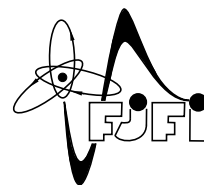


České vysoké učení technické v Praze
Fakulta jaderná a fyzikálně inženýrská



Rešeršní práce



Tomáš Kalvoda

České vysoké učení technické v Praze
Fakulta jaderná a fyzikálně inženýrská

Produkce intermediálních bosonů W/Z v hadronových interakcích

Tomáš Kalvoda

Katedra fyziky

Akademický rok: 2003/2004

Školitel: Doc. RNDr. Vladislav Šimák, DrSc.

Obsah

1 Úvod	1
1.1 Konvence	1
1.2 Standardní model	1
2 Základní vztahy	2
2.1 Klein-Gordonova rovnice	3
2.2 Diracova rovnice	3
2.3 Fockův prostor	7
2.4 Interakční Hamiltonián	8
2.5 S -matice	9
2.6 Účinné průřezy	10
2.7 Kalibrační invariance	10
2.8 Mandelstamovy proměnné	14
3 Kvantová elektrodynamika (QED)	14
3.1 $e^+e^- \rightarrow \mu^+\mu^-$ v QED	16
4 Kvantová chromodynamika (QCD)	18
4.1 Lieova grupa $SU(3)$	18
4.2 Feynmanova pravidla v QCD	19
4.3 Invariantní amplituda procesu $qq' \rightarrow qq'$	20
5 Elektroslabé sjednocení	21
5.1 Standardní model	21
5.2 Procova rovnice	24
6 Hadronové interakce	25
6.1 Partonový model, Hluboce nepružný rozptyl	25
6.2 Drell-Yanův proces	27
6.3 Produkce Jetů	28
6.4 Dalitzův graf	30
6.5 Monte Carlo simulace (PYTHIA)	31
7 Závěr	35
Seznam obrázků	36
Seznam tabulek	36
Literatura	37

1 Úvod

V této rešeršní práci se nejprve seznámím se základy kvantové teorie pole a způsoby výpočtů maticových elementů různých procesů pomocí Feynmanových pravidel. Uvedu Feynmanova pravidla pro případ Kvantové elektrodynamiky a Kvantové chromodynamiky, tedy abelovské a neabelovské kalibrační teorie. V další kapitole načrtnu Standardní model elektroslabých interakcí. V části věnované hadronovým interakcím uvedu metody popisu těchto procesů pomocí strukturních funkcí a zmíním Monte Carlo simulace. Zde také demonstřuji na reálných experimentálních datech dynamiku těchto procesů. Uvedu Drell-Yanův proces v němž při vysokých energiích dochází k produkci intermediálních bosonů.

1.1 Konvence

V částicové fyzice se často používá soustava jednotek, v které $\hbar = c = 1$.

$$1 \text{ GeV} = 1.6 \cdot 10^{-10} \text{ kg m}^2\text{s}^{-2}$$

Některé převody jsou následující

$$\begin{aligned} 1 \text{ fermi} &= 5.07 \text{ GeV}^{-1}, \\ 1 \text{ GeV}^{-2} &= 0.389 \text{ mb}, \\ 1 \text{ GeV}^{-1} &= 6.582 \cdot 10^{-25} \text{ s}, \\ 1 \text{ kg} &= 5.61 \cdot 10^{26} \text{ GeV}, \\ 1 \text{ m} &= 5.07 \cdot 10^{15} \text{ GeV}^{-1}, \\ 1 \text{ s} &= 1.52 \cdot 10^{24} \text{ GeV}^{-1}. \end{aligned}$$

Další není těžké odvodit.

Používám metrický tenzor

$$g_{\mu\nu} = g^{\mu\nu} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}.$$

Symbol \hat{n} , kde $n \in N$ označuje množinu

$$\hat{n} := \{1, 2, \dots, n\}.$$

1.2 Standardní model

Základem Standardního modelu jsou kvarky a leptony, tj. fermiony se spinem 1/2. Tyto částice považujeme za elementární a je možno je rozřítit do tří rodin (viz Tabulka 1.1). Dnes

známe 6 kvarků, respektive 6 vůní (*flavor*) kvarků. Každý kvark navíc nese další kvantové číslo nazývané barva (*color*). Barvy mohou být tři - červená, zelená a modrá. Neboť v každém baryonu, což je vázaný stav tří kvarků, má každý kvark jinou barvu (aby nedošlo k rozporu s Pauliho vylučovacím principem) protože navenek žádnou barvu nepozorujeme (složením těchto tří totiž dostaneme bílou). Jak již bylo řečeno kvarky jsou vázány v baryonech (stavy qqq) a v mezonech jako $q\bar{q}$. Další exotické stavy zatím nebyly pozorovány.

	1. generace	2. generace	3. generace
Kvarky	u (up) d (down)	c (charm) s (strange)	t (top) b (bottom)
Leptony	e ν_e	μ ν_μ	τ ν_τ

Tabulka 1.1: Tři rodiny hmoty

Mezi těmito částicemi hmoty působí interakce gravitační, slabá, silná a elektromagnetická. První z nich se ve světě mikrosvěta projevuje jen velmi málo a proto se zanedbává. Ve standardním modelu se interakce popisuje jako výměna jistých částic mezi interagujícími částicemi. Slabá a elektromagnetická interakce byla úspěšně sjednocena na elektroslabou interakci kterou zprostředkovávají intermediální bosony W^\pm , Z a γ . Silná interakce, jež působí mezi kvarky, je zprostředkována gluony. Do standardního modelu chybí už poslední částice, zatím nepozorována, kterou je Higgsův boson.

Silnou interakci kvarků popisuje Kvantová chromodynamika (*Quantum chromodynamics*, QCD). Jejím specifíkem je například to, že i částice zprostředkovávající tuto interakci (tj. gluony) mají barvu a mohou interagovat sami se sebou. Narozdíl od elektromagnetické interakce, kde fotony nenesou žádný elektrický náboj. Další pozoruhodností je, že kvarky ani gluony nebyly doposud pozorovány jako volné částice. Tento fakt se označuje jako kvarkové uvěznění (*quark and gluon confinement*) a souvisí s hadronizací (viz dále). Ukazuje se, že síla interakce kvarků a gluonů klesá se zmenšující se vzdáleností až nakonec vymyší při nulové vzdálenosti. Tento fenomén se nazývá asymptotická volnost.

2 Základní vztahy

V relativistické kvantové mechanice se odvodí diferenciální rovnice, jejichž řešení popisují různé druhy částic. Fermiony se spinem 1/2 jsou popsány Diracovou, bosony se spinem 1 Procovou či Maxwellovou a skalární částice se spinem 0 Klein-Gordonovou rovnicí. Tato řešení však narážejí na problémy s jejich interpretací, neboť jak uvidíme dále, vycházejí řešení se zápornou energií, nebo zápornou hustotou pravděpodobnosti jejich výskytu. Tyto problémy odstraní kvantová teorie pole, která tato řešení interpretuje jako kvantová pole, vytvářející, resp. ničící příslušné částice. V následujících odstavcích předvedu tyto rovnice a shrnu některé vlastnosti jejich řešení.

2.1 Klein-Gordonova rovnice

Klein-Gordonova rovnice popisuje částici se spinem 0, tato je popsána jednokomponentovou funkcí ϕ . V soustavě $\hbar = c = 1$ platí relativistický vztah mezi hybností \vec{p} , energií E a klidovou hmotou m částice ve tvaru

$$E^2 = \vec{p}^2 + m^2. \quad (2.1)$$

V kvantové mechanice je energie E spojena s Hamiltoniánem H a časový vývoj stavu je dán Schrödingerovou rovnicí

$$i\partial_t\phi = H\phi. \quad (2.2)$$

Přejdeme-li od (2.1) k Hamiltoniánu pomocí principu korespondence $\vec{P} = -i\nabla$ dostáváme

$$H^2 = -\Delta + m^2.$$

Dosazením do (2.2) obdržíme

$$-\partial_t^2\phi = (-\Delta + m^2)\phi,$$

což přepíšeme na

$$(\square + m^2)\phi = 0, \quad (2.3)$$

kde $\square = \partial_t^2 - \Delta$ je d'Alembertův operátor. Tato rovnice se nazývá **Klein-Gordonova**. Hustota pravděpodobnosti ρ je v tomto případě dána

$$\rho = \frac{i}{2m} (\phi^* \partial_t \phi - \phi \partial_t \phi^*),$$

a čtyřproud j^μ

$$j^\mu = (\rho, \vec{j}) = \frac{i}{2m} (\phi^* \partial^\mu \phi - \phi \partial^\mu \phi^*). \quad (2.4)$$

Díky tomu, že ϕ splňuje Klein-Gordonovu rovnici (2.3), platí rovnice kontinuity

$$\partial_\mu j^\mu = 0. \quad (2.5)$$

Zde vyvstává problém, neboť ze vztahu (2.4) je patrné, že hustota pravděpodobnosti ρ může nabývat i záporných hodnot.

2.2 Diracova rovnice

Částice se spinem 1/2 a hmotností m jsou popsány vlnovou funkcí $\psi \in L^2(\mathbb{R}^3, d^3x) \otimes \mathbb{C}^4$, tedy čtyřkomponentovými funkcemi, nazývanými též spinory. Tato funkce splňuje Diracovu rovnici, která v kovariantním tvaru zní ¹

$$(i\gamma^\mu \partial_\mu - m)\psi = 0, \quad (2.6)$$

kde $\gamma^\mu \in \text{GL}(4, \mathbb{R})$ jsou Diracovy matice, splňující antikomutační relace

$$\{\gamma^\mu, \gamma^\nu\} = 2g^{\mu\nu}. \quad (2.7)$$

¹Není-li uvedeno jinak, používám důsledně Einsteinovy sumační konvence. Přes řecké indexy se sčítá od 0 do 3 a přes latinské od 1 do 3. Není-li opět uvedeno jinak.

Diracova rovnice je na rozdíl od Klein-Gordonovy prvního řádu a lze ji odvodit pomocí transformačních vlastností Lorentzovy grupy.

Pro naši volbu metrického tenzoru $g = \text{diag}(1, -1, -1, -1)$ platí

$$\gamma_0^\dagger = \gamma_0, \quad \gamma_j^\dagger = -\gamma_j.$$

Matic 4×4 , splňujících podmínky (2.7), je nekonečně mnoho, ale ukazuje se, že všechny realizace jsou si podobné. Tj. jsou-li γ^μ a γ'^μ matice splňující (2.7), potom existuje unitární matice U taková, že $\gamma'^\mu = U\gamma^\mu U^{-1}$. V praxi se používá nejvíce Diracova reprezentace

$$\gamma^0 = \begin{pmatrix} \mathbf{1} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & -\mathbf{1} \end{pmatrix}, \quad \gamma^j = \begin{pmatrix} \mathbf{0} & \sigma_j \\ -\sigma_j & \mathbf{0} \end{pmatrix},$$

kde σ_j , $j = 1, 2, 3$ jsou Pauliho matice. Dalšími reprezentacemi jsou například Majoranova, či Weylova (chirální).

Ke zkrácení zápisu se někdy zavádí tzv. „škrtačí“ symbol² \not{a} , který se definuje pro daný čtyřvektor $a = (a^\mu)$ následovně

$$\not{a} := \gamma^\mu a_\mu = \gamma_\mu a^\mu.$$

K danému spinoru ψ se definuje Diracovsky sdužený spinor $\bar{\psi}$ vztahem

$$\bar{\psi} = \psi^\dagger \gamma_0,$$

kde \dagger označuje konvenční hermitovské sdružení.

Dále se zavádí pro výpočty užitečná pátá matice γ_5 pomocí

$$\gamma_5 := i\gamma^0\gamma^1\gamma^2\gamma^3, \tag{2.8}$$

potom

$$\gamma_5^\dagger = \gamma_5, \quad (\gamma_5)^2 = 1.$$

V další části textu shrnu některé vlastnosti γ -matic vyplývající z (2.7), které jsou nezbytné při výpočtech. V podkapitole 5.2 zmíním ještě Procovu rovnici popisující hmotné intermediální bosony.

Vlastnosti Diracových γ -matic

Znovu zopakujeme, že z definice γ -matic (2.7) a (2.8) ihned plynou vztahy

$$\begin{aligned} \{\gamma^5, \gamma^\mu\} &= 0, \\ (\gamma^5)^2 &= 1. \end{aligned}$$

Odtud odvodíme následující formulky.

- (i) Stopa součinu lichého počtu γ -matic je rovna nule, neboť pro $n \in \mathbb{N}$ s využitím vlastností matice γ^5 , (2.9), máme

$$\text{Tr}(\gamma^{\mu_1}\gamma^{\mu_2}\dots\gamma^{\mu_{2n+1}}) = \text{Tr}(\gamma^{\mu_1}\gamma^{\mu_2}\dots\gamma^{\mu_{2n+1}}\gamma^5\gamma^5) = \tag{2.9}$$

$$= -\text{Tr}(\gamma^5\gamma^{\mu_1}\gamma^{\mu_2}\dots\gamma^{\mu_{2n+1}}\gamma^5). \tag{2.10}$$

² slash notation

Využijeme-li identity

$$\begin{aligned}\mathrm{Tr}(A_1 \cdots A_n) &= (A_1)_{\alpha_1 \alpha_2} (A_2)_{\alpha_2 \alpha_3} \cdots (A_{n-1})_{\alpha_{n-1} \alpha_n} (A_n)_{\alpha_n \alpha_1} = \\ &= (A_2)_{\alpha_2 \alpha_3} \cdots (A_{n-1})_{\alpha_{n-1} \alpha_n} (A_n)_{\alpha_n \alpha_1} (A_1)_{\alpha_1 \alpha_2} = \mathrm{Tr}(A_2 \cdots A_n A_1),\end{aligned}$$

kde $A_i \in \mathrm{Mat}(n, \mathbb{C})$, $n \in \mathbb{N}$, pak (2.10) přejde na

$$\mathrm{Tr}(\gamma^{\mu_1} \gamma^{\mu_2} \cdots \gamma^{\mu_{2n+1}}) = -\mathrm{Tr}(\gamma^{\mu_1} \gamma^{\mu_2} \cdots \gamma^{\mu_{2n+1}} \gamma^5 \gamma^5).$$

Takže

$$\mathrm{Tr}(\gamma^{\mu_1} \gamma^{\mu_2} \cdots \gamma^{\mu_{2n+1}}) = 0. \quad (2.11)$$

(ii) Pro součin dvou γ -matic platí

$$\mathrm{Tr}(\gamma^\mu \gamma^\nu) = \mathrm{Tr}(2g^{\mu\nu} - \gamma^\nu \gamma^\mu) = 2 \cdot 4g^{\mu\nu} - \mathrm{Tr}(\gamma^\nu \gamma^\mu) = 8g^{\mu\nu} - \mathrm{Tr}(\gamma^\mu \gamma^\nu).$$

Tedy

$$\mathrm{Tr}(\gamma^\mu \gamma^\nu) = 4g^{\mu\nu}. \quad (2.12)$$

(iii) Stopa součinu čtyř γ -matic je rovna (použijeme-li jejich komutačních relací)

$$\begin{aligned}\mathrm{Tr}(\gamma^\mu \gamma^\nu \gamma^\rho \gamma^\sigma) &= \mathrm{Tr}(\gamma^\mu \gamma^\nu (2g^{\rho\sigma} - \gamma^\sigma \gamma^\rho)) = 2\mathrm{Tr}(\gamma^\mu \gamma^\nu g^{\rho\sigma}) - \mathrm{Tr}(\gamma^\mu \gamma^\nu \gamma^\rho \gamma^\sigma) = \cdots = \\ &= 8g^{\mu\nu} g^{\rho\sigma} - 8g^{\nu\sigma} g^{\mu\rho} + 8g^{\mu\sigma} g^{\nu\rho} - \mathrm{Tr}(\gamma^\sigma \gamma^\mu \gamma^\nu \gamma^\rho),\end{aligned}$$

Takže

$$\mathrm{Tr}(\gamma^\mu \gamma^\nu \gamma^\rho \gamma^\sigma) = 4g^{\mu\nu} g^{\rho\sigma} - 4g^{\nu\sigma} g^{\mu\rho} + 4g^{\mu\sigma} g^{\nu\rho}. \quad (2.13)$$

(iv) Pro matici γ^5 platí

$$\mathrm{Tr}\gamma^5 = \mathrm{Tr}(\gamma^0 \gamma^0 \gamma^5) = -\mathrm{Tr}(\gamma^0 \gamma^5 \gamma^0) = -\mathrm{Tr}\gamma^5, \quad (2.14)$$

$$\mathrm{Tr}\gamma^5 = 0. \quad (2.15)$$

(v) $\mathrm{Tr}(\gamma^5 \gamma^\mu \gamma^\nu) = 0$.

(vi) $\mathrm{Tr}(\gamma^5 \gamma^\mu \gamma^\nu \gamma^\rho \gamma^\sigma) = -4i\epsilon^{\mu\nu\rho\sigma}$.

Dále platí tzv. kontrakční vztahy

$$(i) \quad \gamma^\mu \gamma_\mu = g_{\mu\nu} \gamma^\mu \gamma^\nu = \frac{1}{2} g_{\mu\nu} \underbrace{(\gamma^\mu \gamma^\nu + \gamma^\nu \gamma^\mu)}_{2g^{\mu\nu}} = g_{\mu\nu} g^{\mu\nu} = 4.$$

$$(ii) \quad \underbrace{\gamma^\mu \gamma^\alpha \gamma_\mu}_{-\gamma_\mu \gamma^\alpha + 2g_\mu^\alpha} = -4\gamma^\alpha + 2\gamma^\alpha = -2\gamma^\alpha.$$

$$(iii) \quad \gamma^\mu \gamma^\alpha \gamma^\beta \gamma^\delta \gamma_\mu = -2\gamma^\delta \gamma^\beta \gamma^\alpha$$

Pro konkrétní výpočty je vhodné odvodit si vztahy pro součiny γ -matic a čtyřvektorů. Buďte proto $a = (a^\mu)$, $b = (b^\mu)$ čtyřvektory, pak zvláště užitečné jsou následující vztahy

1.

$$\text{Tr}(\not{a}\not{b}) = \text{Tr}(\gamma^\mu a_\mu \gamma^\nu b_\nu) = a_\mu b_\nu \text{Tr}(\gamma^\mu \gamma^\nu) \stackrel{(2.12)}{=} 4a_\mu b_\nu g^{\mu\nu} = 4ab. \quad (2.16)$$

Součinem ab máme na mysli součin čtyřvektorů v Minkowského prostoročase daný metrickým tenzorem g .

2.

$$\text{Tr}(\not{a}\gamma^\mu \not{b}\gamma^\nu) = a_\rho b_\sigma \text{Tr}(\gamma^\rho \gamma^\mu \gamma^\sigma \gamma^\nu) \stackrel{(2.13)}{=} 4(a^\mu b^\nu - abg^{\mu\nu} + a^\nu b^\mu). \quad (2.17)$$

Dále je z antikomutační relace (2.7) patrné, že

$$(\gamma^0)^2 = \mathbf{1}, \quad (2.18)$$

$$\gamma_\mu^\dagger = \gamma_0 \gamma_\mu \gamma^0, \quad (2.19)$$

$$\gamma_0^\dagger = \gamma_0. \quad (2.20)$$

Řešení Diracovy rovnice

Shrňme nyní základní vlastnosti řešení Diracovy rovnice (2.6) pro volnou částici se spinem $1/2$ a hmotností m . Uvažujme dvě rovinné vlny

$$\psi_+(x) = u(p)e^{-ipx}, \quad (2.21)$$

$$\psi_-(x) = v(p)e^{ipx}, \quad (2.22)$$

kde p a x jsou čtyřvektory a $px = p_0x_0 - \vec{p} \cdot \vec{x}$ je jejich skalární součin v Minkowského prostoročase. Nechtě $p_0 > 0$. Dosazením (2.22) do (2.6) obdržíme

$$(i\gamma^\mu \partial_\mu - m)\psi_+(x) = (\gamma^\mu p_\mu - m)u(p) = 0, \quad (2.23)$$

podobně pro ψ_-

$$(\gamma^\mu p_\mu + m)v(p) = 0. \quad (2.24)$$

Odtud vyplývá, že $p^2 = m^2$. ψ_+ odpovídá řešení s pozitivní energií $E \equiv p_0 = \sqrt{\vec{p}^2 + m^2}$, kdežto ψ_- záporné energii $-\sqrt{\vec{p}^2 + m^2}$. Často používaná $u(p)$, $v(p)$ odpovídající standardní volbě Diracových matic můžeme zapsat

$$u^{(r)}(p) = \sqrt{E + m} \begin{pmatrix} \chi^{(r)} \\ \frac{\vec{\sigma} \cdot \vec{p}}{E + m} \chi^{(r)} \end{pmatrix}, \quad (2.25)$$

$$v^{(r)}(p) = \pm \sqrt{E + m} \begin{pmatrix} \frac{\vec{\sigma} \cdot \vec{p}}{E + m} \chi^{(r)} \\ \chi^{(r)} \end{pmatrix}, \quad (2.26)$$

kde $E = \sqrt{\vec{p}^2 + m^2}$ a

$$\chi^{(1)} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad \chi^{(2)} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

Znaménko $+$ resp. $-$ v (2.26) přísluší $r = 1$ resp. $r = 2$. Řešení (2.25) a (2.26) jsou normalizována tak, že

$$\begin{aligned} \bar{u}(p)u(p) &= 2m, \\ \bar{v}(p)v(p) &= -2m. \end{aligned}$$

Indexy $r = 1, 2$ v (2.25) a (2.26) označují spinové stupně volnosti. Řešení $u^{(r)}(p)$ odpovídá kladné energii se spinem nahoru ($r = 1$) nebo dolů ($r = 2$) podél třetí souřadné osy. Spinové stavy Diracovské částice se dají popsat způsobem, který probereme v dalším odstavci a jehož důsledkem bude důležitý vztah používaný při výpočtu invariantních amplitud.

Pro danou čtyřhybnost p definujeme spinový čtyřvektor $s^\mu = s^\mu(p)$, $\mu \in \hat{4}$ tak, že

$$\begin{aligned} s^\mu p_\mu &= 0, \\ s^2 &= -1. \end{aligned}$$

Čtyřvektor s se často též nazývá vektorem polarizace. Pro danou čtyřhybnost p existují dva nezávislé spinové stavy odpovídající spinovým čtyřvektorům s a $-s$. Nyní, máje tedy p a příslušné s , můžeme uvažovat řešení $u(p, s)$ a $v(p, s)$ rovnic (2.23) a (2.24) splňující navíc

$$\begin{aligned} \gamma_5 \not{s} u(p, s) &= u(p, s), \\ \gamma_5 \not{s} v(p, s) &= v(p, s). \end{aligned}$$

Jinými slovy řešení $u(p, s)$ a $v(p, s)$ získáme z řešení (2.23), (2.24) působením projektoru

$$P_+(s) = \frac{1}{2}(1 + \gamma_5 \not{s}). \quad (2.27)$$

Platí tedy $P_+ = P_+^2 = P_+^\dagger$. Podobně působením projektoru

$$P_-(s) = \frac{1}{2}(1 - \gamma_5 \not{s})$$

získáme zbývající spinové stavy odpovídající $-s$. Lze ukázat, že spinory $u(p, \pm s)$ a $v(p, \pm s)$ tvoří fundamentální systém řešení Diracovy rovnice pro volnou částici. Pro výpočty nepotřebujeme znát konkrétní tvar těchto spinorů. Stačí znát pouze jednotlivé součiny

$$u(p, s) \bar{u}(p, s) = (\not{p} + m) \frac{1 + \gamma_5 \not{s}}{2}, \quad (2.28)$$

$$v(p, s) \bar{v}(p, s) = (\not{p} - m) \frac{1 + \gamma_5 \not{s}}{2}. \quad (2.29)$$

Součiny spinorů $u(p, -s) \bar{u}(p, -s)$ a $v(p, -s) \bar{v}(p, -s)$ dostaneme odtud záměnou $s \rightarrow -s$. Sečtením vztahů (2.29) přes spiny (tj. $-s$ a s) dostaneme

$$\sum_{spin} u(p, s) \bar{u}(p, s) = \not{p} + m, \quad (2.30)$$

$$\sum_{spin} v(p, s) \bar{v}(p, s) = \not{p} - m. \quad (2.31)$$

Tyto vztahy se použijí například při výpočtu invariantních amplitud různých procesů, jak uvidíme níže.

2.3 Fockův prostor

Kvantová teorie pole popisuje systémy s nekonečným počtem stupňů volnosti. Během srážkových procesů mohou vznikat a zanikat částice, proto se zavádí tzv. Fockův prostor.

Je-li \mathcal{H} nějaký hilbertův prostor, označujeme $\mathcal{H}^{(n)} = \mathcal{H} \otimes \dots \otimes \mathcal{H}$ a $\mathcal{H}^{(0)} = \mathbb{C}$. Definujeme hilbertův prostor $\mathcal{F}(\mathcal{H})$ jako direktní součet

$$\mathcal{F}(\mathcal{H}) := \bigoplus_{n=0}^{\infty} \mathcal{H}^{(n)}$$

a nazveme ho **Fockovým prostorem nad prostorem \mathcal{H}** . Je-li $\|\cdot\|_n$ norma v $\mathcal{H}^{(n)}$, pak prvky $\mathcal{F}(\mathcal{H})$ jsou posloupnosti $\Psi = \{\psi_n\}_{n=0}^{\infty}$, kde $\psi_n \in \mathcal{H}^{(n)}$ takové, že $\sum_{n=0}^{\infty} \|\psi_n\|_n^2 < \infty$. Pro skalární součin $(\cdot, \cdot)_F$ v $\mathcal{F}(\mathcal{H})$ dle definice direktního součtu platí

$$(\Phi, \Psi)_F = \sum_{n=0}^{\infty} (\phi_n, \psi_n)_n.$$

Pokud je \mathcal{H} stavovým prostorem nějaké částice, pak stavy n těchto částic jsou popisovány vektory z podprostoru $\{\Psi = \{\psi_n\} \in \mathcal{F}(\mathcal{H}) \mid \psi_k = 0, k \neq n\}$, který se pro jednoduchost značí $\mathcal{H}^{(n)}$. Jednorozměrnému podprostoru $\mathcal{H}^{(0)}$ odpovídá stav s nulovým počtem částic, jemuž se říká vakuový stav.

V bra-ketovém formalismu se vakuový stav značí $|vac\rangle$. Jeho normalizace je

$$\langle vac|vac\rangle = 1.$$

Stav popisující jednu částici s hybností \vec{p} se označuje $|\vec{p}\rangle$ a je normalizován

$$\langle \vec{p}'|\vec{p}\rangle = 2\omega(\vec{p})(2\pi)^3 \delta^{(3)}(\vec{p} - \vec{p}'), \quad (2.32)$$

kde $\omega(\vec{p}) = \sqrt{\vec{p}^2 + m^2}$. Stav popisující n částic s hybnostmi $\vec{p}_1, \vec{p}_2, \dots, \vec{p}_n$ se značí

$$|\vec{p}_1, \vec{p}_2, \dots, \vec{p}_n\rangle$$

a jeho normalizace je analogická (2.32). Přechody mezi stavy s různým počtem částic se popisují pomocí kreačních $a_{\vec{p}}^\dagger$ a anihilačních $a_{\vec{p}}$ operátorů. Konkrétně působením kreačními operátory na vakuový stav obdržíme stav vícečásticový

$$a_{\vec{p}_1}^\dagger \dots a_{\vec{p}_n}^\dagger |vac\rangle = |\vec{p}_1, \dots, \vec{p}_n\rangle.$$

Působením anihilačního operátoru na vakuový stav získáme opět vakuový stav a kreační a anihilační operátory splňují komutační relace

$$[a_{\vec{p}}^\dagger, a_{\vec{p}'}] = 2\omega(\vec{p})(2\pi)^3 \delta^{(3)}(\vec{p} - \vec{p}').$$

2.4 Interakční Hamiltonián

V kvantové mechanice je časový vývoj kvantového systému popsán Schrödingerovou rovnicí. V našem případě je Hamiltonián H operátor působící na Fockově prostoru a může být zapísán jako součet volného H_0 a interakčního hamiltoniánu H_{int} . Poněvadž interakce může měnit počet částic hamiltonián obsahuje operátory které vytvářejí a ničí částice. Interakční hamiltonián lze vyjádřit pomocí hustoty $\mathcal{H}_{int}(\vec{x}, t)$ jako

$$H_{int} = \int \mathcal{H}_{int}(\pi, \nabla\phi, \phi) d^3x.$$

Volný hamiltonián naopak obsahuje členy kvadratické v polích

$$H_0 = \int (\pi^2 + (\nabla\phi)^2) d^3x.$$

Typickým příkladem interakčního hamiltoniánu může být $\mathcal{H}_{int}(\vec{x}, t) = \lambda\phi^4(\vec{x}, t)$.

Je však výhodnější přejít k hustotě Lagrangiánu $\mathcal{L}(\vec{x}, t)$, která je dána

$$\begin{aligned}\mathcal{H}(\pi, \phi) &= \pi\dot{\phi} - \mathcal{L}(\phi, \dot{\phi}), \\ \pi &= \frac{\partial\mathcal{L}}{\partial\dot{\phi}}.\end{aligned}$$

Výhodou tohoto přístupu je to, že zatímco Hamiltonián H je integrálem přes prostor z hustoty \mathcal{H} můžeme přímo pracovat s akcí S , která je integrálem přes prostor a čas z hustoty \mathcal{L} .

2.5 S-matice

Invariantní amplituda přechodu stavu o m částicích s hybnostmi $\vec{p}_1, \dots, \vec{p}_m$ do stavu s n částicemi o hybnostech $\vec{k}_1, \dots, \vec{k}_n$ se označuje

$$\mathcal{A}(\vec{p}_i, \vec{k}_j) = {}_i\langle \vec{p}_1, \dots, \vec{p}_m | \vec{k}_1, \dots, \vec{k}_n \rangle_f.$$

Předpokládejme, že stav $\Psi(t)$ v čase $t = -\infty$ odpovídá počátečnímu a v čase $t = \infty$ konečnému stavu. Potom pravděpodobnost přechodu je dána skalárním součinem. Známe-li tedy interakční hamiltonián stačí vyřešit Schrödingerovu rovnici

$$i\partial_t\Psi(t) = (H_0 + H_{int})\Psi(t).$$

Přejdeme-li k Diracově interakční reprezentaci

$$\Psi_I(t) = \exp(itH_0)\Psi(t),$$

přejde Schrödingerova rovnice na

$$i\partial_t\Psi_I(t) = H_{int}\Psi_I(t).$$

Formálně můžeme zapsat řešení v čase t_f následovně

$$\Psi_I(t_f) = \text{T exp} \left(-i \int_{t_i}^{t_f} H_{int}(t) dt \right) \Psi_I(t_i),$$

kde symbol T značí, že operátor H_{int} musí působit postupně na počáteční stav. Explicitně platí

$$\text{T exp} \left(-i \int_{t_i}^{t_f} H_{int}(t) dt \right) = \sum_{n=0}^{\infty} (-i)^n \int_{t_i < t_1 < \dots < t_n < t_f} \dots \int H_I(t_n) \dots H_I(t_2) H_I(t_1) dt_1 dt_2 \dots dt_n.$$

Přejdeme-li k hustotě Hamiltoniánu \mathcal{H}_{int} dané

$$H_I(t) = \int d^3x \mathcal{H}_{int}$$

a provedeme limity $t_i \rightarrow -\infty$, $t_f \rightarrow \infty$, obdržíme

$$\Psi(\infty)_I = T \exp \left(-i \int \mathcal{H}_{int}(x) d^4x \right) \Psi_I(-\infty).$$

Operátor na pravé straně rovnice se nazývá S -matice (*scattering matrix*). Maticový element tohoto operátoru udává amplitudu přechodu z počátečního n částicového stavu $|p_1, \dots, p_n\rangle$ do m částicového stavu $|k_1, \dots, k_m\rangle$

$$A = \langle p_1, \dots, p_n | T \exp \left(-i \int \mathcal{H}_{int}(x) d^4x \right) | k_1, \dots, k_m \rangle.$$

Rozvojem této exponenciály můžeme odvozovat Feynmanova pravidla poruchového počtu.

2.6 Účinné průřezy

Uvažujme systém, jenž se v čase vyvine z počátečního stavu i do konečného stavu f . Necht amplituda přechodu tohoto procesu je M_{fi} . M_{fi} se často nazývá *maticový element* daného procesu. V poruchové teorii se dá spočítat například pomocí Feynmanových pravidel. Známe-li amplitudu M_{fi} můžeme často nazývá *maticový element* daného procesu. V poruchové teorii se dá spočítat například pomocí Feynmanových pravidel. Známe-li amplitudu M_{fi} můžeme spočítat fyzikální pozorovatelné uvažovaného procesu, což je vlastně cílem této teorie. Například diferenciální účinný průřez reakce $1 + 2 \rightarrow 3 + 4 + \dots + n$ je dán formulí

$$d\sigma = \frac{1}{|\vec{v}_1 - \vec{v}_2|} \frac{1}{2E_1} \frac{1}{2E_2} |M_{fi}|^2 (2\pi)^4 \delta^4(p_1 + p_2 - \sum_{j=3}^n p_j) K \prod_{i=3}^n \frac{dp_i}{(2\pi)^3 2E_i}, \quad (2.33)$$

kde \vec{v}_1 , \vec{v}_2 označují rychlosti vstupujících částic (předpokládáme, že jejich rychlosti jsou kolineární), $p_j = (E_j, \vec{p}_j)$, $j = 1, 2, \dots, n$ jsou čtyřhybnosti částic ($E_j = \sqrt{\vec{p}_j^2 + m_j^2}$) a K je kombinatorický faktor, který je různý od 1 pouze tehdy, jsou-li některé částice v koncovém stavu identické:

$$K = \prod_{r=1}^k \frac{1}{n_r!},$$

kde n_r je počet identických částic r -tého druhu v koncovém stavu.³

2.7 Kalibrační invariance

Podle teorému E. A. Noetherové každé jednoparametrické grupě transformací, která zachovává Lagrangián invariantní, přísluší jistá zachovávající se veličina. Nás bude zajímat zákon zachování náboje. Globální zákon zachování zůstane neporušen, přesune-li se okamžitě náboj z jednoho místa na druhé - celková bilance náboje v systému, který studujeme, se nezmění. My však pozorujeme lokální zákon zachování. Přesun náboje je vždy spojen s proudem náboje. Proto budeme v následujícím textu klást na různé Lagrangiány podmínky globální, respektive lokální kalibrační invariance které odpovídají výše zmíněným zákonům zachování.

³Tedy $n_1 + \dots + n_k = n - 2$.

Abelovská kalibrační invariance

Uvažujme Lagrangián volného Diracovského pole

$$\mathcal{L}_0 = \bar{\psi}(i\gamma^\mu\partial_\mu - m)\psi, \quad (2.34)$$

kde ψ označuje příslušný bispinor. Tento Lagrangián je invariantní vůči globálním kalibračním transformacím

$$\psi'(x) = e^{i\omega}\psi(x), \quad (2.35)$$

$$\bar{\psi}'(x) = e^{-i\omega}\bar{\psi}(x), \quad (2.36)$$

kde ω je reálná konstanta nezávislá na souřadnicích. Transformace (2.35), (2.36) tvoří abelovskou grupu $U(1)$.

Závisí-li parametr ω na souřadnicích, tj. uvažujeme-li lokální transformace

$$\psi'(x) = e^{i\omega(x)}\psi(x), \quad (2.37)$$

$$\bar{\psi}'(x) = e^{-i\omega(x)}\bar{\psi}(x), \quad (2.38)$$

pak se Lagrangián (2.34) transformuje následovně

$$\begin{aligned} \mathcal{L}'_0 &= e^{-i\omega}\bar{\psi}(i\gamma^\mu\partial_\mu - m)e^{i\omega}\psi = e^{-i\omega}\bar{\psi}(i\gamma^\mu\partial_\mu(e^{i\omega}\psi) - me^{i\omega}\psi) = \\ &= \bar{\psi}i\gamma^\mu(\partial_\mu\psi + \psi i\partial_\mu\omega) - \bar{\psi}m\psi = \mathcal{L}_0 - \bar{\psi}\gamma^\mu\psi\partial_\mu\omega. \end{aligned}$$

Abychom vytvořili nový Lagrangián, který bude již invariantní vůči (2.37) a (2.38), musíme do rovnic vyjádření (2.34) vložit interakční člen obsahující vektorové pole, které se bude transformovat tak, že zruší člen $\partial_\mu\omega$. Zvolíme-li

$$\mathcal{L}_{int} = g\bar{\psi}\gamma^\mu A_\mu\psi,$$

kde g označuje vazebnou konstantu a pole A_μ se transformuje podle

$$A'_\mu(x) = A_\mu(x) + \frac{1}{g}\partial_\mu\omega(x). \quad (2.39)$$

Ověřme transformační vlastnosti nového Lagrangiánu

$$\mathcal{L} = \mathcal{L}_0 + \mathcal{L}_{int}. \quad (2.40)$$

Zřejmě

$$\mathcal{L}' = \mathcal{L}'_0 + g\bar{\psi}'\gamma^\mu A'_\mu\psi' = \mathcal{L}_0 - \bar{\psi}\gamma^\mu(\partial_\mu\omega)\psi + g\bar{\psi}\gamma^\mu\left(a_\mu + \frac{1}{g}\partial_\mu\omega\right)\psi = \mathcal{L}_0 + \mathcal{L}_{int} = \mathcal{L}$$

Transformace (2.37), (2.38) a (2.39) se nazývají kalibrační a vektorové pole A_μ Abelovské kalibrační pole. Lagrangián (2.40) můžeme přepsat do následující podoby

$$\mathcal{L} = \bar{\psi}(i\gamma^\mu(\partial_\mu - igA_\mu) - m)\psi = \bar{\psi}(iD - m)\psi,$$

kde

$$D_\mu = \partial_\mu - igA_\mu \quad (2.41)$$

se nazývá kovariantní derivace. Tato se při transformacích (2.37) a (2.38) transformuje

$$D'_\mu = e^{i\omega} D_\mu e^{-i\omega}. \quad (2.42)$$

Tuto vlastnost použijeme v další sekci.

Abychom dostali netriviální pohybové rovnice pro pole A_μ , musíme do Lagrangiánu (2.40) přidat člen obsahující kvadráty derivací tohoto pole. Sestrojíme tenzor

$$F_{\mu\nu} = \partial_\mu A_\nu - \partial_\nu A_\mu,$$

který je očividně invariantní při lokálních kalibračních transformacích. Poznamenejme, že tento tenzor lze zapsat pomocí kovariantní derivace jako

$$-igF_{\mu\nu} = [D_\mu, D_\nu]. \quad (2.43)$$

Přidáním invariantního členu $-\frac{1}{4}F_{\mu\nu}F^{\mu\nu}$ (koeficienty volíme podle analogie s tenzorem síly elektromagnetického pole) obdržíme

$$\mathcal{L}_{Abel} = -\frac{1}{4}F_{\mu\nu}F^{\mu\nu} + \bar{\psi}(i\gamma^\mu D_\mu - m)\psi. \quad (2.44)$$

Maje hustotu Lagrangiánu, jež je invariantní k lokální kalibrační transformaci, existuje podle teoremu Emmy Noetherové čtyřvektor, jehož divergence je nulová (tj. existuje zachovávaná veličina).

Neabelovská kalibrační invariance

Uvažujme Lagrangián volného pole

$$\mathcal{L}_0 = \bar{\Psi}(i\gamma^\mu \partial_\mu - m)\Psi, \quad (2.45)$$

kde Ψ označuje např. vektor

$$\Psi = \begin{pmatrix} \psi_1 \\ \psi_2 \end{pmatrix},$$

kde ψ_1 a ψ_2 jsou Diracovy bispinory. Tento vektor popisuje například proton a neutron jako izotopické stavy jedné částice, nukleonu. Lagrangián (2.45) je zjevně invariantní vůči globální transformaci

$$\begin{aligned} \Psi'(x) &= U \Psi(x), \\ \bar{\Psi}'(x) &= \bar{\Psi}(x)U^\dagger, \end{aligned}$$

kde $U \in U(2) = SU(2) \times U(1)$. Stačí se proto omezit na transformace

$$\begin{aligned} \Psi'(x) &= S \Psi(x), \\ \bar{\Psi}'(x) &= \bar{\Psi}(x)S^\dagger, \end{aligned}$$

kde $S \in SU(2)$. Každá matice patřící do speciální ortogonální grupy se dá napsat pomocí tří reálných parametrů v exponenciální formě

$$S = \exp(i\omega^a T^a),$$

kde $T^a = \frac{1}{2}\sigma^a$, σ^a jsou Pauliho matice, $\omega^a \in \mathbb{R}$ a $a = 1, 2, 3$. T^a jsou generátory Lieovy grupy $SU(2)$, splňující komutační relace

$$[T^a, T^b] = if^{abc}T^c, \quad (2.46)$$

kde f^{abc} jsou strukturální konstanty. V případě grupy $SU(2)$ platí $f^{abc} = \epsilon^{abc}$.

Dále, v analogii s předcházejícím Abellovským případem, uvažujme lokální kalibrační transformace, tj. nechť ω^a závisí na souřadnicích. Členy, které naruší invarianci, se pokusíme eliminovat přidáním tří vektorových polí A_μ^a , $a = 1, 2, 3$ takových, aby se kovariantní derivace

$$D_\mu = \partial_\mu - igA_\mu,$$

kde $A_\mu = A_\mu^a(x)T^a$, transformovala podle

$$D'_\mu = SD_\mu S^{-1}.$$

Nyní zjistíme jak se musí transformovat pole A_μ :

$$\begin{aligned} (\partial_\mu - igA'_\mu)f &= S(\partial_\mu - igA_\mu)S^{-1}f = S(\partial_\mu S^{-1}f + S^{-1}\partial_\mu f - igA_\mu S^{-1}f) = \\ &= S\partial_\mu S^{-1}f + \partial_\mu f - igSA_\mu S^{-1}f. \end{aligned}$$

Odtud

$$A'_\mu = SA_\mu S^{-1} + \frac{i}{g}S\partial_\mu S^{-1}.$$

Toto pole se nazývá neabelovské kalibrační pole, či Yang-Millsovo. Přísluší ke grupě $SU(2)$, ale konstrukci lze aplikovat na libovolnou grupu $SU(n)$. Pak budeme mít $n^2 - 1$ bezestopých $n \times n$ polí.

K sestrojení kinetického členu odpovídajícího polím využijeme vlastnost (2.43). Snadno se ověří, že

$$[D_\mu, D_\nu] = -ig(\partial_\mu A_\nu - \partial_\nu A_\mu - ig[A_\mu, A_\nu]),$$

definujeme-li dále tenzor (podle analogie s (2.43))

$$F_{\mu\nu} = \partial_\mu A_\nu - \partial_\nu A_\mu - ig[A_\mu, A_\nu]. \quad (2.47)$$

Zde ovšem, narozdíl od Abellovského případu, je $F_{\mu\nu} = F_{\mu\nu}^a T^a$, $a \in \hat{3}$. Použijeme-li relace (2.46) obdržíme

$$F_{\mu\nu}^a = \partial_\mu A_\nu^a - \partial_\nu A_\mu^a + gf^{abc}A_\mu^b A_\nu^c.$$

Díky (2.46) se nyní tenzor (2.47) transformuje podle

$$F'_{\mu\nu} = SF_{\mu\nu}S^{-1}$$

a je invariantní vzhledem k lokálním kalibračním transformacím.

Yang-Millsovův Lagrangián může být tedy zapsán ve tvaru

$$\mathcal{L}_{YM} = -\frac{1}{4}F_{\mu\nu}^a F_{\mu\nu}^a + i\bar{\Psi}D\Psi - m\bar{\Psi}\Psi. \quad (2.48)$$

Narozdíl od Abellovského případu se v prvním členu vyskytují členy kvadratické v polích, které odpovídají interakci mezi Yang-Millsovými poli.

2.8 Mandelstamovy proměnné

V případě srážky dvou částic, ve které máme dvě částice v koncovém stavu je vhodné zavést tzv. **Mandelstamovy proměnné**. Označme čtyřhybnosti vstupujících částic p_1, p_2 resp. p_3, p_4 vystupujících. Příslušné hmotnosti označme po řadě m_1, \dots, m_4 . Mandelstamovy proměnné zavádíme vztahy

$$\begin{aligned}s &:= (p_1 + p_2)^2, \\ t &:= (p_1 - p_3)^2, \\ u &:= (p_1 - p_4)^2.\end{aligned}$$

Poněvadž platí zákon zachování čtyřhybnosti $p_1 + p_2 = p_3 + p_4$, lze též psát

$$\begin{aligned}s &= (p_3 + p_4)^2, \\ t &= (p_2 - p_4)^2, \\ u &= (p_2 - p_3)^2.\end{aligned}$$

Proměnné s, t, u jsou z definice Lorentzovsky invariantní. Dále si můžeme povšimnout, že s představuje kvadrát celkové energie srážejících se částic v soustavě hmotného středu (CMS). Pro jejich součet platí

$$s + t + u = \sum_{j=1}^4 m_j^2.$$

V případě, že studujeme relativistické srážky, lze většinou hmotu částic zanedbávat. Potom můžeme například psát

$$p_1 \cdot p_4 = \frac{1}{2}(m_1^2 + m_4^2 - (p_1 - p_4)^2) = -\frac{1}{2}u. \quad (2.49)$$

3 Kvantová elektrodynamika (QED)

Kvantová elektrodynamika popisuje elektromagnetickou interakci mezi elektrony a pozitrony a dalšími nabitými částicemi. Interakci zprostředkovává částice se spinem 1 zvaná foton. Jedná se o Abelovskou kalibrační teorii, jejíž kalibrační grupou je $U(1)$. Feynmanova pravidla se odvozují z Lagrangiánu QED:

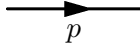
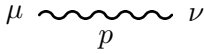
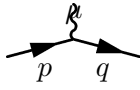
$$\mathcal{L}_{QED}(\psi, \partial_\mu \psi, A_\mu, \partial_\nu A_\mu) = -\frac{1}{4}F^{\mu\nu}F_{\mu\nu} - \bar{\psi}(i\gamma^\mu D_\mu - m)\psi, \quad (3.1)$$

kde

$$D_\mu = \partial_\mu - ieA_\mu$$

je kovariantní derivace, ψ je Diracův bispinor, $F_{\mu\nu} = \partial_\mu A_\nu - \partial_\nu A_\mu$ tenzor síly elektromagnetického pole a A_μ pole kvanta elektromagnetického pole. Z lagrangiánu (3.1) pomocí Eulerových-Lagrangeových rovnic plynou Maxwellovy a Diracovy rovnice. Tento Lagrangián je invariantní vůči lokálním a globálním kalibračním transformacím, které jsme diskutovali v kapitole 2.7.

Příslušná Feynmanova pravidla jsou shrnuta v Tabulce 3.1. V této tabulce rovná linka označuje fermionový propagátor, vlnovka pak propagátor fotonu. K danému Feynmanovu diagramu napíšeme výraz pro amplitudu následovně: Ke každé vstupující, resp. vystupující linii přiřadíme bispinor podle toho, jedná-li se o fermion či antifermion a k interakčním vrcholům, resp. propagátorům přiřadíme výrazy z tabulky.

	$\frac{i}{\not{p} + i\epsilon} = i \frac{\not{p}}{p^2 + i\epsilon}$
	$\frac{-ig_{\mu\nu}}{p^2 + i\epsilon}$, (Feynmanova kalibrace)
	$ie\gamma^\mu$

Tabulka 3.1: Feynmanova pravidla v QED

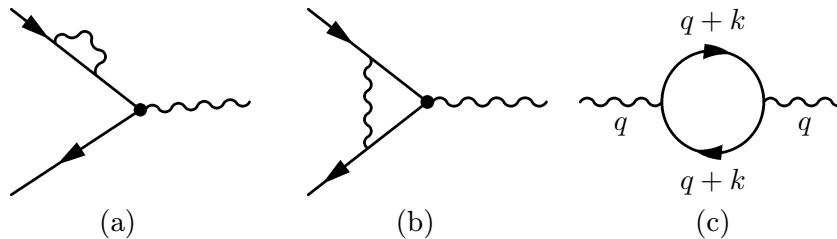
Elektrony a pozitrony, které kvantová elektrodynamika popisuje, jsou fermiony se spinem 1/2. Popisujeme je proto bispinory ψ , splňujícími Diracovu rovnici (2.6). Podle teorému Noetherové přísluší kalibrační symetrii Lagrangiánu (3.1) zachovávající se veličina, v našem případě čtyř proud

$$j_e^\mu = e\bar{\psi}\gamma^\mu\psi. \quad (3.2)$$

Z Diracovy rovnice plyne rovnice kontinuity

$$\partial_\mu j_e^\mu = 0. \quad (3.3)$$

Pomocí pravidel v Tabulce č. 3.1 se dají počítat nejen jednoduché procesy (viz Obrázek 3.2), ale dají se pomocí nich odvodit korekce vyšších řádů. Typickým příkladem jsou tzv. smyčkové korekce (*loop corrections*). Například v procesu $e^+e^- \rightarrow \mu^+\mu^-$ může elektron ještě před interakcí s pozitronem vyzářit foton a opět ho pohltit. Nebo propagující foton může kreovat virtuální leptonový par který opět anihiluje. Některé možnosti jsou na Obrázku č. 3.1. První dva upravují vrcholy a třetí propagátor.



Obrázek 3.1: Smyčkové korekce základního diagramu

Třetí diagram je velmi zajímavý, neboť změní hodnotu vazebné konstanty e , která bude záviset na CMS energii elektronu a pozitronu. Tento efekt se stává významnější při vyšších

energiích. Na obrázku č. 3.1 (c) označuje q čtyřhybnost fotonu a k čtyřhybnost vznikuvšího elektronu, přes kterou je třeba vyintegrovat. Podle pravidel z Tabulky 3.1 dostáváme výraz pro upravený propagátor

$$\Pi_{\mu\nu}(q^2) = -\frac{e^2}{(2\pi)^4 q^4} \int d^4k \frac{\text{Tr}(\gamma_\mu(\gamma^\delta k_\delta + m)\gamma_n u(\gamma^\sigma(k+q)_\sigma + m))}{(k^2 - m^2)((q+k)^2 - m^2)}$$

Tento výraz lze spočítat (viz [4])

$$\Pi_{\mu\nu}(q^2) = (q^2 g_{\mu\nu} - q_\mu q_\nu) \Pi(q^2), \quad (3.4)$$

kde

$$\Pi(q^2) = \frac{-e^2}{(2\pi)^4} \int d^4k \frac{1}{k^2(q+k)^2}. \quad (3.5)$$

Tento integrál je však divergentní, tento problém se vyřeší regularizací. Konkrétně omezíme integraci na oblast, kde $|k| < \Lambda$, kde Λ je pevně zvolená konstanta. Potom

$$\Pi(q^2) = -\frac{e^2}{12\pi^2} \ln\left(\frac{q^2}{\Lambda^2}\right).$$

Aby se zamezilo závislosti účinného průřezu na konstantě Λ , mění se hodnota vazebné konstanty e podle CMS energie elektronu a pozitronu μ . Dojde se k výrazu (viz [4])

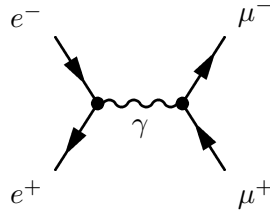
$$e^2(\mu) = e^2(\mu_0) \left(1 - \frac{e^2(\mu_0)}{12\pi^2} \ln\left(\frac{\mu^2}{\mu_0^2}\right)\right)^{-1}, \quad (3.6)$$

kde $e^2(\mu_0)/4\pi = 1/137$.

V další sekci spočteme invariantní amplitudu jednoho jednoduchého procesu.

3.1 $e^+e^- \rightarrow \mu^+\mu^-$ v QED

Označme čtyřhybnosti vstupujícího elektronu a pozitronu p_1 a p_2 , vystupujících mionů p_3 a p_4 . Nejprve snadno sestojíme příslušný Feynmanův diagram tohoto procesu. Pro amplitudu



Obrázek 3.2: Feynmanův diagram procesu $e^+e^- \rightarrow \mu^+\mu^-$

podle příslušných Feynmanových pravidel platí

$$M(p_1, p_2; p_3, p_4) \equiv M = [\bar{v}(p_2, s_2)(ie\gamma^\mu)u(p_1, s_1)] \frac{-ig_{\mu\nu}}{(p_1 + p_2)^2} [\bar{u}(p_3, s_3)(ie\gamma^\nu)v(p_4, s_4)]. \quad (3.7)$$

Označme pro přehlednost bispinory ¹

$$\begin{aligned} u_i &\equiv u(p_i, s_i), \quad i = 1, 3 \\ v_j &\equiv v(p_j, s_j), \quad j = 2, 4. \end{aligned}$$

¹ u_i fermion, v_j antifermion

Potom (3.7) přepíšeme do tvaru

$$M = [\bar{v}_2 \gamma^\mu u_1] \frac{ie^2 g_{\mu\nu}}{(p_1 + p_2)^2} [\bar{u}_3 \gamma^\nu v_4] \quad (3.8)$$

Maticový element nyní získáme jako kvadrát absolutní hodnoty amplitudy (3.8), přičemž musíme vysčítat přes všechny možné polarizace částic (uvažujeme nepolarizované elektrony a pozitrony). Tedy

$$|M|^2 \rightarrow \overline{|M|^2} = \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2} \sum_{s_1, s_2} \sum_{s_3, s_4} |M|^2. \quad (3.9)$$

Zřejmě platí (viz (2.20))

$$[\bar{u} \gamma^\mu v]^* = v^\dagger \gamma^{\mu\dagger} \gamma^0 u = [\bar{v} \gamma^\mu u], \quad (3.10)$$

a proto

$$M^* = [\bar{u}_1 \gamma^\mu v_2] \frac{-ie^2 g_{\mu\nu}}{(p_1 + p_2)^2} [\bar{v}_4 \gamma^\mu u_3]. \quad (3.11)$$

Dosadíme-li do (3.9), obdržíme

$$\overline{|M|^2} = \frac{1}{4} \frac{e^4}{(p_1 + p_2)^4} \sum_{s_i} [\bar{v}_4 \gamma^\mu u_3] [\bar{u}_1 \gamma_\mu v_2] \cdot [\bar{u}_3 \gamma^\nu v_4] [\bar{v}_2 \gamma_\nu u_1]. \quad (3.12)$$

Sumu sečteme pomocí vztahů (2.30) a (2.31). Rovnice (3.12) pak přejde k výrazu pro stopu

$$\sum_{s_1, s_2} [\bar{u}_1 \gamma^\mu v_2] [\bar{v}_2 \gamma^\nu u_1] = (\not{p}_1 + m_1)_{\delta\alpha} (\gamma^\mu)_{\alpha\beta} (\not{p}_2 - m_2)_{\beta\epsilon} (\gamma^\nu)_{\epsilon\delta} = \quad (3.13)$$

$$= \text{Tr}[(\not{p}_1 + m_1) \gamma^\mu (\not{p}_2 - m_2) \gamma^\nu]. \quad (3.14)$$

Analogickou úpravou druhé sumy pro amplitudu $\overline{|M|^2}$ obdržíme

$$\overline{|M|^2} = \frac{e^4}{4(p_1 + p_2)^4} \text{Tr}[(\not{p}_1 + m_1) \gamma^\mu (\not{p}_2 - m_2) \gamma^\nu] \cdot \text{Tr}[(\not{p}_4 - m_4) \gamma_\mu (\not{p}_3 + m_3) \gamma_\nu].$$

Nyní stačí využít vztahy pro γ -matice odvozené v části 2.2. Pro první stopu máme

$$\text{Tr}[(\not{p}_1 + m_1) \gamma^\mu (\not{p}_2 - m_2) \gamma^\nu] = \text{Tr}[(\gamma^\alpha p_{1\alpha} + m_1) \gamma^\mu (\gamma^\beta p_{2\beta} - m_2) \gamma^\nu] = \quad (3.15)$$

$$= p_{1\alpha} p_{2\beta} \text{Tr}(\gamma^\alpha \gamma^\mu \gamma^\beta \gamma^\nu) - m_1 m_2 \text{Tr}(\gamma^\mu \gamma^\nu) = 4p_1^\mu p_2^\nu - 4p_1^\beta p_{2\beta} g^{\mu\nu} + 4p_1^\nu p_2^\mu - 4m_1 m_2 g^{\mu\nu}. \quad (3.16)$$

A pro druhou

$$\begin{aligned} \text{Tr}[(\not{p}_4 - m_4) \gamma_\mu (\not{p}_3 + m_3) \gamma_\nu] &= g_{\mu\alpha} g_{\nu\beta} \text{Tr}[(\not{p}_4 - m_4) \gamma^\alpha (\not{p}_3 + m_3) \gamma^\beta] = \\ &= 4p_{4\mu} p_{3\nu} - 4p_4^\delta p_{3\delta} g_{\mu\nu} + 4p_{4\nu} p_{3\mu} - 4m_3 m_4 g_{\mu\nu}. \end{aligned}$$

Předpokládáme-li, že hmotnosti částic jsou zanedbatelné ve srovnání s jejich energiemi dostaneme pro amplitudu prostým roznásobením výše uvedených výrazů

$$\overline{|M|^2} = \frac{8e^4}{(p_1 + p_2)^4} ((p_1 \cdot p_4)(p_2 \cdot p_3) + (p_1 \cdot p_3)(p_2 \cdot p_4)), \quad (3.17)$$

kde „“ označuje skalární součin dvou čtyřvektorů. Zavedeme-li Mandelstamovy proměnné (zanedbáme-li opět hmoty částic můžeme pro součin čtyřvektorů použít vzorec (2.49)) výraz (3.17) přejde na transparentně lorentzovsky invariantní tvar

$$|\overline{M}|^2 = \frac{2e^4}{s^2}(u^2 + t^2). \quad (3.18)$$

4 Kvantová chromodynamika (QCD)

4.1 Lieova grupa SU(3)

Lieovu grupu SU(3) tvoří unitární matice $A \in \mathbb{R}^{3,3}$ s jednotkovým determinanem. Uvažujme-li grupu SU(n) a křivku $c : \mathbb{R} \rightarrow \text{SU}(n)$ procházející jednotkou, pak v okolí $s = 0$ platí

$$c(s) = 1 + sA + \mathcal{O}(s^2).$$

Protože $c(s) \in \text{SU}(n)$ je $1 = \det c(s) = 1 + \text{Tr}A$ a $c(s)^*c(s) = 1$, takže v bodě $s = 0$ je $c'(s)^*c(s) + c(s)^*c'(s) = A^* + A = 0$. Lieova algebra grupy SU(n) je tvořena bezestopými, hermitovsky antisymetrickými maticemi. Dimenze $\mathfrak{su}(n)$ je proto $n^2 - 1$. Dimenze $\mathfrak{su}(3)$ je tedy rovna osmi. Buď $\{X_a\}_{a \in \hat{8}}$ báze $\mathfrak{su}(3)$. Neboť Lieova algebra grupy SU(3) je uzavřena vzhledem k Lieově závorce, dostáváme

$$[X_a, X_b] = f_{abc}X_c,$$

kde $f_{abc} \in \mathbb{R}$ se nazývají **strukturní konstanty** Lieovy algebry. Z jejich definice plyne (z vlastností Lieovy závorky), že

$$\begin{aligned} f_{ade}f_{bcd} + f_{cde}f_{abd} + f_{bde}f_{cad} &= 0, \\ f_{abc} &= -f_{bac}, \end{aligned}$$

tj. antisymetrie v prvních dvou indexech a Jacobiho identita.

Pomocí strukturních konstant f_{abc} se definují **Gell-Mannovy matice**:

$$(T_a)_{bc} := -if_{abc},$$

tyto opět splňují komutační relaci a normalizační podmínku

$$[T_a, T_b] = if_{abc}T_c, \quad (4.1)$$

$$\text{Tr}(T_a T_b) = \frac{1}{2}\delta_{ab}. \quad (4.2)$$

Tyto matice jsou opět součástí Feynmanových pravidel.

4.2 Feynmanova pravidla v QCD

Lagrangian QCD je

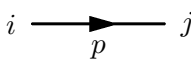

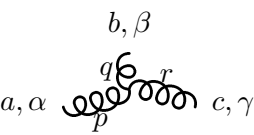
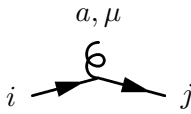
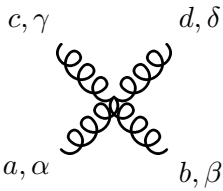
$$\mathcal{L}_{QCD} = -\frac{1}{4}F_{\mu\nu}^{(a)}F^{(a)\mu\nu} + \sum_q \bar{\psi}_i^q(i\gamma^\mu(D_\mu)_{ij} - m_q\delta_{ij})\psi_j^q, \quad (4.3)$$

kde

$$F_{\mu\nu}^{(a)} = \partial_\mu A_\nu^a - \partial_\nu A_\mu^a + gf_{abc}A_\mu^b A_\nu^c, \quad (4.4)$$

$$(D_\mu)_{ij} = \delta_{ij}\partial_\mu - igT_{ij}^a A_\mu^a. \quad (4.5)$$

Kde g je QCD vazebná konstanta, T_{ij}^a a f_{abc} jsou barevné matice (generátory) a strukturní konstanty grupy SU(3), $\psi_i^q(x)$ je 4-komponentový Diracův bispinor odpovídající kvarkovému poli o barvě i a vůni q a $A_\mu^a(x)$ je osm Yang-Millových gluonových polí. Z tohoto Lagrangianu se odvozují příslušná Feynmanova pravidla, která jsou shrnuta v Tabulce 4.1.

	$\delta^{ij} \frac{i}{\not{p}-m+i\epsilon}$
	$\delta^{ab} \frac{-ig^{\alpha\beta}}{p^2+i\epsilon}$
	$gf^{abc} (g^{\alpha\beta}(p-q)^\gamma + g^{\beta\gamma}(q-r)^\alpha + g^{\gamma\alpha}(r-p)^\beta)$
	$-ig(T^a)_{ij}\gamma_\mu$
	$-ig^2 f^{eac} f^{ebd}(g^{\alpha\beta}g^{\gamma\delta} - g^{\alpha\delta}g^{\beta\gamma})$ $-ig^2 f^{ead} f^{ebc}(g^{\alpha\beta}g^{\gamma\delta} - g^{\alpha\gamma}g^{\beta\delta})$ $-ig^2 f^{eab} f^{ecd}(g^{\alpha\gamma}g^{\beta\delta} - g^{\alpha\delta}g^{\beta\gamma})$

Tabulka 4.1: Feynmanova pravidla v QCD

4.3 Invariantní amplituda procesu $qq' \rightarrow qq'$

Feynmanův diagram tohoto procesu je zachycen na Obrázku 4.1. Hybnosti kvarků jsou označeny písmeny p_1, p_2, p_3, p_4 , řecké znaky α, β označují jejich vůně (tj. u, d, s atd.). Malými latinskými písmeny i, j, k, l je pak označena jejich barva, která může nabývat tří hodnot. Užijeme-li pravidel z Tabulky 4.1 dotaneme pro amplitudu procesu výraz

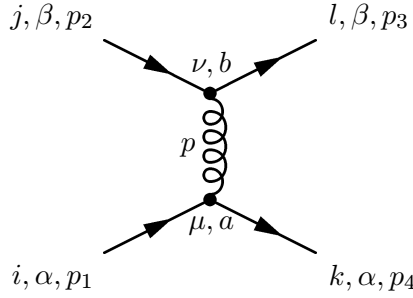
$$M = \bar{u}_\alpha(p_4) (-ig(T^a)_{ik}\gamma_\mu) u_\alpha(p_1) \cdot \frac{-i\delta_{ab}g^{\mu\nu}}{(p_1 - p_4)^2} \cdot \bar{u}_\beta(p_3) (-ig(T^b)_{jl}\gamma_\nu) u_\beta(p_2)$$

Zavedeme Madelstamovy proměnné (viz 2.8)

$$\begin{aligned} s &= (p_1 + p_2)^2, \\ t &= (p_1 - p_4)^2, \\ u &= (p_1 - p_3)^2, \end{aligned}$$

pomocí kterých přepíšeme amplitudu na tvar

$$M = \frac{ig^2}{t} (T^a)_{ik} (T^a)_{jl} \bar{u}_\alpha(p_4) \gamma_\mu u_\alpha(p_1) \bar{u}_\beta(p_3) \gamma^\mu u_\beta(p_2)$$



Obrázek 4.1: Feynmanův diagram srážky dvou kvarků

Nyní stačí vysčítat kvadrát absolutní hodnoty amplitudy přes spiny a barvy kvarků, použijeme-li vztahy (3.10) dostaneme

$$\begin{aligned} \frac{1}{4} \frac{1}{9} \sum_{\lambda, c} |M|^2 &= \frac{1}{4} \frac{1}{9} \frac{g^4}{t^2} \sum_{\lambda, c} (T^a)_{ik} (T^a)_{jl} (T^b)_{ik}^* (T^b)_{jl}^* [\bar{u}_\alpha(p_4) \gamma_\mu u_\alpha(p_1) \bar{u}_\beta(p_3) \gamma^\mu u_\beta(p_2)] \cdot \\ &\quad \cdot [\bar{u}_\alpha(p_1) \gamma_\mu u_\alpha(p_4) \bar{u}_\beta(p_2) \gamma^\mu u_\beta(p_3)] \end{aligned}$$

Podobně jako v minulém případě s elektronem a pozitronem použijeme vztahy (2.30) a (2.31) a vztah pro Gell-Manovy matice (4.2). Dostaneme součin stop

$$\overline{|M|^2} = \frac{1}{4} \frac{1}{9} \frac{g^4}{t^2} \text{Tr}(T^a T^b)^2 \text{Tr}(\not{p}_4 \gamma_\mu \not{p}_1 \gamma_\nu) \text{Tr}(\not{p}_3 \gamma^\mu \not{p}_2 \gamma^\nu).$$

Přesně tento výraz jsme počítali v rovnici (3.16), tedy můžeme rovnou psát

$$\overline{|M|^2} = \frac{4}{9} \frac{g^4}{t^2} (u^2 + s^2)$$

Tento výraz je takřka stejný jako v případě QED (3.18). Liší se pouze číselným faktorem, který má vztah k náboji kvarků. Experimentálním měřením poměru účinných průřezů reakcí $e^+e^- \rightarrow \mu^+\mu^-$ a $qq' \rightarrow qq'$ se proto dají měřit zlomkové naboje kvarků.

5 Elektroslabé sjednocení

5.1 Standardní model

Historie elektroslabé interakce začíná pozorováním β -rozpadu a pokusy o jeho popis. Enrico Fermi se jako první pokusil popsat β -rozpad neutronu

$$n \rightarrow p + e + \bar{\nu}_e. \quad (5.1)$$

Fermi vycházel z analogie s elektrodynamikou, kde má proud tvar $\bar{\psi}\gamma_\alpha\psi$ (ψ je bispinor, viz (3.2)) a napsal Lagrangián popisující rozpad (5.1)

$$\mathcal{L} = G (\bar{\psi}_n \gamma^\alpha \psi_p \bar{\psi}_{\nu_e} \gamma_\alpha \psi_e + \bar{\psi}_p \gamma^\alpha \psi_n \bar{\psi}_e \gamma_\alpha \psi_{\nu_e}), \quad (5.2)$$

kde ψ_i je bispinor částice typu $i = p, n, e, \nu_e$ a G je konstanta známá jako Fermiho konstanta. Tento výraz se dá zapsat ve tvaru

$$\mathcal{L} = G \left(J_\alpha^N J_\alpha^L + (J_\alpha^N)^\dagger (J_\alpha^L)^\dagger \right),$$

kde J_α^N, J_α^L jsou vektorové nukleonové a leptonové proudy, které Fermi konstruoval inspirován elektrodynamikou. Interakce, tak jak je vyjádřena v Lagrangiánu (5.2), se nazývá přímá čtyřfermionová, neboť není zprostředkována žádnými intermediálními bosony. Tato Fermiho teorie patří mezi nerenormalizovatelné teorie (viz níže). Elektrodynamika a slabé interakce spolu souvisí natolik, že se je později podařilo popsat jako jedinou teorii, která se dnes nazývá Standardním modelem.

Fermiho teorie byla upravena na tzv. $V - A$ teorii, která popisovala slabé rozpady pomocí Lagrangiánu

$$\mathcal{L} = \frac{G}{\sqrt{2}} J_\alpha J_\alpha^\dagger, \quad (5.3)$$

$$J_\alpha = \bar{e}(1 - \gamma_5)\gamma_\alpha \nu_e + \bar{\mu}(1 - \gamma_5)\gamma_\alpha \nu_\mu + V - A, \quad (5.4)$$

kde nyní bispinory příslušných částic značíme přímo $e = \psi_e$ atd. a $V - A$ označují vektorový a axiální hadronový proud. Označíme-li

$$P_L = \frac{1 + \gamma_5}{2}, \quad P_R = \frac{1 - \gamma_5}{2}$$

projektory, tj. $P_L = P_L^2 = P_L^\dagger$. Pak projekce bispinoru ψ definujeme

$$\begin{aligned} \psi_L &:= P_L \psi, \\ \psi_R &:= P_R \psi. \end{aligned}$$

Projekce ψ_L a ψ_R se nazývají levé a pravé komponenty bispinoru ψ (*lefthanded, righthanded*). Zřejmě

$$\bar{\psi}_{1L}\gamma_\mu\psi_{2L}\bar{\psi}_{3L}\gamma_\mu\psi_{4L} = \frac{1}{4}\bar{\psi}_1\gamma_\mu(1+\gamma_5)\psi_2\bar{\psi}_3\gamma_\mu(1+\gamma_5)\psi_4.$$

Takže interakční Lagrangián lze psát ve tvaru

$$\mathcal{L} = \frac{G}{\sqrt{2}}J_\rho J_\rho^\dagger, \quad (5.5)$$

$$J_\rho = \bar{e}\gamma_\rho(1+\gamma_5)\nu_e + \bar{\mu}\gamma_\rho(1+\gamma_5)\nu_\mu + \bar{\tau}\gamma_\rho(1+\gamma_5)\nu_\tau +$$

$$+ \bar{d}'\gamma_\rho(1+\gamma_5)u + \bar{s}'\gamma_\rho(1+\gamma_5)c + \bar{b}'\gamma_\rho(1+\gamma_5)t. \quad (5.7)$$

Je nutno poznamenat, že v tomto výtazu se počítá přes tři barvy kvarků a d', s', b' se získají lineární kombinací

$$\begin{pmatrix} d' \\ s' \\ b' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} c_1 & -s_1c_3 & -s_1s_3 \\ s_1c_2 & c_1c_2c_3 - s_2s_3e^{i\delta} & c_1c_2s_3 + s_2s_3e^{i\delta} \\ s_1s_2 & c_1s_2c_3 + c_2s_3e^{i\delta} & c_1s_2s_3 - c_2c_3e^{i\delta} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} d \\ s \\ b \end{pmatrix}, \quad (5.8)$$

kde $s_i = \sin \theta_i$ a $c_i = \cos \theta_i$ jsou siny a cosiny míchacích úhlů (*mixing angles*) a δ je fáze, pomocí níž lze popsat CP-narušení. Matice se nazývá Cabbibo-Kobayashi-Maskawova (CKM) a její elementy se určují experimentálně, tedy patří mezi volné parametry standardního modelu. Dá se ukázat, že je unitární.

Hlavním problémem Lagrangiánu (5.6) je jeho nerenormalizovatelnost. Například úplný účinný průřez rozptylu mionového neutrina na elektronu podle tohoto Lagrangiánu vychází

$$\sigma(\nu_\mu e) = \frac{G^2}{\pi}s,$$

kde $s = (p_\nu + p_e)^2$. Tedy účinný průřez roste lineárně s energií, což se experimentálně nepotvrzuje.

Musíme přejít k Yang-Millově teorii, která je renormalizovatelná. Zavedeme nabitý intermediální boson W a předpokládáme tvar Lagrangiánu

$$\mathcal{L} = -g_W(J_\alpha W_\alpha + J_\alpha^\dagger W_\alpha^\dagger),$$

kde W označuje hmotné nabitě vektorové pole, nesoucí spin 1.

Standardní model popisuje částice hmoty, fermiony se spinem 1/2, které jsou roztrženy do tří generací. Konkrétně máme šest leptonů $e, \nu_e, \mu, \nu_\mu, \tau, \nu_\tau$ a šest kvarků d, u, s, c, b, t . Interakce mezi nimi je popsána čtyřmi bosony, částicemi se spinem 1/2. Tři jsou hmotné intermediální bosony W^\pm a Z^0 a jeden nehmotný foton. Poslední částicí je dosud nepozorovaný Higgsův boson se spinem 1/2, který je zodpovědný za hmotu intermediálních bosonů (narušení symetrie). Jedná se opět o kalibrační teorii s neabelovskou grupou $SU(2) \times U(1)$.

GWS kalibračně invariantní Lagrangián je složen ze čtyř částí

$$\mathcal{L}_{GWS} = \mathcal{L}_{gauge} + \mathcal{L}_{fermion} + \mathcal{L}_{Higgs} + \mathcal{L}_{Yukawa}. \quad (5.9)$$

\mathcal{L}_{gauge} obsahuje členy vyjadřující lokální invarianci Yang-Millových polí, kalibrační grupy $SU(2) \times U(1)$

$$\mathcal{L}_{gauge} = -\frac{1}{4}F_{\mu\nu}^a F^{a\mu\nu} - \frac{1}{4}B_{\mu\nu} B^{\mu\nu},$$

kde

$$\begin{aligned} F_{\mu\nu}^a &= \partial_\mu A_\nu^a - \partial_\nu A_\mu^a + g\epsilon^{abc} A_\mu^b A_\nu^c, \quad a \in \hat{3}, \\ B_{\mu\nu} &= \partial_\mu B_\nu - \partial_\nu B_\mu. \end{aligned}$$

A_μ^a jsou tři kalibrační pole grupy $SU(2)$ a B_μ grupy $U(1)$, Levi-Civita symbol ϵ^{abc} představuje strukturální konstanty $SU(2)$ a g je její vazebná konstanta.

Další člen v (5.9) obsahuje kinetické členy fermionových polí a interakční členy s kalibračními poli

$$\begin{aligned} \mathcal{L}_{fermion} &= \sum_{l=e,\mu,\tau} \left(i\bar{L}^{(l)} \gamma^\mu (\partial_\mu - igA_\mu^a \frac{\tau^a}{2} - iY_L^{(l)} g' B_\mu) L^{(l)} \right) + \\ &+ \sum_{q=d,s,b} \left(i\bar{L}_0^{(q)} \gamma^\mu (\partial_\mu - igA_\mu^a \frac{\tau^a}{2} - iY_L^{(q)} g' B_\mu) L_0^{(q)} \right) + \\ &+ \sum_{l=e,\mu,\tau} i\bar{l}_R \gamma^\mu (\partial_\mu - iY_R^{(l)} g' B_\mu) l_R + \\ &+ \sum_{q=d,u,s,c,b,t} i\bar{q}_{0R} \gamma^\mu (\partial_\mu - iY_R^{(q)} g' B_\mu) q_{0R}, \end{aligned}$$

kde g' je vazebná konstanta odpovídající $U(1)$, slabý hypernáboj (*hypercharge*) je definován

$$Q = T_3 + Y, \quad (5.10)$$

kde T_3 je třetí komponenta slabého izospinu (*weak isospin*) a Q je náboj odpovídající částice

$$\begin{aligned} Q_e &= Q_u = Q_\tau = -1, \\ Q_d &= Q_s = Q_b = -\frac{1}{3}, \\ Q_c &= Q_t = +\frac{2}{3}. \end{aligned}$$

Ze vztahu (5.10) plyne

$$\begin{aligned} Y_L^{(l)} &= -\frac{1}{2}, \quad l = e, \mu, \tau, \\ Y_L^{(q)} &= +\frac{1}{6}, \quad q = d, s, b, \\ Y_R^{(q)} &= -\frac{1}{3}, \quad q = d, s, b, \\ Y_R^{(q)} &= +\frac{2}{3}, \quad q = u, c, t. \end{aligned}$$

Další členy \mathcal{L}_{Higgs} a \mathcal{L}_{Yukawa} v (5.9) souvisí s narušením symetrie $SU(2)$ a tedy generací hmoty intermediálních bosonů. Pro další informace viz např. [6].

Čtyři kalibrační pole A_μ^a a B_μ nemají přímo fyzikální význam. Fyzikální pole se získají lineárními kombinacemi. Pole W_μ^\pm definované

$$W_\mu^\pm = \frac{1}{\sqrt{2}} (A_\mu^1 \mp iA_\mu^2),$$

odpovídá intermediálnímu bosonu W^\pm a pole Z_μ a A_μ odpovídající intermediálnímu bosonu Z a elektromagnetickému čtyřpotenciálu splňují

$$\begin{aligned} A_\mu^3 &= \cos \theta_W Z_\mu + \sin \theta_W A_\mu, \\ B_\mu &= -\sin \theta_W Z_\mu + \cos \theta_W A_\mu. \end{aligned}$$

Parametr θ_W se nazývá Weinbergův úhel a představuje základ sjednocení slabých a elektromagnetických interakcí. Weinbergův úhel je svázán s vazebnými konstantami podle

$$\cos \theta_W = \frac{g}{\sqrt{g^2 + g'^2}}, \quad \sin \theta_W = \frac{g'}{\sqrt{g^2 + g'^2}}.$$

Elektromagnetická vazebná konstanta se dá vyjádřit jako

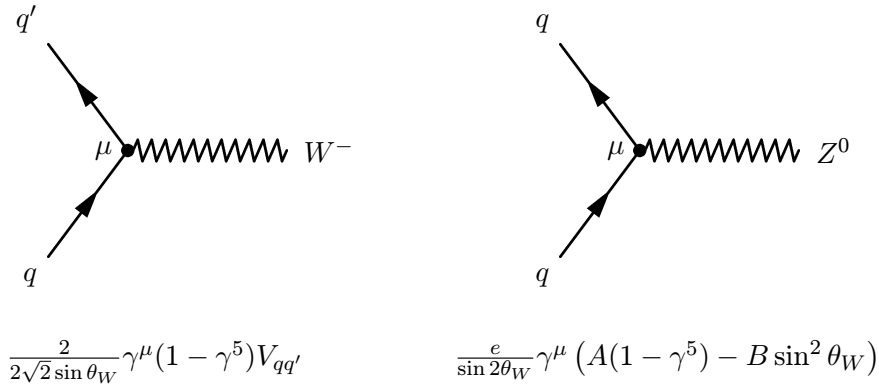
$$e = \frac{gg'}{\sqrt{g^2 + g'^2}},$$

a tedy

$$e = g \sin \theta_W.$$

Tento vztah se někdy nazývá sjednocující podmínkou.

Z interakčních členů v (5.9) se odvozují příslušná Feynmanova pravidla. Nás budou zajímat především interakční vrcholy intermediálních bosonů. Na obrázku 5.1 jsou uvedeny dva diagramy a k nim příslušející pravidla.



Obrázek 5.1: Feynmanova pravidla příslušející interakčním diagramům W , Z bosonů

V případě Z^0 bosonu v 5.1 je $A = 1/2$ a $B = -4/3$ pokud $q = u, c, t$ a $A = -1/2$, $B = 2/3$ pokud $q = d, s, b$. $V_{qq'}$ je element Cabbibo-Kobayashi-Maskavovy matice.

5.2 Procova rovnice

Zatímco částice se spinem $1/2$, resp. 0 jsou popisovány Diracovou resp. Klein-Gordonovou rovnicí, částice se spinem 1 jsou popsány Maxwellovými rovnicemi v případě fotonu a Procovou rovnicí v případě hmotných intermediálních bosonů. Procova rovnice je zobecněním Maxwellových rovnic. Její znění v kovariantním tvaru je

$$\partial_\mu F^{\mu\nu} + m^2 A^\nu = 0, \quad F^{\mu\nu} = \partial^\mu A^\nu - \partial^\nu A^\mu. \quad (5.11)$$

Divergence tohoto výrazu dává Lorentzovu podmínku, tj.

$$\partial_\nu A^\nu = 0$$

a dosadíme-li do Procovy rovnice explicitní výraz pro $F^{\mu\nu}$, obdržíme Klein-Gordonovu rovnici pro A^μ

$$(\square + m^2)A^\mu = 0.$$

Můžeme tedy říci, že rovnice (5.11) je ekvivalentní soustavě

$$(\square + m^2)A^\mu = 0, \quad \partial_\mu A^\mu = 0. \quad (5.12)$$

Pro řešení této soustavy se použije Ansatz rovinné vlny

$$A_\mu(x) = \epsilon_\mu(k)e^{-ikx},$$

kde $k = (k^0, \vec{k})$. Faktor $\epsilon_\mu(k)$ se nazývá vektorem polarizace (analogie s elektromagnetickou rovinnou vlnou). Dosadíme-li Ansatz do (5.12) obdržíme

$$k^2 = (k_0)^2 - \vec{k}^2 = m^2 \quad (5.13)$$

a Lorentzova podmínka implikuje

$$k^\mu \epsilon_\mu(k) = 0. \quad (5.14)$$

6 Hadronové interakce

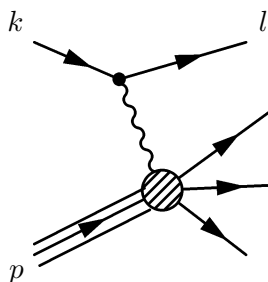
Kvantová chromodynamika dobře popisuje interakci kvarků a gluonů. Jak tedy popsat interakce například protonu, který je složen z kvarků *uud*? Všechny procesy probíhající při hadronových interakcích jsou způsobeny interakcí kvarků a gluonů obsažených v hadronech.

6.1 Partonový model, Hluboce nepružný rozptyl

Srážkovými experimenty se potvrzuje, že protony nejsou bodové částice, ale že se skládají z menších objektů. Pod hluboce nepružnou srážkou (*deep inelastic scattering* - DIS) protonu s leptonem se myslí taková, kdy přenášená hybnost Q^2 je velká ($Q^2 \gg M^2$, viz níže). Jedním s nejsilnějších testů poruchové QCD je právě porušení Bjorkenova škálování strukturních funkcí měřené v lepton-hadronových srážkách. V těchto procesech se přesně měří strukturní funkce, které se pak použijí k popisu hadron-hadronových srážek.

Uvažme lepton-protonový proces $lp \rightarrow lX$ a označme čtyřhybnosti vstupujícího leptonu jako k a k' leptonu vystupujícího. Hybnost protonu před srážkou nechť je p , $p^2 = M^2$ jest kvadrát klidové hmotnosti protonu. Potom přenesená hybnost je $q = k - k'$. Zavedme vhodné veličiny vztahy

$$Q^2 = -q^2, \quad p^2 = M^2, \\ x = \frac{Q^2}{2p \cdot q} = \frac{Q^2}{2M(E - E')}.$$



Obrázek 6.1: Hluboce nepružný rozptyl leptonu na protonu

Schematický náčrt tohoto procesu je na Obrázku 6.1.

Pozorovalo se, že kvarky nesou asi polovinu hybnosti protonu, druhá polovina připadá na gluony. Proces zobrazený na Obrázku 6.1 probíhá výměnou virtuálního fotonu, či intermediálního bosonu. Foton interaguje přímo s kvarkem, či gluonem jako by tento byl volný. Zavádí se pojem **partonu**, jako částice tvořící proton (obecně hadron). K popisu těchto procesů se používají tzv. **strukturní funkce** $F_i(x, Q)$. Tyto mají vztah k distribučním funkcím partonů $f_{a/A}(x, Q^2)$, kde $a = u, d, \dots, g$ a $A = p, n, Fe$ atd. Distribuční funkce udává pravděpodobnost nalezení partonu a nesoucího zlomek celkové hybnosti x v hadronu A v procesu s Q^2 . Strukturní funkce se zatím nepodařilo spočítat z teorie. Místo toho se musí určovat z experimentů a k jejich popisu se používá několik parametrizací (MRST Martin-Roberts-Stirling-Thorne, CTEQ Collaboration for Theoretical and Experimental Studies in Quantum Chromodynamics a GRV Glück-Reya-Vogt) Účinný průřez interakce virtuálního fotonu s protonem (jako na Obrázku 6.1) se pomocí distribučních funkcí protonu vyjádří jako ¹

$$\hat{\sigma}_0 = \int_0^1 dx \sum_i e_i^2 f_i(x) \hat{\sigma}_0(\gamma^* q_i \rightarrow q'_i, x),$$

Partonový popis uvedený výše se dá použít i v případě hadronových srážek. Tuto skutečnost poprvé ukázali Drell a Yan při studiu produkce leptonových párů při kvark-antikvark anihilaci (Drell-Yanův proces). K vyjádření hadronového účinného průřezu použili účinný průřez procesu na úrovni partonů $q\bar{q} \rightarrow \mu^+\mu^-$ a partonovou distribuční funkci $f_{q/A}(x)$ získanou z DIS.

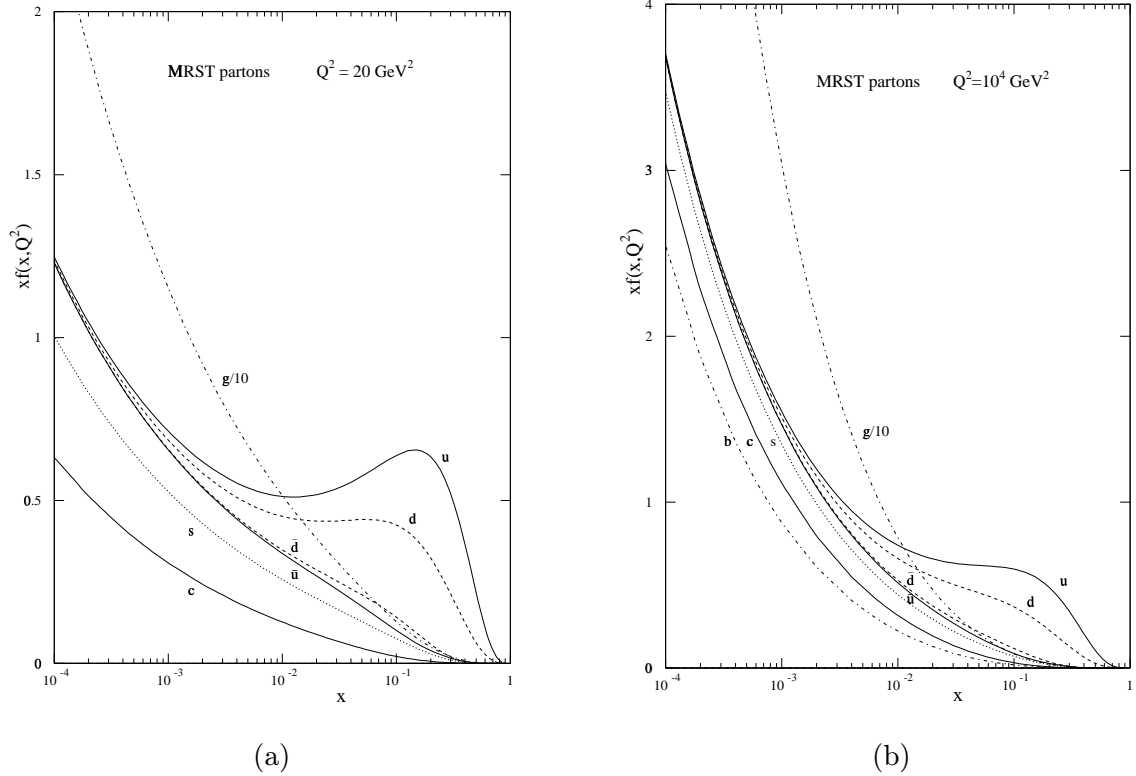
$$\sigma_{AB} = \int dx_a dx_b f_{a/A}(x_a) f_{b/B}(x_b) \hat{\sigma}_{ab \rightarrow X}.$$

V případě Drell-Yanova procesu je $X = l^+l^-$ a $ab = q\bar{q}, \bar{q}q$. Experimentálně se ověřila dobrá shoda s předpovědí a tento partonový formalismus se začal aplikovat i na jiné hadronové účinné průřezy. Při těchto experimentech se však ukázalo, že partonové distribuční funkce závisí také na přenášené energii Q^2 , jak je názorně vidět na Obrázku 6.2, kde jsou vyneseny kvarkové a gluonové distribuční funkce při $Q^2 = 20 \text{ GeV}^2$ (a) a $Q^2 = 10^4 \text{ GeV}^2$ (b).

V případě hadron-hadronové interakce tedy píšeme

$$\sigma_{AB} = \int dx_a dx_b f_{a/A}(x_a, Q^2) f_{b/B}(x_b, Q^2) \hat{\sigma}_{ab \rightarrow X}. \quad (6.1)$$

¹Ostříškované účinné průřezy se vztahují k partonům, neostříškované v hadronům.



Obrázek 6.2: Závislost kvarkových a gluonových distribučních funkcí na Q^2 , převzato z [9]

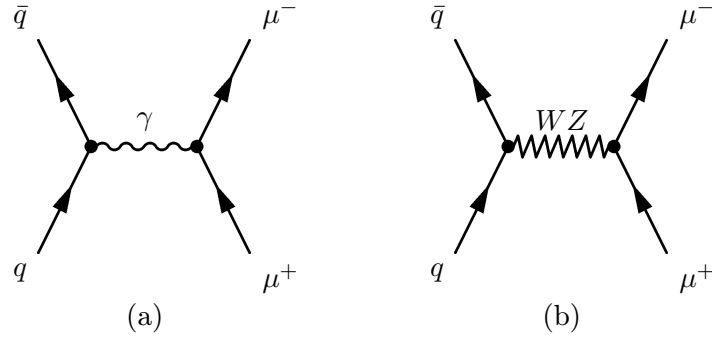
Zde Q^2 charakterizuje hybnostní škálu pro dané hadronové srážky. Ukazuje se, že tento výraz není zcela přesný a je potřeba započítat další korekce, závislé na běžící vazebné konstantě $\alpha_s(\mu^2)$, potom podle počtu členů mluvíme o výrazech LO (*leading order*), NLO (*next-to-leading order*) a NNLO (*next-to-next-to-leading order*). Většina důležitých hadronových procesů je dnes spočítána v řádu NLO. Drell-Yanův proces se podařilo spočítat v řádu NNLO. Integrované (6.1) se počítají pomocí Monte Carlo simulátorů jakým je například PYTHIA.

6.2 Drell-Yanův proces

Drell-Yanův proces je, jak už bylo řečeno, produkce leptonového páru (v praxi e^+e^- nebo $\mu^+\mu^-$) v hadron-hadronové srážce. Mechanismus zodpovědný za tento proces je anihilace kvarku a antikvarku. Při nízkých energiích dojde při anihilaci k vyzáření virtuálního fotonu $q\bar{q} \rightarrow \gamma^* \rightarrow l^+l^-$. Na urychlovačích s vyššími energiemi (např. Tevatron, LHC) může dojít k vyzáření bosonů W , či Z . Účinný průřez anihilace přes virtuální foton může být lehce vyjádřen pomocí anihilace $e^+e^- \rightarrow \mu^+\mu^-$ z QED (viz) jako

$$\sigma(q\bar{q} \rightarrow \mu^+\mu^-) = \frac{4\pi\alpha^2}{3\hat{s}} \frac{1}{N} Q_q^2,$$

kde Q_q je náboj kvarku q : $Q_u = 2/3$, $Q_d = -1/3$ atd. Faktor $1/N = 1/3$ vyjadřuje skutečnost, že k anihilaci může dojít pouze tehdy, jedná-li se o kvark a antikvark stejné barvy.



Obrázek 6.3: Drell-Yanův proces

Obecně je lépe uvažovat diferenciální účinný průřez

$$\frac{d\hat{\sigma}}{dM^2} = \frac{\hat{\sigma}_0}{N} Q_q^2 \delta(\hat{s} - M^2), \quad \hat{\sigma}_0 = \frac{4\pi\alpha^2}{3M^2},$$

kde M je hmota leptonového páru. V CMS dvou hadronů jsou čtyřhybnosti rovny

$$p_1 = \frac{\sqrt{s}}{2}(x_1, 0, 0, x_1),$$

$$p_2 = \frac{\sqrt{s}}{2}(x_2, 0, 0, -x_2).$$

Čtverec partonové CMS energie \hat{s} je vztažen k hadronové CMS energii podle $\hat{s} = x_1 x_2 s$. Hadronový diferenciální účinný průřez je tedy roven

$$\frac{d\sigma}{dM^2} = \frac{\hat{\sigma}_0}{N} \int_0^1 dx_1 dx_2 \delta(x_1 x_2 s - M^2) \sum_k Q_k^2 (q_k(x_1, M^2) \bar{q}_k(x_2, M^2) + (1 \leftrightarrow 2)).$$

Je-li energie srážejících se hadronů dostatečná, anihilace kvarku a antikvarku může produkovat bosony W , Z . Pozorování těchto intermediálních bosonů v roce 1983 na CERNském $p\bar{p}$ urychlovači potvrdilo Glashow-Salam-Weinbergovu elektroslabou teorii. Intermediální bosony Z a W^\pm byly objeveny při experimentech UA1 a UA2 v CERNU. Nejlepšího změření hmoty W se dosáhlo v $p\bar{p}$ interakcích (CDF, D0 na Tevatronu). Na Obrázku č. 6.4 jsou vyneseny účinné průřezy produkce W^\pm a Z^0 jako funkce CMS energie \sqrt{s} spolu s daty z UA1, UA2, CDF a D0 při $\sqrt{s} = 630$ GeV a 1.8 TeV

Účinné průřezy na úrovni partonů tedy jsou

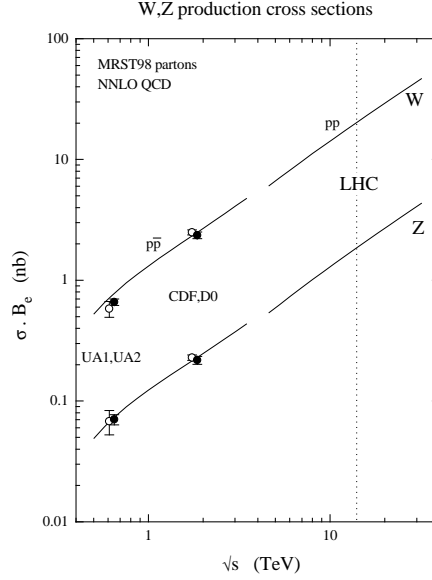
$$\hat{\sigma}(q\bar{q}' \rightarrow W) = \frac{\pi}{3} \sqrt{2} G_F M_W^2 |V_{qq'}|^2 \delta(\hat{s} - M_W^2),$$

$$\hat{\sigma}(q\bar{q} \rightarrow Z) = \frac{\pi}{3} \sqrt{2} G_F M_Z^2 (v_q^2 + a_q^2) \delta(\hat{s} - M_Z^2),$$

kde $V_{qq'}$ je CKM maticový element.

6.3 Produkce Jetů

Jak již bylo řečeno, procesy na úrovni partonů velkou měrou přispívají k množství pozorovaných částic v detektorech. Typickým fenoménem jsou tzv. jety. V koncovém stavu pozorujeme



Obrázek 6.4: Teoretické předpovědi úplného účinného průřezu produkce W^\pm , Z^0 v pp a $p\bar{p}$ srážkách jako funkce \sqrt{s} , a data z UA1, UA2, CDF a D0, převzato z [9]

množství částic jež jsou kolimovány do několika směrů. Jet se tedy definuje jako určitá množina částic letících přibližně jedním směrem. Existuje více definic, které konkrétně specifikují ono „přibližně“. Jedním z nich je například Kuželový algoritmus.

Kuželový algoritmus (Cone algorithm)

Předpokládejme, že při srážce částic vzniká n částic, které jsou určeny hodnotami energie E^i , vektorem hybnosti \vec{p}^i , úhlem svírajícím osu z a hybnost θ^i a azimutálním úhlem ϕ^i , $i \in \hat{n}$. Dále předpokládejme, že se jedná o relativistické částice, tedy že pro jejich energii platí $E^i = |\vec{p}^i|$. Jejich pseudorapidita je potom

$$\eta^i = -\ln \tan \frac{\theta}{2}.$$

Kuželový algoritmus rozděljuje částice do jetů podle toho, jak jsou k sobě blízko v rovině $\eta \times \phi$. Konkrétně je-li osa kuželu dána (η^C, ϕ^C) a jeho poloměr je R , potom i -tá částice leží v tomto kuželu právě tehdy, je-li

$$\sqrt{(\eta^i - \eta^C)^2 + (\phi^i - \phi^C)^2} \leq R.$$

Jinak řečeno částice leží v kuželu s osou (η^C, ϕ^C) a poloměrem R , leží-li v kouli s tímto středem a poloměrem.

Kuželový algoritmus vyhledává jety iterací následujícího kroku. K danému kuželu $C = (\eta^c, \phi^C, R)$ se naleznou částice $i \in C$, které v něm leží. Sestrojí se nový kužel \tilde{C}

$$\eta^{\tilde{C}} := \frac{1}{E_T^C} \sum_{i \in C} E_T^i \eta^i,$$

$$\phi^{\tilde{C}} := \frac{1}{E_T^C} \sum_{i \in C} E_T^i \phi^i,$$

kde

$$E_T^C = \sum_{i \in C} E_T^i,$$

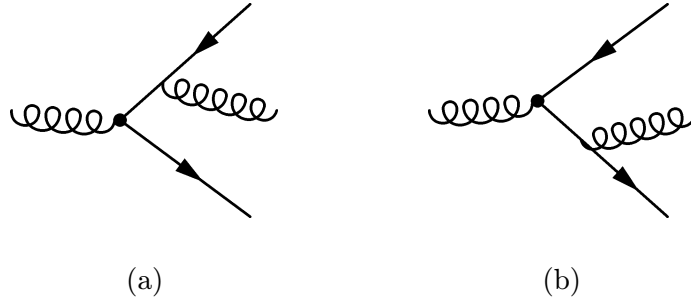
$$E_T^i = E^i \sin \theta^i$$

je příčná energie částic v kuželu, respektive i -té částice. Opět se naleznou částice ležící v tomto novém kuželu \tilde{C} a sestrojí se nová osa. Pokud je tato osa stejná jako původní algoritmus končí nalezením jetu. Pro něj se konstruuji různé proměnné závislé na proměnných částic v něm obsažených.

Gluonová emise

Proces, který je zodpovědný za výsledné jety se nazývá gluonová emise, při níž kvark, či gluon emituje gluon. V tomto případě pak pozorujeme buď tři, nebo dva (pokud jsou směry některých dvou rozlétávajících se částic kolineární) jety. Částice se totiž energie zbavují vyzařováním dalších gluonů a nastává tzv. hadronizace, kdy se volné kvarky váží v pozorované hadrony. Tento proces není zatím zcela objasněn.

Feynmanovy diagramy gluonové emise jsou uvedeny na Obrázku 6.5



Obrázek 6.5: K gluonové emisi

6.4 Dalitzův graf

Uvažujme srážku dvou objektů v níž vznikají tři částice (popř. jety). Označme čtyřhybnosti vstupujících částic k_1 a k_2 a vystupujících p_1 , p_2 a p_3 . Dále definujme tzv. efektivní hmotu i -té a j -té částice následovně

$$M_{ij} = \sqrt{(p_i + p_j)^2} = \sqrt{(E_i + E_j)^2 - (\vec{p}_i + \vec{p}_j)^2}, \quad i, j \in \hat{3}, i \neq j. \quad (6.2)$$

Z těchto tří proměnných (M_{12} , M_{13} , M_{23}) jsou jen dvě nezávislé, neboť v CMS soustavě platí

$$p_1 + p_2 + p_3 = 0,$$

odkud

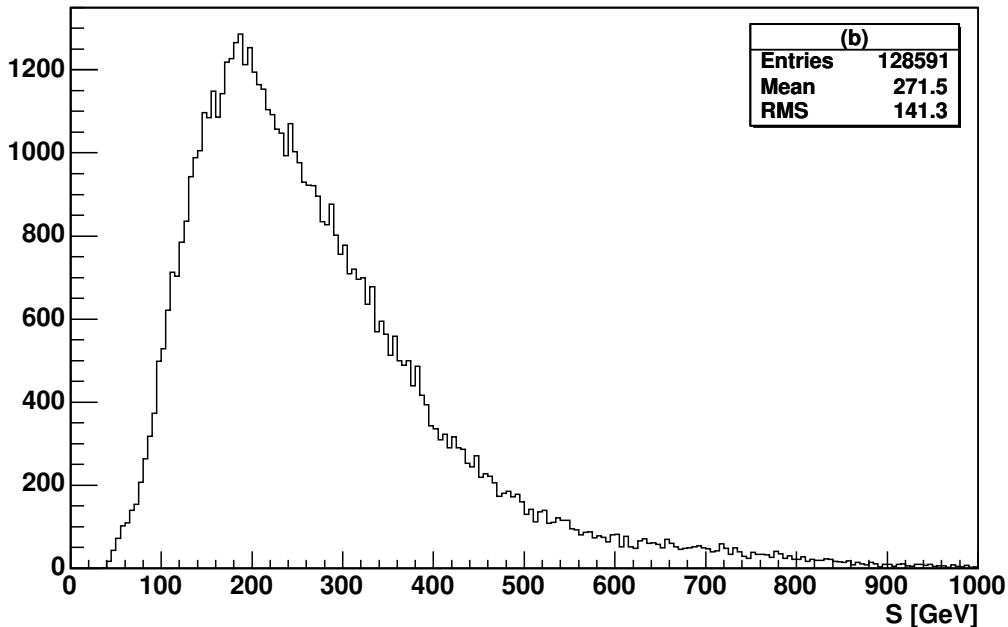
$$M_{12}^2 + M_{23}^2 + M_{13}^2 = p_3^2 + p_1^2 + p_2^2 = m_1^2 + m_2^2 + m_3^2 \equiv M^2.$$

Takže máme podmínku

$$0 \leq M_{12}^2 + M_{23}^2 = M^2 - M_{13}^2 \leq M^2.$$

Vynášíme-li proto M_{12}^2 a M_{23}^2 do grafu, bude oblast výskytu omezena trojúhelníkem. Tento graf se nazývá Dalitzův (*Dalitz plot*).

Tento postup lze aplikovat na interakci hadronů v nichž vznikají tři jety. K dispozici jsem měl data z D0 Run I. Na Obrázku č. 6.6 je vyneseno histogram těžišťové energie S .

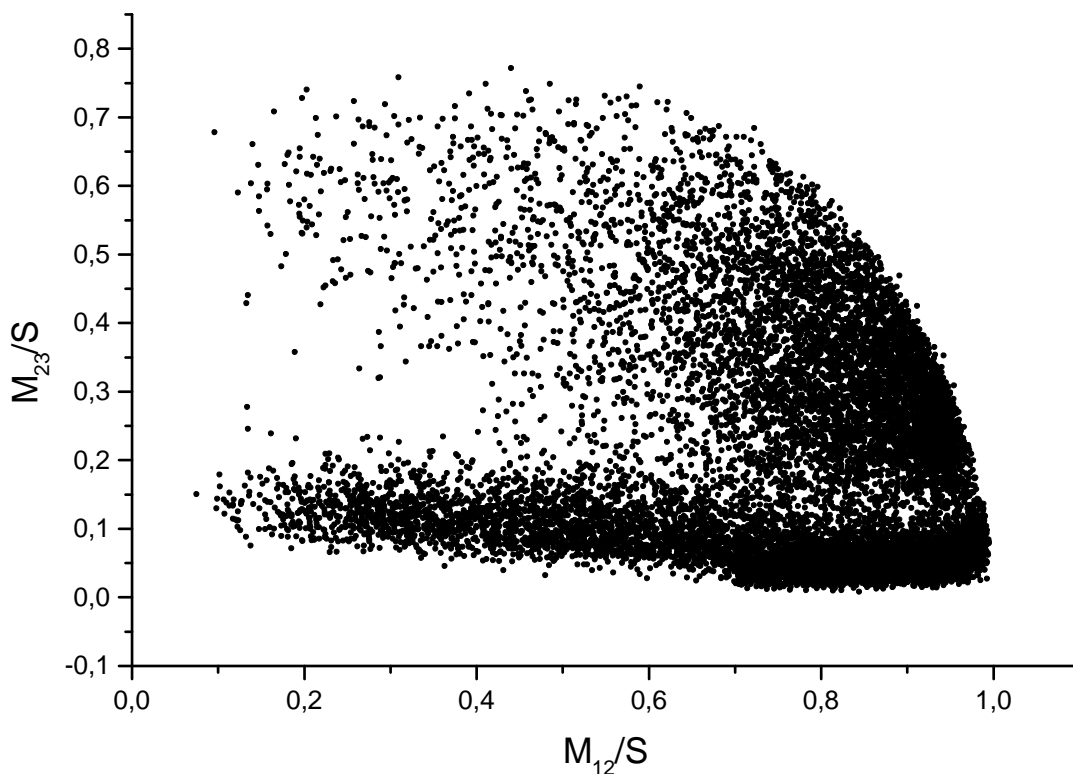


Obrázek 6.6: Histogram těžišťové energie jetů S (128591 eventů)

Obrázek 6.7 již znázorňuje Dalitzův graf této interakce. Na osách x , y jsou vyneseny efektivní hmoty jetů normované na těžišťovou energii. Protože se těžišťová energie mění (viz Obrázek č. 6.6), nejedná se přímo o trojúhelník. Dynamika QCD způsobuje, že útvar není homogenně vyplněn, jisté konfigurace konečného stavu jsou preferovány.

6.5 Monte Carlo simulace (Pythia)

Monte Carlo metody se používají k simulování procesů, které jsou příliš složité na to, aby je bylo možno analyticky popsat. Víme například že zajistý čas se rozpadne polovina množství radioaktivní látky, ale nevíme který konkrétní atom se rozpadne či ne. Výpočty jsou založeny

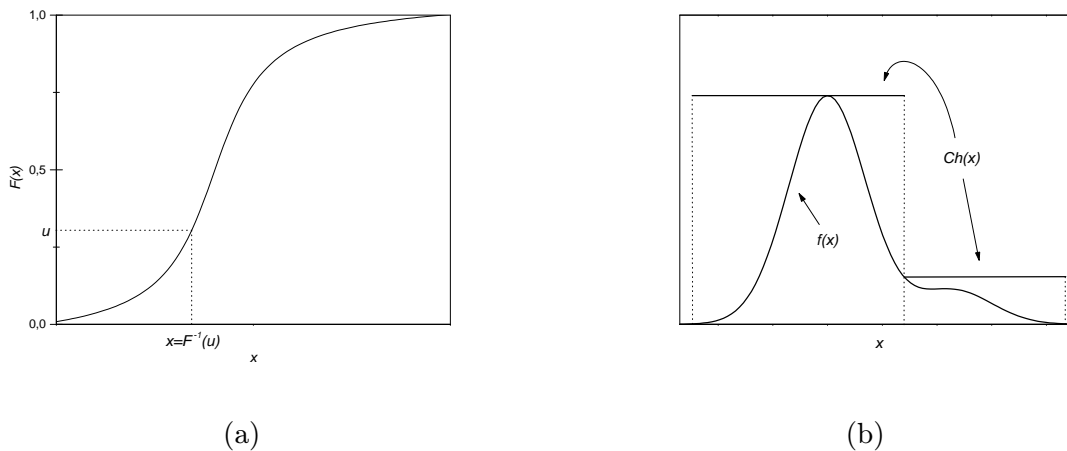


Obrázek 6.7: Dalitzův graf

na generátorech pseudonáhodných čísel, to jest řadě čísel z intervalu $\langle 0, 1 \rangle$ takových, že splňují jisté statistické požadavky na stejnoměrné rozložení. Zde tkví nemalý problém, neboť tyto požadavky nelze zcela zaručit - nekorelovanost, stejnoměrnost. Proto se v Monte Carlo simulátorech používá i více generátorů najednou, také z toho důvodu, že každý generátor se po čase začne opakovat od začátku.

Složité proces se rozdělí na mnoho dílčích kroků. V každém kroku se podle příslušných distribucí vybere jedna z možných událostí. K tomu potřebujeme přetransformovat naše náhodná čísla na jiná rozdělení a k tomu slouží řada metod. Uvedu **Inverzní metodu** a **Metodu přijmutí-zamítnutí (Von Neumannovu)** ².

²Acceptance-rejection method



Obrázek 6.8: K inverzní a von Neumannově metodě

Inverzní metoda

Buď $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}_0^+$ splňující

$$\int_{\mathbb{R}} f = 1,$$

a $F : \mathbb{R} \rightarrow \langle 0, 1 \rangle$ daná vztahem

$$F(x) := \int_{-\infty}^x f(t)dt.$$

Představuje-li tedy f hustotu pravděpodobnosti jistého procesu, pak $F(a)$ je pravděpodobnost toho, že $x < a$. Je-li a zvoleno s hustotou pravděpodobnosti $f(a)$, pak $F(a)$ je náhodná veličina s stejnoměrným rozdělením v intervalu $\langle 0, 1 \rangle$. Pro každé $x \in \mathbb{R}$ můžeme tedy najít právě jedno $u \in \langle 0, 1 \rangle$ (F je rostoucí) takové, že

$$u = F(x).$$

Stačí tedy za námi hledanou hodnotu (s hledaným rozložením) volit

$$x = F^{-1}(u).$$

Tato metoda je schematicky znázorněna na Obrázku č. 6.8 (a). Nevýhody této metody jsou nasnadě. K funkci f může být pracné, či nemožné najít primitivní funkci F a ta navíc nemusí mít pěknou inverzi.

Metoda přijmutí-zamítnutí (Von Neumannova)

Není-li tedy možno vyjádřit analyticky $F(x)$ můžeme použít následující metodu. Předpokládejme, že funkci existuje nějaká jednoduše generovatelná distribuce h (např. normovaná suma distribucí se stejnoměrným rozdělením) a konstanta C taková, že platí

$$f \leq Ch,$$

jak je znázorněno na Obrázku č. 6.8 (b). Jak f tak h jsou normalizovány na jedničku $C > 1$. Chceme-li generovat $f(x)$, nejprve generujeme kandidáta x podle $h(x)$. Dále vygenerujeme $u \in \langle 0, 1 \rangle$. Je-li

$$uCh(x) \leq f(x), \quad (6.3)$$

pak toto x přijmeme. Pokud neplatí (6.3), pak toto x zamítneme a začneme od začátku. Body $[x, uCh(x)]$ vyplňují celou plochu pod Ch , my akceptujeme ty, co padnou pod graf funkce f . Účinnost je tedy tím efektivnější, čím jsou si obsahy obou ploch bližší.

Veto algoritmus

Častým problémem jsou případy typu radioaktivního rozpadu. Pravděpodobnost že nastane jistá událost v čase t je dána funkcí $f(t)$, která je pozitivní. Navíc událost může nastat v čase t pouze tehdy, nenastala-li v dřívějším čase $t' < t$. Pravděpodobnost, že událost nenastala do času t je vyjádřena funkcí $N(t)$ a pravděpodobnost, že událost nastane v čase t funkcí $P(t)$. Pak platí

$$P(t) = -\frac{dN}{dt} = f(t)N(t). \quad (6.4)$$

Pro jednoduchost uvažujem, že proces začal v čase $t = 0$ a $N(0) = 1$.

Rovnice (6.4) má řešení

$$N(t) = N(0) \exp\left(-\int_0^t f(t') dt'\right) = N(0) \exp\left(-\int_0^t f(t') dt'\right),$$

a tedy

$$P(t) = f(t) \exp\left(-\int_0^t f(t') dt'\right).$$

Pokud je f konstantní dostáváme případ radioaktivního rozpadu. Má-li f primitivní funkci se známou inverzí, pak t snadno najdeme. Z (6.4) plyne

$$\int_0^t P(t') dt' = N(0) - N(t) = 1 - \exp\left(-\int_0^t f(t') dt'\right) = 1 - R,$$

odtud

$$F(0) - F(t) = \ln R, \quad t = F^{-1}(F(0) - \ln R).$$

Pokud opět funkce $f(t)$ není dostatečně „pěkná“ lze použít řadu metod, například Veto algoritmus:

1. Začni s $i = 0$ a $t_0 = 0$.
2. Přičti 1 k i , vygeneruj R , $t_i = G^{-1}(G(t_{i-1}) - \ln R)$, tj. podle $g(t)$ ale s podmínkou, že $t_i > t_{i-1}$.
3. Porovnej nově vygenerované R' s poměrem $f(t_i)/g(t_i)$; pokud je $f(t_i)/g(t_i) \leq R'$ pak se vrať k bodu 2.
4. Poslední t_i je zvolená hodnota.

Pythia

Jedním z Monte Carlo simulátorů je PYTHIA. Slouží k simulování srážek částic v oblasti vysokých energií. Scénář srážky je následující.

1. Sráží se dvě částice letící proti sobě. Každá částice je charakterizována partonovými distribucemi, které definují partonovou strukturu - zastoupení barev a rozdělení energie.
2. Jeden parton z obou částic vytvoří počáteční spršku rozpadů typu $q \rightarrow qg$.
3. Dva partony z obou spršek spolu interagují, nejčastěji vznikají opět dva partony. Tato interakce má rozhodující vliv na charakter celého procesu.
4. Vystupující partony se mohou opět rozpadat a vytvořit tak konečnou spršku.
5. Mechanismus QCD confinement zajistí, že barevné kvarky a gluony nejsou pozorovatelné. Dochází k barevné neutralizaci na bezbarvé hadrony.
6. Mnoho takto vytvořených hadronů je nestabilních a rozpadá se dále.

PYTHIA umí simulovat kolem 240 různých těžkých procesů (bod 3.). Program generuje co nejpodrobnější eventy a simuluje tak činnost například e^+e^- , pp či ep collideru. Pomocí Monte Carlo simulátorů můžeme porovnávat teorii s daty získanými ve srážkových experimentech.

7 Závěr

Seznámil jsem se se základy Kvantové teorie pole a Standardního modelu elektroslabých interakcí. Objevení intermediálních bosonů W a Z potvrdilo předpovědi SM, zůstává však mnoho otázek, například zda se podaří objevit Higgsův boson.

Dále jsem na interakcích s třemi jety v koncovém stavu demonstroval, pomocí Dalitzova grafu (Obrázek č. 6.7), existenci dynamiky řídící tyto procesy - Kvantové chromodynamiky. V závěrečné části jsem se dotkl tematiky Monte Carlo simulací a zmínil několik metod pro generování různých distribucí. Tyto simulátory umožňují generovat události podle teorie a tak ji porovnávat s experimentem. Nutno však podotknout, že pro tyto simulace je potřeba znát strukturní funkce příslušných hadronů, které jsme nuceni určovat experimentálně, neboť je zatím není možno z teorie spočítat.

Seznam obrázků

3.1	Smyčkové korekce základního diagramu	15
3.2	Feynmanův diagram procesu $e^+e^- \rightarrow \mu^+\mu^-$	16
4.1	Feynmanův diagram srážky dvou kvarků	20
5.1	Feynmanova pravidla příslušející interakčním diagramům W, Z bosonů	24
6.1	Hluboce nepružný rozptyl leptonu na protonu	26
6.2	Závislost kvarkových a gluonových distribučních funkcí na Q^2 , převzato z [9]	27
6.3	Drell-Yanův proces	28
6.4	Teoretické předpovědi úplného účinného průřezu produkce W^\pm, Z^0 v pp a $p\bar{p}$ srážkách jako funkce \sqrt{s} , a data z UA1, UA2, CDF a D0, převzato z [9]	29
6.5	K gluonové emisi	30
6.6	Histogram těžišťové energie jetů S (128591 eventů)	31
6.7	Dalitzův graf	32
6.8	K inverzní a von Neumannově metodě	33

Seznam tabulek

1.1	Tři rodiny hmoty	2
3.1	Feynmanova pravidla v QED	15
4.1	Feynmanova pravidla v QCD	19

Literatura

- [1] Michelangelo L. Mangano: *Introduction to QCD*, CERN Summer school 1998
- [2] Sjöstrand, T., Lönnblad, L.: *PYTHIA 6.2 Physics and Manual*, hep-ph/0108264
- [3] Chýla, J.: *Quark, partons and Quantum Chromodynamics*,
www-hep.fzu.cz/Theory/notes/text.pdf
- [4] Verlinde, E.: *An Introduction to Quantum Field Theory*, CERN Summer school 1997
- [5] Blank J., Exner P., Havlíček M.: *Lineární operátory v kvantové fyzice*, Karolinum 1993
- [6] Hořejší, J.: *Fundamentals of Electroweak theory*, Karolinum 2002
- [7] Ryder, Lewis H.: *Quantum Field Theory*, Cambridge University Press
- [8] Braun, V.M.: *Applications of QCD*, CERN Summer school
- [9] Stirling, W.J.: *Perturbative QCD*, CERN Summer school
- [10] 1998 European School of High-energy Physics