sqrt{2}} \hat{a}_4^\dagger \right) \left(\frac{1}{\sqrt{2}} \hat{a}_3^\dagger + \frac{1}{\sqrt{2}} \hat{a}_4^\dagger \right) |0\rangle = \frac{1}{2} (\hat{a}_3^{\dagger 2} - \hat{a}_4^{\dagger 2}) |0\rangle \\ &= \frac{\sqrt{2}}{2} (|0\rangle_1|0\rangle_2|2\rangle_3|0\rangle_4 - |0\rangle_1|0\rangle_2|0\rangle_3|2\rangle_4) \end{aligned} \quad (45)$$

Pokud za oba výstupy umístíme detektory, nikdy nenaměříme souhlasnou detekci. Oba fotony nalezneme buď současně na výstupu 3 nebo současně na výstupu 4! Pokud bychom na fotony nahlíželi očima klasické fyziky, dospěli bychom ke zcela jinému výsledku. Každý z fotonů by se nezávisle na druhém nacházel s pravděpodobností $1/2$ na jednom z výstupních módů a shoda detektorů by se vyskytovala v souladu s prostou statistikou v polovině případů.

Mlčky jsme předpokládali ideální uspořádání experimentu, tedy takové, že se fotony v děliči skutečně "setkají". V opačném případě se fotony vzájemně neovlivňují a detektory zaznamenávají i shodu. Zvětšujeme-li časový rozdíl dopadu fotonů na dělič, roste četnost zaznamenaných shod až se ustálí na konstantní hodnotě. Nabízí se tak možnost určit efektivní šířku vlnového balíku fotonu[1].

3.2 Posunovač fáze

Podobně jako v případě děliče svazku motivujeme popis posunovače fáze výsledky klasické fyziky (konkrétněji vlnové teorie). Zatímco funkcí děliče svazku je rozdělit energii elektromagnetické vlny, posunovač fáze slouží ke změně fáze vlny o nějakou konstantní hodnotu.

Mluvíme-li o posunu fáze vlny, musíme uvést nějakou referenční vlnu. Můžeme například vzájemně posunout fáze vln vystupujících z děliče svazku

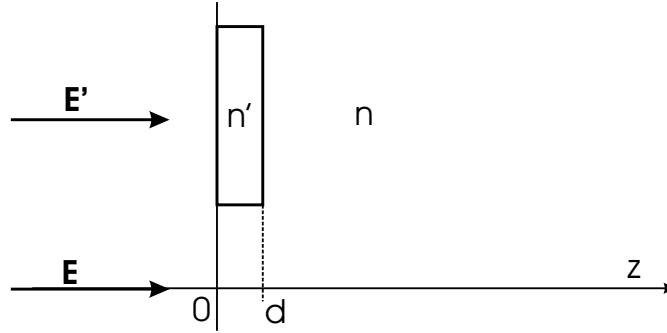
tím, že je necháme překonat rozdílnou optickou dráhu. Přičemž nás zajímá rozdíl fáze modulo 2π , jiný se ani v případě elektromagnetického vlnění experimentálně neprojevuje. Čistě matematicky lze tedy na posunovač fáze nahlížet jako na prvek grupy $\mathbf{U}(1)$.

Jako jednoduchý model posunovače fáze poslouží destička z materiálu o indexu lomu $n = 1/\epsilon\mu$ (ϵ je permitivita a μ permeabilita materiálu), která dělí prostor na dvě části. Předpokládáme stoprocentní přenos energie, tzn. bezztrátovost a absolutní propustnost posunovače.

Mějme monochromatickou vlnu šířící se prostředím o indexu lomu n ve směru osy z

$$\vec{E}'(z, t) = \vec{E}_0 e^{i(\omega t - kz)} \quad (46)$$

Necháme-li ji projít posunovačem fáze o indexu lomu n' a tloušťce d získá oproti referenční vlně popsané vektorem $\vec{E}$, která vzdálenost d překonává vnějším prostředím, jistý fázový posun. Situace je zachycena na obrázku (3). Pro elektrické pole v bodech rozhraní posunovače a vnějšího prostředí



Obrázek 3: Posunovač fáze

platí

$$\vec{E}(0, t) = \vec{E}'(0, t) = \vec{E}_0 e^{i(\omega t)} \quad (47)$$

$$\vec{E}(d, t) = \vec{E}_0 e^{i(\omega(t-d/v))}, \quad \vec{E}'(d, t) = \vec{E}_0 e^{i(\omega(t-d/v'))} \quad (48)$$

Pro rozdíl fází $\Delta\varphi$ dostaneme

$$\Delta\varphi = \varphi' - \varphi = \omega(1/v - 1/v')d = \frac{\omega}{c}(n - n')d \quad (49)$$

A konečně mezi $\vec{E}$ a $\vec{E}'$ platí vztah

$$\vec{E}'(z, t) = \vec{E}(z, t) e^{i\Delta\varphi} \quad \text{pro } z > d \quad (50)$$

Fázový posun způsobený daným posunovačem je podle (49) funkcí frekvence procházejícího světla (vedle přímé závislosti na ω , musíme ještě uvážit disperzní vztahy $n = n(\omega)$, $n' = n'(\omega)$ pro daná prostředí), není však funkcí času.

Člen $e^{i\Delta\varphi}$ můžeme připojit k amplitudě elektrického pole a tedy i k amplitudě módu. Přechod ke kvantové fyzice učiníme opět nahrazením amplitud anihilačními operátory. V termínech zavedených v předchozích kapitolách je posunovač fáze kvantověmechanicky popsán transformací anihilačních operátorů pro vstupní ($\hat{a}_{in}$) a výstupní ($\hat{a}_{out}$) mód

$$\hat{a}_{out} = e^{i\Delta\varphi} \hat{a}_{in} \quad (51)$$

Pokud bychom umístili posunovač fáze za jeden z výstupů děliče svazku (například za výstup číslo 3), můžeme výsledné zařízení popsat transfer maticí

$$\begin{pmatrix} e^{i\Delta\varphi} & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} t & r \\ -r^* & t^* \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} e^{i\Delta\varphi} t & e^{i\Delta\varphi} r \\ -r^* & t^* \end{pmatrix} \quad (52)$$

Pomocí děliče paprsku a posunovače fáze tak můžeme realizovat libovolnou unitární transformaci na $\mathbb{C}^2$.

3.3 Akce děliče svazku jakožto rotace stavového vektoru

Doposud jsme dělič svazku representovali prvkem grupy **SU(2)**. Jelikož grupa **SU(2)** je ekvivalentní grupě rotací v trojrozměrném prostoru, nabízí se možnost nahlížet na akci děliče jakožto na rotaci v prostoru [8]. Následující řádky osvětlují, jak onu rotaci nalézt.

Buďte $\hat{a}_1$ a $\hat{a}_2$ anihilační operátory pro dvojici vstupních (resp. výstupních) módů zkoumaného zařízení. Tyto operátory musí splňovat komutační relace pro bosony (11), v tomto případě

$$[\hat{a}_i, \hat{a}_j] = [\hat{a}_i^\dagger, \hat{a}_j^\dagger] = \mathbf{0}, \quad [\hat{a}_i, \hat{a}_j^\dagger] = \delta_{ij} \mathbf{1}, \quad i, j = 1, 2 \quad (53)$$

Dále si zavedeme hermitovské operátory

$$\begin{aligned} \hat{J}_x &= \frac{1}{2}(\hat{a}_1^\dagger \hat{a}_2 + \hat{a}_2^\dagger \hat{a}_1) \\ \hat{J}_y &= -\frac{i}{2}(\hat{a}_1^\dagger \hat{a}_2 - \hat{a}_2^\dagger \hat{a}_1) \\ \hat{J}_z &= \frac{1}{2}(\hat{a}_1^\dagger \hat{a}_1 - \hat{a}_2^\dagger \hat{a}_2) \end{aligned} \quad (54)$$

a

$$\hat{N} = (\hat{a}_1^\dagger \hat{a}_1 + \hat{a}_2^\dagger \hat{a}_2) \quad (55)$$

Operátory (54) se nazývají Schwingerovy [7], splňují komutační relace Lieovy algebry $\mathfrak{su}(2)$

$$[\hat{J}_x, \hat{J}_y] = i\hat{J}_z, \quad [\hat{J}_y, \hat{J}_z] = i\hat{J}_x, \quad [\hat{J}_z, \hat{J}_x] = i\hat{J}_y \quad (56)$$

a můžeme na ně nahlížet jako na operátory abstraktního momentu hybnosti. Operátor celkového počtu fotonů $\hat{N}$ komutuje se všemi operátory $\hat{J}_i$

$$[\hat{N}, \hat{J}_i] = 0, \quad i = x, y, z \quad (57)$$

Operátory počtu fotonů v dílčích paprscích $\hat{a}_1^\dagger \hat{a}_1$ a $\hat{a}_2^\dagger \hat{a}_2$ snadno vyjádříme v termínech $\hat{J}_z$ a $\hat{N}$.

Bezztrátové pasivní zařízení se dvěma vstupními (anihilační operátory $\hat{a}_{1in}$ a $\hat{a}_{2in}$) a dvěma výstupními (anihilační operátory $\hat{a}_{1out}$ a $\hat{a}_{2out}$) porty lze popsat transfer maticí

$$\begin{pmatrix} \hat{a}_{1out} \\ \hat{a}_{2out} \end{pmatrix} = U \begin{pmatrix} \hat{a}_{1in} \\ \hat{a}_{2in} \end{pmatrix} \quad (58)$$

Aby zůstali v platnosti relace (53), matice U musí být unitární. Již víme, že libovolnou unitární matici U rozměru 2×2 můžeme realizovat pomocí děliče svazku a posunovače fáze.

Uvažme dělič svazku s transfer maticí

$$U = \begin{pmatrix} \cos \frac{\alpha}{2} & -i \sin \frac{\alpha}{2} \\ -i \sin \frac{\alpha}{2} & \cos \frac{\alpha}{2} \end{pmatrix} \quad (59)$$

Vyjádříme-li operátory $\hat{a}_{1out}$ a $\hat{a}_{2out}$ podle (58) a zapíšeme-li složky $\vec{\hat{J}}_{out}$ ve složkách $\vec{\hat{J}}_{in}$ pomocí definic (54), dostaneme

$$\begin{pmatrix} \hat{J}_x \\ \hat{J}_y \\ \hat{J}_z \end{pmatrix}_{out} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos \alpha & -\sin \alpha \\ 0 & \sin \alpha & \cos \alpha \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \hat{J}_x \\ \hat{J}_y \\ \hat{J}_z \end{pmatrix}_{in} = e^{i\alpha \hat{J}_{xin}} \begin{pmatrix} \hat{J}_x \\ \hat{J}_y \\ \hat{J}_z \end{pmatrix}_{in} e^{-i\alpha \hat{J}_{xin}} \quad (60)$$

Složky $\vec{\hat{J}} = (\hat{J}_x, \hat{J}_y, \hat{J}_z)$ se transformují mezi sebou. Platnost druhé rovnosti ověříme pomocí operátorového vztahu

$$e^{\alpha \hat{A}} \hat{B} e^{-\alpha \hat{A}} = \hat{B} + \alpha [\hat{A}, \hat{B}] + \frac{\alpha^2}{2!} [\hat{A}, [\hat{A}, \hat{B}]] + \dots \quad (61)$$

Rovnice (60) dává interakci světla s děličem svazku názornou geometrickou interpretaci. Abstraktní vektor momentu hybnosti $\vec{\hat{J}}$ se otočí kolem osy x

o úhel α . Tak je tomu v Heisenbergově popisu časového vývoje, při němž stavový vektor zůstává pevný a mění se operátory, naopak v Schrödingerově popisu operátory zůstávají nedotčeny a mění se stavový vektor

$$|\Psi_{out}\rangle = e^{-i\alpha\hat{J}_x}|\Psi_{in}\rangle, \quad (62)$$

Rovnost (62) představuje rotaci vstupního stav $|\Psi_{in}\rangle$ s generátorem $\hat{J}_x$.

Sestavme další transfer matici pro dělič svazku

$$U = \begin{pmatrix} \cos \frac{\beta}{2} & -\sin \frac{\beta}{2} \\ \sin \frac{\beta}{2} & \cos \frac{\beta}{2} \end{pmatrix} \quad (63)$$

Vektor $\vec{\hat{J}}$ se pak bude transformovat jako

$$\begin{pmatrix} \hat{J}_x \\ \hat{J}_y \\ \hat{J}_z \end{pmatrix}_{out} = \begin{pmatrix} \cos \beta & 0 & \sin \beta \\ 0 & 1 & 0 \\ -\sin \beta & 0 & \cos \beta \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \hat{J}_x \\ \hat{J}_y \\ \hat{J}_z \end{pmatrix}_{in} = e^{i\beta\hat{J}_{yin}} \begin{pmatrix} \hat{J}_x \\ \hat{J}_y \\ \hat{J}_z \end{pmatrix}_{in} e^{-i\beta\hat{J}_{yin}} \quad (64)$$

Vidíme, že se jedná o rotaci $\vec{\hat{J}}$ kolem osy y o úhel β . Ve Schrödingerově pojetí tento dělič svazku otočí vstupní stav $|\Psi_{in}\rangle$ na

$$|\Psi_{out}\rangle = e^{-i\beta\hat{J}_y}|\Psi_{in}\rangle \quad (65)$$

Do třetice přiřadíme transfer matici dvojici posunovačů fáze. Necht' vstupní módy utrpí fázový posun γ_1 a γ_2 . Transfer matice má potom tvar

$$U = \begin{pmatrix} e^{i\gamma_1} & 0 \\ 0 & e^{i\gamma_2} \end{pmatrix} \quad (66)$$

Analogickým postupem jako v předchozích dvou případech bychom dospěli k transformaci vlnové funkce

$$|\Psi_{out}\rangle = e^{i(\gamma_1+\gamma_2)\hat{N}/2} e^{-i(\gamma_2-\gamma_1)\hat{J}_z} |\Psi_{in}\rangle \quad (67)$$

Akce operátoru $e^{i(\gamma_1+\gamma_2)\hat{N}/2}$ se však experimentálně neprojevuje [8]. To je v souladu s poznatkem, že měřitelný je pouze fázový rozdíl. Při interferenčních pokusech je transfer matice (66) nerozlišitelná od transfer matice

$$\begin{pmatrix} e^{i(\gamma_1-\gamma_2)/2} & 0 \\ 0 & e^{-i(\gamma_1-\gamma_2)/2} \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} e^{i\gamma_1} & 0 \\ 0 & e^{i\gamma_2} \end{pmatrix} \quad (68)$$

Po vynechání členu $e^{i(\gamma_1+\gamma_2)\hat{N}/2}$ přejde výraz (67) pro výstupní stav na

$$|\Psi_{out}\rangle = e^{-i(\gamma_2-\gamma_1)\hat{J}_z}|\Psi_{in}\rangle, \quad (69)$$

který již závisí pouze na rozdílu fázových posunů $\gamma_1 - \gamma_2$. První z matic (68) je již z $\mathbf{SU}(2)$, rotaci v prostoru můžeme tudíž přiřadit i fázovému posunu. Vektor $\vec{J}$ se působením U bude transformovat jako

$$\begin{aligned} \begin{pmatrix} \hat{J}_x \\ \hat{J}_y \\ \hat{J}_z \end{pmatrix}_{out} &= \begin{pmatrix} \cos(\gamma_2 - \gamma_1) & -\sin(\gamma_2 - \gamma_1) & 0 \\ \sin(\gamma_2 - \gamma_1) & \cos(\gamma_2 - \gamma_1) & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \hat{J}_x \\ \hat{J}_y \\ \hat{J}_z \end{pmatrix}_{in} \\ &= e^{i(\gamma_2-\gamma_1)\hat{J}_{zin}} \begin{pmatrix} \hat{J}_x \\ \hat{J}_y \\ \hat{J}_z \end{pmatrix}_{in} e^{-i(\gamma_2-\gamma_1)\hat{J}_{zin}} \end{aligned} \quad (70)$$

Posun fází tedy otočí vektor $\vec{J}$ kolem osy z o úhel $\gamma_2 - \gamma_1$.

Na závěr obecné transfer matice z $\mathbf{SU}(2)$ přiřadíme rotaci v prostoru. Jakoukoliv matici z $\mathbf{SU}(2)$ (čili transfer matici děliče svazku a vzhledem k (68) i fázového posunu) lze rozložit na tvar [7]

$$\begin{pmatrix} e^{i\frac{\psi}{2}} & 0 \\ 0 & e^{-i\frac{\psi}{2}} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \cos\frac{\theta}{2} & \sin\frac{\theta}{2} \\ -\sin\frac{\theta}{2} & \cos\frac{\theta}{2} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} e^{i\frac{\varphi}{2}} & 0 \\ 0 & e^{-i\frac{\varphi}{2}} \end{pmatrix} \quad (71)$$

Libovolnou rotaci, prvek $\mathbf{SO}(3)$, získáme postupným skládáním rotací kolem osy z o úhel φ , kolem osy y' o úhel θ a kolem osy z'' o úhel ψ (Úhly φ, θ, ψ se nazývají Eulerovy.) [3]. Dělič svazku tak podle (65) a (69) transformuje vstupní stav $|\Psi_{in}\rangle$ na

$$|\Psi_{out}\rangle = e^{-i\psi\hat{J}_z} e^{i\theta\hat{J}_y} e^{-i\varphi\hat{J}_z} |\Psi_{in}\rangle \quad (72)$$

Narozdíl od podkapitoly (3.1) jsme díky novému pohledu na problém získali explicitní vyjádření operátoru pro akci děliče svazku v Schrödingerově pojetí. Eulerovy úhly jsou svázány s vlastnostmi optického zařízení následovně [7]. Úhly ψ a φ odpovídají dodaným fázovým posunům, $\cos^2\frac{\theta}{2}$ je propustnost děliče svazku.

4 Optické sítě

Složitější optické sítě (pasivní a bezztrátové-jinými se práce nezabývá) se konstruuji z elementárních prvků, jimž se věnovala kapitola (3). Má-li síť N

vstupů a N výstupů, přičemž ne všechny vstupy musí být využity, označujeme ji jako tzv. $2N$ port. Působení $2N$ portu na vstupující světlo můžeme popsat unitární transformací $U \in \mathbf{U}(N)$.

Tvar matic z $\mathbf{U}(2)$ příslušejících základním prvkům již známe, v následujícím oddíle se podíváme, jak s jejich pomocí realizovat libovolný prvek $\mathbf{U}(N)$ a tedy i odpovídající $2N$ port.

4.1 Experimentální realizace konečnědimenzionálního unitárního operátoru

Konstruktivní důkaz existence experimentální realizace libovolného konečnědimenzionálního unitárního operátoru U podali Reck a Zeilinger [10]. Operátor U se rozloží na součin operátorů T_{pq} , které netriviálně působí jen na dvoudimenzionálních podprostorech, kde vykonají unitární transformaci. Definujme tedy matici operátoru T_{pq} jako N -dimenzionální matici identického operátoru I , jejíž prvky $I_{pp}, I_{pq}, I_{qp}, I_{qq}$ jsou nahrazeny odpovídajícími prvky matice

$$\begin{pmatrix} e^{i\varphi} \sin \omega & e^{i\varphi} \cos \omega \\ \cos \omega & -\sin \omega \end{pmatrix} \quad (73)$$

Matice (73) představuje transfer matici děliče svazku s propustností $\cos^2 \omega$, za jehož prvním výstupem leží posunovač fáze o úhel φ . Fáze na vstupních portech lze zvolit tak, že optický prvek s transfer maticí (73) vykoná libovolnou unitární transformaci. Libovolnou unitární matici můžeme totiž zapsat ve tvaru (52) a rozložit na součin dvou unitárních matic

$$\begin{pmatrix} e^{i\Delta\varphi} t & e^{i\Delta\varphi} r \\ -r^* & t^* \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} |t|e^{i(\alpha+\beta+\Delta\varphi)} & |r|e^{i(\alpha+\beta+\Delta\varphi)} \\ -|r| & |t| \end{pmatrix} \begin{pmatrix} e^{-i\alpha} & 0 \\ 0 & e^{-i\beta} \end{pmatrix},$$

přičemž $t = |t|e^{i\beta}$ a $r = |r|e^{i\alpha}$ (74)

První z matic je již typu (73), druhá matice představuje posunovače fáze umístěné před vstupy děliče (respektive vhodně zvolené fáze vstupních módů).

Násobme matici $U \equiv U(N)$ zprava postupně maticemi $T_{Nq}(\omega_{Nq}, \varphi_{Nq})$, $q = N-1, \dots, 1$, to jest připojme dělič s posunovačem (73) k portům N, q . Ukážeme, že vhodnou volbou $\omega_{Nq}, \varphi_{Nq}$ docílíme toho, že všechny prvky v N -tém řádku výsledné matice vyjma posledního budou nulové. Vzhledem k tomu, že výsledná matice zůstává unitární, budou nulové i prvky v N -tém sloupci

U vyjma diagonálního.

$$U(N)T_{N,N-1}T_{N,N-2}\dots T_{N,1} = \begin{pmatrix} \boxed{U(N-1)} & 0 \\ 0 & e^{i\alpha} \end{pmatrix} \quad (75)$$

Dimenzi problému se podaří snížit o jedna.

Na rovnost (75) můžeme nahlížet jako na zobecněnou rotaci vektoru tvořeného posledním řádkem matice U popsanou maticí

$$R(N) = T_{N,N-1}\dots T_{N,1} \quad (76)$$

Pomocí $R(N)$ lze libovolný jednotkový vektor (v našem případě řádek unitární matice U) zapsaný v zobecněných sférických souřadnicích převést na tvar

$$\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \\ e^{i\alpha} \end{pmatrix}^T = e^{i\alpha} \begin{pmatrix} e^{-i\varphi_1} \cos \omega_1 \\ -e^{-i\varphi_2} \cos \omega_2 \sin \omega_1 \\ e^{-i\varphi_3} \cos \omega_3 \sin \omega_2 \sin \omega_1 \\ \vdots \\ \mp e^{-i\varphi_{N-1}} \cos \omega_{N-1} \dots \sin \omega_1 \\ \pm \sin \omega_{N-1} \sin \omega_{N-2} \dots \sin \omega_1 \end{pmatrix}^T R(N), \quad (77)$$

což se ukáže vynásobením rovnosti maticí $R(N)^{-1}$. Zvolíme-li tedy operátory $T_{Nq}(\omega_{Nq}, \varphi_{Nq})$ tak, aby platilo $\omega_{Nq} = \omega_q$ a $\varphi_{Nq} = \varphi_q$, bude rovnost (75) splněna.

Výše uvedený postup můžeme aplikovat na matici $U(N-1)$ a dále rekurzivně pokračovat. V posledním kroce dospějeme k matici D , jejíž prvky jsou mimo diagonálu nulové a prvky na diagonále mají jednotkový modul. Jelikož $D^{-1} = D^\dagger = D^*$, platí

$$U(N)T_{N,N-1}T_{N,N-2}\dots T_{N,1}T_{N-1,N-2}\dots T_{2,1}D^* = I(N) \quad (78)$$

Odkud ihned plyne

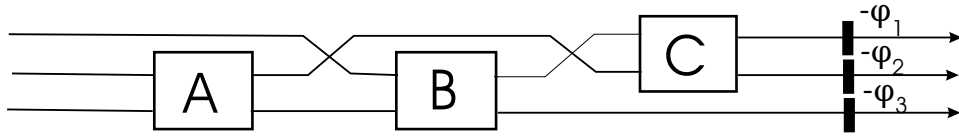
$$U(N) = (T_{N,N-1}T_{N,N-2}\dots T_{N,1}T_{N-1,N-2}\dots T_{2,1}D^*)^{-1} \quad (79)$$

Experimentálně operátor $U(N)$ realizujeme následovně: sestavíme síť z prvků s transfer maticí (73) takových, že platí (78), a invertujeme uspořádání experimentu (tj. zaměníme výstupní porty za vstupní, "otočíme" čas).

Již víme, jak experimentálně realizovat libovolný konečnědimenzionální unitární operátor pomocí děličů svazku a posunovačů fáze $U(N)$. Nyní se

můžeme ptát, kolik k tomu potřebujeme optických prvků daného typu. V i -tém kroku popsaného postupu upotřebíme $(N - i)$ prvků (73), což celkově dává $(N - 1) + (N - 2) + \dots + 1 = \frac{(N-1)N}{2} = \binom{N}{2}$ prvků. Nakonec potřebujeme ještě N posunovačů fáze. V některých případech (např. nejsou-li využity všechny vstupní porty-viz oddíl (4.3)) se počet potřebných prvků redukuje, výpočet udává maximální hodnotu.

Na závěr uvedu nejjednodušší netriviální příklad. Uspořádání pro obecný unitární operátor ve třech dimenzích zachycuje obrázek (4), je potřeba celkem šest elementárních optických prvků, které se musí připojovat za sebe na patřičné porty v pořadí podle (79). Světlo nejprve vstupuje do zařízení popsaného maticí $T_{3,2}^{-1} = T_{3,2}^\dagger$.



Obrázek 4: Experimentální realizace operátoru $U(3)$ $A = T_{32}^\dagger$, $B = T_{31}^\dagger$, $C = T_{21}^\dagger$ jsou prvky s transfer maticí typu (73), na výstupech jsou ještě posunovače fáze o $-\varphi_1, -\varphi_2, -\varphi_3$ (moduly prvků matice D^*)

4.2 Úplně symetrický $2N$ port

Úplně symetrický $2N$ port je zařízení, které foton na libovolném vstupním portu přenesse na jakýkoliv výstupní port se stejnou pravděpodobností $\frac{1}{N}$. Pro jeho výsadní postavení svědčí vedle matematických vlastností, jimiž se zabývá další text, jeho využitelnost v aplikacích. Podobně jako symetrický dělič svazku (úplně symetrický 4port) i obecný úplně symetrický $2N$ port čistě ilustruje řadu kvantových efektů (např. provázání výstupních módů). Stavbou úplně symetrického $2N$ portu v případě, že jen malá poměrná část vstupních portů je využita, se zabývá oddíl (4.3). Nejprve se ale podíváme, jakým způsobem podmínka totální symetričnosti omezuje transfer matici $2N$ portu.

Nechť transfer matice úplně symetrického $2N$ portu převádí kreační ope-

rátory pro výstupní porty na kreační operátory pro porty vstupní

$$\begin{pmatrix} \hat{a}_1^\dagger \\ \hat{a}_2^\dagger \\ \vdots \\ \hat{a}_N^\dagger \end{pmatrix} = U \begin{pmatrix} \hat{a}_{N+1}^\dagger \\ \hat{a}_{N+2}^\dagger \\ \vdots \\ \hat{a}_{2N}^\dagger \end{pmatrix} \quad (80)$$

Dále budiž výchozí stav lineární kombinací jednofotonových stavů

$$|\psi\rangle = \sum_{i=1}^N x_i \hat{a}_i^\dagger |0\rangle \quad (81)$$

Pokud koeficienty x_i mohou nabývat pouze hodnot 0 a 1, representuje stav $|\psi\rangle$ binární číslo a lze ho tudíž použít jakožto "přenašeč" informace.

Upravíme (81) pomocí (80)

$$\begin{aligned} |\psi\rangle &= \sum_{i=1}^N x_i \hat{a}_i^\dagger |0\rangle = \sum_{i=1}^N x_i \sum_{l=1}^N U_{il} \hat{a}_{N+l}^\dagger |0\rangle \\ &= \sum_{l=1}^N \left(\sum_{i=1}^N x_i U_{il} \right) \hat{a}_{N+l}^\dagger |0\rangle = \sum_{l=1}^N y_l \hat{a}_{N+l}^\dagger |0\rangle \end{aligned} \quad (82)$$

Zvolme stavy typu (81) takové, že $x_i = \delta_{ij}$, $j = 1, 2 \dots N$. Potom požadavek totální symetričnosti $2N$ portu přejde na tvar

$$|y_l|^2 = |U_{jl}|^2 = \frac{1}{N}, \quad l = 1, 2 \dots N \quad (83)$$

Odkud pro všechny maticové elementy U_{ij} platí

$$U_{ij} = \frac{e^{i\varphi_{ij}}}{\sqrt{N}}, \quad i, j = 1, 2 \dots, N \quad (84)$$

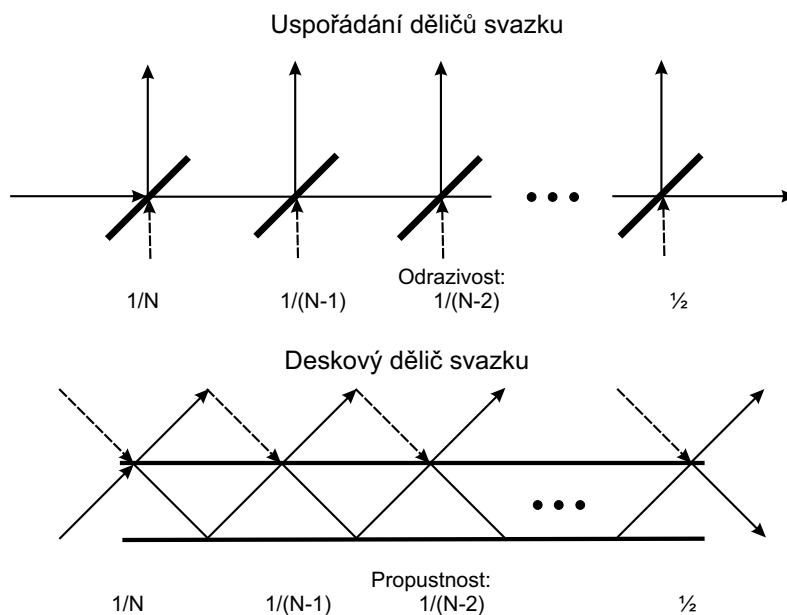
Transfer matice úplně symetrického $2N$ portu musí proto vedle unitarity splňovat takzvanou Zeilingerovu podmínku (84). Můžeme například volit [12]

$$U_{ij} = \frac{s_N^{ij}}{\sqrt{N}}, \quad \text{kde } s_N = e^{i\frac{2\pi}{N}} \quad (85)$$

4.3 Redukce počtu optických prvků nutných ke konstrukci úplně symetrického $2N$ portu

V oddíle (4.1) jsme si ukázali, že pro konstrukci libovolného $2N$ portu potřebujeme maximálně $N(N-1)/2$ děličů svazku s určitým fázovým posunem (transfer matice (73)). Toto číslo roste kvadraticky v N . Törma a Jex [13] ukázali, že pro konstrukci úplně symetrického $2N$ portu, z jehož $N = mn$ vstupů je jen malé číslo m využito, lze s využitím deskových děličů svazku počet nutných prvků redukovat. V dalších odstavcích shrnu výsledky jejich práce.

Deskový dělič svazku je vcelku jednoduché zařízení, které umožňuje vstupující svazek rozdělit do N shodných částí. Tvoří ho skleněná destička s proměnlivou propustností ve směru šíření svazku. Deskový dělič svazku plní, jak ukazuje obrázek (5), stejnou funkci jako uspořádání N děličů svazku s vhodně volenými koeficienty propustnosti.



Obrázek 5: Deskový dělič svazku je ekvivalentní jistému uspořádání děličů svazku. Čárkované šipky odpovídají vakuovým vstupům.

Transfer matice deskového děliče svazku P_N má tvar [13]

$$P_N = \begin{pmatrix} \left(\frac{1}{N}\right)^{1/2} & \left(\frac{N-1}{N}\right)^{1/2} & 0 & 0 & \dots & 0 \\ \left(\frac{1}{N}\right)^{1/2} - \left(\frac{1}{N(N-1)}\right)^{1/2} & \left(\frac{N-2}{N-1}\right)^{1/2} & 0 & 0 & \dots & 0 \\ \left(\frac{1}{N}\right)^{1/2} - \left(\frac{1}{N(N-1)}\right)^{1/2} & \left(\frac{1}{(N-1)(N-2)}\right)^{1/2} & \left(\frac{N-3}{N-2}\right)^{1/2} & 0 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \left(\frac{1}{N}\right)^{1/2} - \left(\frac{1}{N(N-1)}\right)^{1/2} & \left(\frac{1}{(N-1)(N-2)}\right)^{1/2} & \left(\frac{1}{(N-2)(N-3)}\right)^{1/2} & \dots & -\left(\frac{1}{2}\right)^{1/2} \end{pmatrix} \quad (86)$$

Již víme, že transfer matici úplně symetrického $2N$ portu U_N můžeme volit ve tvaru (85), tedy

$$U_N = \frac{1}{\sqrt{N}} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 & \dots & 1 \\ 1 & s_N & s_N^2 & s_N^2 & \dots & s_N^{N-1} \\ 1 & s_N^2 & s_N^4 & s_N^4 & \dots & s_N^{2(N-1)} \\ 1 & s_N^3 & s_N^6 & s_N^9 & \dots & s_N^{3(N-1)} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 1 & s_N^{N-1} & s_N^{2(N-1)} & s_N^{3(N-1)} & \dots & s_N^{(N-1)(N-1)} \end{pmatrix} \quad (87)$$

kde $s_N = e^{i\frac{2\pi}{N}}$.

Nyní se zamysleme, jak m svazků rovnoměrně rozdělit do $N = mn$ no- vých. Každý z m vstupních svazků můžeme rozložit do n dílčích svazků pomocí deskového děliče. Výstupy z m totožných deskových děličů pak vzá- jemně promísíme užitím n totožných úplně symetrických $2m$ portů.

m kopií deskového děliče paprsku dimenze n reprezentuje m -rozměrná bloková matice

$$A_{mn} = \begin{pmatrix} \mathbf{P}_n & 0 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & \mathbf{P}_n & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & \mathbf{P}_n & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & \mathbf{P}_n \end{pmatrix} \quad (88)$$

kde $\mathbf{P}_n$ je matice typu (86) dimenze n .

n úplně symetrických $2m$ portů kombinujících výstupy deskových děličů představuje m -rozměrná bloková matice

$$B_{mn} = \frac{1}{\sqrt{m}} \begin{pmatrix} \mathbf{1}_n & \mathbf{1}_n & \mathbf{1}_n & \mathbf{1}_n & \dots & \mathbf{1}_n \\ \mathbf{1}_n & s_m \mathbf{1}_n & s_m^2 \mathbf{1}_n & s_m^3 \mathbf{1}_n & \dots & s_m^{m-1} \mathbf{1}_n \\ \mathbf{1}_n & s_m^2 \mathbf{1}_n & s_m^4 \mathbf{1}_n & s_m^6 & \dots & s_m^{2(m-1)} \mathbf{1}_n \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \mathbf{1}_n & s_m^{m-1} \mathbf{1}_n & s_m^{2(m-1)} \mathbf{1}_n & s_m^{3(m-1)} \mathbf{1}_n & \dots & s_m^{(m-1)(m-1)} \mathbf{1}_n \end{pmatrix} \quad (89)$$

kde $\mathbf{1}_n$ je jednotková matice dimenze n a $s_m = e^{i\frac{2\pi}{m}}$. Výsledné zařízení, úplně symetrický $2N$ port, má tudíž transfer matici

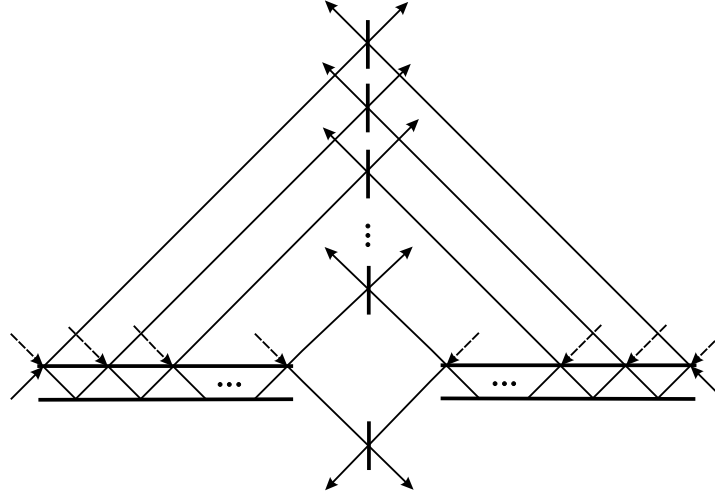
$$U_{mn} = B_{mn}A_{mn} \quad (90)$$

Pro konstrukci zařízení s transfer maticí (88) potřebujeme m deskových děličů dimenze n , neboli $mn = N$ děličů svazku, pro konstrukci zařízení representoveného transfer maticí (89) je nutno n úplně symetrických $2m$ portů, přičemž každý $2m$ port se skládá nejvýše z $m(m-1)/2$ děličů svazku typu (73). Celkově pro maximální počet d_{mn} stavebních prvků zkoumaného multiportu platí

$$d_{mn} = mn + n \frac{m(m-1)}{2} = \left(\frac{m-1}{2} + 1 \right) N \quad (91)$$

Výraz d_{mn} roste při pevném počtu použitých vstupů m pouze lineárně v N . Použitá konstrukce je tudíž efektivní při vysokém poměru N/m .

Obrázek (6) schematicky znázorňuje úplně symetrický $2N$ port sestavený uvedeným postupem pro $m = 2$ a N sudé.



Obrázek 6: Multiport rovnoměrně rozdělující dvojici svazků. Vstupy jsou vyznačeny plnými šipkami na okrajích deskových děličů.

5 Hamiltonovský model

Pasivní bezztrátová zařízení jsme doposud výhodně popisovali pomocí transfer matic, čtyřportům jsme navíc přiřadili rotace v prostoru. Aktivní prvky se nejvýhodněji popisují pomocí hamiltoniánů, které charakterizují interakci vstupujících módů. V této kapitole se pokusíme nalézt interakční hamiltoniány pro některá z jednoduchých pasivních zařízení, kterým se věnovaly předchozí kapitoly, tj. budeme hledat hamiltoniány, které povedou na již známé transfer matice.

5.1 Interakční hamiltonián pro dělič svazku

Nejprve se budeme věnovat jednoduchému přesto zajímavému případu děliče svazku. Interakční hamiltonián zvolíme v symetrickém tvaru

$$\hat{H} = \lambda(\hat{a}_1^\dagger \hat{a}_2 + \hat{a}_2^\dagger \hat{a}_1) \quad (92)$$

Vazebnou konstantu λ můžeme brát reálnou, neboť případnou fázi jest možno zahrnouti do relativní fáze jednotlivých módů. Nejprve vypočteme časové derivace anihilačních operátorů s pomocí komutačních relací (53)

$$\dot{\hat{a}}_1 = i[\hat{H}, \hat{a}_1] = -i\lambda\hat{a}_2, \quad \dot{\hat{a}}_2 = i[\hat{H}, \hat{a}_2] = -i\lambda\hat{a}_1 \quad (93)$$

Řešením soustavy (93) dostaneme v maticovém zápisu

$$\begin{pmatrix} \hat{a}_1(t) \\ \hat{a}_2(t) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos(\lambda t) & -i \sin(\lambda t) \\ -i \sin(\lambda t) & \cos(\lambda t) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \hat{a}_1(0) \\ \hat{a}_2(0) \end{pmatrix} \quad (94)$$

Matice v (94) je transfer matice děliče svazku s propustností $\cos^2(\lambda t)$. Volba interakčního hamiltoniánu ve tvaru (92) je tedy oprávněná. Každému časovému okamžiku přísluší dělič s jinou hodnotou propustnosti, transfer matici pro asymptotické anihilační operátory dostaneme, vezmeme-li za čas t dobu interakce.

Pokud do děliče vstoupí například prvním portem jeden foton, vyjde jako superpozice

$$|\psi(t)\rangle = \hat{a}_1^\dagger(t)|0\rangle = [\cos(\lambda t)\hat{a}_1(0) + i \sin \hat{a}_2(0)]|0\rangle \quad (95)$$

Pro $\lambda t = \pi/4$ získáme symetrický dělič svazku, to znamená, že pravděpodobnost nalezení fotonu bude pro oba výstupní porty stejná. Ke stejnému závěru bychom došli, pokud by foton do děliče vstupoval druhým portem.

5.2 Interakční hamiltonián pro úplně symetrický $2N$ port

Od interakčního hamiltoniánu bezztrátového pasivního zařízení požadujeme, aby vedl na lineární transformaci módů. Pro hamiltonián úplně symetrického $2N$ portu je navíc přirozené požadovat symetrii vzhledem k záměně vstupních i záměně výstupních portů[11] v případě vstupních jednofotonových stavů.

Zkusme tedy interakční hamiltonián úplně symetrického $2N$ portu volit ve tvaru

$$\hat{H} = \lambda \sum_{\forall s,r} \hat{a}_s^\dagger \hat{a}_r \quad (96)$$

Vazební konstantu λ zvolíme opět reálnou. Případnou fázi vazební konstanty již nelze zahrnout do fází jednotlivých módů (pro $N > 2$).

Libovolný vstupní stav $|\Psi\rangle$ přejde po interakci módů na [5]

$$|\Psi_{out}\rangle = e^{-i\hat{H}t} |\Psi_{in}\rangle \quad (97)$$

Zvolme vstupní stav s fotony v módech $\{i|i \in C\}$, kde C značí podmnožinu vstupních módů

$$|\Psi_{in}\rangle = \prod_{s \in C} \hat{a}_s^\dagger |0\rangle \quad (98)$$

$|0\rangle$ je vakuum všech módů. Předpokládáme-li $\hat{H}|0\rangle = |0\rangle$, výstupní stav bude mít v Heisenbergově pojetí tvar [5]

$$|\Psi\rangle_{out} = \prod_{s \in C} \hat{a}_s^\dagger(t) |0\rangle = \prod_{s \in C} e^{-i\hat{H}t} \hat{a}_s^\dagger(0) e^{i\hat{H}t} |0\rangle. \quad (99)$$

Hamiltonián (96) lze pomocí úplně symetrického bosonového operátoru

$$\hat{A}^\dagger = \frac{1}{\sqrt{N}} \sum_{\forall s} \hat{a}_s^\dagger \quad (100)$$

zapsat jako

$$\hat{H} = \lambda N \hat{A}^\dagger \hat{A} \quad (101)$$

Z tohoto vyjádření je patrné, že hamiltonián $\hat{H}$ má jednonásobné vlastní číslo λN a $(N-1)$ -násobné vlastní číslo nula [11]. Ke stejnému závěru bychom dospěli metodami elementární lineární algebry, pokud bychom hamiltonián

(96) zapsali jako bilineární formu [11]

$$\hat{H} = \lambda(\hat{a}_1^\dagger, \hat{a}_2^\dagger, \dots, \hat{a}_N^\dagger) \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & \dots & 1 \\ 1 & 1 & 1 & \dots & 0 \\ 1 & 1 & \dots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 1 & 0 & 0 & \dots & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \hat{a}_1 \\ \hat{a}_2 \\ \vdots \\ \hat{a}_N \end{pmatrix} \quad (102)$$

Pokusíme se vyjádřit časový vývoj anihilačních operátorů $\hat{a}_s^\dagger$ jakožto lineární transformaci a dospět tak k očekávaným transfer maticím.

$$\begin{aligned} \hat{a}_s^\dagger &= e^{-i\hat{H}t} \hat{a}_s^\dagger(0) e^{i\hat{H}t} \\ &= \left(\frac{N-1 + e^{-i\lambda Nt}}{N} \right) \hat{a}_s^\dagger(0) + \left(\frac{e^{-i\lambda Nt} - 1}{N} \right) \sum_{j \neq s} \hat{a}_j^\dagger(0) \end{aligned} \quad (103)$$

V druhé rovnosti jsme hamiltonián zapsali ve tvaru (101) a poté použili operátotorovou identitu (61), přičemž jsme využili snadno ověřitelný vztah [11]

$$\underbrace{[\hat{A}^\dagger \hat{A}, [\hat{A}^\dagger \hat{A}, [\hat{A}^\dagger \hat{A}, \dots [\hat{A}^\dagger \hat{A}, \hat{a}_s^\dagger]]]]}_{\text{k-krát}} = N^{(2k-1)/2} \hat{A}^\dagger \quad (104)$$

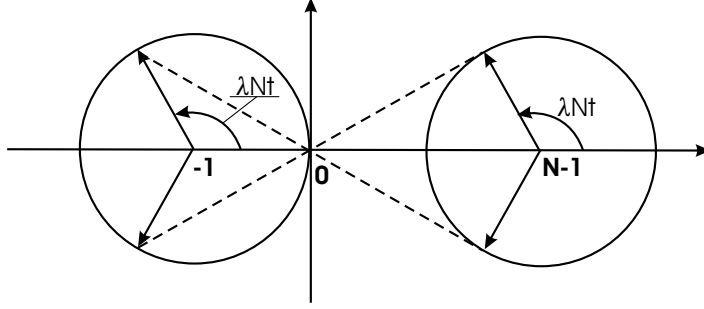
Rovnosti (103) pro $s \in N$ můžeme vyjádřit v maticovém tvaru

$$\begin{aligned} \begin{pmatrix} \hat{a}_1^\dagger(t) \\ \hat{a}_2^\dagger(t) \\ \vdots \\ \hat{a}_N^\dagger(t) \end{pmatrix} &= M \begin{pmatrix} \hat{a}_1^\dagger(0) \\ \hat{a}_2^\dagger(0) \\ \vdots \\ \hat{a}_N^\dagger(0) \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} 1 + f(t) & f(t) \dots & f(t) \\ f(t) & 1 + f(t) \dots & f(t) \\ f(t) & f(t) \dots & f(t) \\ f(t) & f(t) \dots & 1 + f(t) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \hat{a}_1^\dagger(0) \\ \hat{a}_2^\dagger(0) \\ \vdots \\ \hat{a}_N^\dagger(0) \end{pmatrix}, \end{aligned} \quad (105)$$

kde $f(t) = \frac{1}{N}(e^{-i\lambda Nt} - 1)$.

Interakční hamiltonián (96) tedy vede na transfer matici M (105). Po transfer matici úplně symetrického $2N$ portu navíc požadujeme, aby splňovala Zeilingerovu podmínku (84). Ta pro matici M nabývá tvaru

$$|N - 1 + e^{-i\lambda Nt}| = |e^{-i\lambda Nt} - 1| = \sqrt{N} \quad (106)$$



Obrázek 7: Geometrická interpretace podmínky (106). Kružnice mají jednotkový poloměr.

Geometrickou interpretaci podmínky (106) poskytuje obrázek (7), z něž je přímo vidět, že ji nelze splnit pro $N > 4$. Pomocí interakčního hamiltoniánu (96) tudíž nemůžeme popsat úplně symetrický $2N$ port s $N > 4$.

Pro $N = 2$ řeší podmínku (106) součin vazební konstanty a interakčního času $\lambda t = \pi/4, 3\pi/4$. Transfer matice M přejde na transfer matici symetrického děliče svazku. Pro $N = 3$ (respektive $N = 4$) jsou řešení $\lambda t = 2\pi/9, 4\pi/9$ (respektive $\lambda t = \pi/4$).

Pokud je $N > 4$, musíme volit složitější interakční hamiltonián. Stále však požadujeme lineární transformaci jednofotonových stavů (98), interakční hamiltonián tak musí být obecně tvaru [12]

$$\hat{H} = \sum_{\forall s,r} \Lambda_{s,r} \hat{a}_s^\dagger \hat{a}_r \quad (107)$$

Törma, Stenholm a Jex ukázali, jak najít interakční hamiltonián pro úplně symetrický $2N$ port, jehož transfer matice M je cyklická řádu 4 ($M^4 = \mathbf{1}$) [12].

6 Závěr

Podařilo se nám několika různými způsoby popsat působení ústředního pasivního optického prvku: děliče svazku. Motivováni klasickým pohledem jsme dospěli k popisu pomocí transfer matice, která převádí anihilační operátory vstupních módů na anihilační operátory módů výstupních. Poté jsme ukázali, že na akci děliče svazku můžeme nahlížet jako na abstraktní rotaci stavového vektoru vstupního stavu. Nakonec jsme dělič nahradili pomyslnou vzájemnou interakcí zúčastněných módů.

Předvedli jsme si postup pro sestavení optické sítě takové, aby na vstupních módech vykonala požadovanou konečnědimenzionální unitární transformaci. Charakterizovali jsme úplně symetrický $2N$ port Zeilingerovou podmínkou a zjednodušili jsme jeho konstrukci pro případ, že jen malá část vstupních portů je využita. Pro $N \leq 4$ jsme našli interakční hamiltoniány.

Na úplný závěr práce bych rád za vedení a poskytnuté materiály poděkoval prof. I. Jexovi.

Reference

- [1] H. Paul, *Introduction to Quantum Optics*, CAMBRIDGE UNIVERSITY PRESS (2004)
- [2] W.A. Schleich, *Quantum Optics in Phase Space*, WILEY-VCH (2001)
- [3] I. Štoll a J. Tolar, *Teoretická fyzika*, VYDAVATELSTVÍ ČVUT (1999)
- [4] A. Messiah, *Quantum Mechanics, Vol.1*, NORTH-HOLLAND PUBLISHING COMPANY (1961)
- [5] J. Blank, P. Exner a M. Havlíček, *Lineární operátory v kvantové fyzice*, KAROLINUM PRAHA (1993)
- [6] J. Kempe, *Contemporary Physics* **44** 4 (2003), quant-ph/0303081
- [7] U. Leonhardt, *Phys. Rev. A* **48** 3265 (1993)
- [8] B. Yurke, S.L. McCall a J.Klauder, *Phys. Rev. A* **33** 6 (1985),
- [9] S. Danakas a P.K. Aravind, *Phys. Rev. A* **45** 3 (1992)
- [10] M. Reck a A. Zeilinger, *Phys. Rev. Lett.* **73** 1 (1994)
- [11] I. Jex, S. Stenholm a A. Zeilinger *Optics Communication* **117** (1995)
- [12] P. Törmä, S. Stenholm a I. Jex, *Phys. Rev. A* **52** 6 (1995)
- [13] P. Törma a I. Jex, *Journal of Modern Optics* **43** 11, 2403 (1996)