FJFI ČVUT v Praze

Rešeršní práce

Integrabilní systémy a povrchy s konstantní křivostí

Lenka Kučerová

21. července 2004

Obsah

Děkuji Prof. RNDr. L. Hlavatému, DrSc. za cenné rady a pomoc při vyjasňování důležitých pojmů, jenž se v práci vyskytují.

Úvod

Mnoho rovnic, které dnes nazýváme integrabilní, bylo studováno v diferenciální geometrii již v 19. století při popisu povrchů s danými podmínkami na jejich křivost. Příklady zahrnují minimální povrchy, povrchy s konstantní střední resp. s konstantní Gaussovou křivostí. V té době byly objeveny některé vlastnosti těchto rovnic, zejména pak takové, jež mají geometrickou interpretaci (např. existence Bäcklundovy transformace). Klasickým geometrům se podařilo podat detailní popis jen speciálních řešení, splňujících dodatečné podmínky (např. řešení, která odpovídají rotačním povrchům).

Značný pokrok v řešení nelineárních P.D.R. přinesla teorie solitonů, která vznikla v 60. letech. Vyjdeme-li od klíčového pojmu této teorie, Laxovské reprezentace nelineární rovnice

$$\frac{\mathrm{d}A}{\mathrm{d}t} = [A, B],$$

kde $A(\lambda) = \frac{d}{dx} + C(\lambda)$ zde považujeme za maticový diferenciální operátor prvního řádu a $B(\lambda)$, $C(\lambda)$ za maticové operátory nultého řádu, můžeme Laxovu rovnost zapsat

$$\left[\frac{\partial}{\partial x} + C, \frac{\partial}{\partial t} + B\right] = 0. \tag{0.1}$$

Položíme-li $\nabla_1 = \frac{\partial}{\partial x} + C$, $\nabla_2 = \frac{\partial}{\partial t} + B$, získáme rovnici pro nulovou křivost konexe závisející na spektrálním parametru λ

$$F_{12} = [\nabla_1, \nabla_2] = 0. \tag{0.2}$$

∇_1, ∇_2 jsou kovariantní derivace v příslušných směrech na triviálním bundlu nad 2-dimenzionálním prostorem. Této rovnici se říká reprezentace nulové křivosti a vyjadřuje podmínku kompatibility přeurčeného systému pro matici neznámých funkcí proměnných x, t

$$\begin{aligned} \nabla_1 \Phi &= 0, \\ \nabla_2 \Phi &= 0. \end{aligned} \tag{0.3}$$

V diferenciální geometrii má tvar (0.3) systém Gauss-Weingartenových rovnic (2.1) pro pohyblivý repér. Rovnici (0.2) tudíž odpovídají Gauss-Codazziho rovnice (2.2). Proto se zde budu zabývat souvislostmi nejznámějších integrabilních soustav a diferenciální geometrie ploch.

1 Odvození solitonových rovnic z diferenciální geometrie

1.1 Klasický výsledek díky hlavním souřadnicím

Nechť $f : U \to \mathbb{R}^3$ parametrizuje povrch, jehož Gaussova křivost je $K \equiv -1$. Pro vlastní čísla Weingartenova zobrazení odtud $\lambda_1 = -\frac{1}{\lambda_2} \neq 0$. Pak lze položit $\lambda_1 = \operatorname{tg} q,\ \lambda_2 = -\operatorname{cotg} q$. Díky větám (A.3), (A.4) z appendixu můžeme předpokládat, že je povrch *lokálně* parametrizován hlavními souřadnicemi, platí rovnice (A.1) a Gauss-Codazziho systém (GC) má tvar (A.2). Pro vlastní čísla máme

$$\lambda_1 = \frac{l_{11}}{(A_1)^2},\ \lambda_2 = \frac{l_{22}}{(A_2)^2},\ \text{kde}\,(A_1)^2 = g_{11},\ (A_2)^2 = g_{22}.$$

$g_{ii},\ l_{ii}$ značí koeficienty I, II. Tedy

$$\frac{l_{11}}{A_1} = A_1 \operatorname{tg} q,\ \frac{l_{22}}{A_2} = -A_2 \operatorname{cotg} q. \tag{1.1}$$

Dosazením (1.1) do soustavy (A.2) dostaneme

$$\begin{aligned} (A_1 \operatorname{tg} q)_{x_2} &= -\operatorname{cotg} q\ (A_1)_{x_2}, \\ (-A_2 \operatorname{cotg} q)_{x_1} &= \operatorname{tg} q\ (A_2)_{x_1}, \end{aligned}$$

neboli

$$(\operatorname{tg} q + \operatorname{cotg} q)(A_1)_{x_2} = -A_1(\sec^2 q)\, q_{x_2},$$
$$(\operatorname{tg} q + \operatorname{cotg} q)(A_2)_{x_1} = -A_2(\operatorname{cosec}^2 q)\, q_{x_1},$$

takže

$$\frac{(A_1)_{x_2}}{A_1} = -\frac{\sin q}{\cos q}\, q_{x_2}, \quad \frac{(A_2)_{x_1}}{A_2} = -\frac{\cos q}{\sin q}\, q_{x_1}.$$

Částečnou integrací

$$(\ln A_1)_{x_2} = (\ln \cos q)_{x_2},\ (\ln A_2)_{x_1} = (\ln \sin q)_{x_1},$$

a tudíž existují $c_1(x_1), c_2(x_2)$, pro něž

$$A_1 = e^{c_1(x_1)} \cos q,\ A_2 = e^{c_2(x_2)} \sin q.$$

Z pozitivní definitnosti I plyne, že vždy $A_1 \neq 0, A_2 \neq 0$. Odtud lze předpokládat $\sin q > 0, \cos q > 0$ tj. $q \in (0, \frac{\pi}{2})$. Provedeme-li transformaci souřadnic $(\widetilde{x}_1(x_1)), \widetilde{x}_2(x_2))$ tak, aby

$$\frac{d\widetilde{x}_1}{dx_1} = e^{c_1(x_1)},\ \frac{d\widetilde{x}_2}{dx_2} = e^{c_2(x_2)},$$

bude $\|f_{\widetilde{x}_1}\| = \cos q$ a $\|f_{\widetilde{x}_2}\| = \sin q$. To platí, jelikož

$$\frac{\partial f}{\partial \widetilde{x}_1} = \frac{\partial f}{\partial x_1}\frac{\partial x_1}{\partial \widetilde{x}_1} = \frac{\partial f}{\partial x_1} e^{-c_1(x_1)}, \tag{1.2}$$

přičemž $e_1 = \frac{f_{x_1}}{A_1}$, $e_2 = \frac{f_{x_2}}{A_2}$, $e_3 = n$ tvoří ortonormální repér. Z rovnice (1.2) navíc vidíme, že $f_{\widetilde{x}_i}$ je paralelní f_{x_i}. Tudíž $(\widetilde{x}_1, \widetilde{x}_2)$ rovněž parametrizuje povrch hlavními souřadnicemi a II v $(\widetilde{x}_1, \widetilde{x}_2)$ má vyjádření

$$\widetilde{l}_{11} = (\widetilde{A}_1)^2 \ \operatorname{tg} q = \sin q\ \cos q,\ \widetilde{l}_{22} = -(\widetilde{A}_2)^2\ \operatorname{cotg} q = -\sin q\ \cos q,$$

kde

$$(\widetilde{A}_1)^2 = \cos^2 q,\ (\widetilde{A}_2)^2 = \sin^2 q.$$

Tím přicházíme k tvrzení:

Věta 1.1 *Nechť M je povrch v $\mathbb{R}^3$ s $K = -1$ konstantní. Pak existují lokální hlavní souřadnice x_1, x_2, ve kterých*

$$I = \cos^2 q\, dx_1^2 + \sin^2 q\, dx_2^2,\ II = \sin q\ \cos q\, (dx_1^2 - dx_2^2).$$

$2q$ má význam úhlu mezi asymptotickými směry. (GC) *se redukují na sine-Gordonovu rovnici*

$$q_{x_1x_1} - q_{x_2x_2} = \sin q\ \cos q. \tag{1.3}$$

Důkaz: Zbývá dopočítat (GC) a úhel mezi asymptot. směry. Dosadíme $\widetilde{l}_{11}, \widetilde{l}_{22}, \widetilde{A}_1, \widetilde{A}_2$ do (A.2). První rovnice dává (1.3) a druhé dvě rovnice jsou splněny identicky. Z tvaru II je vidět, že $f_{x_1} \pm f_{x_2}$ jsou asymptotické směry. Z I ověříme jednotkovost $f_{x_1} \pm f_{x_2}$. Jelikož

$$(f_{x_1} + f_{x_2}) \cdot (f_{x_1} - f_{x_2}) = \cos^2 q - \sin^2 q = \cos(2q),$$

je úhel mezi asymptotickými směry $2q$. □

Mějme P^1, P^2 jako v důkazu věty (A.4), dosazením $\widetilde{l}_{11}, \widetilde{l}_{22}, \widetilde{A}_1, \widetilde{A}_2$ získáme matice, které odpovídají B, C z (0.1)

$$P^1 = \begin{pmatrix} 0 & -q_{x_2} & -\sin q \\ q_{x_2} & 0 & 0 \\ \sin q & 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad P^2 = \begin{pmatrix} 0 & -q_{x_1} & 0 \\ q_{x_1} & 0 & \cos q \\ 0 & -\cos q & 0 \end{pmatrix}. \tag{1.4}$$

Přejděme nyní k souřadnicím $x_1 = x_+ + x_-, x_2 = x_+ - x_-$. Pak $f_+ = f_{x_1} + f_{x_2}$, $f_- = f_{x_1} - f_{x_2}$. Přímý výpočet ukazuje, že

$$\begin{aligned} ds^2 &= dx_+^2 + 2\cos\psi\, dx_+dx_- + dx_-^2, \\ dl^2 &= 2\sin\psi\, dx_+dx_-, \end{aligned} \tag{1.5}$$

přičemž $\psi = 2q$. Sine-Gordonova rovnice nabývá standardní podoby

$$\partial_+\partial_-\psi = \sin\,\psi. \tag{1.6}$$

Definice 1.2 *Souřadnice, jejichž I je $ds^2 = \lambda^2 dx_+^2 + 2\cos\psi\, dx_+dx_- + \lambda^{-2}dx_-^2$ se zvou speciální Čebyševovy souřadnice. ψ má význam úhlu mezi parametrickými křivkami. Obecné Čebyševovy souřadnice splňují podmínku $g_{11,2} = g_{22,1} = 0$ nebo ekvivalentně $\Gamma_{12}^1 = \Gamma_{12}^2 = 0$.*

Důležitá vlastnost pseudosférických povrchů je, že asymptotické souřadnice splývají s Čebyševovými. Jako důsledek předchozího a základní věty teorie ploch máme tvrzení

Věta 1.3 *Nechť ψ je libovolné řešení sine-Gordonovy rovnice* (1.6) *různé od $n\pi$. Potom existuje až na izometrii jednoznačně určený pseudosférický povrch $K \equiv -1$ v $\mathbb{R}^3$ s I, II definovanou rovnicemi* (1.5).

Řešením $\psi = n\pi$ přiřazujeme množinu přímek v $\mathbb{R}^3$.

Pozn. 1.4 *Stejně lze postupovat i pro povrch s kladnou konstantní K, který neobsahuje kruhové body. Je-li $K = 1 = \lambda_1\lambda_2$, položíme $\lambda_1 = \operatorname{tgh} q, \lambda_2 = \operatorname{cotgh} q$. Odtud $ds^2 = \sinh^2 q\, dx_1^2 + \cosh^2 q\, dx_2^2$, $dl^2 = \sinh q\, \cosh q (dx_1^2 + dx_2^2)$. Gauss-Codazziho rovnice dávají eliptickou sinh-Gordonovu rovnici*

$$q_{x_{11}} + q_{x_{22}} = \sinh q \cosh q.$$

1.2 Užití konformních souřadnic

Definice 1.5 *Komplexní funkci $h(z, \bar{z}) = h(u, v),\ z = u + iv$, zveme komplexně analytickou, pokud* $\dfrac{\partial h}{\partial \bar{z}} \equiv 0.$

Pozn. 1.6 *Podmínka v definici je ekvivalentní splnění Cauchy-Riemannových rovnic.*

Definice 1.7 *Má-li metrika na 2-dimenzionálním povrchu tvar*

$$ds^2 = h(u, v)(du^2 + dv^2) = h(z, \bar{z})\, dz\, d\bar{z},\ \ kde\ h(u, v) = h(z, \bar{z}) > 0, \tag{1.7}$$

určují u, v resp. $z, \bar{z}$ konformní souřadnice.

Lemma 1.8 *Nechť jsou na povrchu zvoleny konformní souřadnice. Změny souřadnic, které zachovávají konformní tvar metriky, jsou právě takové, že $z = z(w, \overline{w})$ je komplexně analytická funkce nebo složení komplexně analytické funkce s komplexním sdružením, což je komplexně analytická funkce v $\bar{z}$.*

Věta 1.9 *Mějme povrch vnořený do $\mathbb{R}^3$ s indukovanou Riemanovou metrikou*

$$ds^2 = g_{ij}dx_idx_j. \tag{1.8}$$

Nechť $g_{ij}(x_1, x_2)$ jsou reálně analytické funkce a $g = g_{11}g_{22} - g_{12}^2 > 0$. Potom existují konformní souřadnice u, v tak, že metrika je formy (1.7).

Důkaz: Roznásobením pravé strany rovnice (1.8) získáme

$$ds^2 = (\sqrt{g_{11}}dx_1 + \frac{g_{12} + i\sqrt{g}}{\sqrt{g_{11}}}dx_2)(\sqrt{g_{11}}dx_1 + \frac{g_{12} - i\sqrt{g}}{\sqrt{g_{11}}}dx_2).$$

Konformní souřadnice $u(x_1,x_2), v(x_1,x_2)$ existují, pokud lze nalézt integrující faktor $\lambda(x_1,x_2)$, aby platilo

$$\begin{aligned} \lambda(\sqrt{g_{11}}dx_1 + \frac{g_{12}+i\sqrt{g}}{\sqrt{g_{11}}}dx_2) &= du + idv, \\ \bar{\lambda}(\sqrt{g_{11}}dx_1 + \frac{g_{12}-i\sqrt{g}}{\sqrt{g_{11}}}dx_2) &= du - idv. \end{aligned} \tag{1.9}$$

Znásobením obou rovnic $ds^2 = |\lambda|^{-2}(du^2+dv^2)$, tj. $h(u,v) = |\lambda|^{-2}$. Druhá rovnice soustavy (1.9) vznikne komplexním sdružením první, takže stačí řešit

$$\lambda(\sqrt{g_{11}}dx_1 + \frac{g_{12}+i\sqrt{g}}{\sqrt{g_{11}}}dx_2) = (\frac{\partial u}{\partial x_1} + i\frac{\partial v}{\partial x_1})dx_1 + (\frac{\partial u}{\partial x_2} + i\frac{\partial v}{\partial x_2})dx_2,$$

neboli

$$\lambda\sqrt{g_{11}} = \frac{\partial u}{\partial x_1} + i\frac{\partial v}{\partial x_1}, \quad \lambda\frac{g_{12}+i\sqrt{g}}{\sqrt{g_{11}}} = \frac{\partial u}{\partial x_2} + i\frac{\partial v}{\partial x_2}. \tag{1.10}$$

Vyloučením λ přijdeme ke vztahu

$$(g_{12}+i\sqrt{g})(\frac{\partial u}{\partial x_1} + i\frac{\partial v}{\partial x_1}) = g_{11}(\frac{\partial u}{\partial x_2} + i\frac{\partial v}{\partial x_2}), \tag{1.11}$$

který je ekvivalentní soustavě

$$g_{12}\frac{\partial u}{\partial x_1} - \sqrt{g}\frac{\partial v}{\partial x_1} = g_{11}\frac{\partial u}{\partial x_2}, \quad \sqrt{g}\frac{\partial u}{\partial x_1} + g_{11}\frac{\partial v}{\partial x_1} = g_{11}\frac{\partial v}{\partial x_2}. \tag{1.12}$$

Z rovnic (1.11), (1.12) vyjádříme

$$\begin{aligned} \frac{\partial v}{\partial x_1} &= \frac{g_{12}\frac{\partial u}{\partial x_1} - g_{11}\frac{\partial u}{\partial x_2}}{\sqrt{g}}, \quad & \frac{\partial v}{\partial x_2} &= \frac{g_{22}\frac{\partial u}{\partial x_1} - g_{12}\frac{\partial u}{\partial x_2}}{\sqrt{g}}, \\ \frac{\partial u}{\partial x_1} &= \frac{g_{11}\frac{\partial v}{\partial x_2} - g_{12}\frac{\partial v}{\partial x_1}}{\sqrt{g}}, \quad & \frac{\partial u}{\partial x_2} &= \frac{g_{12}\frac{\partial v}{\partial x_2} - g_{22}\frac{\partial v}{\partial x_1}}{\sqrt{g}}. \end{aligned} \tag{1.13}$$

Rovnosti v pravém sloupci se získají rozšířením (1.11) výrazem $\frac{(g_{12}-i\sqrt{g})}{g_{11}}$. Spojitost druhých parciálních derivací u, v dává jejich záměnnost a tedy z (1.13) plyne nutnost splnění soustavy $Lu = 0,\ Lv = 0$, kde diferenciální operátor L je definován

$$L = \frac{\partial}{\partial x_2}\left[\frac{g_{12}\frac{\partial}{\partial x_1} - g_{11}\frac{\partial}{\partial x_2}}{\sqrt{g}}\right] + \frac{\partial}{\partial x_1}\left[\frac{g_{12}\frac{\partial}{\partial x_2} - g_{22}\frac{\partial}{\partial x_1}}{\sqrt{g}}\right]. \tag{1.14}$$

L říkáme Beltramiho operátor a $Lf = 0$ je Beltramiho rovnice (Bel). Z teorie P.D.R. plyne, že jsou-li g_{11}, g_{12}, g_{22} reálně analytické na U, má soustava (Bel) na U řešení u, v, které je bijekcí $(x_1,x_2) \to (u,v)$. Řeší-li u (Bel), pak první řádka (1.13) již určuje $grad\, v$ a tím v. Díky (1.10) vypočteme λ, což dokončuje důkaz. □

Věta 1.10 *Nechť u, v jsou konformní souřadnice na povrchu v $\mathbb{R}^3$. V tom případě je Gaussova křivost dána*

$$K = -\frac{1}{2h(u,v)}\triangle \ln h(u,v). \tag{1.15}$$

$\triangle$ značí Laplaceův operátor.

Důkaz vynechávám, neboť v další kapitole spočítáme snáze skalární křivost R a užijeme větu (A.1). Přejdeme-li k $h(z,\bar{z})$, najdeme pro K

$$K = -\frac{2}{h(z,\bar{z})}\frac{\partial^2}{\partial z \partial \bar{z}} \ln h(z,\bar{z}). \tag{1.16}$$

Protože $h(z,\bar{z}) > 0$, lze položit $h(z,\bar{z}) = e^{\varphi}$. Na povrchu s $K \equiv -1$ tímto z (1.15), (1.16) získáme Liouvillovy rovnice

$$\triangle\varphi = 2e^{\varphi}, \quad \frac{\partial^2\varphi}{\partial z\partial\bar{z}} = \frac{1}{2}e^{\varphi}. \tag{1.17}$$

Pozn. 1.11 *Jelikož pro střední křivost v příp. konformních souřadnic máme $H = \frac{l_{11}+l_{22}}{2h(z,\bar{z})}$, můžeme na minimálním povrchu $H \equiv 0$, který neobsahuje planární body, zvolit tzv. izotermální souřadnice. V nich je I a II dáno $ds^2 = h(z,\bar{z})\, dzd\bar{z} = e^{\varphi}(du^2+dv^2)$, $dl^2 = -du^2+dv^2$. Pro Gaussovu křivost platí $K = -e^{-2\varphi}$ a φ splňuje Liouvillovu rovnici $\triangle\varphi = 2e^{-\varphi}$. Ta je zároveň Gaussovou rovnicí. Codazziho rovnice jsou splněny automaticky díky volbě I, II, a proto každé řešení Liouvillovy rovnice určuje minimální povrch až na izometrii jednoznačně.*

1.3 Souvislost Liouvillovy a sine-Gordonovy rovnice

Nejprve odvodíme rovnice (1.6), (1.17) přes Riemannovu geometrii. Metrika konformních i speciálních Čebyševových souřadnic vyhovuje podmínce $\partial_i g_{jj} = 0, \quad i,j = 1,2$. Protože torze Levi-Civitovy konexe je nulová, platí $\nabla_1\partial_2 = \nabla_2\partial_1$, z čehož dále, využitím identity

$$X < Y, Z > = < \nabla_X Y, Z > + < Y, \nabla_X Z >, \quad X, Y, Z \in \mathcal{X}(M),$$

plyne $\nabla_i\partial_j = 0$ pro $i \neq j$. Pomocí vzorce $\Gamma^l_{ij} = \frac{1}{2}\sum_k g^{lk}(\frac{\partial g_{kj}}{\partial x^i} + \frac{\partial g_{ik}}{\partial x^j} - \frac{\partial g_{ij}}{\partial x^k})$ odvodíme

$$\begin{aligned}\nabla_1\partial_1 &= \frac{1}{g}(-g_{12}\partial_1 g_{12}\partial_1 + g_{11}\partial_1 g_{12}\partial_2),\\ \nabla_2\partial_2 &= \frac{1}{g}(g_{22}\partial_2 g_{12}\partial_1 - g_{12}\partial_2 g_{12}\partial_2).\end{aligned}$$

Proto

$$R_{1212} = \partial_1\partial_2 g_{12} + \frac{g_{12}}{g}\partial_1 g_{12}\partial_2 g_{12}.$$

Skalární křivost R je díky symetriím Riemannova tenzoru rovna $R = \frac{2}{g}R_{1212}$. Dosadíme-li do této rovnosti z (1.7), získáme

$$R = -4e^{-\varphi(z,\bar{z})}\partial\bar{\partial}\varphi(z,\bar{z}),$$

což užitím věty (A.1) dává vzorec (1.15). Volbou g_{ij} ze speciální Čebyševovy metriky, vyjde

$$R = -2\frac{\partial_+\partial_-\psi}{\sin\psi}.$$

Fixováním $R \equiv -2$ obdržíme kýžené rovnice (1.17), (1.6).

Dále využijeme existence privilegovaných povrchů mezi všemi s konstantní Gaussovou křivostí:

Věta 1.12 *Povrch v $\mathbb{R}^3$ s metrikou (1.7) a konstantní Gaussovou křivostí K je lokálně izometrický*

i) sféře pro $K > 0$,

ii) rovině pro $K = 0$,

iii) Lobačevského rovině $\mathbb{H}$ pro $K < 0$.

Důkaz: Z (1.17) pro K konstantní dostáváme

$$0 = \frac{\partial}{\partial z}\left(-\frac{K}{2}\right) = \frac{\partial}{\partial z}\left(e^{-\varphi}\frac{\partial^2\varphi}{\partial z\partial\bar{z}}\right) = e^{-\varphi}\left(\frac{\partial^3\varphi}{\partial z^2\partial\bar{z}} - \frac{\partial\varphi}{\partial z}\frac{\partial^2\varphi}{\partial z\partial\bar{z}}\right)$$
$$= e^{-\varphi}\frac{\partial}{\partial\bar{z}}\left(\frac{\partial^2\varphi}{\partial z^2} - \frac{1}{2}\left(\frac{\partial\varphi}{\partial z}\right)^2\right),$$

takže funkce $\partial^2\varphi/\partial z^2 - \frac{1}{2}(\partial\varphi/\partial z)^2 = \psi(z)$ je analytická. Komplexně analytickou transformací souřadnic $z = f(\xi)$ se metrika změní na

$$dl^2 = g(z,\bar{z})\left|\frac{df}{d\xi}\right|^2 d\xi d\bar{\xi} = \widetilde{g}(\xi,\bar{\xi})\, d\xi d\bar{\xi}.$$

Zavedeme-li $\widetilde{\varphi}(\xi,\bar{\xi})$ jako $\widetilde{g}(\xi,\bar{\xi}) = e^{\widetilde{\varphi}}$, platí

$$\widetilde{\varphi}(\xi,\bar{\xi}) = \varphi(z,\bar{z}) + \ln\frac{df}{d\xi} + \ln\frac{d\bar{f}}{d\bar{\xi}}. \tag{1.18}$$

Protože $\widetilde{\psi}$ je definována stejně jako ψ, je rovněž komplexně analytická. Přímým výpočtem ověříme:

$$\widetilde{\psi}(\xi) = \psi(z)(f')^2 + \frac{f'''}{f'} - \frac{3}{2}\left(\frac{f''}{f'}\right)^2, \quad \text{kde } f' = \frac{df}{d\xi}.$$

Hledáme f tak, aby $\widetilde{\psi} \equiv 0$, tzn. že f musí splňovat diferenciální rovnici

$$\frac{f'''}{f'} - \frac{3}{2}\left(\frac{f''}{f'}\right)^2 = -\psi(f(\xi))(f')^2.$$

Z teorie D.R. vyplývá existence analytického řešení. Zvolme tedy takové f, pak $\widetilde{\psi} \equiv 0$ a odtud

$$\frac{\partial^2 e^{-\widetilde{\varphi}/2}}{\partial\xi^2} = -\frac{1}{2}e^{-\widetilde{\varphi}/2}\left(\frac{\partial^2\widetilde{\varphi}}{\partial\xi^2} - \frac{1}{2}\left(\frac{\partial\widetilde{\varphi}}{\partial\xi}\right)^2\right) = 0.$$

Vztah dává pro $\xi = u + iv$ ekvivalentní soustavu

$$\frac{\partial^2 e^{-\widetilde{\varphi}/2}}{\partial u\partial v} = 0, \quad \frac{\partial^2 e^{-\widetilde{\varphi}/2}}{\partial u^2} = \frac{\partial^2 e^{-\widetilde{\varphi}/2}}{\partial v^2}. \tag{1.19}$$

Řešení systému (1.19) je $e^{-\widetilde{\varphi}/2} = a(u^2+v^2) + b_1 u + b_2 v + c = a\xi\bar{\xi} + b\xi + \bar{b}\bar{\xi} + c$; $a, c \in \mathbb{R}$. Tím přicházíme k vyjádření pro metriku

$$dl^2 = \frac{d\xi d\bar{\xi}}{(a\xi\bar{\xi} + b\xi + \bar{b}\bar{\xi} + c)^2}. \tag{1.20}$$

Ze vzorce (1.16) dostaneme $K = 4(ac - b\bar{b})$. Lineárně lomenou transformací převedeme metriku (1.20) na tvar

i) $\dfrac{4R^4 dz d\bar{z}}{(1+|z|^2)^2}$, pro $K = 4(ac - b\bar{b}) > 0$;

ii) $dz d\bar{z}$, pro $K = 4(ac - b\bar{b}) = 0$;

iii) $\dfrac{4R^4 dz d\bar{z}}{(1-|z|^2)^2}$, pro $K = 4(ac - b\bar{b}) < 0$,

v čemž poznáváme metriku sféry (B.1), roviny a Lobačevského roviny (B.3). □

Pro Lobačevského metriku (B.4) je $e^{\varphi(w,\overline{w})} = -4/(w-\overline{w})^2$ řešení Liouvillovy rovnice (1.17). V případě obecného pseudosférického povrchu M s konformními resp. Čebyševovými souřadnicemi izometrická vnoření do $\mathbb{H}$ dávají řešení rovnic (1.17), resp. (1.6). Z lemmatu (1.8) plyne, že pro Liouvillův případ musí být w holomorfní či antiholomorfní funkcí z. BÚNO $w = w(z)$, $\overline{w} = \overline{w}(\bar{z})$. Pak indukovaná metrika na M je dána

$$\begin{aligned} ds^2 &= e^{\varphi(z,\bar{z})} dz d\bar{z}, \\ e^{\varphi(z,\bar{z})} &= -4\frac{\partial w \bar{\partial}\overline{w}}{(w-\overline{w})^2}, \quad \bar{\partial} w = \partial \overline{w} = 0. \end{aligned} \tag{1.21}$$

Můžeme si všimnout invariance Liouvillovy rovnice vůči změně souřadnic (1.18). Pro pullback metriky (B.4) na pseudosférický povrch s Čebyševovými souřadnicemi (x_+, x_-) dostaneme

$$\begin{aligned} e^{\pm i\psi} &= -4\frac{\partial_\pm w \partial_\mp \overline{w}}{(w-\overline{w})^2}, \\ \partial_\pm w \partial_\pm \overline{w} &= -\frac{\lambda^{\pm 2}}{4}(w-\overline{w})^2, \end{aligned} \tag{1.22}$$

kde $w = w(x_+, x_-, \lambda), \overline{w} = \overline{w}(x_+, x_-, \lambda)$. Pro sine-Gordonův případ víme, že rovnice (1.22) popisují obecná řešení rovnice (1.6) díky větám (1.1), (1.3). Pro Liouvillovu formuli (1.21) to dokážeme v části (3.2). Vnoření do $\mathbb{H}$ jsou definovány až na izometrie $\mathbb{H}$, vůči nimž jsou rovnice (1.21), (1.22) invariantní.

2 2x2 maticová reprezentace

2.1 Diferenciální rovnice pro povrchy

Mějme parametrizaci $F = (F_1, F_2, F_3) : \mathcal{R} \to \mathbb{R}^3$ povrchu M a nechť metrika na M je konformní, tj. tvaru (1.7). Souřadnice z probíhá $\mathcal{R} \subset \mathbb{C}$. Díky konformnosti parametrizace platí $< F_z, F_z > = < F_{\bar{z}}, F_{\bar{z}} > = 0, < F_z, F_{\bar{z}} > = \frac{1}{2}e^{\varphi}$. $\{F_z, F_{\bar{z}}, N\}$ tvoří pohyblivý repér na M, přičemž N značí jednotkový normálový vektor. Jsou splněny Gauss-Weingartenovy rovnice (GW):

$$\begin{gathered} \sigma_z = \mathcal{U}\sigma,\ \sigma_{\bar{z}} = \mathcal{V}\sigma,\ \sigma = (F_z, F_{\bar{z}}, N)^T, \\ \mathcal{U} = \begin{pmatrix} \partial\varphi & 0 & Q \\ 0 & 0 & \frac{1}{2}He^{\varphi} \\ -H & -2e^{-\varphi}Q & 0 \end{pmatrix},\ \mathcal{V} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & \frac{1}{2}He^{\varphi} \\ 0 & \bar{\partial}\varphi & \bar{Q} \\ -2e^{-\varphi}\bar{Q} & -H & 0 \end{pmatrix}, \end{gathered} \tag{2.1}$$

kde $Q = < F_{zz}, N >,\ < F_{z,\bar{z}}, N > = \frac{1}{2}He^{\varphi}$. V této notaci máme

$$II = \begin{pmatrix} Q + \bar{Q} + He^{\varphi} & i(Q-\bar{Q}) \\ i(Q-\bar{Q}) & -(Q+\bar{Q}) + He^{\varphi} \end{pmatrix},$$

křivosti $H = \frac{1}{2}\mathrm{tr}(II \cdot I^{-1}),\ K = \det(II \cdot I^{-1}) = H^2 - 4Q\bar{Q}e^{-2\varphi}$. Gauss-Codazziho rovnice (GC)

$$\mathcal{U}_{\bar{z}} - \mathcal{V}_z + [\mathcal{U}, \mathcal{V}] = 0, \tag{2.2}$$

nabývají formy

$$\varphi_{z\bar{z}} + \frac{1}{2}H^2e^{\varphi} - 2Q\bar{Q}e^{-\varphi} = 0,\ Q_{\bar{z}} = \frac{1}{2}H_z e^{\varphi},\ \bar{Q}_z = \frac{1}{2}H_{\bar{z}}e^{\varphi}.$$

2.2 Popis pomocí kvaternionů

Označme $\mathbf{H}$ algebru kvaternionů s bazí $\{1, \mathbf{i}, \mathbf{j}, \mathbf{k}\}$ a $\mathbf{H}_*$ budiž multiplikativní grupa $\mathbf{H} \setminus \{0\}$. Platí $\mathbf{ij} = \mathbf{k}$, $\mathbf{jk} = \mathbf{i}$, $\mathbf{ki} = \mathbf{j}$. S touto bazí spojujeme Pauliho matice σ_α :

$$\sigma_1 = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} = i\mathbf{i},\ \sigma_2 = \begin{pmatrix} 0 & -i \\ i & 0 \end{pmatrix} = i\mathbf{j},\ \sigma_3 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} = i\mathbf{k}.$$

$\mathbb{R}^3$ identifikujeme s prostorem imaginárních kvaternionů $\mathrm{Im}\,\mathbf{H}$

$$X = -i\sum_{\alpha=1}^{3} X_\alpha \sigma_\alpha \in \mathrm{Im}\,\mathbf{H} \quad \longleftrightarrow \quad X = (X_1, X_2, X_3) \in \mathbb{R}^3.$$

Skalární součin je definován $< X, Y >= -\frac{1}{2}\mathrm{tr}XY$. Matice získané tímto ztotožněním z F, N označíme opět F, N. $\Phi \in \mathbf{H}_*$ nazvěme kvaternion, jenž transformuje bázi $\{\mathbf{i}, \mathbf{j}, \mathbf{k}\}$ na bázi $\{F_x, F_y, N\}$,

$$\Phi = \begin{pmatrix} a & b \\ -\bar{b} & \bar{a} \end{pmatrix}, \quad |a|^2 + |b|^2 \neq 0,$$

takže $F_x = e^{\varphi/2}\Phi^{-1}\mathbf{i}\Phi,\ F_y = e^{\varphi/2}\Phi^{-1}\mathbf{j}\Phi,\ N = \Phi^{-1}\mathbf{k}\Phi$. Pak

$$F_z = -ie^{\varphi/2}\Phi^{-1}\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}\Phi,\ F_{\bar{z}} = -ie^{\varphi/2}\Phi^{-1}\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}\Phi. \tag{2.3}$$

Kvaternion Φ splňuje D.R., které odvodíme z podmínek kompatibility $F_{z\bar{z}} = F_{\bar{z}z}$, přičemž zavedeme

$$U = \Phi_z \Phi^{-1}, \quad V = \Phi_{\bar{z}}\Phi^{-1} : \tag{2.4}$$

$$\begin{aligned} -ie^{\varphi/2}\tfrac{\bar{\partial}\varphi}{2}\Phi^{-1}\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}\Phi - ie^{\varphi/2}\Phi^{-1}\left[\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, V\right]\Phi = \\ = -ie^{\varphi/2}\tfrac{\partial\varphi}{2}\Phi^{-1}\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}\Phi - ie^{\varphi/2}\Phi^{-1}\left[\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, U\right]\Phi. \end{aligned}$$

Maticová rovnice ve složkách dává $\bar{\partial}\varphi = 2(V_{22} - V_{11})$, $\partial\varphi = 2(U_{11} - U_{22})$, $U_{21} = -V_{12}$. Z výrazů (2.3) získáme derivováním jednotlivé složky

$$\begin{aligned} F_{z\bar{z}} = \tfrac{1}{2}He^{\varphi}N &\longrightarrow U_{21} = -V_{12} = \tfrac{1}{2}He^{\varphi/2}, \\ F_{zz} = \partial\varphi F_z + QN &\longrightarrow U_{12} = -Qe^{-\varphi/2}, \\ F_{\bar{z}\bar{z}} = \bar{\partial}\varphi F_{\bar{z}} + \bar{Q}N &\longrightarrow V_{21} = \bar{Q}e^{-\varphi/2}. \end{aligned}$$

Nyní zbývá spočítat diagonální koeficienty U, V. Kvaternion Φ máme určen až na násobení skalárním faktorem. Protože grupa izometrií $\mathbb{H}$ je $SL(2, \mathbb{R})$, budeme požadovat, aby konexe U, V ležely v $\mathfrak{sl}(2, \mathbb{R})$, tj. byly bezstopé.

Věta 2.1 *Kvaternion Φ splňuje rovnice* (2.4)*, kde U, V mají tvar*

$$U = \begin{pmatrix} \frac{\partial\varphi}{4} & -Qe^{-\varphi/2} \\ \frac{1}{2}He^{\varphi/2} & -\frac{\partial\varphi}{4} \end{pmatrix}, \quad V = \begin{pmatrix} -\frac{\bar{\partial}\varphi}{4} & -\frac{1}{2}He^{\varphi/2} \\ \bar{Q}e^{-\varphi/2} & \frac{\bar{\partial}\varphi}{4} \end{pmatrix}. \tag{2.5}$$

Lemma 2.2 Φ *řeší Diracovu rovnici*

$$e^{-\varphi/2}\begin{pmatrix} 0 & \partial \\ -\bar{\partial} & 0 \end{pmatrix}\Phi = \frac{1}{2}H\Phi.$$

Pro minimální povrchy $H = 0$ vyjde v souřadnicích tvaru z pozn. (1.11) $Q = -\frac{1}{2}$, Gaussova rovnice je Liouvillova $\partial\bar{\partial}\varphi = \frac{1}{2}e^{-\varphi}$ a v U, V poznáváme standardní Liouvillovy laxovské konexe.

2.3 CMC povrchy

Je-li střední křivost H konstantní, získáme pro (GC)

$$\varphi_{z\bar{z}} + \frac{1}{2}H^2 e^{\varphi} - 2Q\bar{Q}e^{-\varphi} = 0, \; Q_{\bar{z}} = 0,$$

invarianci vůči transformaci $Q \to Q^t = \lambda Q, \; \lambda = e^{2it}$. $t \in \mathbb{R}$ se říká parametr deformace. Tato transformace nemění metriku ani střední a Gaussovu křivost $K = -2(\partial\bar{\partial}\varphi)e^{-\varphi}$. Tudíž se navíc zachovávají i obě hlavní křivosti. V okolí bodu $Q \neq 0$ lze konformní změnou souřadnic $z = \tilde{z}(z)$ normalizovat Q na $H/2$. V této parametrizaci rozpoznáváme v systému (2.6) Laxovu reprezentaci pro eliptickou sinh-Gordonovu rovnici

$$\partial\bar{\partial}\varphi + H\sinh\varphi = 0.$$

V části (4.3) ukážeme, že při znalosti $\Phi(z, \bar{z}, \lambda)$ pro všechna $\lambda = e^{2it}$, lze (GW) explicitně vyřešit, přičemž integrace vzhledem k $z, \bar{z}$ se nahradí derivací dle t :

Věta 2.3 *Nechť $\Phi(z, \bar{z}, \lambda = e^{2it})$ je řešení systému*

$$\Phi_z = U(\lambda)\Phi, \quad \Phi_{\bar{z}} = V(\lambda)\Phi,$$

$$U = \begin{pmatrix} \frac{\partial\varphi}{4} & -\lambda Q e^{-\varphi/2} \\ \frac{1}{2}He^{\varphi/2} & -\frac{\partial\varphi}{4} \end{pmatrix}, \; V = \begin{pmatrix} -\frac{\bar{\partial}\varphi}{4} & -\frac{1}{2}He^{\varphi/2} \\ \frac{1}{\lambda}\bar{Q}e^{-\varphi/2} & \frac{\bar{\partial}\varphi}{4} \end{pmatrix}. \tag{2.6}$$

Pak F, N definované vzorci

$$F = -\frac{1}{H}(\Phi^{-1}\frac{\partial}{\partial t}\Phi - i\Phi^{-1}\sigma_3\Phi), \quad N = -i\Phi^{-1}\sigma_3\Phi \tag{2.7}$$

popisují CMC povrch s metrikou e^{φ}, střední křivostí H a Hopfovým diferenciálem $Q^t = e^{2it}Q$. Obráceně je-li F konformní parametrizace CMC povrchu s metrikou e^{φ}, H a Q^t, pak je F dáno rovnicí (2.7), kde Φ řeší soustavu (2.6).

Pozn. k důkazu: F, N mají hodnoty v $\operatorname{Im}\mathbf{H}$ a proto mohou být ztotožněny s vektory v $\mathbb{R}^3$. Systém (2.6) je kvaternionová reprezentace pro pohyblivý repér s Hopfovým diferenciálem λQ. Diferencováním (2.7) dostaneme vyjádření (2.3). □

Pozn. 2.4 *Povrchy paralelní k CMC povrchu ležící v normálovém směru ve vzdálenosti* $1/(2H)$ *a* $1/H$ *mají po řadě konstantní Gaussovu a střední křivost.*

2.4 Povrchy s konstantní Gaussovou křivostí

Vypočteme Laxovy konexe analogicky části (2.2). Ukázali jsme, že na povrchu s negativní Gaussovou křivostí lze zvolit souřadnice tak, že I, II mají tvar

$$I = A^2dx^2 + 2AB\cos\psi\, dxdy + B^2dy^2,$$
$$II = 2AB\tfrac{\sin\psi}{\rho}\, dxdy.$$

Předpokládejme, že A, B jsou nenulové a $K = -\frac{1}{\rho^2}$, $\rho > 0$. Nechť $\Phi \in SU(2)$ je jednotkový kvaternion, který převádí bázi $\{A(\mathbf{i}\cos\frac{\psi}{2} + \mathbf{j}\sin\frac{\psi}{2}),\; B(\mathbf{i}\cos\frac{\psi}{2} - \mathbf{j}\sin\frac{\psi}{2}),\; \mathbf{k}\}$ na bázi $\{F_x, F_y, N\}$:

$$\begin{aligned} F_x &= -iA\Phi^{-1}\begin{pmatrix} 0 & e^{-i\psi/2} \\ e^{i\psi/2} & 0 \end{pmatrix}\Phi, \\ F_y &= -iB\Phi^{-1}\begin{pmatrix} 0 & e^{i\psi/2} \\ e^{-i\psi/2} & 0 \end{pmatrix}\Phi, \\ N &= -i\Phi^{-1}\sigma_3\Phi. \end{aligned} \tag{2.8}$$

Lineární D.R. pro Φ získáme zavedením matic

$$U = \Phi_x \Phi^{-1}, \quad V = \Phi_y \Phi^{-1}, \tag{2.9}$$

které leží v prostoru $\mathrm{Im}\,\mathbf{H}$. Protože $F_{xx} \perp N, F_{yy} \perp N$, tj.

$$0 =< F_x, N_x >= \frac{A}{2} \mathrm{tr} \left(\begin{pmatrix} 0 & e^{-i\psi/2} \\ e^{i\psi/2} & 0 \end{pmatrix} [\sigma_3, U] \right),$$

$$0 =< F_y, N_y >= \frac{B}{2} \mathrm{tr} \left(\begin{pmatrix} 0 & e^{i\psi/2} \\ e^{-i\psi/2} & 0 \end{pmatrix} [\sigma_3, V] \right),$$

jsou nediagonální členy U, V úměrné $\Phi F_x \Phi^{-1}$, resp. $\Phi F_y \Phi^{-1}$. Koeficienty úměrnosti určíme ze vztahů $< F_x, N_y >=< F_y, N_x >= -\frac{AB \sin \psi}{\rho}$. Pro U, V máme

$$U = -iu_3 \sigma_3 - \frac{ia}{2} \begin{pmatrix} 0 & e^{-i\psi/2} \\ e^{i\psi/2} & 0 \end{pmatrix},$$

$$V = -iv_3 \sigma_3 + \frac{ib}{2} \begin{pmatrix} 0 & e^{i\psi/2} \\ e^{-i\psi/2} & 0 \end{pmatrix},$$

kde $a = \frac{A}{\rho}$, $b = \frac{B}{\rho}$; $u_3, v_3 \in \mathbb{R}$. K výpočtu u_3, v_3 užijeme podmínku kompatibility $F_{xy} = F_{yx}$, z níž plyne

$$\begin{aligned} u_3 &= u - \frac{\psi_x}{4}, \quad u = \frac{B_x \cos \psi - A_y}{2B \sin \psi}, \\ v_3 &= v + \frac{\psi_y}{4}, \quad v = \frac{B_x - A_y \cos \psi}{2A \sin \psi}. \end{aligned} \tag{2.10}$$

Diagonální část podmínky kompatibility pro (2.9) dává Gaussovu rovnici $\psi_{xy} + 2v_x - 2u_y - ab \sin \psi = 0$, z nediagonální máme

$$u = \frac{a_y + b_x \cos \psi}{2b \sin \psi}, \quad v = -\frac{b_x + a_y \cos \psi}{2a \sin \psi}. \tag{2.11}$$

Srovnáním (2.10) s (2.11) získáme Codazziho rovnice

$$a_y + \frac{\rho_y}{2\rho} a - \frac{\rho_x}{2\rho} b \cos \psi = 0, \quad b_x + \frac{\rho_x}{2\rho} b - \frac{\rho_y}{2\rho} a \cos \psi = 0 \tag{2.12}$$

a vyjádření pro u, v

$$u = -\frac{\rho_y a}{4\rho b} \sin \psi, \quad v = -\frac{\rho_x b}{4\rho a} \sin \psi. \tag{2.13}$$

Pro povrch s ρ konstantní se (GC) zjednoduší na $\psi_{xy} - ab \sin \psi = 0$, $a_y = b_x = 0$. Zároveň $u = v = 0$. Tyto rovnice jsou invariantní vzhledem k Lorentzově transformaci $a \to \lambda a$, $b \to b/\lambda$, kde $\lambda \in \mathbb{R}$. Tedy každý takový povrch má 1-parametrickou rodinu transformací zachovávající II, K a ψ. Stejně jako v případě CMC povrchů, znalost $\Phi(x, y, \lambda)$ pro všechna $\lambda = e^t$ postačuje k explicitnímu řešení (GW), přičemž integrace vzhledem k x, y se nahradí derivací dle t :

Věta 2.5 *Nechť $\Phi(x, y, \lambda = e^t) \in SU(2)$ je řešení (2.9), s U, V*

$$U = \begin{pmatrix} \frac{i\psi_x}{4} & -\frac{ia}{2} \lambda e^{-i\psi/2} \\ -\frac{ia}{2} \lambda e^{i\psi/2} & -\frac{i\psi_x}{4} \end{pmatrix}, \quad V = \begin{pmatrix} -\frac{i\psi_y}{4} & \frac{ib}{2\lambda} e^{i\psi/2} \\ \frac{ib}{2\lambda} e^{-i\psi/2} & \frac{i\psi_y}{4} \end{pmatrix}. \tag{2.14}$$

Pak F, N definované $F = 2\rho \Phi^{-1} \frac{\partial}{\partial t} \Phi$, $N = -i \Phi^{-1} \sigma_3 \Phi$ popisují povrch s konstantní negativní Gaussovou křivostí. Fundamentální formy jsou tvaru

$$\begin{aligned} I &= \rho^2 (\lambda^2 a^2 dx^2 + 2ab \cos \psi dxdy + \lambda^{-2} b^2 dy^2), \\ II &= 2\rho ab \sin \psi dxdy. \end{aligned} \tag{2.15}$$

Povrch s konst. negativní Gaussovou křivostí v asymptotických souřadnicích s I, II tvaru (2.15) je popsán výše uvedenou rovnicí pro F, N, přičemž Φ řeší systém (2.14).

Pozn. k důkazu: F, N leží v $\mathrm{Im}\,\mathbf{H}$. Diferencováním vzorců pro F, N určíme

$$F_x = 2\rho\Phi^{-1}\frac{\partial U}{\partial t}\Phi, \quad F_y = 2\rho\Phi^{-1}\frac{\partial V}{\partial t}\Phi,$$

které souhlasí s (2.8). $\square$

Výpočet pro povrchy s $K > 0$ konstantní je paralelní.

Pozn. 2.6 2x2 *reprezentaci pro* $K < 0$ *lze získat z matic* (1.4) *jejich přetransfomováním do souřadnic* (2.15)*:*

$$\widetilde{P}^1 = \begin{pmatrix} 0 & -q_x & 0 \\ q_x & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}, \quad \widetilde{P}^2 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & -\sin q \\ 0 & 0 & \cos q \\ \sin q & -\cos q & 0 \end{pmatrix}. \tag{2.16}$$

$\widetilde{P}^1$, $\widetilde{P}^2$ *jsou ortogonální stejně jako řešení lineárního problému* Φ. *Uvážíme reprezentaci* $SO(3)$:

$$L_1 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix},\ L_2 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 0 \end{pmatrix},\ L_3 = \begin{pmatrix} 0 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix},$$
$$[L_1, L_2] = L_3,\ [L_2, L_3] = L_1,\ [L_3, L_1] = L_2.$$

Pak

$$\begin{aligned} \widetilde{P}^1 &= q_x L_3 + L_1 \\ \widetilde{P}^2 &= -\cos q L_1 - \sin q L_2. \end{aligned} \tag{2.17}$$

Jelikož pro Pauliho matice σ_i *platí až na násobek* $2i$ *stejné komutační relace jako pro* L_i, *je Lieova algebra generovaná* $[L_1, L_2, L_3]$ *izomorfní* $[e_1, e_2, e_3]$, *kde* $e_i = \sigma_i/2i$. *Tedy má smysl definovat*

$$\begin{aligned} \widetilde{P}^1 &= q_x e_3 + e_1 = \frac{i}{2}\begin{pmatrix} -q_x & -1 \\ -1 & q_x \end{pmatrix}, \\ \widetilde{P}^2 &= -\cos q e_1 - \sin q e_2 = \frac{i}{2}\begin{pmatrix} 0 & e^{-iq} \\ e^{iq} & 0 \end{pmatrix}. \end{aligned} \tag{2.18}$$

Kalibrační transformací přejdou konexe na standardní tvar (2.14).

3 Vlastnosti Liouvillovy a sine-Gordonovy rovnice

3.1 Společný tvar pro řešení

Díky reprezentaci nulové křivosti $F_{\alpha_1\alpha_2} = [\nabla_{\alpha_1}, \nabla_{\alpha_2}] = 0$ (0.2) existuje řešení lineárního problému $\nabla_{\alpha_i}\theta = (\partial_{\alpha_i} + A_{\alpha_i})\theta = 0$ (0.3). Přitom pro $i \in \{1, 2\}$ $\alpha_i \in \{z, \bar{z}\}$ resp. $\{x_+, x_-\}$. Teorie P.D.R. dává jednoznačnost řešení. Pro Liouvillovu rovnici (1.17) je A_z, $A_{\bar{z}}$ analogické (2.5):

$$A_z = \frac{1}{2}\begin{pmatrix} \frac{\partial\varphi}{2} & e^{\varphi/2} \\ 0 & -\frac{\partial\varphi}{2} \end{pmatrix}, \quad A_{\bar{z}} = \frac{1}{2}\begin{pmatrix} -\frac{\bar{\partial}\varphi}{2} & 0 \\ e^{\varphi/2} & \frac{\bar{\partial}\varphi}{2} \end{pmatrix}. \tag{3.1}$$

Pro sG případ je dáno $A_+ = V$, $A_- = U$ z (2.14), kde $a = b = 1$, $\lambda = i\widetilde{\lambda}^{-1}$, $x_+ = -y$, $x_- = -x$:

$$A_+ = \frac{1}{2}\begin{pmatrix} \frac{i\psi_+}{2} & \lambda e^{i\psi/2} \\ \lambda e^{-i\psi/2} & -i\frac{\psi_+}{2} \end{pmatrix}, \quad A_- = \frac{1}{2}\begin{pmatrix} -i\frac{\psi_-}{2} & \frac{1}{\lambda}e^{-i\psi/2} \\ \frac{1}{\lambda}e^{i\psi/2} & i\frac{\psi_-}{2} \end{pmatrix}. \tag{3.2}$$

Ukážeme, že z $A_{\alpha_i} \in \mathfrak{sl}(2, \mathbb{R})$, vyplývá $\partial_{\alpha_i}\det\theta = 0$. Vyjdeme z identity $(\ln\det\theta)_{,\alpha_i} = \mathrm{tr}(\theta_{,\alpha_i}\theta^{-1})$, jež platí pro libovolnou nedegenerovanou matici $\theta(\alpha_1, \alpha_2)$. Protože $\theta_{,\alpha_i} = -A_{\alpha_i}\theta$ a $\mathrm{tr}A_{\alpha_i} = 0$, je důkaz hotov.

Zavedeme-li $A(\theta) = \frac{\theta_{12}}{\theta_{11}}$, $B(\theta) = \frac{\theta_{22}}{\theta_{21}}$, přejdou rovnice (0.3) na tvar

$$\begin{aligned} \partial A &= -e^{\varphi/2}\frac{\det\theta}{2\theta_{11}^2}, \quad \partial B = 0, \\ \bar{\partial} A &= 0, \qquad\qquad \bar{\partial} B = e^{\varphi/2}\frac{\det\theta}{2\theta_{21}^2}. \end{aligned} \tag{3.3}$$

Liouvillovské pole lze vyjádřit pomocí A, B

$$e^{\varphi(z,\bar{z})} = -4\frac{\partial A(z)\bar{\partial} B(\bar{z})}{(A(z) - B(\bar{z}))^2}. \tag{3.4}$$

Pro rovnici (1.6) vypočteme podobně

$$\partial_\pm A = -\lambda^{\pm 1} e^{\pm i\psi/2}\frac{\det\theta}{2\theta_{11}^2}, \quad \partial_\pm B = \lambda^{\pm 1} e^{\mp i\psi/2}\frac{\det\theta}{2\theta_{21}^2}. \tag{3.5}$$

Sine-Gordonovo pole je dáno

$$\begin{aligned} e^{\pm i\psi(x_+,x_-)} &= -4\frac{\partial_\pm A\partial_\mp B}{(A-B)^2}, \\ \partial_\pm A\partial_\pm B &= -\frac{\lambda^{\pm 2}}{4}(A-B)^2. \end{aligned} \tag{3.6}$$

Výraz (3.4) a první rovnost (3.6) jsou společné a jsou zobecněním geometrických řešení (1.21), (1.22). A, B jsou v obou případech omezeny dodatečnou podmínkou, holomorfností resp. druhou rovnicí (3.6).

3.2 Symetrie

Symetrie rovnic (3.4), (3.6) nám umožní dokázat obecnost (1.22), (1.21). Levé translace $\theta \to \theta^g = g\theta$ působící na řešení lineárního problému indukují kalibrační transformace $A_{\alpha_i} \to A^g_{\alpha_i} = -(\partial_{\alpha_i} g)g^{-1} + gA_{\alpha_i}g^{-1}$. Funkce A, B zůstávají invariantní při posunech diagonálními prvky $g \in SL(2)$. Násobení zprava $\theta \to \theta g$, $g \in GL(2)$ soustavu (0.3) nemění. Rovnice (3.4), (3.6) jsou zachovávány Möbiovými transformacemi

$$A \to \frac{\alpha A + \beta}{\gamma A + \delta}, \quad B \to \frac{\alpha B + \beta}{\gamma B + \delta}, \quad g = \begin{pmatrix} \delta & \beta \\ \gamma & \alpha \end{pmatrix}, \tag{3.7}$$

které jsou indukovány pravými posuny θg.

Konexe A_{α_i} vyjádříme v následující reprezentaci $\mathfrak{sl}(2,\mathbb{R})$:

$$H = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}, \quad E^+ = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad E^- = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix},$$
$$[H, E^\pm] = \pm 2E^\pm, \quad [E^+, E^-] = H,$$

$$A_z = \partial\Phi + \tfrac{1}{2}e^{\mathrm{ad}\Phi}E^+, \ A_{\bar{z}} = -\bar{\partial}\Phi + \tfrac{1}{2}e^{-\mathrm{ad}\Phi}E^-, \ \Phi = \tfrac{1}{4}\varphi H,$$
$$A_\pm = \pm i\partial_\pm\Psi + \tfrac{1}{2}e^{\pm i\mathrm{ad}\Psi}\mathcal{E}_\pm, \ \Psi = \tfrac{1}{4}\psi H, \ \mathcal{E}_\pm = \lambda^{\pm 1}(E^+ + E^-).$$

Lieova algebra $\mathfrak{sl}(2,\mathbb{R})$ má involutivní automorfismus $\Pi H = -H$, $\Pi E^\pm = E^\mp$, jenž je v naší reprezentaci implementován prvkem σ

$$\Pi X = \sigma X\sigma, \quad \sigma = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \quad X \in \mathfrak{sl}(2,\mathbb{R}). \tag{3.8}$$

Využijeme podmínku reálnosti $\varphi \in \mathbb{R} \iff \bar{A}_z = \Pi A_z$, $\bar{A}_{\bar{z}} = \Pi A_z$, která dává relace

$$\bar{A}_z = \sigma A_{\bar{z}}\sigma, \ \bar{A}_{\bar{z}} = \sigma A_z\sigma.$$

Stejně $\psi \in \mathbb{R} \iff \bar{A}_\pm(\lambda) = \Pi A_\pm(\lambda),\ \lambda \in \mathbb{R}$ a odtud

$$\bar{A}_\pm = \sigma A_\pm \sigma.$$

Díky těmto vztahům platí: řeší-li θ lineární problém s maticí A_{α_i}, pak jej řeší i $\sigma\theta$. Z jednoznačnosti řešení (0.3) získáme konjugační pravidlo $\bar{\theta} = \sigma\theta C,\ C\bar{C} = 1,\ C$ je konstantní a je určeno počátečními podmínkami.

Předpokládejme nejprve, že v bodě P je dána podmínka $\theta(P) = \mathbb{I}$. Pak $C = \sigma$ a tudíž $\bar{A} = \frac{1}{B}$. Jelikož $A - B = -\frac{\det\theta}{\theta_{11}\theta_{21}}$ a nyní $\det\theta \equiv 1$, náleží A jednotkovému disku $\mathbb{D}$. Dosadíme-li podmínku $\bar{A} = \frac{1}{B}$ do rovnice (3.4), přijdeme k metrice (B.3). Za druhé zvolme počáteční podmínku

$$\widehat{\theta} = \Gamma, \quad \Gamma = \frac{1}{2i}\begin{pmatrix} -1 & -i \\ 1 & -i \end{pmatrix}.$$

Z rovnosti $\Gamma^{-1}\sigma\bar{\Gamma} = 1$ plyne $\overline{\widehat{\theta}} = \sigma\widehat{\theta}$ a dále $\overline{\widehat{A}} = \widehat{B}$. Použijeme-li $\widehat{\theta} = \theta\Gamma$ ve výrazu (3.7), dostaneme s využitím vztahů pro $\bar{A}, \overline{\widehat{A}}$

$$\widehat{A} = -i\frac{A+1}{A-1}, \quad |A|^2 < 1. \tag{3.9}$$

To je izomorfismus, který převádí $\mathbb{D}$ na $\mathbb{H}$. Jelikož díky reprezentaci nulové křivosti vzorce (3.4), (3.6) dávají obecná řešení Liouvillovy resp. sine-Gordonovy rovnice, ukázali jsme, že také (1.21), (1.22) zajišťují obecná řešení těchto rovnic.

3.3 Existence Lie-Bäcklundovy transformace

Zvolme $\theta(z,\bar{z}),\ T(x_+,x_-,\lambda)$ řešení lineárních problémů k (1.17), (1.6) splňující počáteční podmínku $\theta(0,0) = T(0,0,\lambda) = \Gamma$. V předchozí části jsme ukázali, že $u(\theta) = A(\theta),\ \bar{u}(\theta) = B(\theta)$ i $u(T) = A(T),\ \bar{u}(T) = B(T)$ leží v $\mathbb{H}$. θ, T jsou určeny až na násobení zprava prvky grupy $SL(2,\mathbb{R})$, které indukuje Möbiovy transformace $u, \bar{u}$, viz. (3.7). Vůči nim jsou rovnice (3.3), (3.5) invariantní. Proto můžeme požadovat

$$u(\theta) = \frac{\alpha u(T) + \beta}{\gamma u(T) + \delta},\ \alpha\delta - \beta\gamma = 1. \tag{3.10}$$

Specielně lze klást $u(\theta) = u(T)$. Použijeme-li tento vztah, definici A, B a relaci $\overline{\widehat{A}} = \widehat{B}$ přijdeme s uvážením, že $\det\theta = \det T = -\frac{i}{2}$ k rovnosti

$$\theta_{11}\theta_{21} = t_{11}t_{21} = \frac{i}{2(u-\bar{u})}. \tag{3.11}$$

Protože zároveň platí identity $\bar{\theta}_{1i} = \theta_{2i},\ \bar{t}_{1i} = t_{2i}$, zjišťujeme, že následující podíly jsou čisté fáze

$$e^{i\omega} = \frac{\theta_{11}}{t_{11}},\ e^{-i\omega} = \frac{\theta_{21}}{t_{21}},\ \omega \in \mathbb{R}. \tag{3.12}$$

Dosazením $u(\theta) = u(T)$ do (3.3), (3.5) získáme

$$\begin{aligned}
\frac{\mathcal{D}(z,\bar{z})}{\mathcal{D}(x_+,x_-)} &= e^{-\frac{\varphi}{2}}\begin{pmatrix} \lambda e^{i\frac{\psi}{2}+2i\omega} & \lambda^{-1}e^{-i\frac{\psi}{2}+2i\omega} \\ \lambda e^{-i\frac{\psi}{2}-2i\omega} & \lambda^{-1}e^{i\frac{\psi}{2}-2i\omega} \end{pmatrix}, \\
\frac{\mathcal{D}(x_+,x_-)}{\mathcal{D}(z,\bar{z})} &= \frac{e^{\frac{\varphi}{2}}}{2i\sin\psi}\begin{pmatrix} \lambda^{-1}e^{i\frac{\psi}{2}+2i\omega} & -\lambda^{-1}e^{-i\frac{\psi}{2}+2i\omega} \\ -\lambda e^{-i\frac{\psi}{2}-2i\omega} & \lambda e^{i\frac{\psi}{2}+2i\omega} \end{pmatrix}.
\end{aligned} \tag{3.13}$$

Předpokládáme, že tyto matice nejsou degenerované, tj. $\mathcal{J} = \det\frac{\mathcal{D}(z,\bar{z})}{\mathcal{D}(x_+,x_-)} = 2ie^{-\varphi}\sin\psi \neq 0$, a proto $\psi \neq 0(\mathrm{mod}\,\pi)$. Z (3.13) plyne: $(z,\bar{z})$ jsou konformní souřadnice na M právě když (x_+,x_-)

jsou Čebyševovy souřadnice na témž povrchu. Z důkazu věty (1.9) víme, že $z(x_+, x_-)$, $\bar{z}(x_+, x_-)$ splňují (Bel) z důkazu věty (1.9). Odvodíme její konkrétní tvar:
Vyjdeme z rovnosti $\partial_+ z = \lambda^2 e^{i\psi}\partial_- z$. Identita $1 \mp i \operatorname{cotg}\psi = \mp i\frac{e^{\pm i\psi}}{\sin\psi}$ umožnňuje tento vztah zapsat

$$\partial_\pm z = \mp i\left(\operatorname{cotg}\psi\partial_\pm - \frac{\lambda^{\pm 2}}{\sin\psi}\partial_\mp\right) z.$$

Podmínka integrability toho systému dává pro Beltramiho operátor

$$\begin{gathered} Lz = L\bar{z} = 0, \\ L = \lambda^{-2}\partial_+\left(\tfrac{1}{\sin\psi}\partial_+\right) + \lambda^2\partial_-\left(\tfrac{1}{\sin\psi}\partial_-\right) - \partial_+(\operatorname{cotg}\psi\partial_-) - \partial_-(\operatorname{cotg}\psi\partial_+). \end{gathered} \tag{3.14}$$

Nyní dokážeme existenci Lie-Bäcklundovy transformace mezi (1.17) a (1.6). Zavedeme vektory

$$v = \begin{pmatrix} \theta_{11} \\ \theta_{21} \end{pmatrix}, \quad w = \begin{pmatrix} t_{11} \\ t_{21} \end{pmatrix},$$

pro které platí podmínky (3.11), (3.12).

Věta 3.1 *Je-li v řešení lineárního problému $\partial v + A_z v = 0$, $\bar\partial v + A_{\bar z} v = 0$ a změna souřadnic $(z, \bar z) \leftrightarrow (x_+, x_-)$ je definována pomocí* (3.13), *pak je w je řešení systému $\partial_\pm w + A_\pm w = 0$. Odtud ψ řeší sine-Gordonovu rovnici.*

Důkaz: Vyjdeme z identit $\partial_+ z\partial_+\bar z = \lambda^2 e^{-\varphi}$, $\partial_- z\partial_-\bar z = \lambda^{-2}e^{-\varphi}$, jež se získají z (3.13). První rovnost derivujeme dle x_- a druhou dle x_+, přitom využijeme $\partial_+\partial_- z = \partial_-\partial_+ z$ a přijdeme k lineární soustavě

$$(\partial_+\partial_-\bar z, \partial_+\partial_- z)\cdot\frac{\mathcal{D}(z,\bar z)}{\mathcal{D}(x_+,x_-)} = -e^{-\varphi}\begin{pmatrix} \lambda^2\partial_-\varphi \\ \lambda^{-2}\partial_+\varphi \end{pmatrix}.$$

Její řešení je z Cramerova pravidla jednoznačně dáno

$$\begin{aligned} \partial_+\partial_- z &= \frac{ie^{-\frac{\varphi}{2} - i\frac{\psi}{2} + 2i\omega}}{2\lambda\sin\psi}(e^{i\psi}\partial_+\varphi - \lambda^2\partial_-\varphi), \\ \partial_+\partial_-\bar z &= -\frac{ie^{-\frac{\varphi}{2} - i\frac{\psi}{2} - 2i\omega}}{2\lambda\sin\psi}(e^{-i\psi}\partial_+\varphi - \lambda^2\partial_-\varphi). \end{aligned} \tag{3.15}$$

K výpočtu $\partial_\pm\partial_\mp z$, $\partial_\pm\partial_\mp\bar z$ použijeme lineární systém pro v. Z něj a dále z (3.13), (3.11), (3.12) vyjádříme výrazy

$$\partial_\pm \ln\theta_{11} = \pm\frac{i}{4}\left(\operatorname{cotg}\psi\partial_\pm\varphi - \frac{\lambda^{\pm 2}}{\sin\psi}\partial_\mp\varphi\right) - \frac{\lambda^{\pm 1}e^{\pm i\frac{\psi}{2}}t_{21}}{2t_{11}}.$$

Derivaci $\partial_\pm \ln\theta_{21}$ obdržíme komplexním sdružením. Vezmeme-li v úvahu tyto vztahy a derivujeme-li $\frac{\mathcal{D}(z,\bar z)}{\mathcal{D}(x_+,x_-)}$ dle $x_\pm$, odvodíme

$$\begin{aligned} \partial_\pm\partial_\mp z &= \lambda^{\mp 1}e^{-\frac{\varphi}{2}\mp i\frac{\psi}{2} + 2i\omega}\left(\pm i\frac{e^{\pm i\psi}}{2\sin\psi}\partial_\pm\varphi \mp i\frac{\lambda^{\pm 2}}{2\sin\psi}\partial_\mp\varphi - 2\frac{\mathcal{D}_\pm t_{11}}{t_{11}}\right), \\ \partial_\pm\partial_\mp\bar z &= \lambda^{\mp 1}e^{-\frac{\varphi}{2}\mp i\frac{\psi}{2} - 2i\omega}\left(\mp i\frac{e^{\mp i\psi}}{2\sin\psi}\partial_\pm\varphi \pm i\frac{\lambda^{\pm 2}}{2\sin\psi}\partial_\mp\varphi - 2\frac{\mathcal{D}_\pm t_{21}}{t_{21}}\right). \end{aligned} \tag{3.16}$$

$\mathcal{D}_\pm$ jsou kovariantní derivace sine-Gordonova modelu, $\mathcal{D}_\pm t_{ij} = (\mathcal{D}_\pm T)_{ij}$. Jelikož $\bar{\mathcal{D}}_\pm t_{11} = \mathcal{D}_\pm t_{21}$, jsou uvedené rovnice komplexně sdružené. Porovnáme-li vztahy (3.15) a (3.16), zjišťujeme, že $\mathcal{D}_+ t_{11} = \mathcal{D}_- t_{21} = 0$. Odtud w splňuje sine-Gordonův lineární problém a ψ je řešení (1.6). □

Obráceně platí:

Věta 3.2 *Je-li w řešení lineárního problému $\partial_\pm w + A_\pm w = 0$ a změna souřadnic $(z,\bar{z}) \leftrightarrow (x_+, x_-)$ je definována pomocí (3.13), pak je v je řešení systému $\partial v + A_z v = 0$, $\bar{\partial} v + A_{\bar{z}} v = 0$. Proto φ řeší Liouvillovu rovnici.*

Důkaz již pouze naznačím. Rovnice (3.15) byly odvozeny z (3.13), bez užití lineárních problémů. Vztahy (3.16) lze spočíst z (3.13) za použití lineárního problému pro w. Důsledkem jsou výrazy pro $\partial_\pm \ln \theta_{11}$ a jejich komplexní protějšky. Do těchto vzorců dosadíme identitu odvozenou z (3.13)

$$\operatorname{cotg} \psi \partial_\pm \varphi - \frac{\lambda^{\pm 2}}{\sin \psi} \partial_\mp \varphi = \pm i \lambda^{\pm 1} e^{-\frac{\varphi}{2}} (e^{\pm i \frac{\psi}{2} + 2i\omega} \partial \varphi - e^{\mp i \frac{\psi}{2} - 2i\omega} \bar{\partial} \varphi)$$

a dostaneme rovnice

$$\begin{aligned} \partial_\pm \ln \theta_{11} &= -\frac{\lambda^{\pm 1} e^{-\frac{\varphi}{2}}}{4} (e^{\pm i \frac{\psi}{2} + 2i\omega} \partial \varphi - e^{\mp i \frac{\psi}{2} - 2i\omega} \bar{\partial} \varphi) - \frac{\lambda^{\pm 1} e^{\pm i \frac{\psi}{2}}}{2} \frac{t_{21}}{t_{11}} \\ \partial_\pm \ln \theta_{21} &= \frac{\lambda^{\pm 1} e^{-\frac{\varphi}{2}}}{4} (e^{\pm i \frac{\psi}{2} + 2i\omega} \partial \varphi - e^{\mp i \frac{\psi}{2} - 2i\omega} \bar{\partial} \varphi) - \frac{\lambda^{\pm 1} e^{\pm i \frac{\psi}{2}}}{2} \frac{t_{11}}{t_{21}} \end{aligned} \tag{3.17}$$

(3.17) umožňuje spočítat $\mathcal{D}_z v$, $\mathcal{D}_{\bar{z}} v$, přičemž $\mathcal{D}_i$ značí kovariantní derivace příslušné k Liouvillově konexi. Díky (3.13), vyjde $\mathcal{D}_z v = 0$, $\mathcal{D}_{\bar{z}} v = 0$ a tedy lineární problém pro v i (1.17) jsou splněny.□

Pozn. 3.3 *Našli jsme jeden prvek Lieovy grupy Bäcklundových transformací, indukovaný (3.13), ale nevíme, zda leží ve stejné komponentě souvislosti jako jednotka. K tomu by stačilo ukázat např. existenci spojité deformace mezi Liouvillovým a sine-Gordonovým modelem.*

Pro ω platí následující rovnice $i\partial_\pm \omega = \pm \frac{i}{4} \partial_\pm \psi - \frac{1}{4}(\partial_\pm z \partial \varphi - \partial_\pm \bar{z} \bar{\partial} \varphi)$. Při jejím odvození jsme užili (3.13) a (3.15) ve tvaru $\partial_+ \partial_- z = -\partial_+ z \partial_- z \partial \varphi$. Podmínka integrabilitity dává

$$\frac{\partial_+ \partial_- \psi}{\sin \psi} = 2 e^{-\varphi} \partial \bar{\partial} \varphi,$$

což souhlasí s invariancí skalární křivosti při změně souřadnic $(z,\bar{z}) \leftrightarrow (x_+, x_-)$. Z rovnice plyne existence (BT) mezi (1.6), (1.17).

Bäcklundovu transformaci lze rovněž získat přejdeme-li od Liouvillovy konexe difeomorfní transformací $(z,\bar{z}) \leftrightarrow (x_+, x_-)$ k 1-formě $\mathbb{D}_\pm = \partial_\pm + U_\pm$, kde $U_\pm = \partial_\pm z A_z + \partial_\pm \bar{z} A_{\bar{z}}$. Křivost je 2-forma a proto $\mathbb{F}_{+-} = [\mathbb{D}_+, \mathbb{D}_-]$ a $\mathbb{F}_{z\bar{z}} = [\mathbb{D}_z, \mathbb{D}_{\bar{z}}]$ jsou svázány vztahem $F_{z\bar{z}} = \det \frac{\mathcal{D}(z,\bar{z})}{\mathcal{D}(x_+,x_-)} \mathbb{F}_{+-}$. Označme $g = e^{i\omega H}$ a uvažme kalibrační transformaci $\mathbb{D}_\pm \to \mathbb{D}^g_\pm = g^{-1} \mathbb{D}_\pm g$. Pak $\mathbb{D}^g_\pm$ je sine-Gordonova konexe, pokud je $(z,\bar{z}) \leftrightarrow (x_+, x_-)$ dána (3.13) a ω splňuje rovnici z předchozího odstavce.

4 Solitonové povrchy

4.1 Povrchy vnořené do $\mathbb{R}^3$

Geometricky (BT) představuje konstrukci, při které bodu P původního povrchu Σ přiřadíme P' z Σ', tak že PP' je konst. délky a leží v tečné rovině τ_P k Σ i v $\tau'_{P'}$ tečné k Σ'. Současně požadujeme, aby $\angle(\tau, \tau') = \zeta = konst.$ Obecně tangenciální podmínka dává $\boldsymbol{r'} = \boldsymbol{r} + m\boldsymbol{N'} \times \boldsymbol{N}$. Pro pseudosférický povrch vznikne transformací povrch se stejnou křivostí a tudíž můžeme na Σ i Σ' uvažovat asymptotické souřadnice. Z těchto podmínek v případě sG nalezneme standardní tvar (ABT) pro sG rovnici a pro $\boldsymbol{r'}$ následně vyjde (viz. [5])

$$\boldsymbol{r'} = \boldsymbol{r} + \frac{L}{\sin \omega} \left[\sin\left(\frac{\omega - \omega'}{2} \right) \boldsymbol{r}_u + \sin\left(\frac{\omega + \omega'}{2} \right) \boldsymbol{r}_v \right], \tag{4.1}$$

kde $L = \rho \sin\zeta$. Bäcklundovsky transformované řešení sG rovnice ω' vznikne z ω pomocí Bäcklundova parametru β, který je s ζ spjat vztahem $\beta = \mathrm{tg}(\zeta/2)$. Přechodem k hlavním souřadnicím pak

$$\boldsymbol{r}' = \boldsymbol{r} + L\left[\frac{\cos\theta'}{\cos\theta}\boldsymbol{r}_x - \frac{\sin\theta'}{\sin\theta}\boldsymbol{r}_y\right], \quad \theta = 2\omega,\ \theta' = 2\omega'. \tag{4.2}$$

Díky (4.2) snadno spočteme 2-solitonový sG-povrch, když za $\boldsymbol{r}$ vezmeme polohový vektor Diniho pseudosféry, jež odpovídá pohyblivému 1-solitonu pro sG:

$$\boldsymbol{r}(x,y) = \begin{pmatrix} \rho\sin\zeta\,\mathrm{sech}\,\chi\cos\left(\frac{y}{\rho}\right) \\ \rho\sin\zeta\,\mathrm{sech}\,\chi\sin\left(\frac{y}{\rho}\right) \\ \chi - \rho\sin\zeta\tanh\chi \end{pmatrix}, \tag{4.3}$$

kde $\chi = \dfrac{x - y\cos\zeta}{\rho\sin\zeta}$. Diniho pseudosféra je příklad helikoidu, plochy vzniklé rotací kolem osy křivky, která je současně posouvána paralelně s osou rotace přičemž poměr rychlosti translace a rotace zůstává konstantní, takže její parametrické rovnice získáme snadno ze známého stacionárního 1-solitonového povrchu. V ten (4.3) přechází pro $\zeta = \pi/2$. V (4.2) je tedy θ' 2-solitonové řešení určené z nelineárního superpozičního principu

$$\theta' = \pm 2\arctan\left[\frac{\sin\left(\frac{\zeta_2+\zeta_1}{2}\right)\sinh\left(\frac{\chi_1-\chi_2}{2}\right)}{\sin\left(\frac{\zeta_2-\zeta_1}{2}\right)\cosh\left(\frac{\chi_1+\chi_2}{2}\right)}\right], \tag{4.4}$$

kde $\theta_i = 2\arctan\exp\chi_i$ jsou výchozí řešení sG odpovídající (4.3) a v (4.2) je $\theta = \theta_1$. Spec. lze z (4.2) volbou $\beta_1 = c + id = \bar{\beta}_2$ určit povrchy příslušné k periodickým 2-solitonům (tzv. *breathers*).

Další povrchy

Pro odvození dalších povrchů souvisejících s nelineárními rovnicemi představíme odlišný způsob, jímž lze přijít k sine-Gordonově rovnici. Da Rios v roce 1906 nalezl solitonové rovnice v časovém vývoji křivosti a torze neroztažitelného vířícího vlákna v nestlačitelné kapalině. Nechť tedy $\boldsymbol{r}(s,t)$ je polohový vektor časově se vyvíjející křivky. Pak tečný vektor $\boldsymbol{t}$, normála $\boldsymbol{n}$ a binormála $\boldsymbol{b}$ splňují Frenetovy formule

$$\begin{aligned} \boldsymbol{t}_s &= \kappa\boldsymbol{n}, \\ \boldsymbol{b}_s &= -\tau\boldsymbol{n}, \\ \boldsymbol{n}_s &= \tau\boldsymbol{b} - \kappa\boldsymbol{t}, \end{aligned} \tag{4.5}$$

kde s je parametrizace obloukem a κ, τ je křivost a torze. Čas t v této soustavě vystupuje pouze jako parametr. Požadujeme-li v každém okamžiku ortonormalitu pohyblivého repéru, musí platit

$$\begin{aligned} \boldsymbol{t}_t &= \alpha\boldsymbol{n} + \beta\boldsymbol{b}, \\ \boldsymbol{b}_t &= -\beta\boldsymbol{t} - \gamma\boldsymbol{n}, \\ \boldsymbol{n}_t &= -\alpha\boldsymbol{t} + \gamma\boldsymbol{b}. \end{aligned} \tag{4.6}$$

Neroztažitelnost vlákna dává záměnnost druhých derivací $\boldsymbol{t}_{st} = \boldsymbol{t}_{ts}$ atd. Odtud získáme

$$\begin{aligned} \alpha_s &= \beta\tau + \kappa_t, \\ \beta_s &= -\alpha\tau + \gamma\kappa, \\ \gamma_s &= \tau_t - \beta\kappa. \end{aligned} \tag{4.7}$$

Z (4.7) vyplývá $(\alpha^2 + \beta^2 + \gamma^2)_s = 2(\alpha\kappa_t + \gamma\tau_t)$. Nechť je nejprve torze konst. $\tau_t = 0$ a $\alpha = 0$, pak $\beta^2 + \gamma^2 = \delta^2(t)$ a lze položit $\beta = \delta(t)\sin\sigma$, $\gamma = \delta(t)\cos\sigma$. Podmínky kompatibility (4.7) se redukují na

$$\sigma_{st} = -\delta(t)\tau(s)\sin\sigma, \tag{4.8}$$

kde $\kappa = \sigma_s$. Volbou $\tau = 1/\rho = \text{konst.}, \delta = -1/\rho$, se (4.8) stává sG rovnicí a (4.5),(4.6) je její lineární reprezentace odpovídající (2.16). Křivka o konst. torzi spojená se sG rovnicí se pohybuje po pseudosférickém povrchu, přičemž v každém čase je na něm asymptotickou křivkou. Sledujeme-li vývoj jedné asympt. křivky dle druhého parametru pro 2-solitonové řešení, vidíme křivku s dvěma lokalizovanými smyčkami, které přes sebe projdou nezměněny až na fázový posuv. Rychlost $\boldsymbol{r}_t$ je v tomto příp. dána $\boldsymbol{r}_t = \cos\sigma \boldsymbol{t} - \sin\sigma \boldsymbol{n}$.

Druhá možnost konst. křivosti $\kappa_t = 0, \gamma = 0$ vede opět na sG rovnici $\sigma_{st} = \frac{1}{\rho^2}\sin\sigma$ s lineární reprezentací odpovídající (2.16). Řešení (4.7) je

$$\alpha = -\frac{\cos\sigma}{\rho}, \beta = \frac{\sin\sigma}{\rho}, \kappa = 1/\rho, \tau = \sigma_s.$$

Nicméně $\boldsymbol{t} \cdot \boldsymbol{N} = -1 \neq 0$, kde $\boldsymbol{N}$ je normálový vektor povrchu, takže křivka neleží na příslušném pseudosférickém povrchu.

Pohybem křivky o nulové torzi nyní přijdeme k mKdV: Rozložíme-li rychlost

$$\boldsymbol{v} = \lambda \boldsymbol{t} + \mu \boldsymbol{n} + \nu \boldsymbol{b},$$

dává podmínka $\boldsymbol{r}_{st} = \boldsymbol{r}_{ts}$ rovnost $\lambda_s \boldsymbol{t} + \lambda\kappa \boldsymbol{n} + \mu_s \boldsymbol{n} + \mu(\tau \boldsymbol{b} - \kappa \boldsymbol{t}) + \nu_s \boldsymbol{b} - \nu\tau \boldsymbol{n} = \alpha \boldsymbol{n} + \beta \boldsymbol{b}$. Odtud

$$\begin{aligned} \lambda_s - \mu\kappa &= 0 \\ \lambda\kappa + \mu_s - \nu\tau &= \alpha \\ \mu\tau + \nu_s &= \beta \end{aligned} \tag{4.9}$$

a dosazením do (4.7)

$$\begin{aligned} \kappa_t &= (\lambda\kappa + \mu_s - \nu\tau)_s - (\mu\tau + \nu_s)\tau \\ \tau_t &= \gamma_s + (\mu\tau + \nu_s)\kappa, \end{aligned}$$

kde $\gamma = \frac{1}{\kappa}[(\mu\tau + \nu_s)_s + \tau(\lambda\kappa + \mu_s - \nu\tau)]$. Pro křivku s $\tau = 0$ pohybující se tak, že $\mu = -\kappa_s$, vyjde z (4.9) $\lambda = -\frac{\kappa^2}{2} + c_1(t)$. Protože c_1 je libovolná, položme $c_1 = 0$, pak z (4.9) vyjádříme $\{\alpha, \beta, \gamma\} = \{-\kappa_{ss} - \frac{\kappa^3}{2}, \nu_s, \frac{\nu_{ss}}{\kappa}\}, \{\lambda, \mu, \nu\} = \{-\frac{\kappa^2}{2}, -\kappa_s, \nu\}$. Z výrazu pro κ_t obdržíme

$$\kappa_t + \kappa_{sss} + \frac{3}{2}\kappa^2\kappa_s = 0 \quad \text{(mKdV)}.$$

Přejdeme-li od mKdV k potenciálové mKdV, lze z její lineární reprezentace snadno určit polohový vektor *pseudosférického* povrchu odpovídajícího 1-solitonovému řešení této rovnice. Výsledek lze nalézt v [5].

Hasimoto zkoumal binormálový pohyb vířícího vlákna omezeného podmínkou $\boldsymbol{r}_t = \kappa \boldsymbol{b}$. V označení z předchozího odstavce tedy $\{\lambda, \mu, nu\} = \{0, 0, \kappa\}$ a (4.9) dávají

$$\alpha = -\kappa\tau, \quad \beta = \kappa.$$

Z podmínek kompatibility pro (4.7)

$$\begin{aligned} \gamma &= \frac{\kappa_{ss} - \kappa\tau^2}{\kappa} \\ \kappa_t &= -2\kappa_s\tau - \kappa\tau_s \\ \tau_t &= \left(-\tau^2 + \frac{\kappa_{ss}}{\kappa} + \frac{\kappa^2}{2}\right)_s. \end{aligned} \tag{4.10}$$

Zaveďme nyní Hasimotovu transformaci:

$$q = \kappa e^{i\sigma}, \qquad \sigma = \int_{s_0}^{s} \tau(s^*, t)ds^*.$$

Pak užitím (4.10) zjistíme, že

$$
\begin{aligned}
q_t &= \left[\kappa_t + i\kappa\left(-\tau^2 + \frac{\kappa_{ss}}{\kappa} + \frac{\kappa^2}{2} - T(t)\right)\right] e^{i\sigma}, \\
q|q|^2 &= \kappa^3 e^{i\sigma}, \\
q_{ss} &= (\kappa_{ss} + 2i\kappa_s\tau + i\kappa\tau_s - \kappa\tau^2)e^{i\sigma},
\end{aligned}
\tag{4.11}
$$

kde $T(t) = \left(-\tau^2 + \frac{\kappa_{ss}}{\kappa} + \frac{\kappa^2}{2}\right)\Big|_{s_0}$. Zkombinováním rovnic (4.11) vyjádříme

$$
q_t = i\left[q_{ss} + \frac{1}{2}q|q|^2 - T(t)q\right]. \tag{4.12}
$$

Zavedeme-li $q^* = q\exp\left(i\int_0^t T(t^*)dt^*\right)$, nalezneme

$$
iq_t^* + q_{ss}^* + \frac{1}{2}|q^*|q^* = 0 \qquad \text{(NLS)} \tag{4.13}
$$

Je-li $T(t) = 0$, neohvězdičkovaná verze (NLS) připouští lin. reprezentaci odpovídající (4.5), (4.6). Díky $\boldsymbol{r}_t = \kappa\boldsymbol{b}$ máme $I = d\boldsymbol{r}\cdot d\boldsymbol{r} = (\boldsymbol{r}_s ds + \boldsymbol{r}_t dt)\cdot(\boldsymbol{r}_s ds + \boldsymbol{r}_t dt) = ds^2 + \kappa^2 dt^2$, a podobně $II = -d\boldsymbol{r}\cdot d\boldsymbol{N} = (\boldsymbol{t}ds + \kappa\boldsymbol{b}dt)\cdot(\boldsymbol{n}_s ds + \boldsymbol{n}_t dt) = -\kappa ds^2 + 2\kappa\tau ds dt + (\kappa_{ss} - \kappa\tau^2)dt^2$, v čemž jsme využili $\boldsymbol{N} = \frac{\boldsymbol{r}_s \times \boldsymbol{r}_t}{|\boldsymbol{r}_s \times \boldsymbol{r}_t|} = \frac{\boldsymbol{t}\times\kappa\boldsymbol{b}}{\kappa} = -\boldsymbol{n}$. Odtud určíme Gaussovu křivost $K = -\frac{\kappa_{ss}}{\kappa}$. Rovnice $(4.10)_{2,3}$ jsou invariantní vůči transformaci

$$
\begin{aligned}
\kappa \to \kappa^* = \kappa, &\qquad \tau \to \tau^* = \tau + \lambda \\
s \to s^* = s + 2\lambda t, &\qquad t \to t^* = t.
\end{aligned}
\tag{4.14}
$$

Zároveň $\boldsymbol{r}_t$ přejde v $\boldsymbol{r}_{t^*} = \kappa^*\boldsymbol{b} - 2\lambda\boldsymbol{t}$. V lineární representaci se objeví spektrální parametr:

$$
\begin{aligned}
\begin{pmatrix} \boldsymbol{t} \\ \boldsymbol{n} \\ \boldsymbol{b} \end{pmatrix}_{s^*} &= \begin{pmatrix} 0 & \kappa^* & 0 \\ -\kappa^* & 0 & \tau^* - \lambda \\ 0 & -\tau^* + \lambda & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \boldsymbol{t} \\ \boldsymbol{n} \\ \boldsymbol{b} \end{pmatrix}, \\
\begin{pmatrix} \boldsymbol{t} \\ \boldsymbol{n} \\ \boldsymbol{b} \end{pmatrix}_{t^*} &= \begin{pmatrix} 0 & -\kappa^*(\tau^* + \lambda) & \kappa^*_{s^*} \\ \kappa^*(\tau^* + \lambda) & 0 & \Xi \\ -\kappa^*_{s^*} & -\Xi & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \boldsymbol{t} \\ \boldsymbol{n} \\ \boldsymbol{b} \end{pmatrix},
\end{aligned}
\tag{4.15}
$$

kde $\Xi = \frac{\kappa^*_{s^*s^*}}{\kappa^*} - t^{*^2} + \lambda^2$. Analogicky části (2) se získá standardní AKNS reprezentace pro NLS.

Hasimotovy povrchy popisují např. časový vývoj kouřového kroužku. Zajímají nás parametrické rovnice 1-solitonového NLS povrchu. Vlna se šíří konst. rychlostí c podél vlákna, které zůstává rovné pro $s \to \infty$ tj. $\kappa \to_{s\to\infty} 0$. Hledáme řešení $\kappa = \kappa(\xi), \tau = \tau(\xi)$ rovnic $(4.10)_{2,3}$, přičemž $\xi = s - ct$. Substitucí se systém transformuje na

$$
c\kappa' = 2\kappa'\tau + \kappa\tau' \tag{4.16}
$$

$$
-c\tau' = \left[-\tau^2 + \frac{\kappa''}{\kappa} + \frac{\kappa^2}{2}\right]'. \tag{4.17}
$$

Integrací (4.16) s využitím okrajových podmínek a s předpokladem omezenosti τ pro $s \to \infty$ odvodíme $(c - 2\tau)\kappa^2 = 0$, což vyloučením triviálního příp. $\kappa = 0$, dává $\tau = \frac{c}{2} = \tau_0 = konst.$ Pro hyperbolický NLS povrch je $\frac{\kappa''}{\kappa} > 0$ a tudíž z (4.17) zbývá

$$
\frac{\kappa''}{\kappa} + \frac{\kappa^2}{2} = \epsilon^2.
$$

Obecné řešení této rovnice lze vyjádřit pomocí eliptických funkcí. Doplněním okrajových podmínek určíme řešení

$$\kappa = 2\epsilon \operatorname{sech}(\epsilon\xi),$$

tj.

$$q = 2\epsilon \operatorname{sech}[\epsilon(s - 2\tau_0 t)] \exp[i\tau_0(s - s_0)] \tag{4.18}$$

řeší (4.12) s $T(t) = -\tau_0^2 + \epsilon^2$. 1-soliton k NLS (4.13) je dán

$$q^* = 2\epsilon \operatorname{sech}[\epsilon(s - 2\tau_0 t)] \exp i[\tau_0(s - s_0) + (\epsilon^2 - \tau_0^2)t].$$

Metodou popsanou v 4.3 lze k (4.18) určit

$$\boldsymbol{r}(s,t) = \begin{pmatrix} \frac{s}{2} - \frac{\epsilon}{\epsilon^2 + \tau_0^2} \tanh(\epsilon\xi) \\ -\frac{\epsilon}{\epsilon^2 + \tau_0^2} \operatorname{sech}(\epsilon\xi) \cos[\tau_0 s + (\epsilon^2 - \tau_0^2)t] \\ -\frac{\epsilon}{\epsilon^2 + \tau_0^2} \operatorname{sech}(\epsilon\xi) \sin[\tau_0 s + (\epsilon^2 - \tau_0^2)t] \end{pmatrix}. \tag{4.19}$$

Existuje řada solitonových povrchů, jež lze zkoumat podobnými metodami. Uveďme např. rodiny Bonetových povrchů se stejnou střední křivostí, Bianchiho povrchy s harmonickou inverzí Gaussovy křivosti $\partial_1\partial_2(1/\sqrt{K}) = 0$, povrchy s harmonickou inverzí střední křivosti $\partial_z\partial_{\bar{z}}(1/H) = 0$, povrchy asociované s vlnovou rovnicí $(\ln h)_{\alpha\beta} = h - h^{-2}$, jimiž se poprvé zabýval Tzitzeica, atd. Pro AKNS systémy lze odvodit obecný vzorec N-solitonového povrchu získaný opakovanou aplikací (BT), uveden je např. v [6], podrobnosti pak lze nalézt v [7]. Výpočet pro konkrétní povrchy je ale někdy komplikovaný už pro $N = 2$.

4.2 N-solitonový povrch v Lobačevského rovině

Pro sG rovnici odvodíme rovnice vnoření N-solitonového povrchu do $\mathbb{H}$. Přijměme pro jednoduchost značení $f(x) = f(x_+, x_-)$, $f(0,0) = 0$ pro libovolnou funkci x_+, x_-. Protože rovnice vnoření do $\mathbb{H}$ je určena vzorcem (3.9), potřebujeme znát maticové řešení lin. problému (0.3). To lze získat z řešení vektorového všimneme-li si symetrie Laxovy konexe $A_\pm(x, -\lambda) = HA_\pm(x, \lambda)H$. Odtud je-li $w(x, \lambda)$ řešení (0.3), je jím i vektor $Hw(x, \lambda)$ a tudíž maticové řešení lze zapsat

$$W(x, \lambda) = (w(x, \lambda), Hw(x, -\lambda)). \tag{4.20}$$

V článku z *Osaka Journal of Mathematics* ***19*** *(1982; 125-158)*, který se mi bohužel nepodařilo získat, *E. Date* ukázal, že k výpočtu N-solitonového řešení je třeba vzít hodnoty $\lambda = \mu_1, \ldots, \mu_N$, pro které je matice W degenerovaná a že řešení lin. systému (0.3) je

$$w(x, \lambda) = e(x, -\lambda) e^{i\psi(x)} \begin{pmatrix} \Pi_{j=1}^N (\lambda + \epsilon_{1j}(x)) \\ \Pi_{j=1}^N (\lambda + \epsilon_{2j}(x)) \end{pmatrix}, \tag{4.21}$$

kde $e(x, \lambda) = \exp\{\frac{1}{2}(\lambda x_+ + \lambda^{-1} x_-)\}$. Zároveň ψ a ϵ_{kj} musí splňovat

$$\begin{aligned} i\partial_+\psi &= \textstyle\sum_{i=1}^N (\partial_+\epsilon_{1i} - \partial_+\epsilon_{2i}) \\ e^{i\psi} &= \textstyle\prod_{i=1}^N \frac{\epsilon_{2i}}{\epsilon_{1i}}. \end{aligned} \tag{4.22}$$

Podmínky degenerace znamenají existenci konstant $c_j,\ j = 1, \ldots, N$ tak, že platí

$$w(x, \mu_j) = c_j H w(x, -\mu_j), \tag{4.23}$$

složkově

$$w_k(x, \mu_j) = (-1)^{k-1} c_j w_k(x, -\mu_j),\ k = 1, 2,\ j = 1..N. \tag{4.24}$$

Dosazením (4.21) do (4.24) dostaneme relaci

$$\prod_{l=1}^{N} \frac{\epsilon_{kl} + \mu_j}{\epsilon_{kl} - \mu_j} = (-1)^{k-1} c_j e^2(x, \mu), \ k = 1, 2, \ j = 1, \cdots, N. \tag{4.25}$$

Užitím (4.25) se ověří konzistentnost (4.22). Pro (4.21) má soustava degeneračních podmínek (4.23) kladených na W jediné řešení.

Z podmínky reálnosti ψ tvaru $\bar{A}_{\pm}(\lambda) = \sigma A_{\pm}(\lambda)\sigma$ uvedené v části (3.2) vyplývá $w(x, \lambda) = \sigma \bar{w}(x, \bar{\lambda})$. Srovnáním s (4.24), (4.21) nalezneme konjugační pravidla

$$\bar{\mu}_j = \mu_{\pi(j)}, \ \bar{c}_j = -c_{\pi(j)}, \ \bar{\epsilon}_{1j} = \epsilon_{2\pi'(j)}, \ j = 1, \cdots, N, \tag{4.26}$$

přičemž π, π' jsou dvě ne nutně stejné involutivní permutace $\hat{N}$. Matice (4.20) je tudíž následující

$$W_N(x, \lambda) = e^{i\psi} \begin{pmatrix} \prod_{l=1}^{N} (\epsilon_l(x) + \lambda) e(-\lambda) & \prod_{l=1}^{N} (\epsilon_l(x) - \lambda) e(\lambda) \\ \prod_{l=1}^{N} (\bar{\epsilon}_l(x) + \lambda) e(-\lambda) & -\prod_{l=1}^{N} (\bar{\epsilon}_l(x) - \lambda) e(-\lambda) \end{pmatrix} \tag{4.27}$$

$$\epsilon_l(x) = \epsilon_{1l}(x).$$

K normalizovanému řešení přijdeme přenásobením $W_N^{-1}(0, \lambda)$: $T_N(x, \lambda) = W_N(x, \lambda) W_N^{-1}(0, \lambda) =$

$$= \begin{pmatrix} \exp\{\frac{i}{4}(\psi_N(x) - \psi_N(0))\} X_N(\lambda) & \exp\{\frac{i}{4}(\psi_N(x) + \psi_N(0))\} Y_N(\lambda) \\ \exp\{-\frac{i}{4}(\psi_N(x) + \psi_N(0))\} \bar{Y}_N(\bar{\lambda}) & \exp\{-\frac{i}{4}(\psi_N(x) - \psi_N(0))\} \bar{X}_N(\bar{\lambda}) \end{pmatrix}$$

$$X_N = \frac{\Pi_{l=1}^{N} (\lambda + \epsilon_l(x))(\lambda - \bar{\epsilon}_l(0)) e(-\lambda) + (\lambda \leftrightarrow -\lambda)}{2\Pi_{l=1}^{N} (\lambda^2 - \mu_l^2)}) \tag{4.28}$$

$$Y_N = \frac{\Pi_{l=1}^{N} (\lambda + \epsilon_l(x))(\lambda - \epsilon_l(0)) e(-\lambda) + (\lambda \leftrightarrow -\lambda)}{2\Pi_{l=1}^{N} (\lambda^2 - \mu_l^2)}.$$

Z matice T_N vyjádříme A, o kterém jsme v sekci (3.2) ukázali, že $A \in \mathbb{D}$. Izomorfismus (3.9) mezi $\mathbb{D} \leftrightarrow \mathbb{H}$ zajišťuje hledané vnoření

$$u_N(x, \lambda) = i \frac{X_N(x, \lambda) + \exp\{i\frac{\psi_N(0)}{2}\} Y_N(x, \lambda)}{X_N(x, \lambda) - \exp\{i\frac{\psi_N(0)}{2}\} Y_N(x, \lambda)} \tag{4.29}$$

Z (4.29) se snadno získá 1-solitonový povrch v $\mathbb{H}$. Dále vidíme, že vakuovému řešení $\psi \equiv 0$ odpovídají geodetiky v $\mathbb{H}$.

4.3 O obecné metodě výpočtu solitonových povrchů

K odvození parametrických rovnic solitonové plochy je obvykle potřeba řešit (GW). Jejich obtížnou integraci lze nahradit derivací dle spektrálního parametru. Tuto tzv. Sym-Tafelovu proceduru si ukážeme opět na případu pseudosférických povrchů. Předpokládejme I, II v asymptotických souřadnicích (1.5) a AKNS reprezentaci tvaru

$$\Phi_x = G\widetilde{P}^1 G^{-1}\Phi = \begin{pmatrix} i/2 & -\omega_x/2 \\ \omega_x/2 & -i/2 \end{pmatrix} \Phi,$$

$$\Phi_t = G\widetilde{P}^2 G^{-1}\Phi = -\frac{i}{2} \begin{pmatrix} \cos\omega & \sin\omega \\ \sin\omega & -\cos\omega \end{pmatrix} \Phi,$$

kterou získáme kalibrační transformací pro $G = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ i & -i \end{pmatrix}$ z (2.18). Zároveň jsme přeznačili $q(x, t)$ na $\omega(x, t)$. Díky invarianci sG-rovnice vůči Lorentzově transformaci obsahuje AKNS reprezentace spektrální parametr λ :

$$\Phi_x = \frac{1}{2} \left[\begin{pmatrix} 0 & \omega_x \\ -\omega_x & 0 \end{pmatrix} + i\lambda \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} \right] \Phi,$$
$$\Phi_t = \frac{i}{2\lambda} \begin{pmatrix} -\cos\omega & \sin\omega \\ \sin\omega & \cos\omega \end{pmatrix} \Phi. \tag{4.30}$$

Přepíšeme-li soustavu (4.30) $\Phi_\mu = g_\mu \Phi, \ \mu = 1, 2$ pomocí Pauliho matic σ_i, jsou g_μ dány

$$\begin{aligned} g_1 &= \frac{i}{2}(\omega_{,1}\sigma_2 + \lambda\sigma_3), \\ g_2 &= \frac{i}{2\lambda}(\sin\omega\sigma_1 + \cos\omega\sigma_3). \end{aligned} \tag{4.31}$$

Podíváme-li se, jak vypadají derivace g_μ dle spektrálního parametru

$$g_{1,\lambda} = \frac{i}{2}\sigma_3, \ g_{2,\lambda} = \frac{i}{2\lambda^2}(\sin\omega\sigma_1 - \cos\omega\sigma_3),$$

zjistíme, že

$$-2\mathrm{Tr}(g_{\mu,\lambda} g_{\nu,\lambda}) dx^\mu dx^\nu|_{\lambda=1} = dx^2 + 2\cos\omega dx dt + dt^2. \tag{4.32}$$

Srovnáním (4.32) a (1.5) pak vidíme

$$I = -2\mathrm{Tr}(g_{\mu,\lambda} g_{\nu,\lambda}) dx^\mu dx^\nu|_{\lambda=1}. \tag{4.33}$$

Zároveň lze z polohového vektoru $\boldsymbol{r} = (X_1, X_2, X_3)$ vytvořit maticové $r = X_i e_i$, kde $e_i = \sigma_i/2i$. Pak I je dána

$$I = -2\mathrm{Tr}(r_{,\mu} r_{,\nu}) dx^\mu dx^\nu|_{\lambda=1}. \tag{4.34}$$

Stopa je invariant vůči podobným maticím, takže se nabízí položit ansatz

$$r_{,\mu} = G^{-1} g_{\mu,\lambda} G, \tag{4.35}$$

přičemž G je dosud neurčená kalibrační matice. Užití podmínek integrability pro AKNS systém $g_{1,2} - g_{2,1} + [g_1, g_2] = 0$ a rovnosti $r_{,12=}r_{,21}$ na (4.35) vede na komutační relaci

$$[G_{,1}G^{-1} - g_1 g_{2,\lambda}] = [G_{,2}G^{-1} - g_2 g_{1,\lambda}],$$

jež je splněna volbou $G = \Phi$. Zbývá tedy integrovat rovnice $r_{,\mu} = \Phi^{-1} g_{\mu,\lambda}\Phi, \ \mu = 1, 2$. Víme, že rovnice jsou kompatibilní a že zároveň $\Phi_{,\lambda\mu} = \Phi_{,\mu\lambda}$. Nahlédneme-li

$$(\Phi^{-1}\Phi_{,\lambda})_{,\mu} = -\Phi^{-1}\Phi_{,\mu}\Phi^{-1}\Phi_{,\lambda} + \Phi^{-1}\Phi_{,\lambda\mu} = -\Phi^{-1}g_\mu\Phi_{,\lambda} + \Phi^{-1}(g_{\mu,\lambda}\Phi + g_\mu\Phi_{,\lambda}) = \Phi^{-1}g_{\mu,\lambda}\Phi,$$

kde rovnost $(\Phi^{-1})_\mu = -\Phi^{-1}\Phi_{,\mu}\Phi^{-1}$ plyne z identity $\Phi^{-1} = \Phi^{-1}\Phi\Phi^{-1}$, odvodili jsme vztah

$$r = \Phi^{-1}\Phi_{,\lambda}, \tag{4.36}$$

jenž určuje $\boldsymbol{r}$ až na posun v prostoru

$$\boldsymbol{r} = i\mathrm{Tr}(\Phi^{-1}\Phi_{,\lambda}\sigma). \tag{4.37}$$

Jako σ jsme označili $(\sigma_1, \sigma_2, \sigma_3)^T$. V [5] je ukázáno, že II asociovaná s tímto $\boldsymbol{r}$ odpovídá (1.5). Obecně rovnosti (4.33), (4.37) platí pro libovolnou $g_\mu \in su(2)$, splňující podmínku kompatibility odpovídajícího lineárního systému.

5 Závěr

Jedním z účelů práce bylo odvodit analogy sine-Gordonových solitonových řešení v Liouvillově rovnici. To se mi bohužel nepodařilo, protože jsem nezískala explicitní tvar Bäcklundovy transformace mezi těmito rovnicemi.

6 Appendix

A Použité pojmy z diferenciální geometrie

Věta A.1 *Pro 2-dimenzionální povrch s indukovanou Riemannovou metrikou, který je vnořený do 3-dimenzionálního prostoru, je skalární křivost $R = 2K$. Gaussova křivost K je vnitřní vlastnost plochy.*

Definice A.2 *Povrch $f : U \to \mathbb{R}^3$ je parametrizován hlavními souřadnicemi, pokud pro normálový a tečné vektory platí $f_{x_1}.f_{x_2} = 0$, $f_{x_1,x_2}.n = 0$, tj. pokud f_{x_1}, f_{x_2} jsou ortogonální a jsou vlastní vektory Weingartenova zobrazení $-dn$. To nastává právě když I a II fundamentální forma má v těchto souřadnicích tvar*

$$I = g_{11}dx_1^2 + g_{22}dx_2^2,\ II = l_{11}dx_1^2 + l_{22}dx_2^2. \tag{A.1}$$

Věta A.3 *Nechť $f : U \to \mathbb{R}^3$ je parametrizace povrchu M a $p_0 \in M$ značí bod, v němž jsou vlastní čísla Weingartenova zobrazení různá $\lambda_1(p_0) \neq \lambda_2(p_0)$. Pak existují otevřené okolí $U_0 \subset U$, $p_0 \in U_0$, okolí $U_1 \subset \mathbb{R}^2$ a difeomorfismus $h : U_1 \to U_0$, takový že $F = f \circ h : U_1 \to \mathbb{R}^3$ je parametrizace hlavními souřadnicemi, tj. platí rovnice (A.1).*

Věta A.4 *Nechť $f(x_1, x_2)$ je lokální parametrizace hlavními souřadnicemi povrchu M v $\mathbb{R}^3$ s I a II danou (A.1) a označme $(A_1)^2 = g_{11}, (A_2)^2 = g_{22}$. Pak systém devíti Gauss-Codazziho rovnic se redukuje na*

$$\begin{aligned} \left(\frac{(A_1)_{x_2}}{A_2}\right)_{x_2} + \left(\frac{(A_2)_{x_1}}{A_1}\right)_{x_1} &= -\frac{l_{11}l_{22}}{A_1A_2}, \\ \left(\frac{l_{11}}{A_1}\right)_{x_2} &= \frac{l_{22}(A_1)_{x_2}}{(A_2)^2}, \\ \left(\frac{l_{22}}{A_2}\right)_{x_1} &= \frac{l_{11}(A_2)_{x_1}}{(A_1)^2}. \end{aligned} \tag{A.2}$$

Důkaz: Je-li povrch parametrizován hlavními souřadnicemi, tvoří

$$e_1 = \frac{f_{x_1}}{A_1},\ e_2 = \frac{f_{x_2}}{A_2},\ e_3 = n$$

ortonormální repér. Gauss-Codazziho rovnice

$$P^1_{x_2} - P^2_{x_1} = [P^1, P^2] \tag{A.3}$$

jsou podmínky kompatibility pro soustavu

$$(e_i)_{x_1} = \sum_j P^1_{ji}e_j, \quad (e_i)_{x_2} = \sum_j P^2_{ji}e_j,$$

maticově

$$\begin{aligned} (e_1, e_2, e_3)_{x_1} &= (e_1, e_2, e_3)P^1, \\ (e_1, e_2, e_3)_{x_2} &= (e_1, e_2, e_3)P^2. \end{aligned} \tag{A.4}$$

Platí $P^1_{ji} = (e_i)_{x_1} \cdot e_j$, $\quad P^2_{ji} = (e_i)_{x_2} \cdot e_j$.

Jelikož $e_i \cdot e_j = 0$, je $P^k_{ij} + P^k_{ji} = 0$, tj. P^k jsou antisymetrické matice.

$[P^1, P^2]$ je také antisymetrická:

$$[P^1, P^2]^T = (P^1P^2 - P^2P^1)^T = (-P^2)(-P^1) - (-P^1)(-P^2) = -[P^1, P^2].$$

Proto stačí spočítat členy $12, 13, 23$ matic $P^1, P^2,\ [P^1, P^2]$.

$$P^1_{21} = (e_1)_{x_1} \cdot e_2 = \left(\frac{f_{x_1}}{A_1}\right)_{x_1} \cdot \frac{f_{x_2}}{A_2} = \left(\frac{f_{x_1x_1}}{A_1} - \frac{f_{x_1}(A_1)_{x_1}}{(A_1)^2}\right) \cdot \frac{f_{x_2}}{A_2}.$$

Ale $f_{x_1} \cdot f_{x_2} = 0$ a

$$\begin{aligned} f_{x_1 x_1} \cdot f_{x_2} &= (f_{x_1} \cdot f_{x_2})_{x_1} - f_{x_1} \cdot f_{x_1 x_2} = \\ &= 0 - \frac{1}{2}(f_{x_1} \cdot f_{x_1})_{x_2} = -\frac{1}{2}((A_1)^2)_{x_2} = -A_1 (A_1)_{x_2}. \end{aligned}$$

Dosazením do rovnice pro P^1_{21} získáme

$$P^1_{21} = -\frac{(A_1)_{x_2}}{A_2}.$$

Dále určíme

$$P^1_{31} = (e_1)_{x_1} \cdot e_3 = -e_1 \cdot (e_3)_{x_1} = -\frac{f_{x_1}}{A_1} \cdot n_{x_1} = -\frac{l_{11}}{A_2}.$$

Analogicky zjistíme P^1_{23}, P^2_{ij}, takže

$$P^1 = \begin{pmatrix} 0 & \frac{(A_1)_{x_2}}{A_2} & -\frac{l_{11}}{A_1} \\ -\frac{(A_1)_{x_2}}{A_2} & 0 & 0 \\ \frac{l_{11}}{A_1} & 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad P^2 = \begin{pmatrix} 0 & -\frac{(A_2)_{x_1}}{A_1} & 0 \\ \frac{(A_2)_{x_1}}{A_1} & 0 & -\frac{l_{22}}{A_2} \\ 0 & \frac{l_{22}}{A_2} & 0 \end{pmatrix}. \tag{A.5}$$

Dosazením (A.5) do (A.3) a výpočtem členů 12, 13, 23 matice $[P^1, P^2]$ přijdeme k hledaným třem Gauss-Codazziho rovnicím. □

Pozn. A.5 *Pokud pro směr generovaný vektorem $x \in T_pM$ platí $II(x,x) = 0$, zveme jej asymptotický. Je-li na otevřené podmnožině U povrchu M, $K < 0$, existují v každém bodě z U právě dva asymptotické směry. Souřadnice na M jsou asymptotické, pokud jejich parametrické křivky jsou integrální křivky k asymptotickým směrům. Souřadnice x_1, x_2 jsou asymptotické právě když $dl^2 = 2l_{12}(x_1, x_2)dx_1 dx_2$.*

B Lobačevského rovina

Nejprve připomenutí indukované metriky na sféře: Přejdeme ke sférickým souřadnicím

$$dl^2 = dx^2 + dy^2 + dt^2 = dr^2 + r^2(d\theta^2 + \sin^2\theta\, d\varphi^2).$$

Protože $r = R$ je konstantní, máme

$$dl^2 = R^2(d\theta^2 + \sin^2\theta\, d\varphi^2).$$

Užitím stereografické projekce πna rovinu získáme

$$dl^2 = \frac{4R^4}{(R^2 + u^2 + v^2)^2}(du^2 + dv^2) = \frac{4R^4}{(R^2 + |z|^2)^2} dz\, d\bar{z}, \tag{B.1}$$

což je metrika roviny přenásobená faktorem $h(u,v) = h(z, \bar{z}),\ z = u + iv$. Obraz $(u,v) = \pi(x,y,t)$.

Pro pseudosféru $t^2 - x^2 - y^2 = R^2$ budeme postupovat analogicky. Zavedeme pseudosférické souřadnice

$$\begin{aligned} t &= \rho\cosh\chi & -\infty < \rho < \infty, \\ x &= \rho\sinh\chi\cos\varphi & 0 \le \chi < \infty, \\ y &= \rho\sinh\chi\sin\varphi & 0 \le \varphi < 2\pi. \end{aligned}$$

Tedy $t^2 - x^2 - y^2 = \rho^2 \ge 0$, takže pseudosférické souřadnice lze přiřadit bodům uvnitř kužele $t^2 = x^2 + y^2$. Vyjma osy t vychází

$$dl^2 = dt^2 - dx^2 - dy^2 = d\rho^2 - \rho^2[(d\chi)^2 + \sinh^2\chi(d\varphi)^2].$$

Omezíme-li se na horní hyperboloid $\rho = R$ konstantní, indukovaná metrika je dána

$$-dl^2 = R^2(d\chi^2 + \sinh^2\chi d\varphi^2). \tag{B.2}$$

Opět zavedeme stereografickou projekci π, nyní na otevřený disk $u^2 + v^2 < R^2$. Póly tvoří body o souřadnicích $(\pm R, 0, 0)$. Leží-li vzor $P = (x, y, t)$ na horní pseudosféře, tj. $t > 0$, a označíme-li jeho vzor $\pi(P) = (u, v)$, platí

$$\frac{x}{u} = \frac{t+R}{R}, \quad \frac{y}{v} = \frac{t+R}{R}.$$

Úpravou

$$x = u(1 + \frac{t}{R}), \quad y = v(1 + \frac{t}{R}).$$

Dosadíme-li za x, y do rovnice pseudosféry a vyřešíme-li kvadratickou rovnici pro $t > 0$, získáme

$$t = -R\left(1 + \frac{2R^2}{u^2 + v^2 - R^2}\right), \quad x = \frac{2R^2 u}{R^2 - u^2 - v^2}, \quad y = \frac{2R^2 v}{R^2 - u^2 - v^2}.$$

Vyjádření indukované metriky v proměnných u, v vypadá takto

$$-dl^2 = \frac{4R^4}{(R^2 - u^2 - v^2)^2}(du^2 + dv^2) = \frac{4R^4}{(R^2 - |z|^2)^2} dz\, d\bar{z}. \tag{B.3}$$

Vypustíme-li záporné znaménko, je (B.2) Lobačevského metrika na horním dílu hyperboloidu a disk $u^2 + v^2 < R^2$ vybavený metrikou (B.3) zveme Poincarého model Lobačevského geometrie.

Lineární lomená transformace $z = R\frac{R+iw}{R-iw}$ převádí horní komplexní polorovinu $\mathbb{H}$ na disk $\mathbb{D} = \{z \in \mathbb{C} : |z| \le R\}$. Je-li $z = u + iv$, $w = x + iy$, pullback metriky (B.3) má tvar

$$dl^2 = R^2 \frac{dx^2 + dy^2}{y^2} = -\frac{4R^2}{(w - \overline{w})^2} dw\, d\overline{w}, \quad \operatorname{Im} w = y > 0. \tag{B.4}$$

$\mathbb{H}$ se říká Kleinův model Lobačevského geometrie. Jeho skalární křivost se rovná $R = -2$. Geodetiky na $\mathbb{H}$ tvoří polokružnice se středem na $y = 0$ a přímky kolmé k $y = 0$. Grupa izometrií Lobačevského roviny je izomorfní

i) $SU(1, 1)$ pro Poincarého model,

ii) $SL(2, \mathbb{R})$ pro Kleinův model.

$SL(2, \mathbb{R})$ působí na $\mathbb{H}$ Möbiovou transformací

$$w \to \frac{\alpha w + \beta}{\gamma w + \delta}, \quad \alpha, \beta, \gamma, \delta \in \mathbb{R}, \quad \alpha\delta - \beta\gamma = 1.$$

C AKNS systémy

Ukážeme, že všechny AKNS systémy reprezentují povrchy s konstantní negativní skalární křivostí. Rozptylové a časové rovnice AKNS systému mají tvar

$$\begin{aligned} \widehat{L}v &= \zeta v, & \widehat{L} &= \begin{bmatrix} i\partial/\partial x & -iq \\ ir & -\partial/\partial x \end{bmatrix}, \\ \widehat{A}v &= v_t, & \widehat{A} &= \begin{bmatrix} A & B \\ C & -A \end{bmatrix}, \end{aligned} \tag{C.1}$$

přičemž A, B, C, q, r volíme tak, že $\zeta_t = 0$, $\widehat{L}_t = [\widehat{A}, \widehat{L}]$ představuje požadovaný pár evolučních rovnic $q_t = K_1[q, r]$, $r_t = K_2[q, r]$ ($K_i[q, r]$ značí funkcionály potenciálů q, r). Rovnice (C.1) jsou ekvivalentní integrabilní soustavě Pfaffových forem

$$dv - \Omega v = 0, \quad \operatorname{Tr}\Omega = 0, \tag{C.2}$$

kde $\mathrm{d}v = \partial_x v\,\mathrm{d}x + \partial_t v\,\mathrm{d}t$ a Ω tvoří matici 1-forem

$$\begin{pmatrix} -i\zeta\,\mathrm{d}x - A\,\mathrm{d}t & q\,\mathrm{d}x - B\,\mathrm{d}t \\ r\,\mathrm{d}x - C\,\mathrm{d}t & i\zeta\,\mathrm{d}x + A\,\mathrm{d}t \end{pmatrix}.$$

Podmínka integrability dává $0 = \mathrm{d}^2 v = \mathrm{d}\Omega\, v - \Omega \wedge \mathrm{d}v = (\mathrm{d}\Omega - \Omega \wedge \Omega)\, v$, tzn. že Laxova rovnost $\widehat{L}_t = [\widehat{A}, \widehat{L}]$ může být splněna, právě když vymizí matice 2-forem

$$\theta = \mathrm{d}\Omega - \Omega \wedge \Omega. \tag{C.3}$$

Protože (C.2) se zachovává při kalibrační transformaci

$$v \to v^{'} = Bv \qquad \Omega \to \Omega^{'} = \mathrm{d}BB^{-1} + B\Omega B^{-1} \qquad \theta \to \theta^{'} = B\theta B^{-1}, \qquad \mathrm{det}B = 1,$$

není Ω určena jednoznačně.

Na pseudosférickém povrchu v $\mathbb{R}^3$ lze v každém bodě P zvolit ortonormální bázi tečné roviny $\{e_i \cdot e_j = \delta_{ij},\ e_1, e_2 \in T_P\}$. Pak platí

$$\mathrm{d}P = \sigma^1 e_1 + \sigma^2 e_2$$

a díky ortonormalitě

$$\begin{aligned} \mathrm{d}e_1 &= \omega e_2, \\ \mathrm{d}e_2 &= -\omega e_1, \end{aligned}$$

přičemž σ^i jsou 1-formy a ω je 1-forma konexe. Z podmínky integrability $\mathrm{d}P^2 = 0$ nyní plyne

$$\begin{aligned} \mathrm{d}\sigma^1 &= \omega \wedge \sigma^2, \\ \mathrm{d}\sigma^2 &= -\omega \wedge \sigma^1. \end{aligned}$$

Gaussova křivost K je dána $\mathrm{d}\omega = -K\sigma^1 \wedge \sigma^2$. Pro $K \equiv -1$ např. volba Ω

$$\Omega = \begin{pmatrix} -\frac{1}{2}\sigma^2 & \frac{1}{2}(\omega + \sigma^1) \\ \frac{1}{2}(-\omega + \sigma^1) & \frac{1}{2}\sigma^2 \end{pmatrix}$$

vyhovuje rovnici (C.3). Odtud každý AKNS systém může být reprezentován pseudosférickým povrchem vzhledem k metrice $\mathrm{d}s^2 = (\sigma^1)^2 + (\sigma^2)^2$.

Poznámka k použité literatuře

V části (1.1) jsem vyšla z knih [1]. Kapitola (1.2), důkaz věty (1.12) a appendix (B) jsou napsány podle [2]. Článek [3] dal vzniknout částem (1.3), (3), (4.2). Laxovy konexe v části (2) jsem spočítala díky článku [4] a také díky [5], kterou využívám rovněž v kapitolách (4.1),(4.3). V kapitole (4) dále čerpám z [6] a [7]. Další informace o solitonech se lze dozvědět v [8], na niž jsem se obracela při psaní appendixu (C).

Reference

[1] L. Bianchi: *Lezioni di Geometria Diferenziale*, vol. 1-3, Pisa, 1922;

[2] B. A. Dubrovin, A. T. Fomenko, S. P. Novikov: *Modern Geometry – Methods and Applications*, Part I., Springer-Verlag New York, 1992;

[3] H. Belich, G. Cuba and R. Paunov: *Surfaces of Constant negative Scalar Curvature and the Correspondence between the Liouville and the sine-Gordon Equations*, solv-int 9909018;

[4] A. I. Bobenko: *Surfaces in terms of 2 by 2 matrices. Old and new integrable cases*, J. Harmonic Maps and Integrable Systems, Vieweg, 1994, 83-127;

[5] C. Rogers, W. K. Schief: *Bäcklund and Darboux Transformations*, Cambridge University Press, 2002;

[6] A. Sym: *Soliton Surfaces and Their Applications*, v R. Martini: Geometric Aspects of the Einstein Equations and Integrable Systems, Springer-Verlag, 1985;

[7] *Proceedings of First Non-Orthodox School on Nonlinearity and Geometry*, Editor: D. Wójcik, J. Cieśliński, Polish Scientific Publishers PWN, Warszawa, 1998;

[8] R. K. Bullough, P. J. Caudrey: *Solitons*, Topics in Current Physics, Springer Verlag, 1980.