

České vysoké učení technické v Praze
Fakulta jaderná a fyzikálně inženýrská

Rešeršná práca

Martin Gajdoš

České vysoké učení technické v Praze
Fakulta jaderná a fyzikálně inženýrská

Poruchové rozvoje v kvantové teorii pole

Martin Gajdoš

Katedra fyziky

Akademický rok: 2003/2004

Školitel: prof. RNDr. Jiří Chýla, CSc.

Konzultant: prof. RNDr. Jan Fischer, DrSc.

Obsah

Predhovor	5
Úvod	6
1 Súčet radu, divergentné a asymptotické rady	7
1.1 Súčet radu, základné pojmy	7
1.2 Oblasti za kruhom konverencie; regulárny prípad	10
1.2.1 Roztiahnutie Borelovho polygónu	10
1.2.2 Sčítacie metódy s momentovou konštantou	13
1.2.3 Konformné zobrazenie oblasti analyticity na jednotkový kruh	19
1.3 Singulárny prípad	21
1.3.1 Asymptotický rad	22
1.3.2 Silné asymptotické podmienky	23
2 Poruchové rozvoje v kvantovej teórii	30
2.1 Správanie sa vysokých rádov, intuitívne poňatie	30
2.2 Poruchový počet a kvantová mechanika	31
2.2.1 Anharmonický oscilátor	32
2.2.2 Potenciály v kvantovej mechanike	33
2.3 Poruchový počet a kvantová teória poľa	34
2.3.1 Príklady správania sa členov poruchových rozvojev v kvantovej teórii poľa	35
3 Borelovské sčítanie v QED a QCD	38
Záver	44
Literatúra	45

Zoznam obrázkov

1.1	Oblasti definovateľnosti súčtu radu $\sum_{n=0}^{\infty} z^n$	9
1.2	K definícii $MLS(f)$ - vysvetlenie symbolov: C . . . kruh konverencie radu $f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n z^n$; P_1, P_2, P_3, P_4 . . . Borelov polygón (viď. Definícia 1.1.3); P'_1, P'_2, P'_3, P'_4 . . . rozťahnutie Borelovho polygónu (viď. Veta 1.2.1); R_1, R_2, R_3, R_4 . . . hranica $MLS(f)$ (viď. Definícia 1.2.1, Veta 1.2.3)	12
1.3	K oblastiam analyticity vo Watsonovej a Nevanlinnovej vete	25
1.4	K oblasti analyticity funkcie $f(z)$, vzťahy (1.48), (1.49)	26
1.5	K lievikovitej oblasti H_R	28
3.1	Oblasť analyticity dvojbodovej Greenovej funkcie QCD v g^2 je práve lievikovitého typu	42
3.2	Borelovská rovina v prípade QCD	43

Predhovor

V práci som sa zaoberal použitím metód poruchového počtu v kvantovej teórii s dôrazom na aplikácie v kvantovej teórii poľa. Systematický matematický úvod práce oboznámi čitateľa so základnými matematickými pojmami pre prácu s divergentnými mocninnými radmi, na ktoré potom nadviažu špeciálnejšie vety, definujúce sčítanie divergentných radov v konkrétnych situáciach. Druhá časť práce je venovaná prehľadu poruchových rozvojev fyzikálnych veličín konkrétnych fyzikálnych sústav. V závere možno nájsť argumenty hovoriace o nemožnosti aplikácie Borelovskej metódy sčítania divergentných radov v úlohách QED a QCD.

Ďalej by som chcel touto formou vyjadriť veľké poďakovanie prof. RNDr. J. Chýlovi, CSc. za veľmi cenné pripomienky a poskytnuté konzultácie.

Úvod

Použitie metód poruchového počtu je pre fyziku veľmi dôležité. V kvantovej teórii sa takýto postup ukazuje byť nutným. Exaktne sme schopní riešiť veľmi málo problémov, čím sme nútení pristúpiť k istým zjednodušeniam. Vypustením celého radu vedľajších, i keď častokrát závažných efektov, prevedieme nami uvažovaný problém na iný, ľahšie riešiteľný. Avšak takýmto počínaním môžeme veľmi ľahko ohroziť jeho fyzikálnu relevanciu, nakoľko zjednodušenie môže byť natoľko silné, že takto „pretransformovaný“ problém sa už ani z ďaleka nemusí podobáť tomu pôvodnému.

Poruchový počet túto hrozbu obchádza nasledovným spôsobom. Ak poznáme riešenie f_0 zjednodušenej rovnice, môžeme do nej spätne zaviesť korekčné členy, popisujúce pôvodný prípad a výsledné riešenie

$$f(g) \tag{1}$$

novej rovnice vyjadriť formálne ako mocninný rad v mocninách parametra g , ktorý tieto korekcie charakterizuje. Pôvodné riešenie f_0 potom predstavuje nultú aproximáciu poruchového radu:

$$\sum_{n=0}^{\infty} f_n g^n. \tag{2}$$

Poruchový parameter g (môže ich byť aj viac) je malé číslo, pomocou ktorého môžeme napísať hamiltonián sústavy H v tvare $H = H_0 + gV$, kde H_0 je jeho „jednoduchá“ časť, ktorej riešenie f_0 poznáme. Automaticky predpokladáme, že povaha úlohy nám umožňuje určiť koeficienty radu (2) výpočtom. Funkcia $f(g)$ môže v tomto prípade predstavovať ľubovoľnú fyzikálnu veličinu.

Ak sa nám poradilo formálne rad nájsť, je teraz dôležité vyjasniť si presný zmysel výrazu (2) a potom určiť v akom vzťahu je rad k hľadanej funkcii (1). Ideálna situácia nastáva v prípade, ak môžeme rad (2) interpretovať ako Taylorov rad funkcie (1). Tento prípad však v praxi nastáva zriedkavo, nakoľko rad nekonverguje pre žiadnu nenulovú hodnotu g . Preto sa v ďalšom ponúka vyšetriť správanie sa radu pre komplexné g , pretože rozloženie singularít v komplexnej rovine má na konvergenciu mocninného radu pre reálne g výrazný vplyv. Takto sa prirodzeným spôsobom od problému poruchového radu dostávame k využitiu analytických funkcií. Tento fakt je o to dôležitejší, že napríklad F. Dyson [1] už v roku 1952 argumentoval nemožnosťou interpretácie radu (2) pre žiadne nenulové g ako Taylorovho rozvoja funkcie (1).

Kapitola 1

Súčet radu, divergentné a asymptotické rady

Všeobecne sa predpokladá, že poruchové rozvoje v kvantovej teórii sú vo väčšine prípadov divergentné. Náš problém však nie je v tom, či je výsledný poruchový rad konvergentný alebo nie, ale v tom, či jednoznačne určuje rozvíjanú funkciu. Ako sme už pripomenuli, poruchová teória je nám v princípe schopná poskytnúť všetky koeficienty mocninného radu, čo nám umožňuje vyšetriť jeho konvergenciu. Nás však v prvom rade zaujíma, či tento rad jednoznačne určuje fyzikálne relevantnú funkciu. Ako sa ďalej ukazuje, aj divergentný rad môže určovať danú funkciu jednoznačne, pokiaľ sú splnené určité dodatočné podmienky. Naopak však platí, že každý konvergentný túto vlastnosť mať nemusí.

1.1 Súčet radu, základné pojmy

Výrokom „nájsť súčet radu“

$$f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n z^n \quad (1.1)$$

sa rozumie dať mu presný zmysel pre nejaké z , pre ktoré tento rad diverguje.

Definícia 1.1.1 *Buď $\mathcal{S}$ sčítacia metóda radu (1.1). Potom $\mathcal{S}$ nazveme **regulárna** ak platí*

$$\mathcal{S}\left(\sum_{n=0}^{\infty} a_n z^n\right) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n z^n$$

*zakaždým, keď pravá strana konverguje, $\mathcal{S}$ nazveme **analytická** ak platí*

$$\mathcal{S}\left(\sum_{n=0}^{\infty} a_n z^n\right) = f(z)$$

zakaždým, keď $\mathcal{S}\left(\sum_{n=0}^{\infty} a_n z^n\right)$ existuje (zatiaľčo $f(z)$ označuje analytické pokračovanie $\sum_{n=0}^{\infty} a_n z^n$).

Ozrejmíme si ďalej, čo sa rozumie pod termínom *Borelovské sčítanie*.

Definícia 1.1.2 Rad (1.1) nazveme *Borelovsky sčítateľný* ak platí

1. rad

$$B(t) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n \frac{t^n}{n!}, \quad (1.2)$$

nazývaný Borelovská transformácia radu (1.1) konverguje vo vnútri nejakého kruhu $|t| < \delta$, $\delta > 0$;

2. $B(t)$ má analytické pokračovanie na nejakom okolí pozitívnej reálnej polosy $\operatorname{Re} t \geq 0$;

3. integrál

$$g(z) = \frac{1}{z} \int_0^{\infty} e^{-\frac{t}{z}} B(t) dt \quad (1.3)$$

konverguje (nie nutne absolútne) pre nejaké $z \neq 0$.

Ak sú teda splnené podmienky v predchádzajúcej definícii, potom $B(t)$ resp. $g(t)$ nazývame *Borelovská transformácia* resp. *Borelovský súčet* radu (1.1).

Pred ďalším vykladom sa zastavíme na jednoduchom motivačnom probléme. Zoberme si jednoduchý príklad a síce

$$f(z) = \frac{1}{1-z}. \quad (1.4)$$

Táto funkcia sa vo vnútri jednotkového kruhu so stredom v počiatku rovná súčtu svojho konvergentného Taylorovho radu

$$\sum_{n=0}^{\infty} z^n. \quad (1.5)$$

Kedže každý mocninný rad konverguje vo vnútri svojho kruhu konverencie rovnomerne k svojej súčtovej funkcii, môžeme bez obáv zameniť sumu a integrál a dostávame¹

¹využili sme vlastnosti Γ -funkcie a síce, že platí $\Gamma(n+1) = \int_0^{\infty} t^n e^{-t} dt = n!$

$$\sum_{n=0}^{\infty} z^n = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{z^n}{n!} \int_0^{\infty} t^n e^{-t} dt = \int_0^{\infty} e^{-t} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(zt)^n}{n!} dt = \int_0^{\infty} e^{-(1-z)t} dt. \quad (1.6)$$

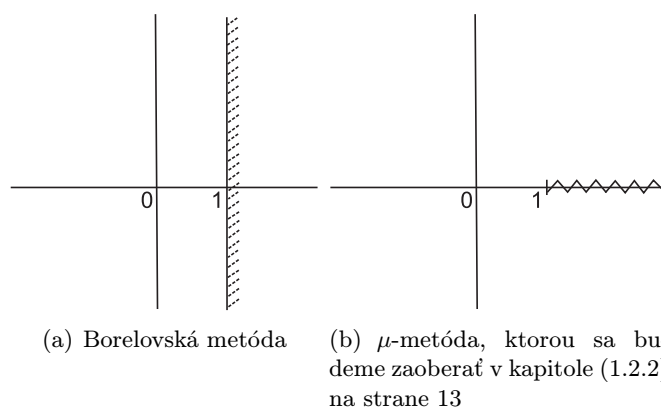
Integrál na pravej strane (1.6) však konverguje aj mimo jednotkový kruh a síce na celej komplexnej polrovine

$$\operatorname{Re} z < 1. \quad (1.7)$$

Preto sa prirodzene ponúka možnosť definovať súčet radu na ľavej strane (1.6) ako

$$\int_0^{\infty} e^{-(1-z)t} dt \quad (1.8)$$

všade tam, kde integrál (1.8) konverguje. Takýto spôsob súčtu je regulárny a analytický v zmysle definície (1.1.1), pretože integrál je holomorfnou funkciou v premennej z .



Obr. 1.1: Oblasti definovateľnosti súčtu radu $\sum_{n=0}^{\infty} z^n$

Na tomto jednoduchom príklade sme si ukázali jednu z hlavných výhod Borelovskej metódy sčítania radov, ktorou je definícia súčtu radu ďaleko mimo oblasť, kde pôvodný rad bol konvergentný. V monografii [2] je možné nájsť nasledujúci teorém.

Veta 1.1.1 *Buď $f(z)$ hlavná vetva analytickej funkcie regulárnej v bode $z = 0$,*

$$f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n z^n. \quad (1.9)$$

Potom integrál tohto radu

$$\int_0^{\infty} e^{-t} \sum_{n=0}^{\infty} a_n \frac{(zt)^n}{n!} dt = \int_0^{\infty} e^{-t} B(zt) dt, \quad (1.10)$$

existuje vo vnútri Borelovho polygónu a je v ňom rovný analytickej funkcii $f(z)$.

Vo vete (1.1.1) sa objavuje nám doteraz neznámy pojem, ktorý nám ozrejní nasledujúca definícia.

Definícia 1.1.3 *Buď z_i pozícia i -tej singularity funkcie $f(z)$, $i = 1, 2, 3, \dots, N$, kde N je číslo udávajúce počet singularít funkcie $f(z)$ a nech R_i sú polpriamky spájajúce z_i s počiatkom a smerujúce za z_i do nekonečna. Zostrojme ďalej kolmicu P_i na R_i v bode $z = z_i$ pre každé $i = 1, 2, 3, \dots, N$. Potom časť komplexnej roviny uzavretej priamkami P_i a obsahujúcu počiatok nazveme Borelov polygón.*

Veta (1.1.1) nám zároveň odhaľuje hlavné nedostatky Borelovej metódy. Uvažovali sme na počiatku *regulárny prípad*, čo znamená, že polomer konvergenzie R radu bol nenulový. Ako vidieť, Borelova metóda nám umožňuje definovať súčet radu ďaleko za jeho polomerom konvergenzie ako analytickú funkciu. Toto analytické pokračovanie je však zúžené iba na Borelov polygón a hranicu mu vždy tvoria kolmice P_i prechádzajúce každým z bodov z_i . Z tohto je zrejmé, že mimo Borelov polygón môže funkcia $f(z)$ naďalej analytická, avšak už nie je vyjadriteľná pomocou Borelovho integrálu (1.10).

Na rad teda prichádza otázka ako konštruovať analytické predĺženie radu (1.1) mimo Borelov polygón. Do úvahy prichádzajú nasledovné možnosti:

1. Roztiahnutie Borelovho polygónu na väčšiu oblasť, ideálne na celú oblasť analyticnosti funkcie $f(z)$,
2. Konformné zobrazenie oblasti analyticnosti do jednotkového kruhu.

1.2 Oblasti za kruhom konvergenzie; regulárny prípad

Nech aj naďalej má rad (1.1) nenulový polomer konvergenzie. V ďalšom výklade si ukážeme už spomínané metódy konštrukcie analytického predĺženia do oblastí, kde nám takúto konštrukciu Borelovské sčítanie neumožňuje.

1.2.1 Roztiahnutie Borelovho polygónu

V samej podstate veci ide o zovšeobecnenie Borelovej metódy. Jednoducho si to môžeme opäť ilustrovať na našom príklade radu (1.5). Borelovská metóda nám umožnila definovať súčet v každom bode komplexnej polroviny $\operatorname{Re} z > 1$. Hraničnou priamkou je zrejme priamka $\operatorname{Re} z = 1$. Naš záujem teraz spočíva v zámene tejto pôvodnej hraničnej priamky, ktorú si môžeme vyjadriť napríklad v tvare

$$r = (\cos \varphi)^{-1}, \quad z = re^{i\varphi}, \quad |\varphi| < \frac{1}{2}\pi, \quad (1.11)$$

za krivku

$$r = \left[\cos \left(\frac{\varphi}{\alpha} \right) \right]^{-\alpha}, \quad |\varphi| < \frac{1}{2}\pi\alpha, \quad (1.12)$$

kde opäť $z = re^{i\varphi}$ a $\alpha > 0$. Tú časť komplexnej polroviny, ktorá sa nachádza naľavo od krivky (1.12), čiže oblasť

$$r^{1/\alpha}[\cos(\varphi/\alpha)] < 1 \quad (1.13)$$

označíme v zhode s [7] ako $\mathcal{B}_\alpha(f)$, kde $f = \frac{1}{1-z}$ v nami uvažovanom prípade. Ľahko sa môžeme presvedčiť, že oblasť (1.12) zasahuje v pravej polrovine ďaleko za priamku $\operatorname{Re} z = 1$, obzvlášť ak volíme α veľmi malé.

Prechod k zovšeobecneniu Borelovej metódy je už teraz priamočiary. Uvažujme ľubovoľnú funkciu $f(z)$ definovanú radom (1.1). Borelov polygón dostaneme z predchádzajúcej konštrukcie pre voľbu $\alpha = 1$, čiže ide o oblasť $\mathcal{B}_1(f)$. Oblasť $\mathcal{B}_\alpha(f)$ je väčšia ako Borelov polygón a zároveň ho obsahuje pokiaľ volíme $\alpha < 1$. Príslušné zovšeobecnenie vety (1.1.1) ako sa uvádza v [7] je nasledovné:

Veta 1.2.1 *Buď $f(z)$ hlavná vetva analytickej funkcie regulárnej v bode $z = 0$,*

$$f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n z^n.$$

Potom integrál $I(z_0)$

$$I(z_0) = \int_0^{\infty} t^{\beta-1} e^{-t} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{a_n (t^\alpha z_0)^n}{\Gamma(\alpha n + \beta)} dt, \quad (1.14)$$

konverguje práve vtedy, keď $z_0 \in \mathcal{B}_\alpha(f)$. Potom

$$f(z_0) = I(z_0).$$

Konvergenca je absolútna a rovnomerná na každej kompaktnej podmnožine oblasti $\mathcal{B}_\alpha(f)$ s nenulovou vzdialenosťou od hranice $\mathcal{B}_\alpha(f)$ a za znakom integrálu je možno derivovať, takže platí

$$f'(z) = \int_0^{\infty} t^{\beta-1} e^{-t} \sum_{n=0}^{\infty} n a_n z^{n-1} \frac{t^\alpha}{\Gamma(\alpha n + \beta)} dt. \quad (1.15)$$

Veta (1.2.1) nám odhaľuje cenu, ktorú musíme zaplatiť za roztiahnutie Borelovho polygónu. Ako si môžeme všimnúť, tak pri voľbe $\alpha < 1$, kedy skutočne dochádza k roztiahnutiu polygónu, dochádza k menšiemu potlačovaniu koeficientov a_n v rovnici (1.14). Namiesto faktoru $n!$ v prípade Borelovej metódy, musíme použiť faktory $\Gamma(\alpha n + \beta)$.² Preškáľované koeficienty a_n sa teda zmenia z pôvodných Borelovských $a_n/n!$ na nové $a_n/\Gamma(\alpha n + \beta)$. Dôsledkom tohto roztiahnutia Borelovho polygónu potom je, že sčítanie pre malé hodnoty parametra α je použiteľné na menšiu triedu postupností koeficientov $\{a_n\}$ ako pri voľbe väčšieho α .

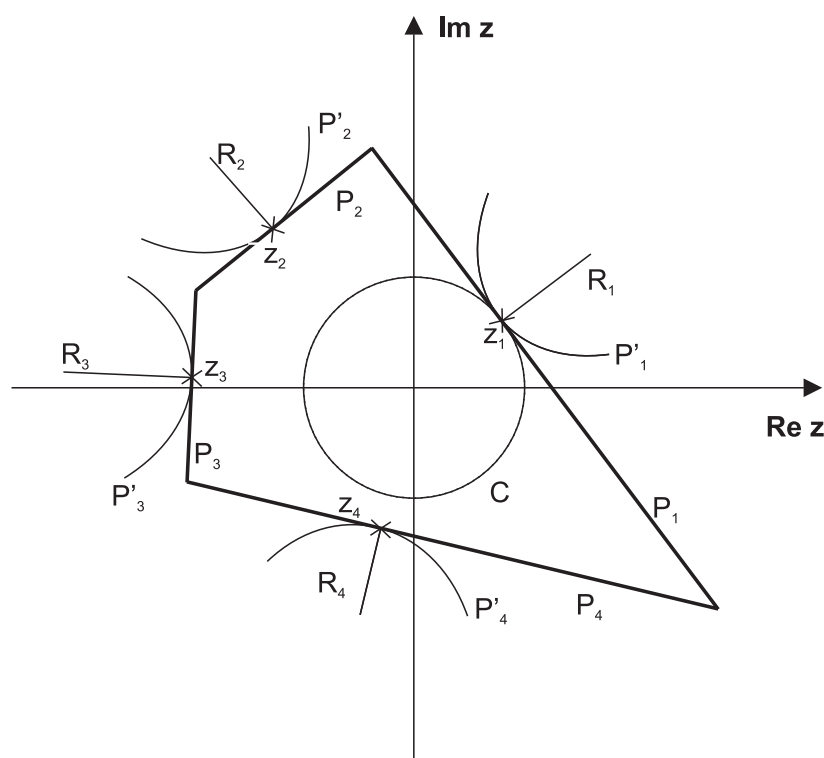
²Borelovu metódu dostávame pri voľbe $\alpha = 1$, $\beta = 1$

Poznámka 1.2.1 Oblasť $\mathcal{B}_\alpha(f)$ je invariantná voči derivácii, čo znamená, že platí $\mathcal{B}_\alpha(f') = \mathcal{B}_\alpha(f)$. Takže na základe vety (1.2.1) dostávame ďalšie integrálne vyjadrenie derivácie $f'(z)$:

$$f'(z) = \int_0^\infty t^{\beta-1} e^{-t} \sum_{n=1}^\infty n a_n \frac{(zt^\alpha)^{n-1}}{\Gamma(\alpha(n-1) + \beta)} dt. \quad (1.16)$$

Zavedme si teraz ďalší, veľmi dôležitý pojem.

Definícia 1.2.1 Buď z_i pozícia i -tej singularity funkcie $f(z)$, $i = 1, 2, 3, \dots, N$, kde N je číslo udávajúce počet singularít funkcie $f(z)$ a nech R_i sú polpriamky spájajúce z_i s počiatkom a smerujúce za z_i do nekonečna. Rozsekajme teraz komplexnú rovinu pozdĺž tej časti polpriamok R_i , ktorá sa nachádza za singularitami z_i a tieto rezy z komplexnej roviny vyberme. Tá časť komplexnej roviny, ktorá po tomto procese ostane sa nazýva Mittag-Lefflerova hviezda funkcie f a značíme ju $MLS(f)$.³



Obr. 1.2: K definícii $MLS(f)$

³z anglického *Mittag-Leffler star*

Tento pojem si môžeme ilustrovať na našom príklade, kedy funkciou $f(z)$ je funkcia $\frac{1}{1-z}$. V tom prípade je $\text{MLS}(\frac{1}{1-z})$ rovná komplexnej rovine, z ktorej vynecháme polpriamku $[1, \infty]$. Grafické znázornenie je na obrázku 1.1(b).

Na základe definície (1.2.1) teraz môžeme povedať, že ak sa α bude blížiť neobmedzene k nule, potom oblasť $\mathcal{B}_\alpha(f)$ sa bude blížiť k $\text{MLS}(f)$. Poznamenajme ďalej, že pokiaľ $\alpha < \alpha'$, tak potom $\mathcal{B}_\alpha(f) \supset \mathcal{B}_{\alpha'}(f)$. Triviálne platí taktiež limita $\lim_{\alpha \rightarrow 0} \Gamma(\alpha n + \beta) = \Gamma(\beta)$.

1.2.2 Sčítacie metódy s momentovou konštantou

Veta (1.2.1) nám umožňuje pri voľbe ľubovoľne malého kladného parametra α definovať súčet radu v oblasti ľubovoľne blízkej $\text{MLS}(f)$. Ako si ale môžeme všimnúť, nemôžeme voliť $\alpha = 0$. Z toho dôvodu nám funkcia $I(z)$ definovaná vzťahom (1.14) nikdy nemôže reprezentovať súčet radu v celej oblasti holomorficity funkcie $f(z)$.

Veľkou výhodou však je, že existujú sčítacie metódy, ktoré reprezentujú rozvíjanú funkciu $f(z)$ v celom $\text{MLS}(f)$. Týmto mocným matematickým nástrojom sú tzv. *sčítacie metódy s momentovou konštantou*. Môžeme ich chápať ako ďalší druh zovšeobecnenia už všeobecnej Borelovej metódy, ktorú popisuje veta (1.2.1).

Definujme si tieto metódy v zhode s prameňom [2].

Definícia 1.2.2 *Momentová konštanta μ_n je číslo v tvare*

$$\mu_n = \int_0^\infty t^n d\chi, \quad (1.17)$$

kde $\chi = \chi(t)$ je ohraničená a rastúca funkcia premennej x taká, že Stieltjesov integrál (1.17) konverguje pre každé n .

Ak ξ je dolná hranica čísel t , pre ktoré

$$\int_t^\infty d\chi(u) = 0,$$

potom

$$\int_{\xi+0}^\infty d\chi(u) = 0, \quad \int_t^\infty d\chi(u) > 0 \quad (t < \xi)$$

a

$$\mu_n = \int_0^\infty t^n d\chi = \int_0^{\xi-0} t^n d\chi + \{\chi(\xi+0) - \chi(\xi-0)\}\xi^n,$$

pokiaľ je ξ konečné. Zvyčajne však ξ je ∞ . Pre konečné ξ ďalej predpokladajme, že χ je spojitá v ξ .

Označme

$$a(t) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{a_n}{\mu_n} t^n, \quad (1.18)$$

potom formálnou integráciou tohto radu člen po člene dostávame

$$\int_0^{\infty} a(t) \, d\chi = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{a_n}{\mu_n} \int_0^{\infty} t^n \, d\chi = \sum_{n=0}^{\infty} a_n. \quad (1.19)$$

Prirodzene sa nám teda ponúka vziať integrál z ľavej strany (1.19) za základ novej definície súčtu $\sum_{n=0}^{\infty} a_n$.

Definícia 1.2.3 *Buď daná postupnosť $\{a_n\}$. Položme*

$$\int_0^{\infty} a(t) \, d\chi = s. \quad (1.20)$$

Potom

1. *ak $\xi = \infty$, rad (1.18) konverguje pre každé t a*

$$\lim_{T \rightarrow \infty} \int_0^T a(t) \, d\chi = s,$$

2. *ak $\xi < \infty$, $\chi(\xi + 0) - \chi(\xi - 0) = 0$, rad (1.18) konverguje pre $0 < t < \xi$ a*

$$\int_0^{\xi-0} a(t) \, d\chi = \lim_{T \rightarrow \xi-0} \int_0^T a(t) \, d\chi = s.$$

A teda v oboch prípadoch platí

$$\sum_{n=0}^{\infty} a_n = s(\mu_n). \quad (1.21)$$

Platí nasledujúca veta:

Veta 1.2.2 *Metóda (μ_n) je regulárna.*

Všeobecne však neplatí, že by takáto metóda bola aj analytická. Ak však zvolíme momentovú postupnosť $\{\mu_n\}$ ako

$$\mu_n = \int_0^{\infty} \exp(-\exp(t)) t^n dt, \quad (1.22)$$

sčítacia metóda s takouto momentovou postupnosťou bude poskytovať analytické predĺženie pravej strany rovnice (1.9) v celom $\text{MLS}(f)$ [7]. Táto metóda prirodzene vyhovuje definícii podľa [2], a preto na základe vety (1.2.2) je regulárna. Ďalšie vlastnosti momentovej postupnosti $\{\mu_n\}$ sú obsiahnuté v nasledujúcej lemme:

Lemma 1.2.1 *Bud' μ_s funkcia definovaná ako*

$$\mu_s = \int_0^{\infty} \exp(-\exp(t)) t^s dt \quad (1.23)$$

Potom

1. *má meromorfné predĺženie na celú komplexnú rovinu s jednoduchými pólmi na zápornej reálnej osi,*
2. *jej asymptotické správanie pre s idúce do nekonečna, $|\arg s| < \pi$ je určené len sedlovým bodom a*

$$\mu_s \sim \sqrt{2\pi \frac{\ln s}{s}} \exp\left(-\frac{s}{\ln s}\right) \left[\ln\left(\frac{s}{\ln s}\right)\right]^s, \quad (s \rightarrow \infty) \quad (1.24)$$

rovnomerne pre $|\arg s| < \pi - \varepsilon$ a $\varepsilon > 0$ ľubovoľné, kde sedlový bod je určený rovnicou

$$e^t t = s \quad (1.25)$$

s aproximatívnym riešením

$$t = \ln\left(\frac{s}{\ln s}\right) + \frac{\ln \ln s}{\ln s} + \mathcal{O}\left(\frac{\ln \ln s}{\ln s}\right)^2, \quad (s \rightarrow \infty). \quad (1.26)$$

Poznámka 1.2.2 *Analogické tvrdenie je možno dokázať [7] aj pre váhovú funkciu $\chi(t) = \exp(-e_k(t))$, kde $e_k(t)$ je k -násobná exponenciálna funkcia*

$$e_k(t) = \exp(\exp(\dots(\exp t)\dots)),$$

kde k je ľubovoľné nezáporné celé číslo. Sedlový bod je potom daný rovnicou

$$e_k(t) e_{k-1}(t) \dots e^t t = s.$$

V ďalšom bude pre nás dôležité určiť asymptotické správanie sa momentovej funkcie $F(t)$ definovanej ako

$$F(t) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{t^n}{\mu_n}. \quad (1.27)$$

Dôvod je prostý. Pre $|z| < 1$ totiž platí

$$\int_0^{\infty} \exp(-\exp t) F(tz) \, dt = \sum_{n=0}^{\infty} z^n = \frac{1}{1-z}, \quad (1.28)$$

čo je dôsledok regularity μ -metódy [2]. Na základe tvrdenia lemy (1.2.1) je funkcia $F(t)$ celistvá.

Pokiaľ $F(t)$ nerastie pre t idúce do nekonečna a $|\arg t| > 0$ rýchlejšie ako $\exp |t|^A$, kde A je konštanta, potom integrál (1.28) konverguje absolútne pre $\forall z \in \text{MLS}(\frac{1}{1-z})$, MLS Cauchyho jadra $\frac{1}{1-z}$ a poskytuje nám analytické predĺženie radu $\sum_{n=0}^{\infty} z^n$ z jednotkového kruhu na celú $\text{MLS}(\frac{1}{1-z})$.

V ďalšom opäť uvažujme funkciu $f(z)$, ktorá je hlavnou vetvou analytickej funkcie regulárnej v počiatku. Potom na základe Cauchyho integrálneho vzorca dostávame

$$\begin{aligned} f(z) &= \frac{1}{2\pi i} \oint_C \frac{f(u)}{u-z} \, du = \frac{1}{2\pi i} \oint_C \frac{f(u)}{u} \frac{1}{1-\frac{z}{u}} \, du \\ &= \frac{1}{2\pi i} \oint_C \frac{f(u)}{u} \, du \int_0^{\infty} \exp(-\exp t) F\left(\frac{tz}{u}\right) \, dt \\ &= \frac{1}{2\pi i} \oint_C \frac{f(u)}{u} \, du \int_0^{\infty} \exp(-\exp t) \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{\mu_n} \left(\frac{tz}{u}\right)^n \, dt \end{aligned} \quad (1.29)$$

pre každú jednoduchú krivku C takú, že v jej vnútrajšku neleží žiadna singularita funkcie $f(z)$. Ak naviac krivka C spĺňa vlastnosť, že $\{\frac{z}{u} | u \in \mathbb{C}\} \subset \text{MLS}(\frac{1}{1-z})$, potom môžeme zameniť poradie integrácie v rovnici (1.29) a dostávame nasledovný vzťah

$$\begin{aligned} f(z) &= \frac{1}{2\pi i} \oint_C \frac{f(u)}{u} \, du \int_0^{\infty} \exp(-\exp t) \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{\mu_n} \left(\frac{tz}{u}\right)^n \, dt \\ &= \int_0^{\infty} \exp(-\exp t) \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(tz)^n}{\mu_n} \frac{1}{2\pi i} \oint_C \frac{f(u)}{u^{n+1}} \, du \, dt \\ &= \int_0^{\infty} \exp(-\exp t) \sum_{n=0}^{\infty} \frac{a_n (tz)^n}{\mu_n} \, dt, \end{aligned} \quad (1.30)$$

kde a_n je Taylorov koeficient funkcie $f(z)$ v počiatku definovaný ako

$$a_n = \oint_C \frac{f(u)}{u^{n+1}} du.$$

Integrál (1.30) konverguje práve vtedy, keď $z \in \text{MLS}(f)$.

K tomu, že metóda s momentovou postupnosťou (1.22) skutočne dáva analytické predĺženie Taylorovho rozvoja funkcie $f(z)$ konštruovaného v počiatku stačí, aby bola skutočne splnená spomenutá požiadavka asymptoticity funkcie $F(t)$ a síce, aby nerástla pre t idúce do nekonečna a $|\arg t| > 0$ rýchlejšie ako $\exp |t|^A$. O tom hovorí nasledujúca lemma.

Lemma 1.2.2 *Buď $\{\mu_n\}$ Stieltjesovská momentová postupnosť*

$$\mu_n = \int_0^\infty \exp(-\exp(t)) t^n dt.$$

Potom funkcia $F(t)$

$$F(t) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{t^n}{\mu_n}$$

je celistvá s nasledujúcou asymptoticitou:

1. *pre $|\text{Im } t| \leq \frac{\pi}{2}$ je asymptoticita určená sedlovým bodom*

$$s = e^t t$$

a

$$F(t) \sim (t+1)(\exp t)(\exp \exp t), \quad (t \rightarrow \infty)$$

2. *pre $|\text{Im } t| > \frac{\pi}{2}$*

$$F(t) \sim \mathcal{O}(|t|^\sigma), \quad (t \rightarrow \infty),$$

kde σ je konštanta.

Teraz si na základe lemy (1.2.1) a (1.2.2) vyslovíme veľmi dôležitú vetu, ktorá nám umožňuje dať zmysel súčtu Taylorovho radu v celej $\text{MLS}(f)$.

Veta 1.2.3 *Buď $f(z)$ hlavná vetva analytickej funkcie regulárnej v počiatku*

$$f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n z^n.$$

Potom integrál $I(z_0)$

$$I(z_0) = \int_0^\infty \exp(-\exp t) \sum_{n=0}^\infty a_n \frac{(tz_0)^n}{\mu_n} dt \quad (1.31)$$

konverguje práve vtedy, keď $z_0 \in \text{MLS}(f)$, kde μ_n je

$$\mu_n = \int_0^\infty \exp(-\exp(t)) t^n dt.$$

Potom

$$f(z_0) = I(z_0).$$

Konvergenca je absolútna a rovnomerná na ľubovoľnej ohraničenej podmnožine $\text{MLS}(f)$ s nenulovou vzdialenosťou od hranice $\text{MLS}(f)$ a môžeme zameniť deriváciu a integrál

$$f'(z) = \int_0^\infty \exp(-\exp t) \sum_{n=0}^\infty n a_n z^{n-1} \frac{t^n}{\mu_n} dt.$$

Poznámka 1.2.3 $\text{MLS}(f)$ je invariantná voči operácií derivovania podobne ako $\mathcal{B}_\alpha(f)$. Čiže $\text{MLS}[f(z)] = \text{MLS}[f'(z)]$. Ďalej, pokiaľ $f(z)$ spĺňa predpoklady vety (1.2.3), spĺňa ich aj jej derivácia $f'(z)$ a veta (1.2.3) nám dáva ďalšiu integrálnu reprezentáciu $f'(z)$ a síce

$$f'(z) = \int_0^\infty \exp(-\exp t) \sum_{n=1}^\infty n a_n \frac{(tz)^{n-1}}{\mu_{n-1}} dt.$$

Uvažujme ďalej ako príklad funkciu $f(z)$ spĺňajúcu predpoklady vety (1.2.3) regulárnu na celej reálnej poloosi. Potom nám veta (1.2.3) poskytuje analytické predĺženie Taylorovho radu funkcie $f(z)$ na celú poloos.

Dôsledok 1.2.1 *Buď*

1. $f(z)$ hlavná vetva analytickej funkcie regulárnej v počiatku,
2. $f(z)$ regulárna na reálnej poloosi.

Potom

$$f(x) = \int_0^\infty \exp(-\exp t) \sum_{n=0}^\infty a_n \frac{(tx)^n}{\mu_n} dt,$$

pre $x \in \langle 0, \infty \rangle$. Integrál konverguje absolútne a môžeme zameniť poradie derivácie a integrálu

$$f'(x) = \int_0^\infty \exp(-\exp t) \sum_{n=0}^\infty n a_n x^{n-1} \frac{t^n}{\mu_n} dt.$$

Na záver ešte venujme chvíľu prípadu, kedy sa vo vnútrajšku krivky C nachádza konečný počet singularít funkcie $f(z)$, ale žiadny vetviaci bod. Opäť predpokladajme, že platí $\{\frac{z}{u} | u \in \mathbb{C}\} \subset \text{MLS}(\frac{1}{1-z})$. Potom na základe rezíduovej vety platí

$$f(z) = - \sum_k \frac{\text{res}_{z_k} f}{z_k - z} + \int_0^\infty \exp(-\exp t) \sum_{n=0}^\infty \left(a_n + \sum_k \frac{\text{res}_{z_k} f}{z_k^{n+1}} \right) \frac{(tz)^n}{\mu_n} dt, \quad (1.32)$$

kde $\sum_k$ prebieha cez všetky singularity z_k funkcie $f(z)$, ktoré ležia vo vnútrajšku krivky C . Pokiaľ je nám známa táto skutočnosť, môžeme rozšíriť vetu (1.2.3) o nasledovné tvrdenie:

Veta 1.2.4 *Buď $f(z)$ hlavná vetva analytickej funkcie regulárnej v počiatku*

$$f(z) = \sum_{n=0}^\infty a_n z^n.$$

Pokiaľ sa vo vnútrajšku krivky C nenachádza žiadny vetviaci bod funkcie $f(z)$, platí

$$f(z) = - \sum_k \frac{\text{res}_{z_k} f}{z_k - z} + \int_0^\infty \exp(-\exp t) \sum_{n=0}^\infty \left(a_n + \sum_k \frac{\text{res}_{z_k} f}{z_k^{n+1}} \right) \frac{(tz)^n}{\mu_n} dt.$$

1.2.3 Konformné zobrazenie oblasti analyticity na jednotkový kruh

Konformné zobrazenie je ďalším z mocných matematických nástrojov, ktoré nám umožňujú definovať súčet Taylorovho radu funkcie $f(z)$ mimo jej Borelov polygón.

Pripomeňme si dôležitý pojem.

Veta 1.2.5 *Mocninný rad*

$$f(z) = \sum_{n=0}^\infty a_n z^n$$

konverguje na kruhu konverencie K_R s polomerom R , ktorý je určený vzdialenosťou prvej singularity funkcie $f(z)$ od počiatku.

Definícia 1.2.4 *Polomer konverencie R radu*

$$f(z) = \sum_{n=0}^\infty a_n z^n$$

je daný vzťahom

$$\frac{1}{R} = \lim_{n \rightarrow \infty} \sup (a_n)^{\frac{1}{n}}. \quad (1.33)$$

K rozťahnutiu polomeru konverencie R , čím zväčšíme konvergenčný kruh K_R , môžeme použiť konformné zobrazenie [3] $w(z)$ komplexnej roviny, ktoré zobrazuje časť oblasti analyticity D_w funkcie $f(z)$ na jednotkový kruh. Ďalej je nutné, aby zobrazenie $w(z)$ spĺňalo nasledujúce podmienky:

$$w(z = 0) = 0, \quad w(z = -z_1) = 1, \quad (1.34)$$

kde $-z_1$ je pozícia prvej singularity funkcie $f(z)$ najbližšej k počiatku.

Uvažujme najprv prípad, kedy singularity funkcie $f(z)$ sú rozmiestnené len na reálnej zápornej poloosi $-\infty \leq z \leq -z_1$, $-z_1$ je kladné číslo. Označme ako $w_m(z)$ nasledujúcu funkciu:

$$w_m(z) = \frac{1 - \sqrt{1 + \frac{z}{z_1}}}{1 + \sqrt{1 + \frac{z}{z_1}}}. \quad (1.35)$$

Táto funkcia transformuje celú komplexnú rovinu, z ktorej je vyňatá polpriamka $\langle -\infty, -z_1 \rangle$ na jednotkový kruh so stredom v počiatku. Funkcia $w_m(z)$ spĺňa podmienky (1.34) a body polpriamky $\langle -\infty, -z_1 \rangle$ sú zobrazené na hraničnú kružnicu tohto jednotkového kruhu. Pokračujme ďalej a konštruujeme rozvoj funkcie $f(z) = f(z(w_m))$ v mocninách w_m namiesto z . Namiesto pôvodného rozvoja $f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n z^n$ dostávame rozvoj

$$f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} b_n w_m^n(z). \quad (1.36)$$

Tento rozvoj konverguje v každom bode z komplexnej roviny, ktorý je zobrazený zobrazením $w_m(z)$ do vnútra jednotkového kruhu so stredom v počiatku. V našom prípade ide teda o každý komplexný bod z , ktorý neleží na polpriamke $\langle -\infty, -z_1 \rangle$. Takto sme teda docielili konverenciu aj v tých bodoch, kde rozvoj $f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n z^n$ divergoval. Navyše tam, kde pôvodný rozvoj konvergoval, konverguje nový rozvoj asymptoticky rýchlejšie.

Vo všeobecnom prípade, kedy máme singularity funkcie $f(z)$ lokalizované v komplexnej rovine, môžeme nechať funkciu $f(z)$ podstúpiť rovnakú procedúru. Opäť zobrazenie w bude zobrazovať nejakú časť oblasti analyticity D funkcie $f(z)$ do jednotkového kruhu. Tak ako v predchádzajúcom špeciálnom prípade, aj teraz touto procedúrou docielime asymptoticky rýchlejšiu konverenciu určenú zobrazením $w_m(z)$, ktoré zobrazuje celú doménu analyticity funkcie $f(z)$ do jednotkového kruhu.

Index m označuje maximálnu rýchlosť konverencie. V prameni [3] sa uvádza porovnanie konformného zobrazenia $w_m(z)$ s ľubovoľným konformným zobrazením $w_1(z)$. Predpokladajme, že $w_1(z)$ transformuje oblasť $D_1 \subset D$ do jednotkového kruhu, ktorá je ľubovoľne menšia ako oblasť D . Zistíme, že $w_m(z)$ zobrazuje D_1 na oblasť D'_1 , ktorá

je podmnožinou jednotkového kruhu. Funkcia $w_m = F(w_1)$, ktorá transformuje w_1 -jednotkový kruh na D'_1 je analytická a má nasledujúce vlastnosti:

1. $|F| \leq 1$ pre každý bod z w_1 -jednotkového kruhu
2. $F(0) = 0$.

Ďalej použijeme Schwartzovo lemma [14]:

Lemma 1.2.3 (Schwartz) *Nech je $R \in (0, \infty)$ a $M \in \langle 0, \infty \rangle$. Bud' F analytická funkcia na kruhu K_R so stredom v počiatku a polomerom R a nech F spĺňa nasledujúce podmienky:*

1. $F(0) = 0$
2. $|F(z)| \leq M \quad \forall z \in K_R$

Potom platia nerovnosti:

1.
$$|F'(0)| \leq \frac{M}{R} \quad (1.37)$$

2.
$$|F(z)| \leq \frac{M}{R} |z| \quad \forall z \in K_R. \quad (1.38)$$

Ak platí v (1.37) alebo v (1.38) rovnosť pre nejaké $z \in K_R \setminus \{0\}$, potom existuje $\alpha \in \mathbb{R}$ také, že

$$F(z) = \frac{M}{R} e^{i\alpha} z \quad \forall z \in K_R. \quad (1.39)$$

Takže Schwartzovo lemma nám hovorí, že $|w_m| \leq |w_1|$ pre každý bod z jednotkového kruhu. Práve preto je konvergencia rozvoja v mocninách $w_m(z)$ asymptoticky rýchlejšia ako rozvoja v mocninách ľubovoľného iného w_1 . Stupeň konvergenzie rozvoja určuje podiel $\frac{|z|}{R}$, v prípade pre $R = 1$ je to len $|z|$.

1.3 Singulárny prípad

V predchádzajúcom výklade sme sa výhradne zaoberali prípadom, kedy polomer konvergenzie R radu (1.1) bol nenulový. Preto sa nám prirodzene ponúka otázka, čo sa stane, ak bude polomer konvergenzie rovný nule. Je zrejmé, že v takomto prípade už nie je možné chápať rad (1.1) ako Taylorov rozvoj funkcie $f(z)$. Je preto nutné pristúpiť k problému z inej strany a redefinovať vzťah, ktorý je medzi radom (1.1) a funkciou $f(z)$. Ako šťastná voľba sa javí pojem tzv. *asymptotického radu* ⁴.

⁴G. H. Hardy v monografii [2] uvádza tiež takúto definíciu asymptotického radu:

1.3.1 Asymptotický rad

Definícia 1.3.1 *Buď S množina bodov s počiatkom $z = 0$ ako jej hromadným bodom. Nech funkcia $f(z)$ je definovaná na množine S . Povieme, že funkcia $f(z)$ má na množine S asymptotický rozvoj a označíme ho*

$$f(z) \approx \sum_{n=0}^{\infty} a_n z^n, \quad (1.40)$$

keď platí

$$f(z) - \sum_{n=0}^N a_n z^n = \mathcal{O}(z^{N+1}), \quad z \rightarrow 0, \quad z \in S. \quad (1.41)$$

Pojem asymptoticity sa nijako nevzťahuje k pojmu konverencie radu. To, že je ľubovoľný rad asymptotickým znamená len to, že pokiaľ porovnáme funkciu $f(z)$ a čiastočný súčet radu $\sum_{n=0}^N a_n z^n$, tak ich rozdiel je malý v porovnaní s posledným členom tohto súčtu. Taktiež asymptoticita radu sa vzťahuje len limite čiastočného súčtu v danom bode a nehovorí nič o jeho správaní sa mimo tento bod. Informácia o tom, že rad je asymptotickým k nejakej funkcii na danej množine, musí byť doplnená informáciou o tejto množine, napríklad o spôsobe ako prevádzame spomínaný limitný prechod, ako sa k danému bodu blížíme.

Všimnime si, že pojem asymptotického radu je zaujímavý len v prípade, že rad je divergentný. Pokiaľ rad konverguje, tak definícia nám neposkytuje nič nové. Ak totiž uvažujeme funkciu $f(z)$ regulárnu v počiatku, tak potom pre dostatočne malé z jej Taylorov rad určite konverguje a zjavne spĺňa vzťah (1.41).

Poznámka 1.3.1 *Asymptotické rady môžeme sčítať a násobiť.*

Asymptotický rad je určený jednoznačne, pokiaľ zadáme rozvíjanú funkciu, funkcie, v ktorých rozvoj konštruujeme⁵ a množinu S .

Opak však neplatí. Všeobecne môžeme totižto tvrdiť, že ak máme zadaný divergentný rad, potom existuje nekonečne veľa funkcií, ku ktorým ho môžeme chápať ako rad asymptotický podľa definície (1.3.1). Demonštrujme si túto dôležitú skutočnosť na nasledujúcom príklade. Majme teda zadanú funkciu $g(z) = ce^{-\frac{a}{z}}$, kde c je ľubovoľné a a je kladné. Potom $\frac{g(z)}{z^{n+1}} \rightarrow 0$ pre každé n rovnomerne na množine $\{\theta \in \mathbb{R} \mid -\frac{1}{2}\pi + \delta \leq \theta \leq \frac{1}{2}\pi - \delta, \delta > 0\}$. Pokiaľ túto budeme uvažovať ako našu množinu S , tak potom ľubovoľná

Rad

$$a_0 + a_1 z + a_2 z^2 + \dots$$

nazveme *asymptotickým radom k funkcii $f(z)$* v okolí $z = 0$, keď pre každé n a malé x platí

$$f(z) = a_0 + a_1 z + \dots + a_n z^n + \mathcal{O}(z^{n+1}).$$

⁵v našom prípade ide o mocninné funkcie z^n

funkcia, ktorú možno zapísať v tvare $f(z) + g(z)$ bude mať rovnaký asymptotický rozvoj ako funkcia $f(z)$.

Ďalším zobecnením sa dostávame veľmi zaujímavému výsledku, a síce, že ku každému asymptotickému radu odpovedá aspoň jedna analytická funkcia. Čiže ku zadanej množine $\{a_n\}$ a k ľubovoľnému $\alpha > 0$, existujú funkcie $f(z) = f(re^{i\theta})$ tak, že podmienka (1.41) je splnená pre $f \rightarrow 0$ rovnomerne v $|\theta| < \alpha\pi$. Ak navyše zvolíme $a > 0$, $2k\alpha < 1$, potom bude $r^n \exp(-\frac{a}{z^k}) \rightarrow 0$ rovnomerne v $|\theta| < \alpha\pi$ pre každé n . A teda ako v predchádzajúcom príklade, ktorý automaticky dostávame pre voľbu $k = 1$, všetky funkcie zapísateľné v tvare $f(z) + c \exp(-\frac{a}{z^k})$ majú pre uhol $|\theta| < \alpha\pi$ rovnaký asymptotický rozvoj.

1.3.2 Silné asymptotické podmienky

V predchádzajúcom sme si uviedli, že asymptotický rad neurčuje rozvíjanú funkciu jednoznačne. Problém, ktorý teraz máme teda znie, ako donútiť asymptotický rad, aby nám jednoznačne určoval rozvíjanú funkciu. Ukazuje sa, že je to možné, pokiaľ naň naložíme ďalšie dodatočné podmienky, resp. na rozvíjanú funkciu. Hovoríme o tzv. *silných asymptotických podmienkach*. Ako prvý sa o to pokúsil G. Watson už v roku 1912 [3]. Podarilo sa mu určiť dodatočné podmienky k tomu, aby bola funkcia $f(z)$ rovná Borelovmu súčtu $g(z)$ svojho asymptotického radu.

Veta 1.3.1 *Bud' $f(z)$ analytická funkcia v oblasti $|\arg z| < \frac{1}{2}\pi + \varepsilon$, $|z| < \eta$, pre $\varepsilon > 0$, $\eta > 0$. Nech $f(z)$ má na tejto oblasti asymptotický rozvoj*

$$f(z) = \sum_{n=0}^{N-1} a_n z^n + R_N(z), \quad (1.42)$$

kde $R_N(z)$ spĺňa rovnomerne pre každé N a z z oblasti podmienku

$$|R_N(z)| \leq A\sigma^N N! |z|^N. \quad (1.43)$$

Potom platí

1. Borelova transformácia $B(t) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n \frac{t^n}{n!}$ konverguje na kruhu $|t| < \frac{1}{\sigma}$,
2. $B(t)$ má analytické pokračovanie na oblasti $|\arg t| < \varepsilon$,
3. integrál

$$g(z) = \frac{1}{z} \int_0^{\infty} e^{-\frac{t}{z}} B(t) dt$$

konverguje absolútne na otvorenom kruhu $\operatorname{Re} z^{-1} > \eta^{-1}$ a rovná sa na ňom funkcii $f(z)$.

Vyjasníme si najprv ako vyzerá množina $\operatorname{Re} z^{-1} > \eta^{-1}$. Je jednoduché presvedčiť sa, že platí vzťah

$$\operatorname{Re} z^{-1} = \frac{1}{|z|^2} \operatorname{Re} z.$$

Potom sa už len jednoduchým roznásobením definičnej rovnice

$$(\operatorname{Re} z - \frac{1}{2}\eta)^2 + (\operatorname{Im} z)^2 < \frac{1}{4}\eta^2$$

pre vnútrojšok kruhu so stredom $\operatorname{Re} z = \frac{1}{2}\eta$ a polomerom $\frac{1}{2}\eta$ dostaneme opäť vzťah $\operatorname{Re} z^{-1} > \eta^{-1}$.

Watsonova veta našla veľmi rýchlo uplatnenie vo fyzikálnych disciplínach, hlavne však v poruchovom počte. Má však jeden zásadný problém. Ihneď vidíme, že jeden s predpokladov sa vzťahuje k oblasti $|\arg z| < \frac{1}{2}\pi + \varepsilon$, ktorá však presahuje oblasť, kde môžeme získať funkciu $f(z)$ ako Borelov súčet jej asymptotického radu, čiže kruh $\operatorname{Re} z^{-1} > \eta^{-1}$. Riešenie tohto problému nenechalova na seba dlho čakať a uzrelo svetlo sveta už v roku 1912 v podobe vety od Nevanlinnu [10].

Veta 1.3.2 *Buď $f(z)$ analytická na otvorenom kruhu $C_R = \{z | \operatorname{Re} z^{-1} > R^{-1}\}$, spojitá na jeho uzávere a splňajúca nasledovné odhady:*

1.

$$f(z) = \sum_{n=0}^{N-1} a_n z^n + R_N(z), \quad (1.44)$$

2.

$$|R_N(z)| \leq A \sigma^N N! |z|^N \quad (1.45)$$

rovnomerne v N a v $z \in \overline{C_R}$.

Potom $B(t)$, definované ako

$$B(t) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n \frac{t^n}{n!}$$

konverguje pre $|t| < \frac{1}{\sigma}$ a má analytické pokračovanie na oblasti $S_\sigma = \{t | \operatorname{dist}(t, R_+) < \frac{1}{\sigma}\}$, kde splňa podmienku

$$|B(t)| \leq K \exp\left(\frac{|t|}{R}\right) \quad (1.46)$$

rovnomerne v každom $S_{\sigma'}$, $\sigma' > \sigma$. Ďalej možno $f(z)$ reprezentovať absolútne konvergentným integrálom

$$f(z) = \frac{1}{z} \int_0^{\infty} \exp\left(-\frac{t}{z}\right) B(t) dt \quad (1.47)$$

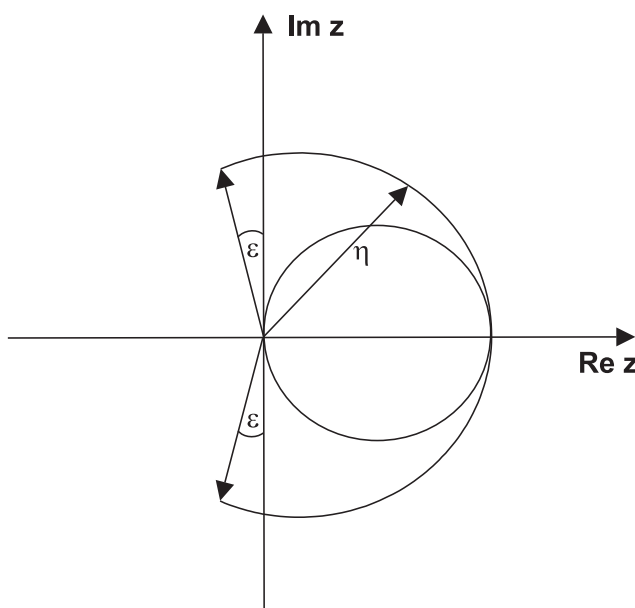
pre každé $z \in C_R$.

Naopak, ak $B(t)$ je analytická funkcia v $S_{\sigma''}$, $\sigma'' < \sigma$ a spĺňa tam podmienku (1.46), potom funkcia $f(z)$ definovaná vzťahom (1.47) je analytická v C_R a spĺňa odhad (1.45), kde

$$a_n = \frac{d^n}{dt^n} B(t) \Big|_{t=0}$$

rovnomerne v každom $C_{R'}$, $R' < R$.

Na obrázku 1.3 sú zobrazené oblasti analyticity pre Watsonovu a Nevanlinnovu vetu.



Obr. 1.3: K oblastiam analyticity vo Watsonovej a Nevanlinnovej vete

Nevanlinnovu vetu (1.3.2) môžeme jednoducho zovšeobecniť pre prípad, keď otvorový uhol oblasti analyticity je menší než π . V tomto prípade sa kruh D_η transformuje do kvapkovej oblasti s užším koncom v počiatku.

Nech je teda $f(z)$ analytická v kvapkovej oblasti ležiaca v $|\arg z| \leq \frac{1}{2}\pi\gamma$, $|z| < \eta$, $\gamma < 1$. Definujem hranicu kvapky nasledovne:

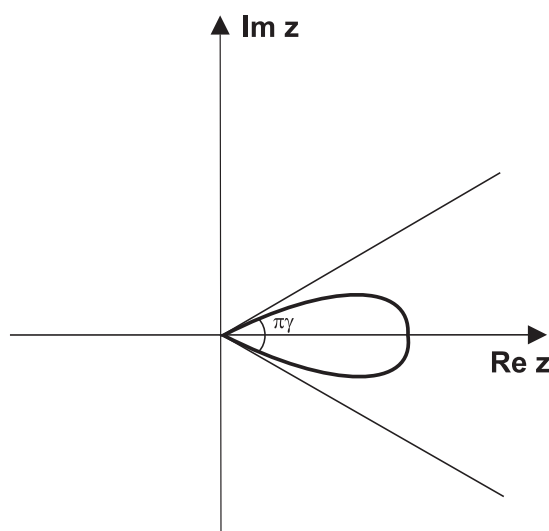
$$\left| E_\alpha \left(\frac{1}{z} \right) \right| = \text{const}, \quad E_\alpha(z) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{z^n}{\Gamma(\alpha n + 1)}.$$

Uvažujme v zhode s (1.42) a (1.43) silnú asymptotickú podmienku v tvare

$$\left| f(z) - \sum_{n=0}^{N-1} a_n z^n \right| \leq A \sigma^N (N!)^\rho |z|^N, \quad \rho \leq \gamma. \quad (1.48)$$

Borelova transformácia bude mať potom zrejme tvar

$$B_\rho(t) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n \frac{t^n}{\Gamma(\rho n + 1)}. \quad (1.49)$$



Obr. 1.4: K oblasti analyticity funkcie $f(z)$, vzťahy (1.48), (1.49)

Všimnime si, že požiadavok (1.48) je oveľa reštriktívnejší ako pôvodný požiadavok (1.43). Na druhej strane však platí v oveľa menšom uhle. Tomu ďalej odpovedá menšie potlačenie koeficientov a_n v rade $B_\rho(t)$ ako v rade $B(t)$. Majme však stále napamäti, že $B_\rho(t) = B(t)$, $\rho = 1$.

V časti venovanej regulárnemu prípadu, kedy rozvíjaná funkcia je regulárna v počiatku, a teda má na nejakom okolí bodu $z = 0$ konvergentný Taylorov rozvoj, sme pokračovali v ďalšom zovšeobecňovaní pomocou tzv. momentových metód. Ukazuje sa, že tieto metódy sú použiteľné v prípade, keď oblasť analyticity rozvíjanej funkcie vychádza z počiatku pod nulovým otvorovým uhlom⁶. A. Moroz dokázal nasledujúcu vetu [10] pre špeciálny moment $\mu_n = \int_0^\infty \exp(-\exp t) t^n dt$.

Veta 1.3.3 *Buď $f(z)$ analytická funkcia na lievikovitej oblasti*

$$H_R = \left\{ \operatorname{Re} \omega\left(\frac{1}{z}\right) > \omega\left(\frac{1}{R}\right) \right\},$$

spojitá na $\overline{H_R}$, kde

⁶Presnejšie povedané, ide o metódy, kedy je moment špeciálne zvolený; treba mať totiž na pamäti, že aj Borelova metóda je momentová s momentom $\mu_n = n!$, avšak ani ona a ani jej zovšeobecnená verzia, o ktorej sme práve hovorili, si s takýmto prípadom neporadia.

$$\omega(z) = \ln F(z), \quad F(z) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{z^n}{\mu_n}.$$

Nech $f(z)$ na H_R ďalej spĺňa nasledujúce odhady:

$$f(z) = \sum_{n=0}^{N-1} a_n z^n + R_N(z) \quad (1.50)$$

a

$$|R_N(z)| < A\mu_N |z|^N \quad (1.51)$$

rovnomerne v N a $z \in \overline{H_R}$.

Potom rad

$$M(t) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n \frac{t^n}{\mu_n} \quad (1.52)$$

konverguje pre $|t| < 1$ má analytické pokračovanie na oblasti $S_1 = \{t | \text{dist}(t, R_+) < 1\}$ spĺňajúc podmienku

$$|M(t)| \leq K \exp \left[\exp \left(\frac{|t|}{R} \right) \right] \quad (1.53)$$

rovnomerne v S_κ , $\kappa < 1$. Analytické pokračovanie $M(t)$ pre $t \in (1, \infty)$ je dané vzťahom

$$M(t) = \frac{1}{2\pi i} \oint_{\partial H_R} F\left(\frac{t}{z}\right) \frac{f(z)}{z} dz. \quad (1.54)$$

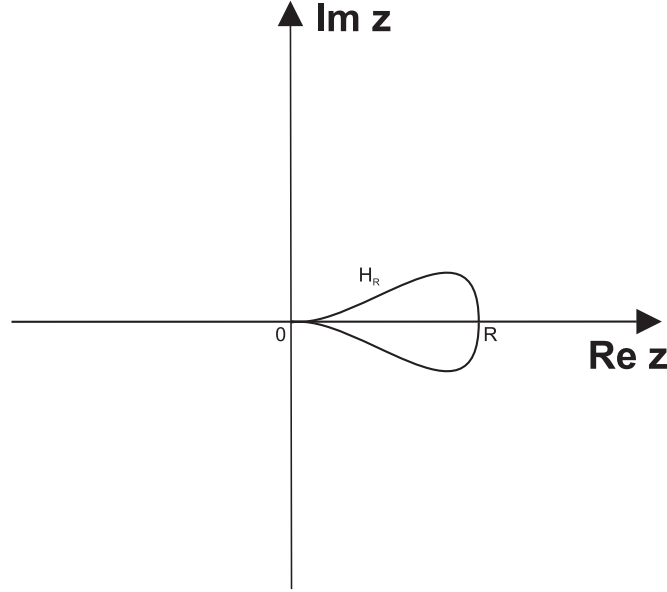
Naviac $f(z)$ môžeme pre každé $x \in (0, R)$ vyjadriť ako absolútne konvergentný integrál

$$f(x) = \int_0^\infty \exp(-\exp t) M(tx) dt. \quad (1.55)$$

Poznámka 1.3.2 Ak je funkcia $f(z)$ analytická na H_R a spojitá na $\overline{H_R}$, potom pre $x \in H_R \cap \mathbb{R}$ platí

$$f(x) = \frac{1}{2\pi i} \oint_{\partial H_R} \frac{f(z)}{z-x} dz = \frac{1}{2\pi i} \oint_{\partial H_R} \frac{f(z)}{z} dz \int_0^\infty \exp(-\exp t) F\left(\frac{tx}{z}\right) dt.$$

Na záver kapitoly venujme ešte chvíľu zobecneniu silných asymptotických podmienok pre rôzne typy oblastí. Bližšie sa o tom môžeme dočítať v [9]. My sa uspokojíme len s definíciou určitej triedy oblastí a vetou, ktorá nám bude príslušne modifikovať silné asymptotické podmienky pre určitú podtriedu týchto oblastí.

Obr. 1.5: K lievikovitej oblasti H_R

Definícia 1.3.2 *Buď S polrovina $\operatorname{Re} z > 0$ a C_R kruh so stredom v počiatku a polomerom R . Označme $\bar{S} = S \setminus C_R$ a nazvime ho základný región. O oblasti D , ležiacej v komplexnej rovine $\mathbb{C}$, povieme, že je asymptotického typu (k, η) , $k \leq 1$, keď existuje $R > e_{k-1}(1)$ tak, že $D = \frac{1}{\eta \ln_k(\bar{S})}$, kde $e_k(z)$ je k -násobná exponenciálna funkcia, $e_0(z) = z$, $e_k = \exp(e_{k-1}(z))$ a $\ln_k(z)$ je k -násobný logaritmus, $\ln_1(z) = \ln z$, $\ln_k(z) = \ln(\ln_{k-1}(z))$. Oblasť D nazveme asymptotického typu $(0, \eta)$, keď $D = \frac{1}{\bar{S}^\eta}$, kde $\bar{S}^\eta = \{z | z^{\frac{1}{\eta}} \in \bar{S}\}$.*

V nasledujúcej vete si zavedieme silné asymptotické podmienky pre oblasti asymptotického typu $(1, \eta)$.

Veta 1.3.4 *Buď funkcia $f(z)$ regulárna v oblasti D asymptotického typu $(1, \eta)$ a spojitá na jej uzávere. Nech $f(z)$ má na D asymptotický rozvoj*

$$f(z) = \sum_{n=0}^{N-1} a_n z^n + R_N(z). \quad (1.56)$$

Ak $R_N(z)$ spĺňa podmienku

$$|R_N(z)| \leq A \rho^N |z|^N \exp[-\exp w(N) + N \ln w(N)] \quad (1.57)$$

s $\rho \leq \eta$, rovnomerne v $z \in \bar{D}$ a N , kde $w(s)$ je riešením rovnice

$$w(s) \exp[w(s)] = s,$$

potom asymptotický rozvoj (1.56) určuje $f(z)$ jednoznačne. Podmienka (1.57) je silná v nasledujúcom zmysle: ak je známe, že (1.57) platí len pre $\rho > \eta$, rovnomerne v $z \in \overline{D}$ a N , potom existuje nenulová funkcia s triviálnym asymptotickým rozvojom a asymptotický rozvoj (1.56) neurčuje funkciu $f(z)$ jednoznačne.

Kapitola 2

Poruchové rozvoje v kvantovej teórii

2.1 Správanie sa vysokých rádov, intuitívne poňatie

Vráťme sa krátko k priekopníckej Dysonovej idey [1] ohľadom divergencií poruchovej teórie v QED. Uvažujme systém N nabitých častíc s rovnakým nábojom e . N uvažujme veľké. Potom má energia E nášho systému nasledujúcu štruktúru

$$E \sim NT + \frac{1}{2}e^2VN^2, \quad (2.1)$$

kde T predstavuje kinetickú energiu, V charakterizuje coulombický potenciál a faktor $\frac{1}{2}N^2$ určuje počet interagujúcich párov. Pokiaľ bude e^2 pozitívne, základný stav tohto systému bude stabilný. V opačnom prípade, kedy coulombický potenciál bude príťažlivým, sa energia základného stavu bude najprv s malým rastúcim N zväčšovať, ale potom od určitého N_c

$$N_c = -\frac{T}{Ve^2}, \quad (2.2)$$

kedy už bude N dostatočne veľké, začne klesať a pre veľké sa správa ako $-N^2$. V takomto prípade môže v relativistickom systéme dôjsť k produkcii párov. Práve preto aj keď začneme so systémom v stave, v ktorom sa nenachádzajú žiadne nabité častice, v dôsledku tunelového efektu dôjde k produkcii nekonečného počtu párov a vytvorí sa stav s nekonečne veľkou zápornou hodnotou energie. Preto nie je možné zdola ohraničiť Hamiltonián systému pre žiadnu z hodnôt $e^2 < 0$. Z toho automaticky usudzujeme, že fyzikálne veličiny v QED nemôžu byť analytickými funkciami e^2 , ale musia mať v počiatku $e^2 = 0$ singularitu. V ďalšom môžeme očakávať, že táto skutočnosť sa musí odzrkadliť v samotnom poruchovom rozvoji práve v rádoch blízkyh N_c . Práve vtedy začne vstupovať do hry produkcia N_c párov nabitých častíc. To nám implikuje, že členy poruchového rozvoja budú pre rády k , $k < N_c$ klesať a pre rády k , $k > N_c$ naopak stúpať.

Uvažujme teda fyzikálnu veličinu $F(e^2)$ a formálne konštruujeme jej poruchový rozvoj v tvare

$$F(e^2) = \sum_{n=0}^{\infty} F_n e^{2n}. \quad (2.3)$$

Ďalej usudzujeme, že platí

$$\frac{F_{k+1}}{F_k} \sim \frac{1}{e^2}, \quad k \sim N_c. \quad (2.4)$$

Pokiaľ bude samotné N_c rádu $\frac{1}{e^2}$ dostávame

$$\frac{F_{k+1}}{F_k} \sim k, \quad (2.5)$$

takže

$$F_k \sim k!. \quad (2.6)$$

Na základe tunelového efektu sme teda dospeli k faktoriálnej divergencii poruchového rozvoja pre nefyzikálne hodnoty kuplantu e^2 .

Táto úvaha spôsobila na začiatku päťdesiatych rokov minulého storočia veľký rozruch, pretože práve vtedy žal poruchový počet v kvantovej teórii poľa obrovské úspechy. Poruchové výpočty boli totiž vo veľkej zhode s experimentálne získanými údajmi. Ako uvidíme ďalej, divergencia poruchových rozvojev v kvantovej teórii je skôr istotou ako nahodilým, veľmi častým javom. A to nielen v kvantovej teórii poľa ale aj v kvantovej mechanike.

2.2 Poruchový počet a kvantová mechanika

Väčšina učebných textov pojednávajúcich o kvantovej mechanike uvádza tieto tri príklady časovo nezávislého poruchového počtu ako typické a dôležité aplikácie tejto metódy: x^4 anharmonický oscilátor, Zeemanov a Starkov efekt v atómoch. Výsledky získané poruchovým výpočtom veľmi dobre korešpondujú s nameranými hodnotami. Problémom však ostáva, že všetky tri poruchové rozvoje sú však divergentné. Prirodzenou otázkou teda je, či je možné z poruchového rozvoja nejakým spôsobom získať správne hodnoty meraných veličín. Ako silná zbraň sa javí nám dobre známa Borelovská metóda sumácie. Ukazuje sa, že skutočne poruchový rozvoj anharmonického oscilátoru je Borelovsky sumovateľný a takto získaný výsledok je korektnou vlastnou hodnotou [15]. Taktiež to platí aj v prípade Zeemanovho javu [16]. Prípad Starkovho efektu však nebol tak priamočiara riešiteľný. Pretože priamočiara sumácia Borelovou metódou nedáva správnu hodnotu. Výsledkom by podľa pozorovaní mala byť rezonancia, čiže nereálna hodnota. V zdroji [17] a citáciach v ňom uvedených sa uvádza, že aj tento problém našiel riešenie a ukázalo sa, že Starkov efekt na vodíkovom atóme má Borelovsky sumovateľný poruchový rozvoj a výsledok dáva správne očakávané hodnoty.

Ako máme možnosť vidieť, metóda Borelovskej sumácie je veľmi silnou zbraňou, keď sa potrebujeme vysporiadať s poruchovými rozvoji v kvantovej mechanike. V ďalšom sa pozrieme podrobnejšie na konkrétne asymptotické vlastnosti členov poruchových rozvojev určitých dôležitých, takpovediac učebnicových kvantovomechanických úloh.

2.2.1 Anharmonický oscilátor

V práci J. Zinn-Justina [13] môžeme nájsť odvodenie správania sa členov poruchového rozvoja vysokých rádov pre energetické hladiny anharmonického oscilátora. Vo výpočte sa vychádza zo skutočnosti, že pre základný energetický stav $E_0(g)$ platí

$$E_0(g) = \lim_{\beta \rightarrow \infty} -\frac{1}{\beta} \ln \text{Tr } e^{-\beta H}, \quad (2.7)$$

kde H je hamiltonián anharmonického oscilátora. Veličinu $\text{Tr } e^{-\beta H}$ môžeme reprezentovať dráhovým integrálom

$$\text{Tr } e^{-\beta H} = \int_{q(0)=q(\beta)} dq(t) \exp(-A(q)), \quad (2.8)$$

kde $A(q)$ je akcia

$$A(q) = \int_0^\beta dt \left[\frac{1}{2} \dot{q}^2(t) + \frac{1}{2} q^2(t) + \frac{1}{4} g q^4(t) \right] \quad (2.9)$$

a dráhový integrál je normalizovaný vzhľadom k jeho hodnote v bode $g = 0$. Pre K -ty rád podľa poruchovej teórie potom platí

$$(\text{Tr } e^{-\beta H})_K = \frac{1}{2\pi i} \int dq(t) \oint \frac{dg}{g^{k+1}} \exp(-A(q)). \quad (2.10)$$

Ďalej možno odvodiť [13], že platí nasledovný asymptotický vzťah

$$(e^{-\beta E_0(g)})_K \sim \left(-\frac{3}{4}\right)^K K! \quad (2.11)$$

Vzhľadom k skutočnosti, že ak členy rozvoja istej funkcie vykazujú danú asymptoticitu, potom tú istú asymptoticitu vykazujú aj členy rozvoja jej logaritmu, potom dostávame

$$E_0(g) = \sum_{K=0}^{\infty} E_{0,K} g^K, \quad E_{0,K} \sim \left(-\frac{3}{4}\right)^K K!, \quad K \rightarrow \infty. \quad (2.12)$$

Ako si môžeme teraz všimnúť, vidíme, že poruchový rozvoj anharmonického oscilátora je faktoriálne divergentný. V [13] sa uvádza aj presnejší výpočet pre asymptoticitu $E_{0,K}$ a taktiež $E_{N,K}$ pre N -tú energetickú hladinu. Výsledkom sú nasledovné vzťahy:

$$E_{0,K} \sim (-1)^{K+1} \left(\frac{6}{\pi^3}\right)^{\frac{1}{2}} \left(\frac{3}{4}\right)^K \Gamma\left(K + \frac{1}{2}\right) \left(1 + \mathcal{O}\left(\frac{1}{K}\right)\right), \quad (2.13)$$

$$E_{N,K} \sim (-1)^{K+N+1} \frac{12^N}{N!} \left(\frac{6}{\pi^3}\right)^{\frac{1}{2}} \left(\frac{3}{4}\right)^K \Gamma\left(K + N + \frac{1}{2}\right) \left(1 + \mathcal{O}\left(\frac{1}{K}\right)\right). \quad (2.14)$$

2.2.2 Potenciály v kvantovej mechanike

Vzhľadom k rozsiahlosti výpočtov sa oboznámime len s výsledkami konkrétnych fyzikálnych situácií. Podrobné odvodenie možno nájsť v práci J. Zinn-Justina [13].

Ako prvý v poradí sa predstavíme všeobecný potenciál spĺňajúci nasledovné podmienky:

1. potenciál $V(q)$ je celistvá funkcia premennej q^1 ,

2.

$$V(q) = \frac{1}{2}q^2 + \mathcal{O}(q^3). \quad (2.15)$$

Asymptotické správanie poruchového rozvoja základného a N -tého energetického stavu je potom nasledovné:

$$E_{0,K} \sim \sum_{l.s.p.} -\frac{1}{2\pi^{\frac{3}{2}}} x_+ \exp\left(\int_0^{x_+} \frac{1}{\sqrt{2V(r)}} - \frac{1}{r} dr\right) \frac{\Gamma(K + \frac{1}{2})}{A(\infty)^{K+\frac{1}{2}}}, \quad (2.16)$$

$$E_{N,K} \sim \sum_{l.s.p.} -\frac{1}{2\pi^{\frac{3}{2}}} \frac{(-2)^N}{N!} \left[x_+^2 \exp\left(2 \int_0^{x_+} \frac{1}{\sqrt{2V(r)}} - \frac{1}{r} dr\right)\right]^{N+\frac{1}{2}} \frac{\Gamma(K + N + \frac{1}{2})}{A(\infty)^{K+N+\frac{1}{2}}}. \quad (2.17)$$

Sumácia prebieha cez všetky sedlové body potenciálu a x_+ je bodom obratu.

Ďalším v poradí bude potenciál $V(q)$ s „dvojitou jamou“ definovaný vzťahom

$$V(q) = \frac{1}{2}q^2(1 - \lambda q)^2. \quad (2.18)$$

Pre vysoké rády poruchového rozvoja základnej a N -tej energetickej hladiny možno odvodiť [13]:

$$E_{0,K} \sim -K! \frac{3^{K+1}}{\pi}, \quad (2.19)$$

$$E_{N,K} \sim -\frac{1}{\pi} \frac{4^N}{(N!)^2} 3^{K+2N+1} \Gamma(K + 2N + 1). \quad (2.20)$$

¹Je možné uvažovať aj všeobecnejší prípad, kedy potenciál $V(q)$ vykazuje isté singularity. Tie však môžu dodatočne prispievať k asymptoticite vysokých rádov poruchovej teórie.

Na záver si ešte uvedme asymptoticitu členov rozvoja pre potenciál

$$\begin{aligned} V(q) &\sim \frac{1}{2}q^2 \quad q \rightarrow 0 \\ V(q) &\sim \frac{1}{2}\omega^2 \left(\frac{1}{\lambda} - q\right)^2 \quad q \rightarrow \frac{1}{\lambda}. \end{aligned} \quad (2.21)$$

V [13] sa uvádzajú nasledovné vzťahy:

$$E_{0,K} \sim -\frac{K!}{\pi} C \sqrt{\omega} \frac{A^{-K-1}}{\Gamma(\frac{1+\omega}{2\omega})} \left(\frac{2K\omega}{A}\right)^{\frac{1-\omega}{2\omega}}, \quad (2.22)$$

$$E_{N,K} \sim -\frac{1}{2\pi N!} \frac{(2^{1+\omega}\omega C^{2\omega})^{\frac{N+\frac{1}{2}}{\omega}}}{\Gamma(\frac{2N+1+\omega}{2\omega})} \frac{\Gamma(K + (N + \frac{1}{2})\frac{1+\omega}{\omega})}{A^{K+(N+\frac{1}{2})\frac{1+\omega}{\omega}}}. \quad (2.23)$$

2.3 Poruchový počet a kvantová teória poľa

V poslednom desaťročí minulého storočia sa opäť veľmi zaujímavou témou stala otázka správania sa členov vysokých rádov v poruchových rozvojoch vo výpočtoch v teórii poľa. Taktiež nemalú časť pozornosti vedeckej verejnosti si vyslúžili mocninné korekcie v predpovediach QCD pre tvrdé rozptylové procesy. Tento záujem mali zrejme na svedomí nasledujúce skutočnosti:

Teoretický problém spočívajúci v tom, ako rekonštruovať fyzikálne pozorovateľné z ich často divergentných mocninných rozvojev.

Pragmatická potreba posúdiť užitočnosť náročných výpočtov multisľučkových Feynmanových diagramov v QCD.

Dnes poznáme v najlepších prípadoch v QCD prvé tri členy poruchového rozvoja. Preto sa môže zdať otázka skúmania vyšších rádov zbytočná. Avšak ak je poruchový rozvoj divergentný, pripočítavaním ďalších korekcií nemusíme dospieť k žiadnemu zlepšeniu v porovnaní s predchádzajúcim započítaným rádom.

Ako sme už hovorili, otázka možnosti divergencie asymptotických poruchových rozvojev bola prvýkrát otvorená v [1]. Pripomeňme si však, že asymptotický rozvoj určujúci funkciu so singularitou v počiatku nemusí byť nutne divergentný. Skutočne. K ľubovoľnému radu

$$\sum_{n=0}^{\infty} f_n g^n$$

konvergujúcemu pre $|g| < \rho$ existujú funkcie $f(g)$, ku ktorým je asymptotický. Práve preto nemožno všeobecne brať za podstatu divergencií objavujúcich sa v poruchovej teórii zaužívané tvrdenie, že sú priamo späté s nespojitosťami Greenových funkcií. Pokiaľ je totiž rad asymptotický, znalosť správania sa vysokých rádov poruchového rozvoja

nestačí k jednoznačnému určeniu rozvíjanej funkcie, a preto je treba dodať ďalšie dôležité informácie v blízkosti bodu, kde je rozvoj konštruovaný k tomu, aby sme boli schopní určiť vzťah medzi rovojom a rozvíjanou funkciou.

V práci [8] sa však môžeme dočítať, že analytické vlastnosti relevantných Greenových funkcií v okolí bodu $g = 0$ môžu byť nakoniec v poruchovom rozvoji „neviditeľné“. Ba dokonca sumovateľnosť poruchového rozvoja nie je ani zďaleka to isté ako možnosť získať z príslušného poruchového rozvoja korešpondujúcu fyzikálnu veličinu. Pokým sumovateľnosť poruchového rozvoja v QCD určuje práve správanie sa jeho členov vysokých rádov, v prvom rade potrebujeme zistiť ake informácie sú vlastne pre nás nutné a postačujúce k získaniu rozvíjanej funkcie.

Pokiaľ nám totiž teória ponúka okrem znalosti koeficientov rozvoja f_n dostatok dodatočných informácií, môžeme potom sčítať poruchový rozvoj na konečnú hodnotu. Tá však nebude ľubovoľná, ale nejakým spôsobom sa v nej objavia práve tie dodatočné informácie, ktoré sme použili. Potom je nutné používať ich v takom tvare, aby nám znížili, v najlepšom prípade odstránili, nejednoznačnosti, ktoré so sebou asymptoticita rozvojev prináša. Úloha novej sčítacej metódy teda nie je len v priradení nejakého vhodného čísla v nášmu divergentnému, často zle definovanému rozvoju, dokonca ani v doplnení fyzikálnej teórie samotnej nejakým matematickým dodatkom. Jej úlohou je totiž vniesť do sčítania určitý fyzikálny nápad, ktorý pretransformovaný do konkrétnej matematickej podmienky, zníži nejednoznačnosť formálneho mocninného rozvoja.

Ďalšou veľmi šťastnou skutočnosťou je fakt, že analyticita rozvíjanej funkcie hrá tak tiež kruciálnu rolu ako matematická podmienka prispievajúca k zníženiu viacznačnosti asymptotického rozvoja.

Veľa pôvodných prác sa venovalo aj analytickým vlastnostiam Greenových funkcií v QED². Za pôvod rastu $n!$, kde n je rád aproximácie, možno považovať:

Počet diagramov rastie ako $n!$, každý diagram prispieva rádom 1.

Existujú určité typy diagramov, ktorých amplitúda sama rastie ako $n!$.

2.3.1 Príklady správania sa členov poruchových rozvojev v kvantovej teórii poľa

Teraz si uvedieme zopár typických príkladov správania sa členov vysokých rádov poruchových rozvojev niektorých typických teórií a modelov. Vo výsledkoch nie sú započítavané isté vzájomné vyrušenia členov, ktoré môžu pri vysokých rádoch nastať [8]. Preto niektoré z nich viacmenej uvádzajú hornú hranicu namiesto skutočného správania.

Ako prvý si však uvedieme presný výsledok pre superrenormalizovateľný prípad ϕ^4 poľnej teórie v dvoch a troch dimenziách. Pre N -bodovú funkciu $Z^{(N)}(x_1, \dots, x_N)$ v euklidovskej formulácii platí

$$(Z^{(N)}(x_1, \dots, x_N))_K = \frac{1}{2\pi i} \int dg(x) \frac{dg}{g^{K+1}} \phi(x_1) \dots \phi(x_N) \exp[-A(\phi)], \quad (2.24)$$

²Bližšie sa o tom môžeme dočítať v [8] a referenciách tam uvedených

kde

$$A(\phi) = \int d^d x \left(\frac{1}{2} (\partial_\mu \phi)^2 + \frac{1}{2} m^2 \phi^2 + \frac{1}{4} g m^{4-d} \phi^4 \right). \quad (2.25)$$

Dráhový integrál je normalizovaný k vákuovej amplitúde v $g = 0$. Kompletné riešenie tohto problému spolu s konkrétnym významom jednotlivých členov môžeme opäť nájsť v [13], kde sa uvádza nasledovný výsledok.

$$(Z^{(N)}(x_1, \dots, x_N))_K \sim \frac{(-1)^K}{2\pi i} \left(\frac{1}{2\pi} \right)^{\frac{d}{2}} [m^{2d} (\det M)_\perp]^{-\frac{1}{2}} F_N(x_1, \dots, x_N) A^{-K-\frac{N}{2}} \Gamma\left(K + \frac{d}{2} + \frac{N}{2}\right). \quad (2.26)$$

V rovnici (2.26) je člen $m^{2d} (\det M)_\perp$ bezrozmerný a F_N je dané rovnicou

$$F_N(x_1, \dots, x_N) = m^{d+N\frac{d-2}{2}} \int d^d x_0 \prod_{i=1}^N \chi(m(x_i - x_0)). \quad (2.27)$$

Ako si ľahko všimneme, najhlavnejší príspevok k správaniu sa členov vysokých rádov v K je $A^{-K} K!$.

Druhými v poradí budú poľné teórie bez fermiónov. Tento problém súvisí so skalárnou elektrodynamikou, ktorej akcia má tvar

$$S(\phi, A_\mu) = \int d^4 x \left[\frac{1}{4} F_{\mu\nu}^2 + \frac{1}{2} |D_\mu \phi|^2 + \frac{1}{2} m^2 |\phi|^2 + \frac{\lambda |\phi|^4}{4!} \right]. \quad (2.28)$$

Z_n sú jednočasticové ireducibilné euklidovské Greenove funkcie, pre ktoré platí

$$Z_n = \sum_{k=0}^{\infty} Z_n^{(k)} \left(\frac{-e^2}{4\pi} \right)^k \quad (2.29)$$

a pre asymptoticitu členov rozvoja $Z_n^{(k)}$ možno písať

$$Z_n^{(k)} \sim k! k^{b_n} A^{-k} c_n \left[1 + \mathcal{O}\left(\frac{1}{k}\right) \right]. \quad (2.30)$$

Tu c_n , b_n a A sú konštanty a A je približne rovné 12.

Ďalej si predstavíme poľné teórie s fermiónmi. $A(g) = \sum_n A_n g^{2n}$ je Greenova funkcia skalárneho poľa σ s kuplantovým členom $g\sigma\bar{\Psi}\Psi$ pre Yukawovskú interakciu v dimenzii $d > 2$. Pre A_n platí

$$A_n \sim \Gamma\left(n\frac{d-2}{d}\right) R^n n^{-\alpha} \cos\left(2\pi\frac{n}{d}\right) A, \quad (2.31)$$

kde R , α a A sú konštanty, ktoré vieme zistiť výpočtom a hlavný príspevok k asymptotike poruchovej teórie QED má f_n s nasledovnou asymptotikou

$$f_n \sim (-1)^n S^{\frac{n}{2}} \Gamma\left(\frac{n}{2}\right) D, \quad (2.32)$$

kde $S = 3^{-\frac{3}{2}}4\pi^3$. Presný význam jednotlivých členov môžeme nájsť v referenciách v práci [8].

Členy d_n s asymptoticitou

$$d_n \sim \text{const} \left(\frac{-\beta_0}{2} \right)^n \Gamma \left(n + 1 - 2 \frac{\beta_1}{\beta_0^2} \right) \quad (2.33)$$

popisujú asymptotické správanie sa poruchových rozvojov ako výsledok tzv. prvého infračerveného renormalónu v QED. Ide o koeficienty poruchového rozvoja funkcie $Q^2 \frac{d}{dQ^2} P(Q^2)$ v mocninách kuplantu $\alpha(Q)$ a síce

$$\sum_{n=-1}^{\infty} d_n \alpha(Q)^{n+1}. \quad (2.34)$$

V QED je αP rovné Π , fotónovej vákuovej polarizácii a $d_{-1} = -\beta_0$, kde β_0 je prvý koeficient rozvoja beta funkcie, ktorá je definovaná ako

$$\mu^2 \frac{d}{d\mu^2} \alpha(\mu) = \beta = \sum_{n=0}^{\infty} \beta_n \alpha(\mu)^{n+2}. \quad (2.35)$$

V QCD je $P = \Pi$ elektromagnetická prúd-prúdová korelačná funkcia. Pre asymptoticitu vysokých rádov poruchovej QCD platí

$$d_n \sim \text{const} \left(\frac{-\beta_0}{2} \right)^n \Gamma \left(n + 1 - 2 \frac{\beta_1}{\beta_0^2} \right) (1 + \mathcal{O}(n)). \quad (2.36)$$

Ak budeme uvažovať QED s nehmotnými fermiónmi, potom budú mať d_n rovnaké infračervené správanie sa a dokonca aj β_n budú nadobúdať povodných QED hodnôt. Ultrafialové renormalóny sú taktiež prítomný a spôsobujú divergenciu s fixným znamienkom.

Na záver spomenieme už len asymptoticitu rozvojom poruchovej QCD v dvoch dimenziách. Uvažujme, že N_c ide do nekonečna. Faktoriálny rast má v tomto prípade tvar

$$\left(g^2 \frac{N_c}{2} \right)^{2k} (2k)! (-1)^{k-1} \quad (2.37)$$

a je pripisovaný instantónom, preto je neporuchovej povahy. V tejto teórii je veľmi dôležitá taktiež skutočnosť, že kuplnat má rozmer.

V predchádzajúcom sme sa zoznámili s asymptoticitou poruchových rozvojov v rôznych poľných teóriách. Istotne nám neuniklo, že väčšina z nich vykazuje faktoriálny rast $n!$ pre členy poruchových rozvojov vysokých rádov. Mohlo by to preto nabadáť k domnienke, že všetky teórie môžeme ošetriť jedinou resumačnou metódou. Ale pozor! Nie je tomu tak. Správanie sa vysokých rádov je len jedným z aspektov určujúcich potrebnú sumačnú metódu. Ako už vieme, ku každému mocninnému radu, s koeficientami, ktoré sme si ukázali, existuje totiž celá trieda funkcií $f(z)$ s rovnakým asymptotickým rozvojom. Preto k tomu, aby sme z celej triedy vybrali jednu konkrétnu funkciu $f(z)$ je nutné dodať dodatočné podmienky súvisiace s tou-ktorou uvažovanou teóriou. V ďalšom si ukážeme ako sa dá vysporiadať s týmto problémom.

Kapitola 3

Borelovské sčítanie v QED a QCD

Na úvod si uveďme lagranžián QCD. Má nasledovný tvar

$$\mathcal{L}_{QCD} = -\frac{1}{4}\vec{G}_{\mu\nu}\vec{G}^{\mu\nu} + \bar{\Psi}(i\vec{\partial} - m_q) + g\bar{\Psi}\gamma_\mu\vec{T}\Psi\vec{A}^\mu, \quad (3.1)$$

kde $\Psi(x)$ je lokálny poľný operátor popisujúci farebný triplet kvarkov danej vône, a síce u, d, s, c, t, b (up, down, strange, charm, top, bottom). Platí

$$\Psi(x) = \begin{pmatrix} \Psi^1(x) \\ \Psi^2(x) \\ \Psi^3(x) \end{pmatrix}. \quad (3.2)$$

Oktet gluónov popisuje naopak veličina

$$\vec{A}_\mu(x) = \begin{pmatrix} A_\mu^1(x) \\ A_\mu^2(x) \\ \vdots \\ A_\mu^8(x) \end{pmatrix}. \quad (3.3)$$

V oboch prípadoch platí, že farbu udáva horný index. Lagranžián QCD sa od QED líši prítomnosťou tretieho člena v definícii tenzoru

$$G_{\mu\nu}^a = \frac{\partial A_\nu^a(x)}{\partial x^\mu} - \frac{\partial A_\mu^a(x)}{\partial x^\nu} + gf^{abc}A_{b\mu}A_{c\nu}. \quad (3.4)$$

Vďaka prítomnosti tohto člena¹ sa po dosadení do 3.1 objavia nasledujúce výrazy

$$g\left\{f_{abc}\left[\left(\frac{\partial A_\nu^a}{\partial x^\mu} - \frac{\partial A_\mu^a}{\partial x^\nu}\right)A_b^\mu A_c^\nu + \left(\frac{\partial A^{a\mu}}{\partial x^\nu} - \frac{\partial A^{a\nu}}{\partial x^\mu}\right)A_{b\mu}A_{c\nu}\right]\right\} + g^2 f_{abc}f_{ade}A_b^\mu A_c^\nu A_{d\mu}A_{e\nu}, \quad (3.5)$$

ktoré popisujú lokálnu interakciu troch a štyroch gluónov. Práve táto vlastnosť tzv. samointerakcie gluónov má na svedomí veľmi závažné vlastnosti QCD. Hovoríme o uvezení farebných objektov a o asymptotickej voľnosti teórie.

¹Ide o dôsledok neabelovskosti grupy farebnej symetrie SU(3)

Priamočiare použitie pravidiel poruchového počtu v QCD, podobne ako v QED, vedie na tzv. ultrafialové divergencie. Matematická metóda, ktorá tieto divergencie odstraňuje sa volá *renormalizácia*. Jej podstatou je redefinícia základných veličín v lagranžiáne (3.1), čiže väzbovej konštanty, hmotností fermiónov a poľných operátorov $\Psi(x), A_\mu(x)$. Teória potom namiesto pôvodných, tzv. holých veličín, pracuje s renormalizovanými veličinami. V definícii týchto veličín sú zahrnuté všetky ultrafialové divergencie, ktoré vystupovali v pôvodnej formulácii veličín holých. Prirodzenou otázkou teraz je, akú cenu musíme za takúto akciu zaplatiť. Novou skutočnosťou, ktorá bude zásadným spôsobom ovplyvňovať definíciu renormalizovaných veličín, bude *nejednoznačnosť*. Požiadavka invariantnosti voči *renormalizačnej grupe* nám síce zaručí, že úplný súčet poruchového rozvoja bude na výbere renormalizovaných veličín nezávislý, neodstráni však fakt, že táto vlastnosť nebude platiť, pokiaľ budeme uvažovať poruchové rozvoje len do konečného rádu. Preto bude samotný výber renormalizovaných veličín ovplyvňovať výsledok súčtu konečného počtu členov poruchového rozvoja, a preto ich voľba je neoddeliteľnou súčasťou poruchového výpočtu.

V prípade QED nie je táto skutočnosť až taká závažná, nakoľko existujú isté preferované definície renormalizovaného elektrického náboja a hmotnosti elektrónu odpovedajúce klasickým hodnotám. Navyše QED na veľkých vzdialenostiach prechádza na klasickú elektrodynamiku, čo takúto voľbu oprávňuje.

Pokiaľ však pracujeme s QCD, nemáme k dispozícii žiadne klasické vodítka. Nakoľko táto teória nemá žiadnu klasickú obdobu, resp. klasickú limitu, nemáme v hrsti argumenty, podobne ako v prípade QED, pre tú-ktorú voľbu hodnôt renormalizovaných veličín. Preto sa tento výber stal závažným problémom pri aplikáciách poruchovej QCD na popis konkrétnych fyzikálnych javov.

Asymptotická voľnosť v prípade QCD má za následok, že poruchová teória je vhodná na popis hadrónových procesov pri vysokých energiách. V prípade teórie s nehmotnými kvarkami je výsledok poruchových výpočtov závislý len na hodnote tzv. väzbového parametra α_s definovaného ako

$$\alpha_s(\mu^2) = \frac{g^2(\mu)}{4\pi}, \quad (3.6)$$

kde $g(\mu)$ je definované vzťahom

$$\frac{1}{2} \frac{dg^2(\mu^2)}{d \ln \mu} \equiv \beta(g) = -g^4(b_1 + b_2 g^2 + b_3 g^4 + \dots). \quad (3.7)$$

V rovnici (3.7) sú len dve konštanty, a síce b_1 a b_2 určené jednoznačne počtom vôní. Ďalšie koeficienty b_n , $n = 3, 4, \dots$ sú ľubovoľné a môžeme ich použiť k definícii samotnej renormalizačnej schémy spolu so škálovacím parametrom μ . Pokiaľ máme zadaný väzbový parameter, môžeme si uviesť príklad poruchového rozvoja práve v tomto parametri. Pôjde o veličinu, ktorú môžeme úplne získať pomocou prístupu poruchovej QCD. Ide o pomer

$$R(Q) = \frac{\sigma(Q, e^+e^- \rightarrow \text{hadróny})}{\sigma(Q, e^+e^- \rightarrow \mu^+\mu^-)} \quad (3.8)$$

medzi účinným prierezom elektrón-pozitrónovej hadrónovej anihilácie v ťažiskovej sústave pri energii Q a účinným prierezom elektrón-pozitrónovej anihilácie pri produkcii miónového páru pri tej istej energii Q , ktorý poznáme z QED. Vzhľadom k limite $Q^2 \rightarrow \infty$ dostávame z partónového modelu vzťah

$$R(Q) = 3 \sum_i e_i^2, \quad (3.9)$$

kde sčítame cez všetky nehmotné kvarky. Pre konečné hodnoty energie Q^2 teda musíme pristúpiť ku QCD korekciám. Požitie poruchovej QCD nám automaticky poskytne nasledujúci rozvoj

$$R\left(\frac{Q^2}{\mu^2}, \alpha_s(\mu^2)\right) = \left(3 \sum_i e_i^2\right) \sum_{n=0}^{\infty} r_n \left(\frac{Q^2}{\mu^2}\right) \left(\frac{\alpha_s(\mu^2)}{\pi}\right)^n \quad (3.10)$$

V poslednom vzťahu sú r_n koeficienty poruchového rozvoja. Nezávisle na energii Q a na renormalizačnej schéme platia nasledujúce rovnosti

$$r_0 = 1, \quad r_1 = 1, \quad (3.11)$$

avšak koeficienty

$$r_k, \quad k = 2, 3, \dots \quad (3.12)$$

na renormalizačnej schéme závisia, podobne ako α_s . Pripomeňme si však, že súčet celého poruchového rozvoja na renormalizačnej schéme nezávisí, zatiaľčo súčet konečného počtu členov áno.

V práci [3] sa môžeme dočítať, že sa zatiaľ podarilo určiť len skutočné hodnoty pre r_2 a r_3 . Avšak vyššie poruchové členy hrajú kľúčovú rolu v našom chápaní QCD, preto je na mieste zaujímať sa o ich asymptotické správanie. V [3] sa ďalej uvádza, že pokusy získať nejaké informácie o tomto správaní sa koeficientov poruchových rozvojev pre isté fyzikálne veličiny viedli k zisteniam, že poruchové rozvoje v QCD su faktoriálne divergentné.

Borelovská sumácia nám umožňuje dať zmysel veľkému množstvu divergentných radov pokiaľ rozvíjaná funkcia spĺňa určité dodatočné podmienky. V prípade QED [8] Schwinger získal kompaktné vyjadrenie pre člen v QED lagranžiáne odpovedajúcom vákuovej polarizácii konštantným vonkajším magnetickým poľom. Následne Ogievetsky použil divergentný poruchový rozvoj tohto člena, ktorého Borelovský súčet sa zhodoval so Schwingerovým výsledkom. V stručnosti si uvedieme len základné fakty. Koeficienty poruchového rozvoja v mocninách e^2 sa pre veľké n správajú ako

$$(2n-3)! \left(-\frac{H^2}{\pi^2 m^2}\right)^n, \quad (3.13)$$

kde e a m sú náboj a hmotnosť elektrónu. Ogievetského výsledok Borelovského súčtu tohto radu má tvar

$$\int_0^{\infty} e^{-m^2 t} a(t, e) \, dt, \quad (3.14)$$

kde

$$a(t, e) = -\frac{1}{8\pi^2 t^3} \left[etH \coth(etH) - 1 - \frac{(etH)^2}{3} \right]. \quad (3.15)$$

Tento príklad ukazuje, že v použití Borelovskej metódy na poruchové rozvoje v QED môžeme získať správne výsledky. Všeobecnejší rozbor nám však hovorí, že poruchová QED vykazuje Borelovskú nesumovateľnosť².

Prípad použitia tejto metódy QCD však vyzerá byť oveľa priamočiarejší. Ak vezmeme do úvahy v zhode so zdrojom [5] správanie sa členov r_k poruchového rozvoja pre vysoké k ako

$$r_k \sim \delta^k k^l k!, \quad \delta > 0 \quad (3.16)$$

vidíme, že od istého rádu príspevky každého z členov nielenže rastú, ale majú aj rovnaké znamienko. Z toho automaticky rezultuje nemožnosť použiť Borelovskú sumáciu. Dôvod je zrejmý. Borelovský spôsob sčítania sme si totiž definovali ako

$$\sum_{k=0}^{\infty} r_k a^{k+1} = \int_0^{\infty} \exp\left(-\frac{u}{a}\right) \left(\sum_{k=0}^{\infty} \frac{r_k}{k!} u^k\right) du. \quad (3.17)$$

Asymptoticitu na základe vzťahu (3.16) vykazujú členy faktoriálneho mocninného radu

$$\sum_{k=0}^{\infty} k! a^{k+1}, \quad (3.18)$$

a práve rozvoje takéhoto typu očakávame v prípade QCD. Použitie Borelovskej metódy by teda viedlo k výsledku v nasledovnom tvare

$$\sum_{k=0}^{\infty} k! a^{k+1} = \int_0^{\infty} \frac{\exp(-\frac{u}{a})}{1-u} du. \quad (3.19)$$

Problém je však v tom, že integrand za znakom integrálu vo vzťahu (3.19) má v integračnom obore singularitu. Preto nemôžeme dať tomuto integrálu jasný jednoznačný zmysel. Jedným zo spôsobov, ako sa s touto neprijemnosťou vysporiadať, by bola možnosť definovať integrál pomocou hlavnej hodnoty. Čiže brať za súčet divergentného radu (3.18) výraz

$$PV \int_0^{\infty} \frac{\exp(-\frac{u}{a})}{1-u} du = \lim_{\epsilon \rightarrow 0+} \left[\int_0^{1-\epsilon} \frac{\exp(-\frac{u}{a})}{1-u} du + \int_{1+\epsilon}^{\infty} \frac{\exp(-\frac{u}{a})}{1-u} du \right]. \quad (3.20)$$

²Bližšie viď podkapitolu (2.3.1) na strane (35)

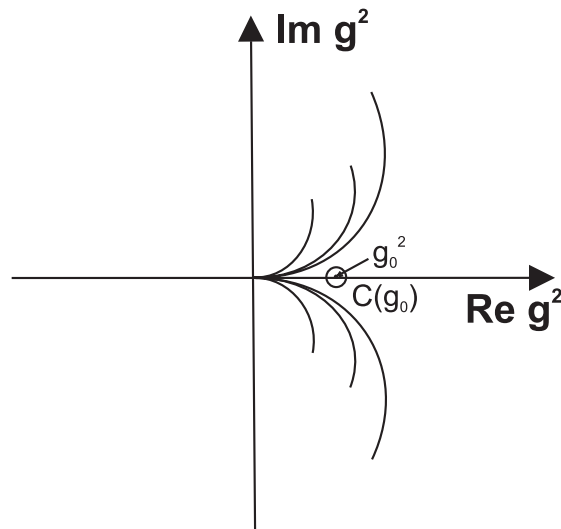
Tento prístup má viacero nedostatkov, a preto nemôže byť fyzikálne prijateľný. Jedným z nich je všeobecné nesplnenie podmienky invariance voči renormalizačnej grupe. Toto narušenie je spôsobené členom neporuchovej podstaty. Ide o tzv. mocninné korekcie [4].

Na základe doteraz získaných informácií môžeme teda zformulovať nasledovné úlohy:

1. Ako odhaliť správanie sa koeficientov vysokých rádov v poruchových rozvojoch fyzikálnych veličín?
2. Ako definovať fyzikálne dobre motivované sčítanie, keď tieto odhady zabraňujú použitiu univerzálnej Borelovej metódy?

Ako už vieme, obe z týchto dvoch úloh nemôžu jestvovať samé o sebe, nakoľko asymptoticita členov vysokých rádov poruchového rozvoja určuje, či je možné použiť Borelovskú alebo ľubovoľnú inú sčítaciu metódu. Lenže na druhej strane práve fyzikálna motivácia sčítania je veľmi závažný atribút pre použiteľnosť metódy samotnej aj pokiaľ je schopná sčítať daný poruchový rozvoj.

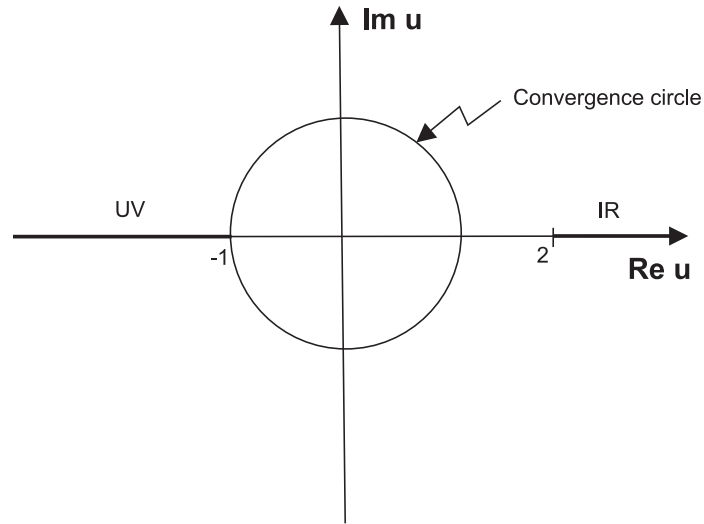
Veľmi zaujímavou metódou je práve metóda, ktorú vytvoril A. Moroz [9]. My sme sa ňou zaoberali v kapitole (1.2.2), kde sme hlavný výsledok zhrnuli vo vete (1.2.3). Pre singulárny prípad je metóda s týmto momentom pre silné asymptotické podmienky modifikovaná v kapitole (1.3.2) vetou (1.3.3). A práve takto formulovaná sčítacia metóda je veľmi výhodne použiteľná pre prípad, kedy oblasť analyticity rozvíjanej funkcie má lievikovitý tvar so singularitou v počiatku. Ide práve o prípad QCD s hmotnými kvarkami [10].



Obr. 3.1: Oblasť analyticity dvojbodovej Greenovej funkcie QCD v g^2 je práve lievikovitého typu

Na záver si ešte graficky ilustrujeme na obrázku 3.2 singularity v Borelovskej rovine v prípade QCD, ktoré znemožňujú v tomto prípade použitie Borelovskej sumácie, ako

sme sa o tom vyššie presvedčili na základe práce [5]. J. Fischer [6] uvádza, že Borelovská transformácia poruchového radu je analytickou funkciou až na singularity umiestnené na poloosách $u \leq -1$ a $u \geq 2$. Práve singularity na kladnej poloose nám znemožňujú preintegrovať Borelovskú transformáciu k získaniu výsledného súčtu. Spomínané riešenie tohto problému v smysle hlavnej hodnoty integrálu vykazuje vyššie uvedené nedostatky a navyše nie je dostatočne fyzikálne motivovaná.



Obr. 3.2: Borelovská rovina v prípade QCD

Záver

Poruchový počet je významná metóda, ktorá našla široké uplatnenie vo všetkých fyzikálnych odvetviach. Od klasickej fyziky po kvantovú. V kvantovej teórii sme však konfrontovaní so skutočnosťou, že poruchové rozvoje väčšinou divergujú. Preto je dôležitou úlohou pokúsiť sa nájsť vhodnú, fyzikálne dobre a uspokojivo motivovanú sčítaciu metódu potrebnú k jednoznačnému určeniu súčtu poruchového rozvoja určujúceho danú fyzikálnu veličinu. Práve fyzikálne impulzy pretransformované do matematických podmienok, ktoré nakladáme na rozvíjanú funkciu nám pomáhajú znižovať nejednoznačnosti v poruchovej teórii.

Ako veľmi šťastné sa ukazuje dopĺňať mozaiku práve neporuchovými informáciami. Taktiež požiadavka analytičnosti rozvíjanej funkcie spolu so silnými asymptotickými podmienkami, ktorých splnenie je od neporuchových efektov silne závislé, sú účinným nástrojom na odstránenie spomínaných nejednoznačností.

Literatúra

- [1] F. J. Dyson, Phys. Rev. 85 (1952) 4, 631.
- [2] G. Hardy, Divergent series, Oxford University Press, Oxford 1963.
- [3] J. Fischer, Fortschr. Phys. 42 (1994) 8, 665.
- [4] J. Chýla, Czech. J. Phys. 42 (1992) 3, 263.
- [5] J. Chýla, Teoretická analýza nejednoznačností poruchové QCD.
- [6] J. Fischer, O jednom vykročení z poruchové teorie, Čs. čas. fyz. 50 (2000), 300.
- [7] A. Moroz, Czech. J. Phys. 40 (1990) 7, 705.
- [8] J. Fischer, Int. J. Mod. Phys. A12 (1997) 21, 3625.
- [9] A. Moroz, Quantum Field Theory as a Problem of Resummation, PhD thesis, Charles University Prague, 1991; hep-th/9206074.
- [10] A. Moroz, Commun. Math. Phys. 133 (1990), 369.
- [11] I. Caprini, J. Fischer, hep-ph/9811367.
- [12] I. Caprini, J. Fischer, hep-ph/0110344.
- [13] J. Zinn-Justin, Phys. Rep. C70 (1981) 2, 109.
- [14] I. Černý, Analýza v komplexním oboru, Academia, Praha 1983.
- [15] S. Graffi, V. Grecchi, B. Simon, Phys. Lett. 32B (1970) 7, 631.
- [16] J. Avron, I. Herbst, B. Simon, Phys. Lett. 62A (1977) 4, 214.
- [17] I. Herbst, B. Simon, Phys. Rev. Lett. 41 (1978) 2, 67.