

České vysoké učení technické v Praze
Fakulta jaderná a fyzikálně inženýrská

Výzkumný úkol

Martin Gajdoš

České vysoké učení technické v Praze
Fakulta jaderná a fyzikálně inženýrská

Zobecněné poruchové řady v kvantové chromodynamice

Martin Gajdoš

Katedra fyziky

Akademický rok: 2004/2005

Školitel: prof. RNDr. Jiří Chýla, CSc.

Konzultant: prof. RNDr. Jan Fischer, DrSc.

Prehlasujem, že som predloženú prácu vypracoval samostatne a uviedol všetku použitú literatúru.

Praha, 20. septembra 2005

Martin Gajdoš

Obsah

Predhovor	1
1 Základné matematické pojmy	2
1.1 Borelovská sumácia	2
1.2 Asymptotické rady	4
2 Poruchová QCD	6
2.1 Lagranžián QCD	6
2.2 Renormalizácia a nejednoznačnosti v renormalizovanej QCD	7
2.3 Závislosť poruchových rozvojov na renormalizačnej škále a schéme	8
2.4 Preferované voľby renormalizačných schém	12
2.4.1 Renormalizačné schémy $\overline{\text{MS}}$ a $\overline{\text{MS}}$	12
2.4.2 Renormalizačná schéma PMS	13
2.5 Poruchové rozvoje v systéme funkcií $W_n(a)$	13
3 Rozpad τ-leptónu a e^+e^- anihilácia v QCD	19
3.1 Rozpad τ -leptónu	19
3.1.1 Rozpad štandardného τ -leptónu	19
3.1.2 Rozpady fiktívnych τ -leptónov	30
3.2 e^+e^- anihilácia	31
Záver	40
Literatúra	42

Zoznam obrázkov

2.1	Borelovská rovina Adlerovej funkcie	16
2.2	Priebeh funkcií $W_n(a)$, $n = 1, \dots, 10$	18
3.1	RS závislosť pre $\mathcal{R}_\tau^{(N)}(a)$	23
3.2	RS závislosť pre $\mathcal{R}_\tau^{(N)}(W_n(a))$	23
3.3	RS závislosť pre $\mathcal{R}_\tau^{(N)}(\widetilde{W}_n(a))$	24
3.4	RS závislosť pre $\mathcal{R}_\tau^{(N)}$, rozvoje do LO	24
3.5	RS závislosť pre $\mathcal{R}_\tau^{(N)}$, rozvoje do NLO	25
3.6	RS závislosť pre $\mathcal{R}_\tau^{(N)}$, rozvoje do NNLO	25
3.7	Priebeh funkcií $\overline{W}_n(a)$, $n = 1, \dots, 10$	26
3.8	RS závislosť pre $\mathcal{R}_\tau^{(N)}(\overline{W}_n(a))$	28
3.9	RS závislosť pre $\mathcal{R}_\tau^{(N)}$, rozvoj do LO; porovnanie $\mathcal{R}_\tau^{(N)}(a)$, $\mathcal{R}_\tau^{(N)}(W_n(a))$ a $\mathcal{R}_\tau^{(N)}(\overline{W}_n(a))$	29
3.10	RS závislosť pre $\mathcal{R}_\tau^{(N)}$, rozvoj do NLO; porovnanie $\mathcal{R}_\tau^{(N)}(a)$, $\mathcal{R}_\tau^{(N)}(W_n(a))$ a $\mathcal{R}_\tau^{(N)}(\overline{W}_n(a))$	29
3.11	RS závislosť pre $\mathcal{R}_\tau^{(N)}$, rozvoj do NNLO; porovnanie $\mathcal{R}_\tau^{(N)}(a)$, $\mathcal{R}_\tau^{(N)}(W_n(a))$ a $\mathcal{R}_\tau^{(N)}(\overline{W}_n(a))$	30
3.12	RS závislosť pre $\mathcal{R}_\tau^{(N)}(M_\tau)$	31
3.13	RS závislosť pre $\mathcal{R}_{e^+e^-}^{(N)}(Q)$	34
3.14	RS závislosť pre $\mathcal{R}_{e^+e^-}^{(N)}(Q)$, výsledky v $\overline{\text{MS}}$ RS	35
3.15	RS závislosť pre $\mathcal{R}_{e^+e^-}^{(N)}(Q)$; porovnanie $\mathcal{R}_{e^+e^-}^{(N)}(a, Q)$, $\mathcal{R}_{e^+e^-}^{(N)}(W_n(a), Q)$ s výsledkami v $\overline{\text{MS}}$ RS	36
3.16	RS závislosť pre $\mathcal{R}_{e^+e^-}^{(N)}(Q)$; porovnanie $\mathcal{R}_{e^+e^-}^{(N)}(a, Q)$, $\mathcal{R}_{e^+e^-}^{(N)}(\overline{W}_n(a), Q)$	37
3.17	RS závislosť pre $\mathcal{R}_{e^+e^-}^{(N)}(Q)$; porovnanie $\mathcal{R}_{e^+e^-}^{(N)}(a, Q)$, $\mathcal{R}_{e^+e^-}^{(N)}(\overline{W}_n(a), Q)$ s výsledkami v $\overline{\text{MS}}$ RS	38
3.18	RS závislosť pre $\mathcal{R}_{e^+e^-}^{(N)}(Q)$, rozvoj do NNLO; porovnanie $\mathcal{R}_{e^+e^-}^{(N)}(a, Q)$, $\mathcal{R}_{e^+e^-}^{(N)}(\overline{W}_n(a), Q)$, výsledky v $\overline{\text{MS}}$ RS	39
3.19	$\mathcal{R}_{e^+e^-}^{(N)}(W_n(a), Q)$ v NNLO založené na výbere sedlového bodu	39

Predhovor

Táto práca je venovaná novátorskému prístupu dvojice I. Caprini, J. Fischer ako nakladať s divergentnými poruchovými rozvoji v rámci poruchovej kvantovej chromodynamiky. Začiatok práce je venovaný prehľadu základných matematických pojmov. Po ňom nasleduje úvod do poruchovej QCD, renormalizácie v rámci poruchovej QCD, definícia a použiteľnosť novej resumačnej metódy. V závere možno nájsť numerické testy tejto metódy na procesoch e^+e^- anihilácie a rozpade τ -leptónu v rámci poruchovej QCD.

Moja veľká vďaka patrí prof. J. Chýlovi, CSc. za veľmi cenné pripomienky, diskusie a trpezlivý prístup, prof. J. Fischerovi, DrSc. za množstvo stimulujúcich konzultácií a poskytnutú literatúru a v neposlednom rade M. Rainišovi za cenné rady, ktoré som použil pri numerických výpočtoch.

Kapitola 1

Základné matematické pojmy

Úvodná kapitola nám posluží na zhrnutie základných definícií a teorémov, ktoré budeme neskôr často využívať¹.

1.1 Borelovská sumácia

V kvantovej teórii sme konfrontovaní s fenoménom divergencie poruchových rozvojev [1], pomocou ktorých často realizujeme konkrétne výpočty. Ide hlavne o kvantovú teória poľa, špeciálne o kvantovú elektrodynamiku QED a kvantovú chromodynamiku QCD. Hoci táto vlastnosť nebola dodnes rigorózne dokázaná, budeme ju v ďalšom považovať za fakt, nakoľko je veľmi pravdepodobné, že poruchové rozvoje v QED a QCD vykazujú divergentné chovanie.

Jednou z intuitívne najprijateľnejších metód používaných ku korektnej definícii súčtu divergentných radov je tzv. Borelova metóda. Hoci ju v poruchovej kvantovej chromodynamike nemožno priamo aplikovať [2, 4], ukazuje sa, že použitie objektov ako Borelova transformácia je veľmi výhodné [4].

Definícia 1.1.1 *Bud'*

$$f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n z^n \quad (1.1)$$

*ľubovoľný mocninný rad*². Borelovou transformáciou *tohto radu nazveme rad*

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{a_n}{n!} z^n. \quad (1.2)$$

Borelovu transformáciu budeme označovať $B[f](z)$.

¹Definície a tvrdenia v tejto kapitole sú prebraté z práce [5].

²Automaticky predpokladáme, že rad (1.1) konverguje na nejakom kruhu konvergenencie K_R o polomere R , pre ktorý platí $\frac{1}{R} = \lim_{n \rightarrow \infty} \sup(a_n)^{\frac{1}{n}}$.

Definícia 1.1.2 Rad (1.1) nazveme Borelovsky sumovateľný práve vtedy, keď sú splnené nasledujúce podmienky:

1. jeho Borelovská transformácia $B[f](z)$ konverguje vo vnútri nejakého kruhu o polomere $\varepsilon > 0$, tj. $\forall z \in \mathbb{C}, |z| < \varepsilon$,
2. $B[f](z)$ má analytické pokračovanie v okolí reálnej kladnej poloosi,
3. $\exists t \in \mathbb{C}, t \neq 0$ také, že integrál

$$\tilde{f}(z) = \frac{1}{z} \int_0^{\infty} e^{-\frac{t}{z}} B[f](t) dt \quad (1.3)$$

konverguje.

Funkciu $\tilde{f}(z)$ obvykle nazývame Borelovskou sumou radu (1.1).

Predtým, než vyslovíme vetu [3], ktorá bude pojednávať o podmienkach nutných pre Borelovskú sumovateľnosť konkrétneho radu, zdefinujme si ešte nasledujúci pojem.

Definícia 1.1.3 Buď z_i pozícia i -tej singularity funkcie $f(z)$, $i = 1, 2, 3, \dots, N$, kde N je číslo udávajúce počet singularít funkcie $f(z)$ a nech R_i sú polpriamky spájajúce z_i s počiatkom a smerujúce za z_i do nekonečna. Zostrojme ďalej kolmicu P_i na R_i v bode $z = z_i$ pre každé $i = 1, 2, 3, \dots, N$. Potom časť komplexnej roviny uzavretej priamkami P_i a obsahujúcu počiatok nazveme Borelov polygón.

Veta 1.1.1 Buď $f(z)$ hlavná vetva analytickej funkcie regulárnej v bode $z = 0$,

$$f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n z^n. \quad (1.4)$$

Potom integrál tohto radu

$$\int_0^{\infty} e^{-t} \sum_{n=0}^{\infty} a_n \frac{(zt)^n}{n!} dt = \int_0^{\infty} e^{-t} B(zt) dt, \quad (1.5)$$

existuje vo vnútri Borelovho polygónu a je v ňom rovný analytickej funkcii $f(z)$.

1.2 Asymptotické rady

V úvode predchádzajúcej podkapitoly sme prijali predpoklad, že poruchové rozvoje v rámci kvantovej teórie poľa sú divergentné. Vystáva teda prirodzená otázka, ako definovať fyzikálne uspokojivo motivovanú metódu pre sumáciu takéhoto radu a navyše ako priradiť tento súčet k výslednej súčtovej funkcii. Jednou z možností ako postupovať je chápať toto priradenie v zmysle asymptotického rozvoja danej funkcie.

Definícia 1.2.1 *Buď S množina bodov s počiatkom $z = 0$ ako jej hromadným bodom. Nech funkcia $f(z)$ je definovaná na množine S . Povieme, že funkcia $f(z)$ má na množine S asymptotický rozvoj a označíme ho*

$$f(z) \approx \sum_{n=0}^{\infty} a_n z^n, \quad (1.6)$$

keď platí

$$f(z) - \sum_{n=0}^N a_n z^n = \mathcal{O}(z^{N+1}), \quad z \rightarrow 0, \quad z \in S. \quad (1.7)$$

Všeobecne platí, že nekonečná množina funkcií môže mať jeden jediný asymptotický rozvoj. Pre fyzikálne aplikácie je však nutné vyselektovať jednu konkrétnu funkciu, ktorá bude rovná napríklad Borelovej sume svojho asymptotického rozvoja. Túto otázku rieši slávny Watsonov teorém.

Veta 1.2.1 *Buď $f(z)$ analytická funkcia v oblasti $|\arg z| < \frac{1}{2}\pi + \varepsilon$, $|z| < \eta$, pre $\varepsilon > 0$, $\eta > 0$. Nech $f(z)$ má na tejto oblasti asymptotický rozvoj*

$$f(z) = \sum_{n=0}^{N-1} a_n z^n + R_N(z), \quad (1.8)$$

kde $R_N(z)$ spĺňa rovnomerne pre každé N a z z oblasti podmienku

$$|R_N(z)| \leq A \sigma^N N! |z|^N. \quad (1.9)$$

Potom platí

1. Borelova transformácia $B[f](t) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n \frac{t^n}{n!}$ konverguje na kruhu $|t| < \frac{1}{\sigma}$,
2. $B[f](t)$ má analytické pokračovanie na oblasti $|\arg t| < \varepsilon$,
3. integrál

$$g(z) = \frac{1}{z} \int_0^{\infty} e^{-\frac{t}{z}} B[f](t) dt$$

konverguje absolútne na otvorenom kruhu $\operatorname{Re} z^{-1} > \eta^{-1}$ a rovná sa na ňom funkcii $f(z)$.

V prípade renormalizovateľných kvantových teórií polí, medzi ktoré patrí aj QED a QCD, však túto vetu nemožno použiť [4]. Dôvodom je skutočnosť, že predpoklady, ktoré vyžaduje veta (1.2.1) sú pre tieto teórie prisilné. Z toho automaticky rezultuje nepoužiteľnosť Borelovskej sumačnej metódy v týchto teóriách. Jednu z alternatívnych resumačných metód za použitia optimálneho konformného zobrazenia rozpracovala dvojica I. Caprini, J. Fischer [6, 7, 8] a práve touto metódou sa budeme v ďalšom texte zaoberať.

Kapitola 2

Poruchová QCD

Kvantová chromodynamika je jednou z najznámejších neabelovských kalibračných teórií kvantovaných polí. Práve neabelovský charakter grupy $SU(3)$, ktorá je v prípade QCD odpovedajúcou grupou kalibračných transformácií, má závažné fenomenologické dôsledky.

Prvým z nich je tzv. *uväznenie farby*. Je to jav, ktorý nemá v klasickom svete žiadnu analógiu a je priamym dôsledkom dynamických vlastností teórie silných interakcií, ktorou práve QCD je. Tieto vlastnosti majú za následok skutočnosť, že v prírode pozorujeme len bezfarebné kombinácie kvarkov, antikvarkov a gluónov, pretože práve takýmto kombináciám odpovedajú hadróny s nenulovými hmotnosťami.

Druhým je tzv. *asymptotická voľnosť*. Jej podstatou je skutočnosť, že na malých vzdialenostiach je efektívny farebný náboj malý, limitne idúci k nule. Potom na základe tohto tvrdenia môžeme použiť aparát poruchovej teórie, ktorá pomocou daných Feynmanových pravidiel počíta prechody medzi asymptotickými stavmi častíc pred a po zrážke.

2.1 Lagranžian QCD

Pripomeňme si lagranžian QCD, ktorý má nasledovný tvar

$$\mathcal{L}_{QCD} = -\frac{1}{4}\vec{G}_{\mu\nu}\vec{G}^{\mu\nu} + \bar{\Psi}(i\cancel{\partial} - m_q)\Psi + g\bar{\Psi}\gamma_\mu\vec{T}\Psi\vec{A}^\mu. \quad (2.1)$$

$\Psi(x)$ je lokálny poľný operátor popisujúci farebný triplet kvarkov danej vône, a síce u, d, s, c, t, b (up, down, strange, charm, top, bottom), a preto ho môžeme písať v tvare

$$\Psi(x) = \begin{pmatrix} \Psi^1(x) \\ \Psi^2(x) \\ \Psi^3(x) \end{pmatrix}. \quad (2.2)$$

Lokálnymi kalibračnými transformáciami tohto tripletu sú práve matice farebnej grupy symetrie SU(3). Platí teda

$$\Psi'(x) = \exp(i\alpha_a(x)T_a)\Psi(x), \quad (2.3)$$

kde $T_a, a = 1, \dots, 8$ sú generátory SU(3) a $\alpha_a(x), a = 1, \dots, 8$ sú funkcie premennej x ¹. Zavedenie ôsmich kalibračných polí $A_\mu^a, a = 1, \dots, 8$, ktoré budú popisovať osem farebných gluónov, je dôsledkom požiadavky invariantnosti teórie, v ktorej vystupujú polia farebných kvarkov, voči lokálnej kalibračnej transformácii (2.3) kvarkových polí. Vo vzťahu (2.1) je to teda člen $\vec{A}_\mu(x)$, ktorý má tvar

$$\vec{A}_\mu(x) = \begin{pmatrix} A_\mu^1(x) \\ A_\mu^2(x) \\ \vdots \\ A_\mu^8(x) \end{pmatrix}. \quad (2.4)$$

Tenzor $\vec{G}_{\mu\nu}$ je definovaný ako

$$G_{\mu\nu}^a = \frac{\partial A_\nu^a(x)}{\partial x^\mu} - \frac{\partial A_\mu^a(x)}{\partial x^\nu} + gf^{abc}A_{b\mu}A_{c\nu}, \quad (2.5)$$

a práve vďaka prítomnosti člena $gf^{abc}A_{b\mu}A_{c\nu}$ v tomto tenzore sa v rovnici (2.1) objavujú členy typu

$$g \left\{ f_{abc} \left[\left(\frac{\partial A_\nu^a}{\partial x^\mu} - \frac{\partial A_\mu^a}{\partial x^\nu} \right) A_b^\mu A_c^\nu + \left(\frac{\partial A^{a\mu}}{\partial x_\nu} - \frac{\partial A^{a\nu}}{\partial x_\mu} \right) A_{b\mu} A_{c\nu} \right] \right\} + g^2 f_{abc} f_{ade} A_b^\mu A_c^\nu A_{d\mu} A_{e\nu}, \quad (2.6)$$

ktorých dôsledkom je spomínaná asymptotická voľnosť a uväznenie farby v QCD. Keďže pri (2.3) sa musia navyše transformovať aj samotné gluóny, práve požiadavka invariantnosti celej teórie voči (2.3) si vynúti prítomnosť kľúčového tretieho člena na pravej strane definície (2.5).

2.2 Renormalizácia a nejednoznačnosti v renormalizovanej QCD

V predchádzajúcej sekcii sme si pripomenuli lagranžián QCD (2.1). Prijmeme ďalej predpoklad, že všetky nami uvažované kvarky sú nehmotné. Potom jediným voľným parametrom v lagranžiáne (2.1) je tzv. *farebný náboj* g a štandardnou kvantovacou procedúrou aplikovanou na (2.1) získame poruchovú QCD, v ktorej máme všetky fyzikálne veličiny

¹Vzťah (2.3) je definíciou lokálnej kalibračnej transformácie.

vyjadrené ako mocninné rady s rozvojovým parametrom, ktorým je práve spomínaný farebný náboj g .

Priamočiarym použitím pravidiel pre Feynmanove diagramy v QCD však automaticky ako v prípade QED narazíme na problém *ultrafialovej divergencie* Feynmanovych integrálov cez sľučkové hybnosti². Metóda vyvinutá na odstránenie týchto nepríjemných divergencií sa nazýva *renormalizácia*.

Podstatou metódy renormalizácie je *redefinícia* pôvodných, tzv. *holých*, veličín v lagranžiáne (2.1). Sú nimi práve farebný náboj a hmotnosti fermiónov a poľných operátorov $\Psi(x)$, $\vec{A}_\mu(x)$. Renormalizovaná teória potom pracuje s novými *renormalizovanými veličinami* namiesto pôvodných holých.

Technicky sa renormalizácia najčastejšie realizuje pomocou tzv. *regularizácie* s následným použitím techniky *kontrčlenov*. Regularizácia nám ultrafialové divergencie izoluje a kontrčleny dodané do pôvodného lagranžiánu ich „odstránia“. V QCD, vzhľadom na jej neabelovskú povahu, je hojne používaná *dimenzionálna regularizácia*, ktorá v tomto prípade ako jediná zachováva kalibračnú invarianciu.

Metóda renormalizácie, resp. možnosť renormalizácie danej poľnej teórie, nám síce po jej úspešnej aplikácii odstráni fyzikálne nezmyselné nekonečné výrazy, avšak prináša so sebou ďalší problém. Je ním práve *nejednoznačnosť* definície renormalizovaných veličín.

Požiadavka invariance úplného súčtu poruchového rozvoja danej fyzikálnej veličiny voči *renormalizačnej grupe*³ zaručuje, že výsledok poruchového výpočtu nezávisí na voľbe renormalizovaných veličín ale len v prípade, keď sčítame celý poruchový rad. Táto priaznivá situácia v praxi ale nenastáva, pretože zväčša poznáme najviac prvé tri členy. Na základe tejto skutočnosti je výber vhodnej definície renormalizovaných veličín závažnou a neoddeliteľnou súčasťou každej aplikácie poruchovej teórie.

2.3 Závislosť poruchových rozvojev na renormalizačnej škále a schéme

Počnúc touto podkapitolou sa obmedzíme na QCD s nehmotnými kvarkami. Tento predpoklad má za následok, ako sme už hovorili, že jediným voľným parametrom, na ktorom v takejto teórii závisia poruchové rozvoje odpovedajúce daným fyzikálnym veličinám, je práve renormalizovaný farebný náboj g . Ďalej definujeme tzv. *konštantu silnej väzby* vzťahom

$$\alpha_s = \frac{g^2}{4\pi}. \quad (2.7)$$

²V QED sú to napríklad známe prípady korekcií k fotónovému a fermiónovému propagátoru uvažované do druhého rádu poruchovej teórie.

³Renormalizačnú grupu budeme označovať skrátene ako RG.

Na tomto mieste je však vhodné poznamenať, že v skutočnosti nejde o konštantu, ale o funkciu závislú na množstve parametrov. Tieto parametre definujú *renormalizačnú schému*⁴. Pre prehľadnosť sa ešte zavádza *renormalizovaný kuplant*⁵, ktorý súvisí s konštantou silnej väzby vzťahom

$$a = \frac{\alpha_s}{\pi}. \quad (2.8)$$

Definičná rovnica pre kuplant má tvar

$$\frac{\partial a(\text{RS})}{\partial \ln \mu} \equiv \beta(a) = -ba^2(\text{RS})(1 + ca(\text{RS}) + c_2a^2(\text{RS}) + \dots), \quad (2.9)$$

kde μ je ľubovoľne veľký ale konečný parameter rozmeru hmotnosti, ktorý musíme do teórie zaviesť v procese regularizácie. Tento parameter sa nazýva *renormalizačná škála* alebo *renormalizačný bod*. Dôležitým faktom je, že všetky koeficienty v rovnici (2.9) sú konečné.

RS je veľmi výhodné parametrizovať práve pomocou množiny parametrov $\{\mu, c_k\}$. Zároveň platí, že táto množina parametrizuje RS úplne [9], a preto môžeme písať $\text{RS} = \{\mu, c_k\}$. Ďalej platí, že prvé dva koeficienty rozvoja beta funkcie $\beta(a)$ sú jednoznačne určené počtom kvarkových vôní n_f , ktoré uvažujeme a síce⁶

$$b = \frac{33 - 2n_f}{6}, \quad c = \frac{153 - 19n_f}{66 - 4n_f}. \quad (2.10)$$

Pre derivácie kuplantu voči parametrom c_k platí

$$\frac{\partial a(\mu, c_k)}{\partial c_k} \equiv \beta_k = -\beta(a) \int_0^a \frac{bx^{k+2}}{\beta(x)^2} dx. \quad (2.11)$$

Diferenciálna rovnica (2.9) má nekonečne mnoho riešení líšiacich sa okrajovou podmienkou. My budeme používať podmienku tvaru

$$a(\mu = \Lambda) = \infty, \quad (2.12)$$

kde Λ je nový voľný parameter, ktorým rozlišujeme jednotlivé riešenia. Stratégia voľby konkrétnej numerickej hodnoty tohto parametra je otázkou konvencie. Keďže tento parameter popisuje jednoparametrickú grupu RS, pre konkrétne pevné $\{\mu, c_k\}$, voľbu jednej konkrétnej hodnoty Λ nazývame voľbou tzv. *referenčnej RS*⁷.

V prvom ráde⁸ má všeobecné riešenie rovnice (2.9) pri podmienke (2.12) tvar

⁴Renormalizačnú schému budeme skrátene označovať RS.

⁵Dôvodom je eliminácia príliš častého výskytu mocnín čísla π .

⁶Tieto vzťahy platia len v prípade nami prijatého predpokladu nehmotnej QCD.

⁷Tento pojem budeme označovať ako RRS.

⁸Označujeme ho ako LO z anglického „Leading Order“.

$$a_{LO}\left(\frac{\mu}{\Lambda}\right) = \frac{1}{b \ln\left(\frac{\mu}{\Lambda}\right)}. \quad (2.13)$$

V druhom ráde⁹ však definičná rovnica pre kuplant už nemá analytické riešenie, a preto je implicitne zadaný rovnicou

$$b \ln\left(\frac{\mu}{\Lambda}\right) = \frac{1}{a_{NLO}\left(\frac{\mu}{\Lambda}\right)} + c \ln \frac{ca_{NLO}\left(\frac{\mu}{\Lambda}\right)}{1 + ca_{NLO}\left(\frac{\mu}{\Lambda}\right)}. \quad (2.14)$$

Pre ľubovoľný n -tý rád má implicitná rovnica pre renormalizovaný kuplant tvar

$$b \ln\left(\frac{\mu}{\Lambda}\right) = \frac{1}{a_n\left(\frac{\mu}{\Lambda}\right)} + c \ln \frac{ca_n\left(\frac{\mu}{\Lambda}\right)}{1 + ca_n\left(\frac{\mu}{\Lambda}\right)} + \int_0^{a_n\left(\frac{\mu}{\Lambda}\right)} dx \left[-\frac{1}{x^2 B_n(x)} + \frac{1}{x^2(1 + cx)} \right], \quad (2.15)$$

kde

$$B_n(x) = 1 + cx + c_2 x^2 + \dots + c_{n-1} x^{n-1}. \quad (2.16)$$

Automaticky je vidieť, že pre $n = 2$ prechádza rovnica (2.15) na (2.14). Pre $n = 3$ jednoduchým dosadením máme¹⁰

$$b \ln\left(\frac{\mu}{\Lambda}\right) = \frac{1}{a\left(\frac{\mu}{\Lambda}\right)} + c \ln \frac{ca\left(\frac{\mu}{\Lambda}\right)}{1 + ca\left(\frac{\mu}{\Lambda}\right)} + \int_0^{a\left(\frac{\mu}{\Lambda}\right)} dx \left[-\frac{1}{x^2(1 + cx + c_2 x^2)} + \frac{1}{x^2(1 + cx)} \right], \quad (2.17)$$

čo po preintegrování dáva výsledný implicitný vzťah pre renormalizovaný kuplant a v NNLO

$$b \ln\left(\frac{\mu}{\Lambda}\right) = \frac{1}{a\left(\frac{\mu}{\Lambda}\right)} + c \ln \frac{ca\left(\frac{\mu}{\Lambda}\right)}{\sqrt{1 + ca\left(\frac{\mu}{\Lambda}\right) + c_2 a^2\left(\frac{\mu}{\Lambda}\right)}} + f\left[a\left(\frac{\mu}{\Lambda}\right), c_2\right]. \quad (2.18)$$

Pre $f\left[a\left(\frac{\mu}{\Lambda}\right), c_2\right]$ platí

⁹Zavádzame preň označenie NLO z anglického „Next-to-Leading Order“.

¹⁰Tento rád označujeme ako NNLO v súlade s anglickým „Next-to-Next-to-Leading Order“.

$$f\left[a\left(\frac{\mu}{\Lambda}\right), c_2\right] = \frac{2c_2 - c^2}{d} \left[\arctan \frac{2c_2 a\left(\frac{\mu}{\Lambda}\right) + c}{d} - \arctan \frac{c}{d} \right],$$

$$d = \sqrt{4c_2 - c^2}, \quad 4c_2 > c^2, \quad (2.19)$$

$$f\left[a\left(\frac{\mu}{\Lambda}\right), c_2\right] = \frac{2c_2 - c^2}{d} \left[\ln \left| \frac{2c_2 a\left(\frac{\mu}{\Lambda}\right) + c - d}{2c_2 a\left(\frac{\mu}{\Lambda}\right) + c + d} \right| - \ln \left| \frac{c - d}{c + d} \right| \right],$$

$$d = \sqrt{c^2 - 4c_2}, \quad 4c_2 < c^2. \quad (2.20)$$

Uvažujme ďalej poruchový rozvoj pre bližšie nešpecifikovanú fyzikálnu veličinu v tvare¹¹

$$\mathcal{R}(Q) = a(\mu, c_k) [r_0 + r_1(Q, \mu, c_k) a(\mu, c_k) + r_2(Q, \mu, c_k) a^2(\mu, c_k) + \dots]. \quad (2.21)$$

Tento poruchový rozvoj je realizovaný v mocninách renormalizovaného kuplantu, z čoho rezultuje konečnosť všetkých jeho koeficientov. Ide o základnú požiadavku renormalizovateľnosti QCD. Ako sme už spomínali, všetky ultrafialové divergencie sú obsiahnuté v definícii renormalizovaného kuplantu.

Invariancia voči RG pre rozvoj (2.21) teda znamená skutočnosť

$$\frac{\partial \mathcal{R}(Q)}{\partial \ln \mu} = 0, \quad \frac{\partial \mathcal{R}(Q)}{\partial c_k} = 0. \quad (2.22)$$

Túto vlastnosť však nemá N -tý čiastočný súčet takéhoto radu, a preto platí

$$\begin{aligned} \mathcal{R}_N &= a(\mu, c_k) [r_0 + r_1(Q, \mu, c_k) a(\mu, c_k) + \\ &+ r_2(Q, \mu, c_k) a^2(\mu, c_k) + \dots + r_{N-1} a^{N-1}(\mu, c_k)] = \\ &= \mathcal{F}(\mu, c_k, \rho_k), \end{aligned} \quad (2.23)$$

kde ρ_k sú tzv. RG *invarianty*¹² [9], čo znamená, že ich hodnota sa pri zmene parametrov μ, c_k nezmení. Podmienky (2.22) aplikované na konečný súčet (2.23) prechádzajú na tvar

$$\frac{\partial \mathcal{R}_N}{\partial \ln \mu} = \mathcal{O}(a^{N+1}), \quad \frac{\partial \mathcal{R}_N}{\partial c_k} = \mathcal{O}(a^{N+1}). \quad (2.24)$$

Ich riešenie pre koeficienty $r_1(Q, \mu, c_k), r_2(Q, \mu, c_k)$ implikuje

¹¹Ako uvidíme ďalej, poruchový rozvoj tohto tvaru vykazuje istá veličina R , ktorou sa budeme bližšie zaoberať v kapitole (3.2).

¹²RG invariantmi sú taktiež koeficienty b a c definované vzťahom (2.10).

$$r_1(Q, \mu) = b \ln \frac{\mu}{\Lambda} - \rho_1 \left(\frac{Q}{\Lambda} \right), \quad (2.25)$$

$$r_2(Q, \mu, c_2) = \rho_2 - c_2 + \left(r_1 + \frac{c}{2} \right)^2. \quad (2.26)$$

Invariant ρ_1 je definovaný v schéme $\overline{\text{MS}}$ ¹³ ako

$$\rho_1 \left(\frac{Q}{\Lambda_{\overline{\text{MS}}}} \right) = b \ln \frac{Q}{\Lambda_{\overline{\text{MS}}}} - r_1(\mu = Q, \overline{\text{MS}}). \quad (2.27)$$

Invariant ρ_2 je však na rozdiel od ρ_1 len bezrozmerné číslo. Jeho numerickú hodnotu pre konkrétny proces určujeme vždy v nejakej RS. Štandardnou voľbou je zväčša $\overline{\text{MS}}$. Pre vyššie koeficienty r_k , $k \geq 3$ prichádzajú na rad ďalšie invarianty ρ_k , $k \geq 3$, ktoré sú taktiež ako ρ_2 len bezrozmerné čísla.

2.4 Preferované voľby renormalizačných schém

2.4.1 Renormalizačné schémy MS a $\overline{\text{MS}}$

Pre zmysluplné fenomenologické použitie QCD je nutné túto teóriu renormalizovať. Ako sme si uviedli, samotnému procesu renormalizácie každej poľnej renormalizovateľnej teórie predchádza proces regularizácie.

V prípade QCD sa zväčša využíva dimenzionálna regularizácia práve kvôli jej „schopnosti“ nenarúšať kalibračnú invarianciu. Tento prístup býva väčšinou aj technicky najjednoduchší. Základnou vlastnosťou tejto metódy je, že po jej použití máme vo výsledku mocniny členu $\ln 4\pi - \gamma_E$, kde γ_E je Eulerova konštanta, ktorá je pozostatkom mocniného rozvoja Eulerovej funkcie Γ .

Samotnú procedúru renormalizácie potom môžeme previesť pridaním kontrčlenov k pôvodnému lagranžiánu a to napr. nasledovnými dvomi spôsobmi

1. Kontrčleny dodané do lagranžiánu potlačia len divergentné, čiže nekonečné členy poruchového rozvoja a ostatné konečné členy zostanú neporušené,
2. Kontrčleny dodané do lagranžiánu potlačia okrem divergentných výrazov aj niektoré výrazy, ktoré sú konečné.

V prvom prípade hovoríme o renormalizačnej schéme MS, v druhom prípade o renormalizačnej schéme $\overline{\text{MS}}$ ¹⁴.

¹³Bližšie sa o tejto schéme zmienime v podkapitole (2.4.1)

¹⁴Skrátené označenie pre jednotlivé RS pochádzajú z anglických pojmov „Minimal Subtraction“ a „Modified Minimal Subtraction“.

2.4.2 Renormalizačná schéma PMS

Táto metóda je známa ako „Princíp Minimálnej Citlivosti“¹⁵. Jej základným požiadavkom je skutočnosť, aby *globálne* vlastnosti (2.22), ktoré vzhľadom ku konzistencii poruchovej teórie samotnej nakladáme na úplný súčet poruchového rozvoja, boli splnené aj *lokálne*. To znamená, že požadujeme, aby platilo

$$\frac{\partial \mathcal{R}_N(Q, \mu, c_k)}{\partial \ln \mu} = 0, \quad \frac{\partial \mathcal{R}_N(Q, \mu, c_k)}{\partial c_k} = 0. \quad (2.28)$$

Na základe tejto metódy teda hľadáme bod o súradniciach $[\mu, c_k]$ s lokálne najmenšími zmenami čiastočného súčtu \mathcal{R}_N pri zmene RS, čiže samotných parametrov μ, c_k . Takýchto bodov však môže byť aj viac, preto otázka výberu jedného konkrétneho bodu nemusí byť triviálna.

2.5 Poruchové rozvoje v systéme funkcií $W_n(a)$

Štandardné poruchové rozvoje v QCD sú realizované ako rozvoje v mocninách renormalizovaného kuplantu a . Na tomto mieste je však vhodné si pripomenúť, že tieto rozvoje v skutočnosti nie sú mocninné, ako by sa očakávalo. Ak budeme uvažovať rozvoj (2.21) do NLO, čiže

$$\mathcal{R}_{NLO}(Q, \text{RS}) = a(\text{RS})[r_0 + r_1(Q, \text{RS})a(\text{RS})] \quad (2.29)$$

a dosadíme zo vzťahov (2.25), (2.14) za r_1 , resp. $b \ln \frac{\mu}{\Lambda}$, dostávame

$$\mathcal{R}_{NLO}(Q, \text{RS}) = (1 + r_0)a(\text{RS}) + \left[c \ln \frac{ca(\text{RS})}{1 + ca(\text{RS})} - \rho_1 \left(\frac{Q}{\Lambda} \right) \right] a^2(\text{RS}). \quad (2.30)$$

Poruchové rozvoje v mocninách a však nie sú z praktického hľadiska veľmi vhodné. Pri poruchových výpočtoch nepracujeme len s jedným mocninným radom, ale v konečnom dôsledku s nekonečným počtom mocninných radov. Dôvodom je práve mocninný rad v definičnej rovnici pre renormalizovaný kuplant (2.9). V kapitole (1.2) sme hovorili, že ak chápeme poruchový rozvoj ako asymptotický rad k danej rozvíjanej funkcii, ona sama nie je týmto radom určená jednoznačne. Počet koeficientov mocninných radov, ktoré explicitne pre konkrétne procesy poznáme, je extrémne malý. Určenie rozvíjanej funkcie na základe takýchto neúplných informácií je prakticky nemožné.

Nejednoznačnosť daného problému však môžeme jednoducho znížiť, ak náležite využijeme informácie o analytických vlastnostiach rozvíjanej funkcie, ktoré sú známe na

¹⁵Skratka PMS pochádza z anglického „Principle of Minimal Sensitivity“; inak sú to iniciály autora tejto metódy P. M. Stevenson [9].

základe rozloženia a charakteru jej singularít v Borelovej rovine. Tieto vlastnosti však pri štandardnom poruchovom rozvoji v mocninách kuplantu nie sme schopní využiť, nakoľko mocninná funkcia sama o sebe nemá v komplexnej rovine žiadne singularity.

Metóda, ktorá dôsledne pracuje s týmito informáciami je podrobne popísaná v prácach [6, 7, 8]. Jej podstata spočíva v definícii alternatívnej množiny funkcií $W_n(a)$, v ktorých potom poruchový rozvoj realizujeme. Zásadou pre výber týchto funkcií je, aby ich analytické vlastnosti boli čo možno najmenej odlišné od analytických vlastností pôvodnej rozvíjanej funkcie. Táto požiadavka je dosiahnutá pomocou optimálneho konformného zobrazenia Borelovej roviny rozvíjanej funkcie do jednotkového kruhu, ktoré je pri definícii takejto množiny funkcií použité¹⁶.

Uvažujme ďalej elektromagnetický korelátor dvoch kvarkových prúdov, ktorý má nasledovný tvar

$$\Pi^{\mu\nu} = i \int d^4x e^{-ipx} \langle 0 | T(j^\mu(x) j^\nu(0)) | 0 \rangle = (g^{\mu\nu} p^2 - p^\mu p^\nu) \Pi(s), \quad s = p^2. \quad (2.31)$$

Pomocou tohto korelátoru definujeme Adlerovu funkciu v QCD s nehmotnými kvarkami predpisom

$$D(s) = -4\pi^2 s \left(\frac{d}{ds} \right) \Pi(s). \quad (2.32)$$

Na rozdiel od korelátoru (2.31) je však Adlerova funkcia (2.32) RG invariantom. V poruchovej QCD má Adlerova funkcia rozvoj v mocninách renormalizovaného väzbového parametra $\alpha_s(\text{RS})$

$$D(s) = \sum_{n=0}^{\infty} D_n(s, \text{RS}) \left(\frac{\alpha_s(\text{RS})}{\pi} \right)^n \quad (2.33)$$

a pre jej Borelovu transformáciu platí

$$B[D](u, s) = \sum_{n=0}^{\infty} b_n u^n. \quad (2.34)$$

Koeficienty b_n v predchádzajúcom vzťahu majú tvar

$$b_n = \frac{D_n}{\beta_0^n n!}, \quad \beta_0 = \frac{b}{2\pi} = \frac{33 - 2n_f}{12\pi} \quad (2.35)$$

a pôvodnú Adlerovu funkciu formálne získame predpisom

¹⁶Vzťahy a tvrdenia použité vo zvyšku tejto kapitoly pochádzajú práve zo spomínaných prác [6, 7, 8].

$$D(s, a) = \frac{1}{a} \int_0^\infty e^{-\frac{u}{a}} B(u, s) du, \quad a = \beta_0 \frac{\alpha_s}{\pi}. \quad (2.36)$$

V kapitole (1.2) sme uviedli, že matematické požiadavky pre použiteľnosť viet typu (1.2.1) v QCD nie sú splnené, preto je nutné dať formálnemu výrazu (2.36) dobrý matematický zmysel.

Borelova transformácia $B(u, s)$ závisí na renormalizačnej škále, schéme a vonkajšom parametri uvažovaného procesu¹⁷. Ďalej prijmeme však všeobecne uznávaný predpoklad, že jej analytické vlastnosti, čiže rozloženie a charakter všetkých jej singularít v Borelovej rovine, sú nezávislé na zmene týchto parametrov. Navyiac predpokladáme, že rozloženie všetkých týchto singularít poznáme.

Koeficienty D_n v poruchovom rozvoji Adlerovej funkcie vykazujú nasledovný špecifický rast pri vysokých rádoch

$$D_n \sim \sum_k C_k n! n^{\delta_k} \left(\frac{\pi \beta_0}{k} \right)^n, \quad (2.37)$$

kde index k prebieha množinu celých čísel a koeficienty C_k, δ_k závisia na externom parametri procesu a RS. Tento rast implikuje, že rozloženie singularít funkcie B v Borelovej u -rovine je práve pozdĺž zápornej a kladnej polosi¹⁸. Samotné umiestnenie singularít je realizované pozdĺž priamok $u \leq -1$ a $u \geq 2$, čiže Borelovská rovina je dvakrát rozrezaná. Táto skutočnosť je zobrazená na obrázku 2.1.

Analytické pokračovanie Borelovej transformácie v Borelovej rovine získame pri použití optimálneho konformného zobrazenia $w(u)$. Optimálne konformné zobrazenie má pri spomínanom rozložení singularít tvar

$$w(u) = \frac{\sqrt{1+u} - \sqrt{1-\frac{u}{2}}}{\sqrt{1+u} + \sqrt{1-\frac{u}{2}}}. \quad (2.38)$$

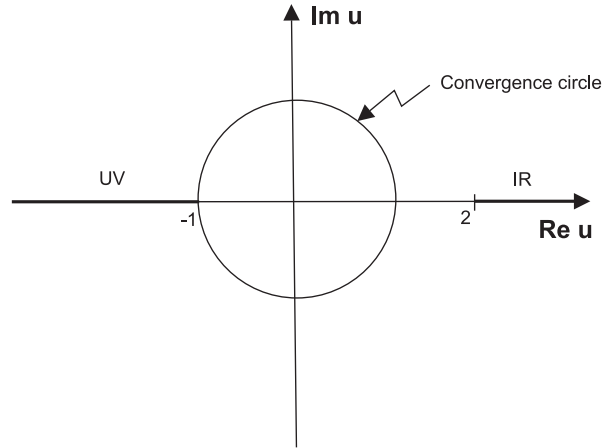
Toto zobrazenie zobrazuje celú oblasť analytičnosti funkcie B do jednotkového kruhu a pokiaľ rozvineme funkciu B práve v mocninách $w(u)$, získame rozvoj s najrýchlejšou možnou mierou konvergenie [10]. Inverzné zobrazenie k zobrazeniu (2.38) má tvar

$$u = \frac{8w}{3w^2 - 2w + 3}. \quad (2.39)$$

Zobrazenie (2.38) zachováva počiatok súradníc a rozrezanú komplexnú Borelovskú u -rovinu pozdĺž polpriamok $u \leq -1$ a $u \geq 2$ zobrazuje do vnútra jednotkového kruhu $|w| < 1$. Singularity Borelovej transformácie B sú zobrazené na kružnicu $|w| = 1$.

¹⁷Je ňou práve parameter s , ktorý je kvadrátom ťažiskovej energie skúmaného deja.

¹⁸V prvom prípade hovoríme o *ultrafialových renormalónoch*, v druhom o *infračervených renormalónoch*.



Obr. 2.1: Borelovská rovina Adlerovej funkcie

Technická realizácia nového poruchového rozvoja je nasledovná. Vezmime Borelovu transformáciu Adlerovej funkcie (2.34) a uvažujme tento rozvoj do rádu N

$$B_N[D] = \sum_{n=0}^N b_n u^n. \quad (2.40)$$

Mocninu u^n rozvineme v mocninách zobrazenia w na základe (2.39). Tento rozvoj uvažujeme taktiež do rádu N

$$u_N^n = \sum_{j=n}^N c_{nj} w^j, \quad (2.41)$$

kde koeficienty c_{nj} sú štandardné koeficienty Taylorovho rozvoja. Dosadením aproximácie (2.41) za u^n do (2.40) po preusporiadaní členov získame

$$\begin{aligned} B_N[D] &= \sum_{n=0}^N b_n u^n = \sum_{n=0}^N b_n \sum_{j=n}^N c_{nj} w^j = \sum_{n=0}^N \sum_{j=n}^N b_n c_{nj} w^j \\ &= \sum_{j=0}^N \sum_{n=0}^j b_n c_{nj} w^j = \sum_{j=0}^N c_j w^j, \end{aligned} \quad (2.42)$$

kde

$$c_j = \sum_{n=0}^j b_n c_{nj}. \quad (2.43)$$

Limitovaním vzťahu (2.42) pre $N \rightarrow \infty$ získame optimálny rozvoj Borelovej transformácie B v mocninách optimálneho konformného zobrazenia w

$$B[D](u) = \sum_{n=0}^{\infty} c_n w^n. \quad (2.44)$$

Dosadením optimálneho rozvoja (2.44) do predpisu (2.36) definujeme optimálny rozvoj Adlerovej funkcie D v nových alternatívnych funkciách W_n . Pre tento účel uvažujme výraz

$$D_N(s, a) = \frac{1}{a} \int_0^{\infty} e^{-\frac{u}{a}} B_N[D](u, s) du = \frac{1}{a} \int_0^{\infty} e^{-\frac{u}{a}} \sum_{n=0}^N b_n u^n du. \quad (2.45)$$

Za u^n dosadíme (2.41) a jednoduchými úpravami dostávame

$$\begin{aligned} D_N(s, a) &= \frac{1}{a} \int_0^{\infty} e^{-\frac{u}{a}} \sum_{n=0}^N b_n u^n du = \frac{1}{a} \int_0^{\infty} e^{-\frac{u}{a}} \sum_{n=0}^N b_n \sum_{j=n}^N c_{nj} w^j du = \\ &= \sum_{n=0}^N \sum_{j=n}^N b_n c_{nj} \frac{1}{a} \int_0^{\infty} e^{-\frac{u}{a}} w^j du = \sum_{j=0}^N \sum_{n=0}^j b_n c_{nj} \frac{1}{a} \int_0^{\infty} e^{-\frac{u}{a}} w^j du = \\ &= \sum_{n=0}^N \sum_{j=0}^n b_j c_{jn} \frac{1}{a} \int_0^{\infty} e^{-\frac{u}{a}} w^n du = \sum_{n=0}^N c_n W_n(a), \end{aligned} \quad (2.46)$$

kde

$$c_n = \sum_{j=0}^n b_j c_{jn}, \quad W_n(a) = \frac{1}{a} \int_0^{\infty} e^{-\frac{u}{a}} w^n du. \quad (2.47)$$

Limitovanie rovnosti (2.46) pre $N \rightarrow \infty$ potom implikuje

$$D(s, a) = \sum_{n=0}^{\infty} c_n W_n(a). \quad (2.48)$$

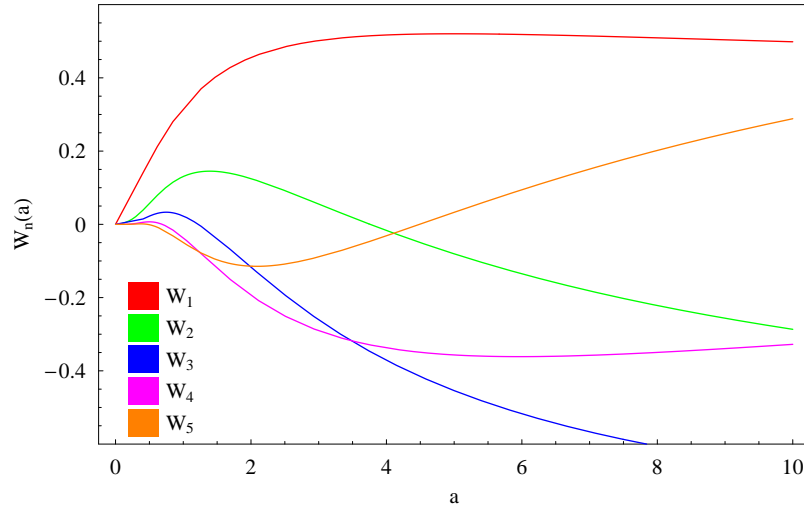
Vzťah (2.36) však môžeme prinajlepšom považovať ako definíciu, nakoľko podmienky pre Borelovskú sumáciu nie su splnené práve kvoli singularitám rozvíjanej funkcie, ktoré zasahujú do integračnej cesty. Preto musíme korektne definovať zmysel integrálu v predchádzajúcich vzťahoch a naviac vyšetriť konvergenciu jednotlivých rozvojev¹⁹. Jednou

¹⁹Podrobnejší komentár, prečo preferovať pri definícii daného integrálu práve voľbu (2.49), spolu s otázkami konvergenie daných rozvojev možno nájsť v [6, 7, 8].

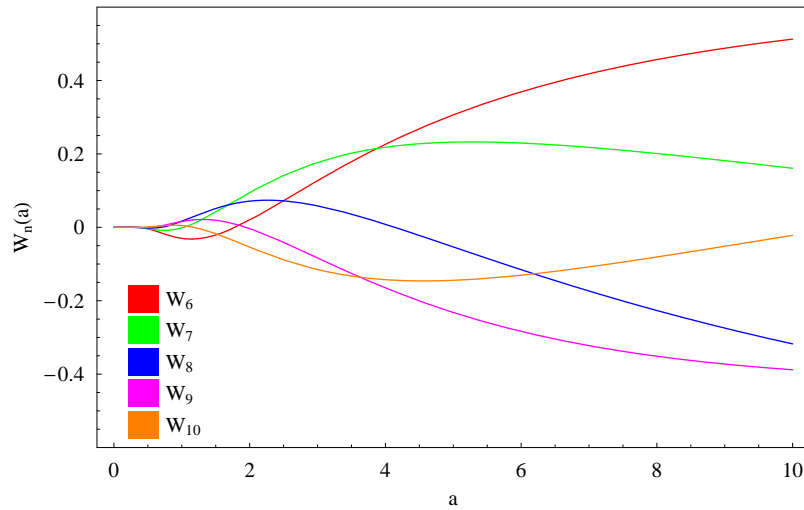
z mnoha možností je chápať každý z predchádzajúcich integrálov v zmysle hlavnej hodnoty, čiže definovať funkcie $W_n(a)$ nasledovne

$$W_n(a) = \frac{1}{2a} \int_0^\infty e^{-\frac{u+i\epsilon}{a}} [w(u+i\epsilon)]^n + \frac{1}{2a} \int_0^\infty e^{-\frac{u-i\epsilon}{a}} [w(u-i\epsilon)]^n. \quad (2.49)$$

Priebeh funkcií $W_n(a)$, $n = 1, \dots, 10$ je na obrázkoch 2.2(a), 2.2(b).



(a) $W_n(a)$, $n = 1, \dots, 5$



(b) $W_n(a)$, $n = 6, \dots, 10$

Obr. 2.2: Priebeh funkcií $W_n(a)$, $n = 1, \dots, 10$

Kapitola 3

Rozpad τ -leptónu a e^+e^- anihilácia v QCD

V kapitole (2.3) sme diskutovali RS závislosť konečných aproximantov poruchových rozvojev v renormalizovanom kuplante. Táto kapitola je venovaná numerickým testom metódy definovanej v paragrafe (2.5), presnejšie, porovnaniu RS závislosti konečných aproximantov štandardného poruchového rozvoja s RS závislosťou konečných aproximantov nového optimalizovaného rozvoja v alternatívnej množine funkcií $W_n(a)$. Ako vzorové procesy nám pre tento účel poslúžia rozpad τ -leptónu a e^+e^- anihilácia.

3.1 Rozpad τ -leptónu

3.1.1 Rozpad štandardného τ -leptónu

Základnou veličinou, ktorá je plne spočítateľná v rámci poruchovej QCD je nasledovný pomer

$$R_\tau = \frac{\Gamma(\tau \rightarrow \nu_\tau + \text{hadróny})}{\Gamma(\tau \rightarrow \nu_\tau + e^-\bar{\nu}_e)} = 3(1 + \delta_{\text{EW}})(1 + \mathcal{R}_\tau). \quad (3.1)$$

Člen δ_{EW} je elektroslabá radiačná korekcia [11, 12, 13]

$$\delta_{\text{EW}} = \left(\frac{5}{12} + 2 \ln \frac{M_Z}{M_\tau} \right) \frac{\alpha(M_\tau)}{\pi}, \quad \alpha(M_\tau) = \frac{1}{133,29}. \quad (3.2)$$

Jej numerická hodnota je približne $\delta_{\text{EW}} \sim 0,019$. R_τ je QCD korekcia, ktorej poruchový rozvoj má tvar

$$\mathcal{R}_\tau(M_\tau) = a(\mu, c_k) \left[1 + r_1(M_\tau, \mu, c_k) a(\mu, c_k) + r_2(M_\tau, \mu, c_k) a^2(\mu, c_k) + \dots \right]. \quad (3.3)$$

Pre veličinu R_τ ďalej platí [14, 15]

$$R_\tau = \frac{3(1 + \delta_{\text{EW}})}{\pi M_\tau^2} \int_0^{M_\tau^2} ds \left(1 - \frac{s}{M_\tau^2}\right)^2 \left(1 + \frac{2s}{M_\tau^2}\right) \text{Im}[\Pi(s + i\epsilon)], \quad (3.4)$$

čo možno nasledovne upraviť za použitia Cauchyho vety [14, 15]

$$R_\tau = \frac{3(1 + \delta_{\text{EW}})}{2\pi i} \oint_{|s|=M_\tau^2} \frac{ds}{s} \left(1 - \frac{s}{M_\tau^2}\right)^3 \left(1 + \frac{s}{M_\tau^2}\right) D(s). \quad (3.5)$$

a konečne v jednoslučkovom priblížení možno (3.5) prepísať na tvar [16]

$$R_\tau = 3(1 + \delta_{\text{EW}}) \left[1 + \int_0^\infty e^{-\frac{u}{a}} B(u) F\left(\frac{bu}{2}\right) du\right]. \quad (3.6)$$

Integráciu v (3.6) budeme chápať v zmysle hlavnej hodnoty a funkcia F je definovaná vzťahom

$$F(u) = \frac{-12 \sin(\pi u)}{\pi u(u-1)(u-3)(u-4)}. \quad (3.7)$$

Pre QCD korekciu \mathcal{R}_τ teda máme

$$\mathcal{R}_\tau(M_\tau) = \int_0^\infty e^{-\frac{u}{a}} B(u) F\left(\frac{bu}{2}\right) du. \quad (3.8)$$

Borelovu transformáciu $B(u)$ Adlerovej funkcie rozvineme do mocnín optimálneho konformného zobrazenia $w(u)$ tak, ako v kapitole (2.5), čo nám po dosadení do (3.8) dáva relevantné funkcie $W_n(a)$ pre \mathcal{R}_τ [17]

$$W_n(a) = \frac{1}{n!} \left(\frac{8}{3}\right)^n \left(\frac{2}{b}\right)^n \frac{2}{ab} \int_0^\infty e^{-\frac{2u}{ab}} F(u) w^n(u) du. \quad (3.9)$$

V kapitole (2.5) sme uviedli, že Adlerova funkcia má singularitu v Borelovej rovine práve pozdĺž polpriamok $u \leq -1$ a $u \geq 2$, presnejšie ide o body $k = -1, \pm 2, \pm 3, \dots$. Charakter prvých dvoch renormalónov $-1, 2$ je nasledovný [18, 19]

$$(1+u)^{\gamma_1}, \quad \gamma_1 = -2, 589 \quad (3.10)$$

$$\left(1 - \frac{u}{2}\right)^{\gamma_2}, \quad \gamma_2 = -2, 58. \quad (3.11)$$

Funkcie $W_n(a)$ definované vzťahom (3.9), preto môžeme pozmeniť, aby sme charakter týchto singularít náležite využili. Pôvodné funkcie $W_n(a)$ totiž berú do úvahy len ich rozloženie, nie ich charakter. Definujme si preto ešte tzv. *vážené funkcie* $\widetilde{W}_n(a)$

$$\widetilde{W}_n(a) = \frac{1}{n!} \left(\frac{8}{3}\right)^n \left(\frac{2}{b}\right)^n \frac{2}{ab} \int_0^\infty e^{-\frac{2u}{ab}} (1+u)^{\gamma_1} \left(1 - \frac{u}{2}\right)^{\gamma_2} F(u) w^n(u) du. \quad (3.12)$$

Samotnú RS závislosť budeme skúmať pre aproximanty LO, NLO, NNLO. Najprv si však musíme skonštruovať rozvoj \mathcal{R}_τ vo funkciách $W_n(a)$, resp. $\widetilde{W}_n(a)$. Rozvoj \mathcal{R}_τ v renormalizovanom kuplante a má teda tvar

$$\mathcal{R}_\tau = a + r_1 a^2 + r_2 a^3 + \dots \quad (3.13)$$

Označme si ďalej súhrnne funkcie $W_n(a), \widetilde{W}_n(a)$ ako $\mathcal{W}_n(a)$. Rozvoj \mathcal{R}_τ vo funkciách $\mathcal{W}_n(a)$ hľadáme v tvare

$$\mathcal{R}_\tau = \mathcal{W}_1(a) + \bar{r}_1 \mathcal{W}_2(a) + \bar{r}_2 \mathcal{W}_3(a) + \dots \quad (3.14)$$

Funkcie $\mathcal{W}_n(a)$ sú singularne v bode $a = 0$ a majú v ňom asymptotický rozvoj [8]

$$W_n(a) \sim \sum_{k=n}^{\infty} \zeta_{nk} a^k, \quad \widetilde{W}_n(a) \sim \sum_{k=n}^{\infty} \tilde{\zeta}_{nk} a^k. \quad (3.15)$$

Zo samotných definícií (3.9), (3.12) vidieť, že funkcie $\mathcal{W}_n(a)$ majú koeficienty $\zeta_{nn}, \tilde{\zeta}_{nn}$ jednotkové, čiže ich asymptotické rozvoje sú

$$\begin{aligned} W_n(a) &\sim a^n + \zeta_{nn+1} a^{n+1} + \zeta_{nn+2} a^{n+2} + \dots, \\ \widetilde{W}_n(a) &\sim a^n + \tilde{\zeta}_{nn+1} a^{n+1} + \tilde{\zeta}_{nn+2} a^{n+2} + \dots \end{aligned} \quad (3.16)$$

Konkrétne

$$\begin{aligned} W_1(a) &\sim a + 6a^2 + 0,08a^3 + \dots \\ W_2(a) &\sim a^2 + 7,312a^3 + \dots \\ W_3(a) &\sim a^3 + \dots \\ &\vdots \end{aligned} \quad (3.17)$$

resp.

$$\begin{aligned}
\widetilde{W}_1(a) &\sim a + 0,154a^2 + 22,214a^3 + \dots \\
\widetilde{W}_2(a) &\sim a^2 + -1,456a^3 + \dots \\
\widetilde{W}_3(a) &\sim a^3 + \dots \\
&\vdots
\end{aligned} \tag{3.18}$$

Dosadením (3.16) do (3.14) a porovnaním s (3.13) získame vzťahy pre koeficienty \bar{r}_n

$$\bar{r}_1 = r_1 - \zeta_{12}, \quad \bar{r}_2 = r_2 - \bar{r}_1\zeta_{23} - \zeta_{13}, \quad \dots \tag{3.19}$$

V numerických testoch budeme pracovať v NLO v štandardnej $\overline{\text{MS}}$ schéme a v NNLO budeme používať tzv. *t'Hooftovu renormalizačnú konvenciu*, tzn. položíme $c_2 = 0$. To nám zaručí, že kuplant bude vo všetkých rádoch rovnaký ako v NLO ¹. Počet kvarkov volíme $n_f = 3$. Táto hodnota implikuje podľa (2.10)

$$b = \frac{9}{2}, \quad c = \frac{16}{9}.$$

Hodnotu Q volíme rovnú M_τ

$$Q = M_\tau = 1.8 \text{ GeV},$$

z čoho vyplýva [20]

$$r_1(\mu = Q, \overline{\text{MS}}) = 5, 2.$$

Fundamentálny parameter Λ odpovedajúci schéme $\overline{\text{MS}}$ a trom kvarkom budeme značiť $\Lambda_{\overline{\text{MS}}}^{(3)}$. Jej hodnotu volíme

$$\Lambda_{\overline{\text{MS}}}^{(3)} = 0,31 \text{ GeV}. \tag{3.20}$$

Na základe (2.27) potom máme

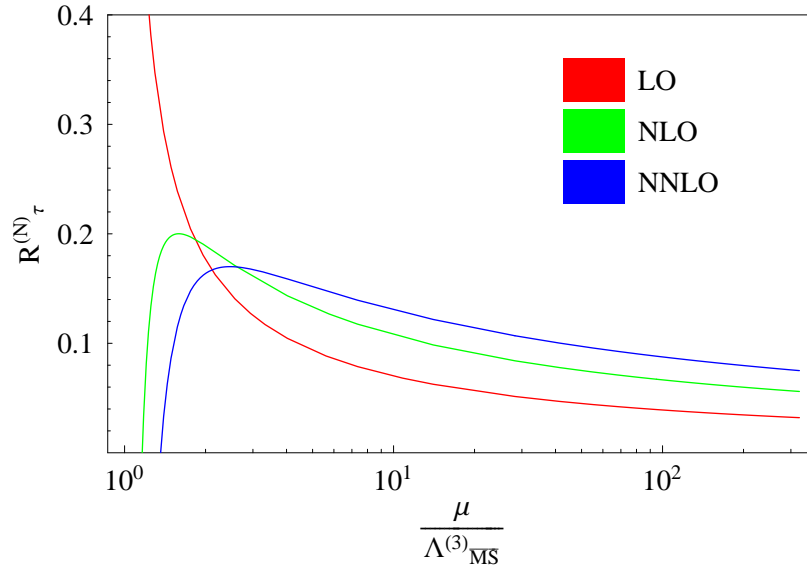
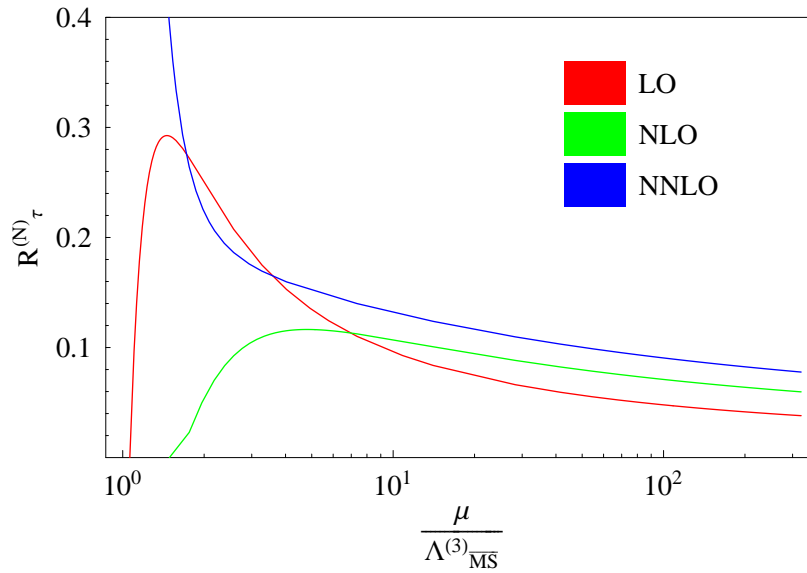
$$\rho_1 \left(\frac{Q}{\Lambda_{\overline{\text{MS}}}^{(3)}} \right) = b \ln \frac{Q}{\Lambda_{\overline{\text{MS}}}^{(3)}} - r_1(\mu = Q, \overline{\text{MS}}) = 2,72.$$

Invariant ρ_2 má hodnotu [20]

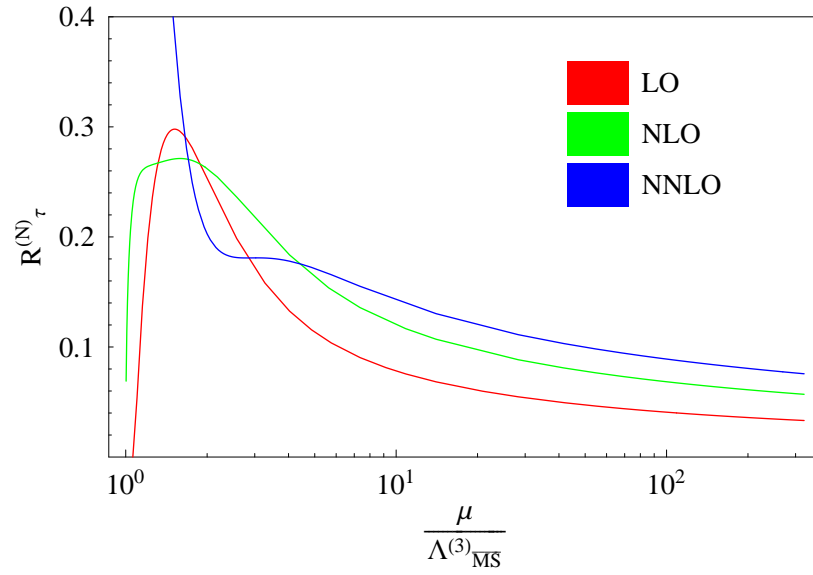
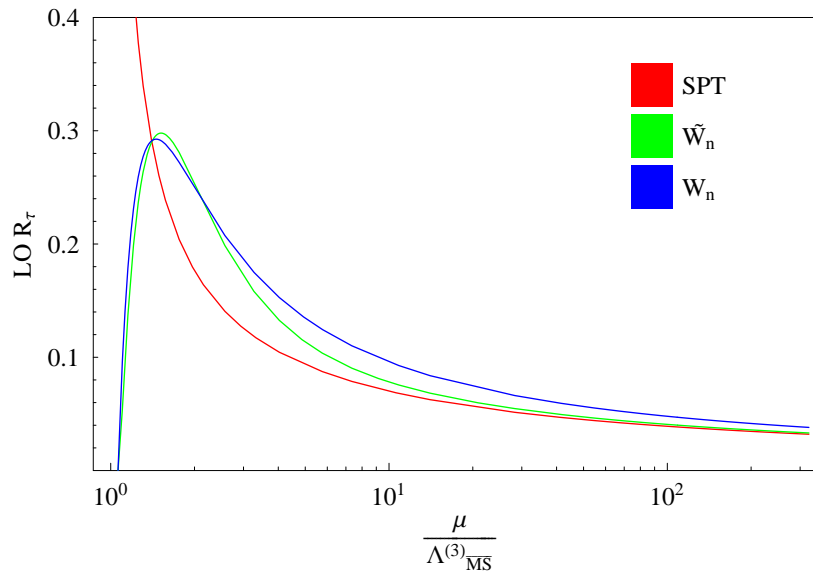
$$\rho_2 = -6,27.$$

RS závislosť konečných aproximantov \mathcal{R}_τ do rádov LO, NLO, NNLO je vynesená v obrázkoch 3.1 - 3.6. Obrázok 3.1 odpovedá štandardnému poruchovému rozvoju v

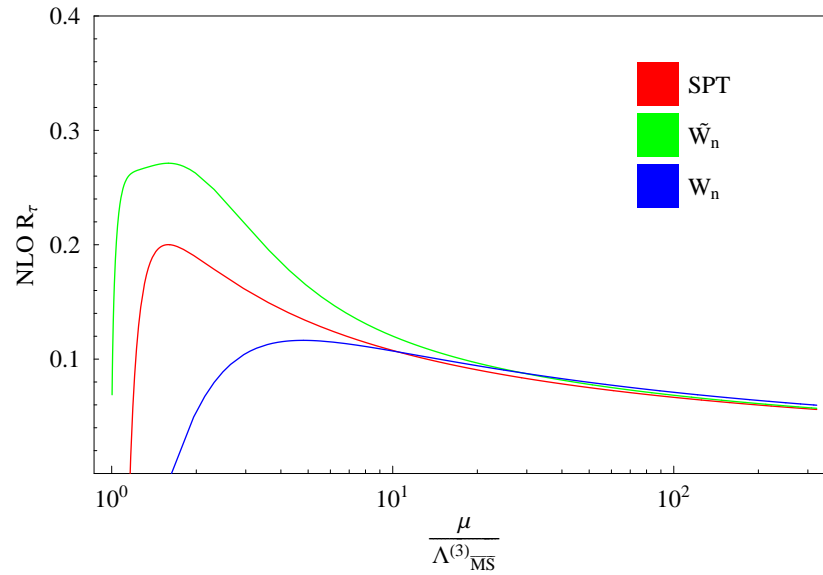
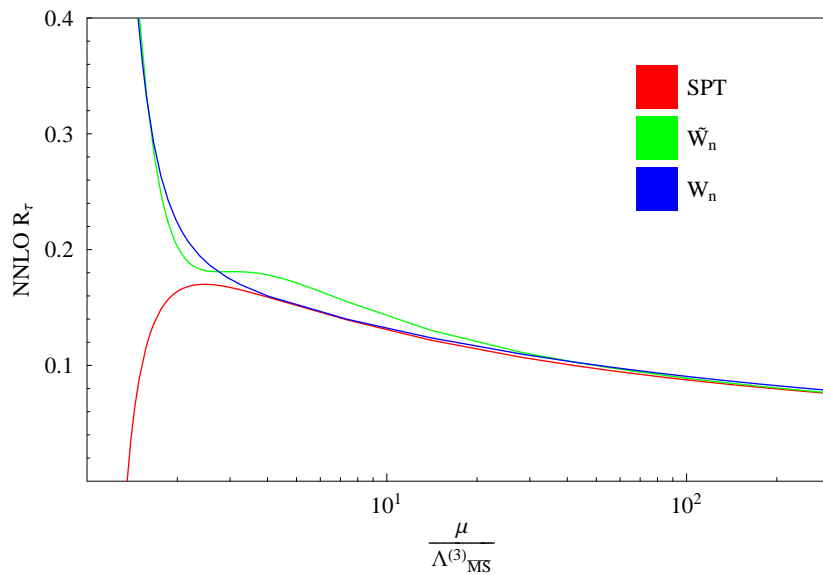
¹Pre vyššie rády je t'Hooftova renormalizačná konvencia definovaná voľbou c_k , $k \geq 2$.

Obr. 3.1: RS závislosť pre $\mathcal{R}_\tau^{(N)}(a)$ Obr. 3.2: RS závislosť pre $\mathcal{R}_\tau^{(N)}(W_n(a))$

renormalizovanom kuplante, obrázok 3.2 rozvoju vo funkciách $W_n(a)$ a nakoniec obrázok 3.3 rozvoju vo funkciách $\widetilde{W}_n(a)$. Na obrázkoch 3.4 - 3.6 sú vykreslené vždy konkrétne rády aproximantov pre všetky tri druhy rozvojev. Z obrázka 3.1 možno navyše ihneď

Obr. 3.3: RS závislosť pre $\mathcal{R}_{\tau}^{(N)}(\widetilde{W}_n(a))$ Obr. 3.4: RS závislosť pre $\mathcal{R}_{\tau}^{(N)}$, rozvoje do LO

vyčítať hodnoty jednotlivých aproximantov v PMS RS. Sú to lokálne maximá jednotlivých kriviek. Naviac priesečníky LO s NLO a NNLO odpovedajú hodnotám v ďalšej

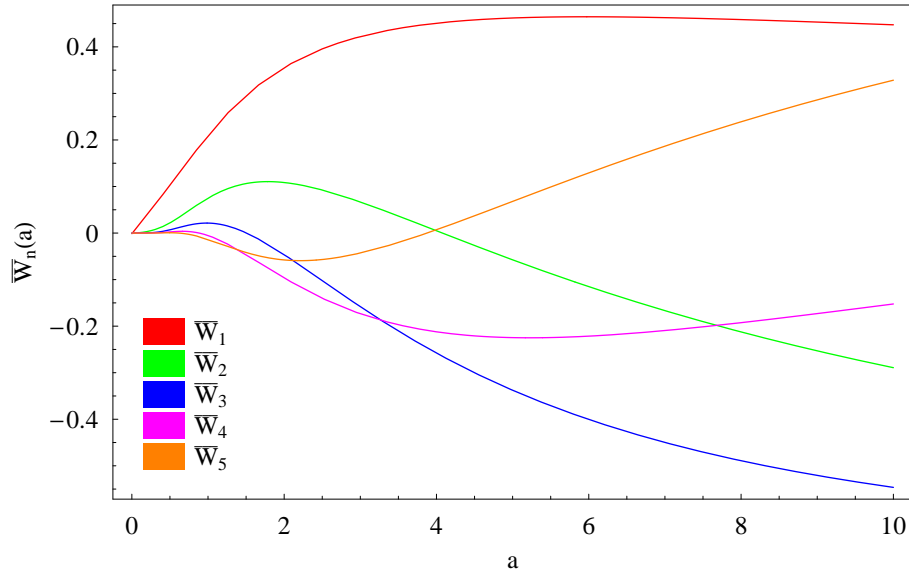
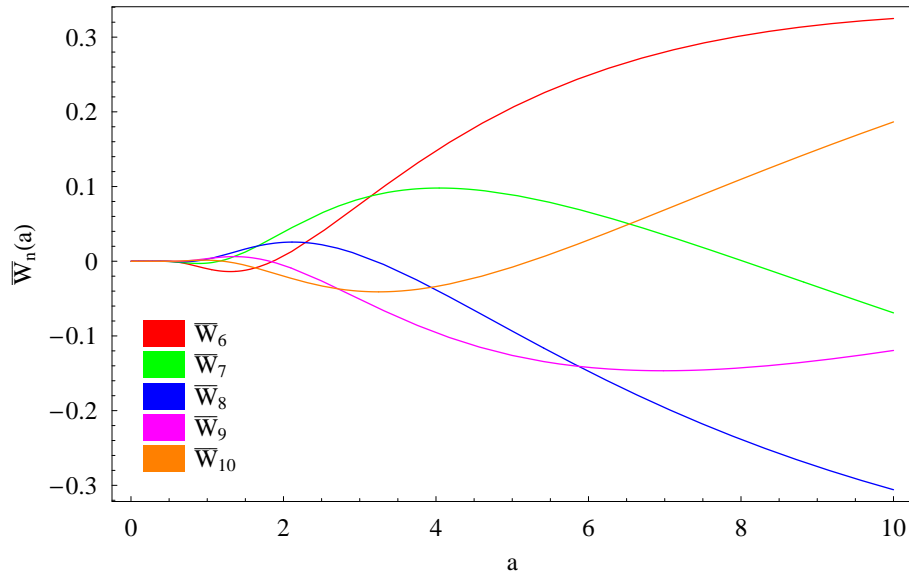
Obr. 3.5: RS závislosť pre $\mathcal{R}_\tau^{(N)}$, rozvoje do NLOObr. 3.6: RS závislosť pre $\mathcal{R}_\tau^{(N)}$, rozvoje do NNLO

RS. Je ňou schéma EC [21] ².

Z jednotlivých grafov vidieť veľký kvalitatívny rozdiel medzi jednotlivými prístupmi,

²Skratka angl. „Effective Charges“.

a to nielen medzi rozvoji vo funkciách $\mathcal{W}_n(a)$ a rozvojom v mocninách kuplantu, ale aj medzi rozvoji vo funkciách $W_n(a)$ a $\widetilde{W}_n(a)$.

(a) $\overline{W}_n(a)$, $n = 1, \dots, 5$ (b) $\overline{W}_n(a)$, $n = 6, \dots, 10$ Obr. 3.7: Priebeh funkcií $\overline{W}_n(a)$, $n = 1, \dots, 10$

Tento rozdiel je najmarkantnejší na obrázku 3.6, keď uvažujeme jednotlivé aproxi-

manty do rádu NNLO. Rozvoj vo funkciách $W_n(a)$ nemá žiadnu lokálnu oblasť stability, avšak rozvoj v $\widetilde{W}_n(a)$ má istý stacionárny bod. Navyiac je vidieť, že numerická hodnota $\mathcal{R}_\tau^{NNLO}(\widetilde{W}_n(a))$ v tomto bode je veľmi blízka hodnote $\mathcal{R}_\tau^{NNLO}(a)$ v PMS RS. Zaujímavým zistením je navyše skutočnosť, že takéto chovanie nevykazuje aproximant $\mathcal{R}_\tau^{NNLO}(W_n(a))$, hoci pre hodnoty μ vpravo od tohto bodu je jeho priebeh prakticky identický s $\mathcal{R}_\tau^{NNLO}(a)$.

Soper a Surguladze [22] uvádzajú, že najväčšie príspevky k chovaniu vysokých rádov poruchového rozvoja Adlerovej funkcie vykazujú renormalóny, ktoré sú najbližšie k počiatku Borelovej roviny $u = 0$. Navyiac preferujú faktorizovanie týchto singularít z pôvodného rozvoja pokiaľ je známy ich charakter a argumentujú výhodnejším numerickým chovaním zvyšku po takomto faktorizovaní. Hoci sa nám touto procedúrou samotnú singularitu v prvých dvoch renormalónoch nepodarí odstrániť, singularitu zmäkčíme, čo je pre ďalšie numerické štúdie veľmi výhodné.

Charakter prvých dvoch renormalónov je vyjadrený (3.10). V duchu predchádzajúcej idey redefinujeme funkcie $W_n(a)$. Budeme ich označovať $\overline{W}_n(a)$. Stratégia takejto redefinície je jednoduchá. Stačí uvažovať nové optimálne konformné zobrazenie dvakrát rozrezanej Borelovej roviny $\overline{w}(u)$ namiesto pôvodného $w(u)$ definovaného vzťahom (2.38). Skonstruujeme teda optimálne konformné zobrazenie, ktoré bude brať do úvahy ďalšie dva renormalóny, a síce -2 a 3. Takéto zobrazenie má tvar

$$\overline{w}(u) = \frac{\sqrt{1 + \frac{u}{2}} - \sqrt{1 - \frac{u}{3}}}{\sqrt{1 + \frac{u}{2}} + \sqrt{1 - \frac{u}{3}}} \quad (3.21)$$

a zobrazuje rozrezanú Borelovu rovinu pozdĺž polpriamok $u \leq -2$ a $u \geq 3$ do jednotkového kruhu. Tieto polpriamky sa zobrazia na jednotkovú kružnicu. Faktorizované renormalóny potom započítame štandardným spôsobom. V rovnici (2.49) zameníme $w(u)$ predpisom

$$w(u) \longrightarrow \overline{w}(u) = \frac{\sqrt{1 + \frac{u}{2}} - \sqrt{1 - \frac{u}{3}}}{\sqrt{1 + \frac{u}{2}} + \sqrt{1 - \frac{u}{3}}} \quad (3.22)$$

a nové funkcie $\overline{W}_n(a)$ teda definujeme ako

$$\overline{W}_n(a) = \frac{1}{2a} \int_0^\infty e^{-\frac{u+i\epsilon}{a}} \overline{w}^n(u+i\epsilon) du + \frac{1}{2a} \int_0^\infty e^{-\frac{u-i\epsilon}{a}} \overline{w}^n(u-i\epsilon) du. \quad (3.23)$$

Inverzné zobrazenie k (3.21) má tvar

$$u = \frac{24\overline{w}}{5 - 2\overline{w} + 5\overline{w}^2}. \quad (3.24)$$

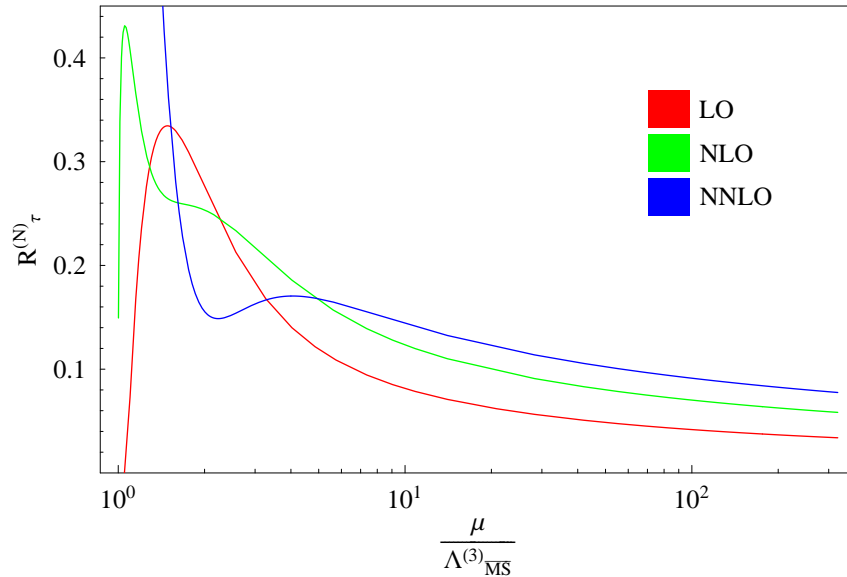
Priebeh funkcií $\overline{W}_n(a)$, $n = 1, \dots, 10$ je vyobrazený na obrázku 3.7.

Analogicky ako v prípade (3.9), (3.12) definujeme funkcie $\overline{W}_n(a)$ relevantné pre rozvoj \mathcal{R}_τ redefiníciou pôvodných funkcií $\overline{W}_n(a)$, ktoré sme definovali v (3.23), predpisom

$$\overline{W}_n(a) = \frac{1}{n!} \left(\frac{24}{5}\right)^n \left(\frac{2}{b}\right)^n \frac{2}{ab} \int_0^\infty e^{-\frac{2u}{ab}} (1+u)^{\gamma_1} \left(1 - \frac{u}{2}\right)^{\gamma_2} F(u) \overline{w}^n(u) du. \quad (3.25)$$

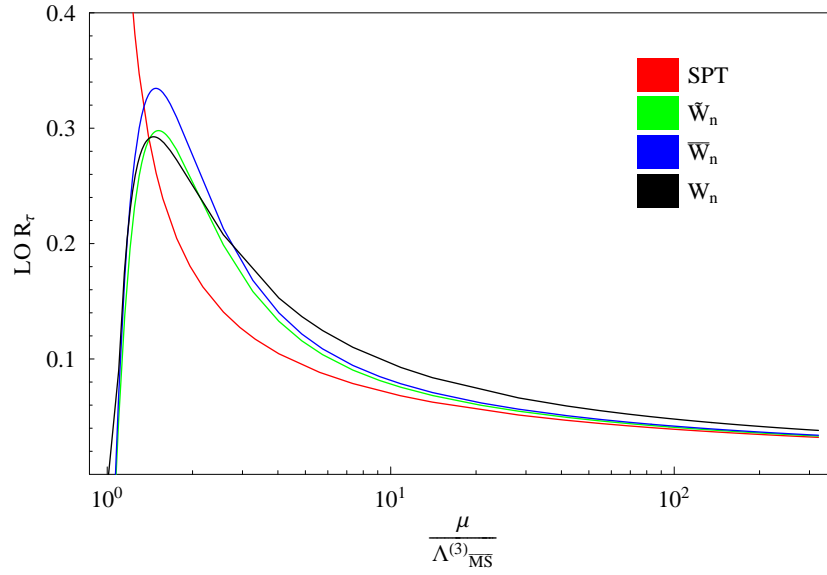
Ich asymptotické rozvoje v okolí $a \rightarrow 0+$ majú tvar

$$\begin{aligned} \overline{W}_1(a) &\sim a + 0,904a^2 + 19,013a^3 + \dots \\ \overline{W}_2(a) &\sim a^2 + 0,794a^3 + \dots \\ \overline{W}_3(a) &\sim a^3 + \dots \\ &\vdots \end{aligned} \quad (3.26)$$

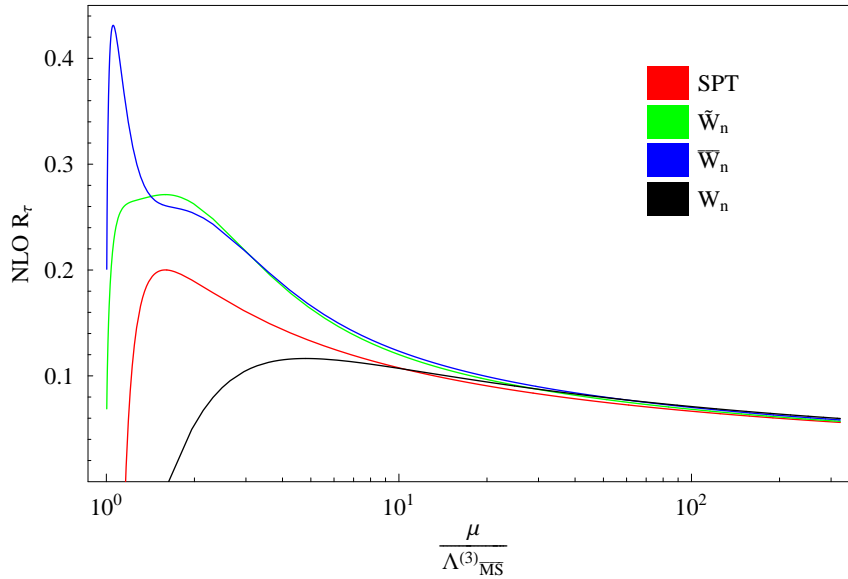


Obr. 3.8: RS závislosť pre $\mathcal{R}_\tau^{(N)}(\overline{W}_n(a))$

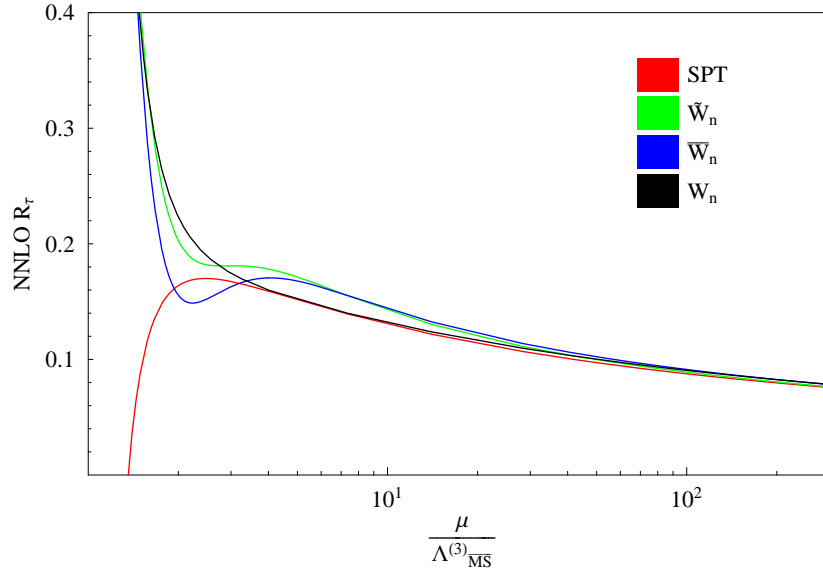
RS závislosť aproximantu $\mathcal{R}_\tau^{(N)}(\overline{W}_n(a))$ možno vidieť na obrázku 3.8 a jeho porovnanie s RS závislosťou aproximantov $\mathcal{R}_\tau^{(N)}(a)$, $\mathcal{R}_\tau^{(N)}(\mathcal{W}_n(a))$ na obrázkoch 3.9 - 3.11. Zaujímavým zistením je skutočnosť, že už v NLO sa charakter nového aproximantu kvalitatívne výrazne odlišuje od ostatných. Môžeme pozorovať opäť stacionárny bod. Takýto stacionárny bod síce má aj aproximant vo funkciách $\overline{W}_n(a)$ avšak až v prípade,



Obr. 3.9: RS závislosť pre $\mathcal{R}_\tau^{(N)}$, rozvoj do LO; porovnanie $\mathcal{R}_\tau^{(N)}(a)$, $\mathcal{R}_\tau^{(N)}(\mathcal{W}_n(a))$ a $\mathcal{R}_\tau^{(N)}(\overline{\mathcal{W}}_n(a))$



Obr. 3.10: RS závislosť pre $\mathcal{R}_\tau^{(N)}$, rozvoj do NLO; porovnanie $\mathcal{R}_\tau^{(N)}(a)$, $\mathcal{R}_\tau^{(N)}(\mathcal{W}_n(a))$ a $\mathcal{R}_\tau^{(N)}(\overline{\mathcal{W}}_n(a))$



Obr. 3.11: RS závislosť pre $\mathcal{R}_\tau^{(N)}$, rozvoj do NNLO; porovnanie $\mathcal{R}_\tau^{(N)}(a)$, $\mathcal{R}_\tau^{(N)}(W_n(a))$ a $\mathcal{R}_\tau^{(N)}(\overline{W}_n(a))$

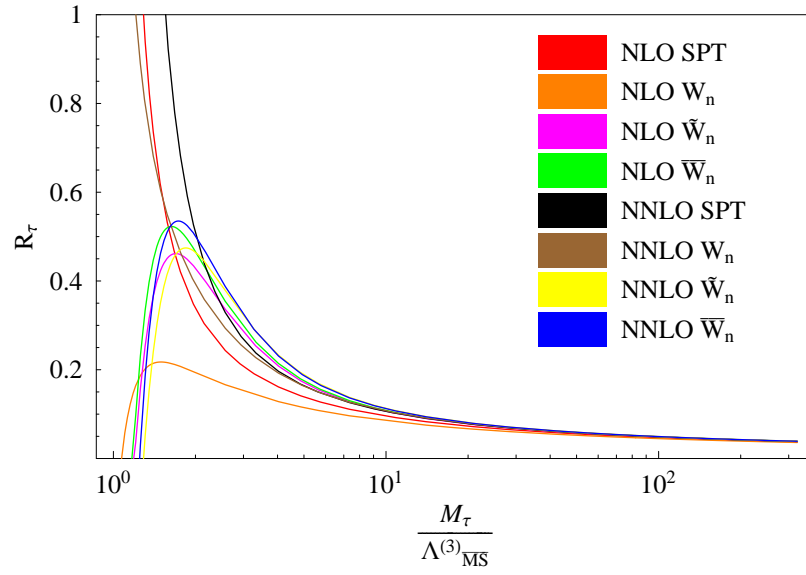
že ho uvažujeme do rádu NNLO. Navyiac v ráde NNLO je nový aproximant dokonca lokálne stabilný v oblasti, kde aproximant v $\overline{W}_n(a)$ má stacionárny bod. Je to práve oblasť, ktorá je okolím renormalizačného bodu voleného pre štandardnú pQCD aproximáciu v PMS RS.

3.1.2 Rozpady fiktívnych τ -leptónov

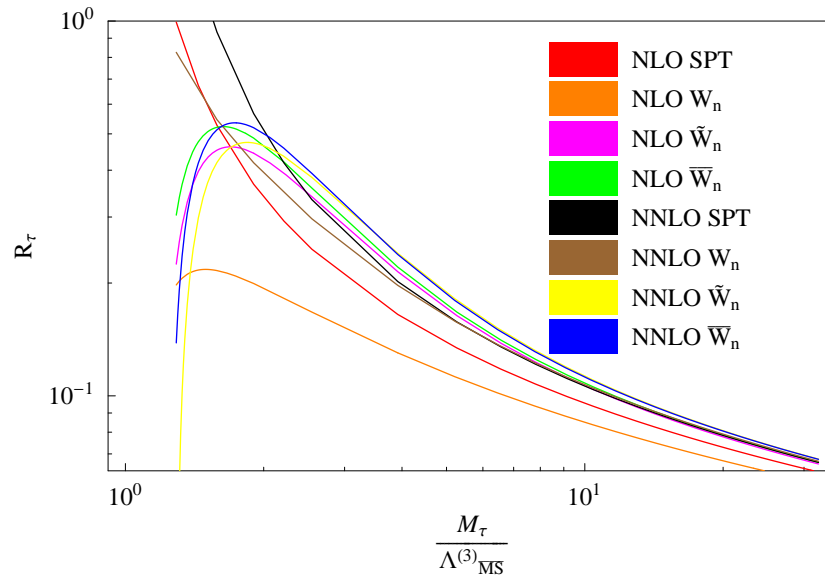
V tomto prípade ide o čisto teoretickú analýzu RS závislosti, nakoľko hmotnosť τ -leptónu berieme ako ďalší parameter a meníme jeho numerickú hodnotu v širokom intervale.

Pri numerických testoch používame zhodné vstupné údaje, ako v prípade štandardného leptónu τ v predchádzajúcej kapitole. Škálu μ identifikujeme vždy s konkrétnou hodnotou M_τ . Skúmame teda aproximanty $\mathcal{R}_\tau^{(N)}(a, M_\tau)$, $\mathcal{R}_\tau^{(N)}(W_n(a), M_\tau)$, $\mathcal{R}_\tau^{(N)}(\overline{W}_n(a), M_\tau)$. Získané výsledky sú zachytené na obrázkoch 3.12(a), 3.12(b). V tomto prípade, kedy vystupuje ako vonkajší parameter práve hmotnosť M_τ , nemá zmysel uvažovať rozvoj vo vedúcom ráde, nakoľko závislosť na vonkajších kinematických veličinách je pozorovateľná až od rádu NLO.

Na grafoch si môžeme všimnúť, že pri danej voľbe RRS, ktorú sme použili, nemajú aproximanty $\mathcal{R}_\tau^{(N)}(a, M_\tau)$ v renormalizovanom kuplante žiadne lokálne extrémny. Naproti tomu, kvalitatívne odlišné chovanie majú opäť nové aproximanty. Veľmi prekvapujúce je chovanie aproximantu $\mathcal{R}_\tau^{(N)}(W_n(a), M_\tau)$ v ráde NNLO (hnedá krivka), ktorého priebeh sa skôr podobá $\mathcal{R}_\tau^{(N)}(a, M_\tau)$.



(a)



(b)

Obr. 3.12: RS závislosť pre $\mathcal{R}_\tau^{(N)}(M_\tau)$

3.2 e^+e^- anihilácia

V predchádzajúcej kapitole sme skúmali RS závislosť aproximantov poruchového rozvoja pre pomer konkrétnych rozpadových pološírok τ -leptónu do rádov LO, NLO, NNLO.

Teraz budeme skúmať analogickú úlohu pre e^+e^- anihiláciu. Analogickou veličinou k (3.1) opäť plne spočítateľnou v pQCD je pomer medzi inkluzívnym účinným prierezom produkcie hadrónov pri ťažiskovej energii Q a účinným prierezom produkcie miónového páru pri takej istej hodnote energie Q . Platí

$$R_{e^+e^-}(Q) = \frac{\sigma(Q, e^+e^- \rightarrow \text{hadróny})}{\sigma(Q, e^+e^- \rightarrow \mu^+\mu^-)} = \left(3 \sum_i e_i^2\right) (1 + \mathcal{R}_{e^+e^-}(Q)), \quad (3.27)$$

kde člen $3 \sum_i e_i^2$ odpovedá predpovedi kvark-partónového modelu. Inkluzívnosť procesu znamená, že sa nezaujímate o konkrétne hadróny, ktoré sa produkujú v koncových stavoch samotnej e^+e^- anihilácie.

QCD korekcia $\mathcal{R}_{e^+e^-}(Q)$ má poruchový rozvoj v renormalizovanom kuplante tvaru

$$\mathcal{R}_{e^+e^-}(Q) = a(\text{RS})[1 + r_1(Q, \text{RS})a^2 + r_2(Q, \text{RS})a^3 + \dots]. \quad (3.28)$$

V tomto prípade môžeme postupovať podobne ako v kapitole (3.1). Platí totiž [4]

$$\mathcal{R}_{e^+e^-}(Q) = 12\pi \left(\sum_i e_i^2 \right) \text{Im}\Pi(Q^2 + i\epsilon), \quad (3.29)$$

kde Π je korelátor definovaný vzťahom (2.31). Navyiac za funkciu $F(u)$ v rozvojových funkciách $\mathcal{W}_n(a)$, $\overline{\mathcal{W}}_n(a)$, definovaných v (3.9), (3.12) a (3.25), možno voliť [4]

$$F_{e^+e^-}(u) = \frac{\sin \pi u}{\pi u}. \quad (3.30)$$

Tým pádom relevantné rozvojové funkcie pre $\mathcal{R}_{e^+e^-}(Q)$ majú tvar

$$\begin{aligned} W_n(a) &= \frac{1}{n!} \left(\frac{8}{3}\right)^n \left(\frac{2}{b}\right)^n \frac{2}{ab} \int_0^\infty e^{-\frac{2u}{ab}} F_{e^+e^-}(u) w^n(u) du \\ \widetilde{W}_n(a) &= \frac{1}{n!} \left(\frac{8}{3}\right)^n \left(\frac{2}{b}\right)^n \frac{2}{ab} \int_0^\infty e^{-\frac{2u}{ab}} (1+u)^{\gamma_1} \left(1 - \frac{u}{2}\right)^{\gamma_2} F_{e^+e^-}(u) w^n(u) du \\ \overline{W}_n(a) &= \frac{1}{n!} \left(\frac{24}{5}\right)^n \left(\frac{2}{b}\right)^n \frac{2}{ab} \int_0^\infty e^{-\frac{2u}{ab}} (1+u)^{\gamma_1} \left(1 - \frac{u}{2}\right)^{\gamma_2} F_{e^+e^-}(u) \overline{w}^n(u) du, \end{aligned} \quad (3.31)$$

a pre ich asymptotické rozvoje v okolí $a \rightarrow 0+$ platí

$$\begin{aligned}
W_1(a) &\sim a - 1,125a^2 - 43,795a^3 + \dots \\
W_2(a) &\sim a^2 - 3,375a^3 + \dots \\
W_3(a) &\sim a^3 + \dots \\
&\vdots
\end{aligned} \tag{3.32}$$

$$\begin{aligned}
\widetilde{W}_1(a) &\sim a - 6,97a^2 + 40,813a^3 + \dots \\
\widetilde{W}_2(a) &\sim a^2 - 12,143a^3 + \dots \\
\widetilde{W}_3(a) &\sim a^3 + \dots \\
&\vdots
\end{aligned} \tag{3.33}$$

$$\begin{aligned}
\overline{W}_1(a) &\sim a - 6,22a^2 + 29,596a^3 + \dots \\
\overline{W}_2(a) &\sim a^2 - 9,893a^3 + \dots \\
\overline{W}_3(a) &\sim a^3 + \dots \\
&\vdots
\end{aligned} \tag{3.34}$$

V numerických testoch opäť pracujeme s rovnakými vstupnými hodnotami ako v prípade τ -leptónu. Škálu μ tentokrát identifikujeme s energiou Q . Parameter c_2 budeme voľiť buď $c_2 = 0$, čiže odpovedajúci t'Hooftovej konvencii, alebo c_2 odpovedajúcej $\overline{\text{MS}}$ RS. Pre túto voľbu platí [20]

$$c_2(\overline{\text{MS}}) = \frac{77139 - 15099n_f + 326n_f^2}{9504 - 576n_f}, \tag{3.35}$$

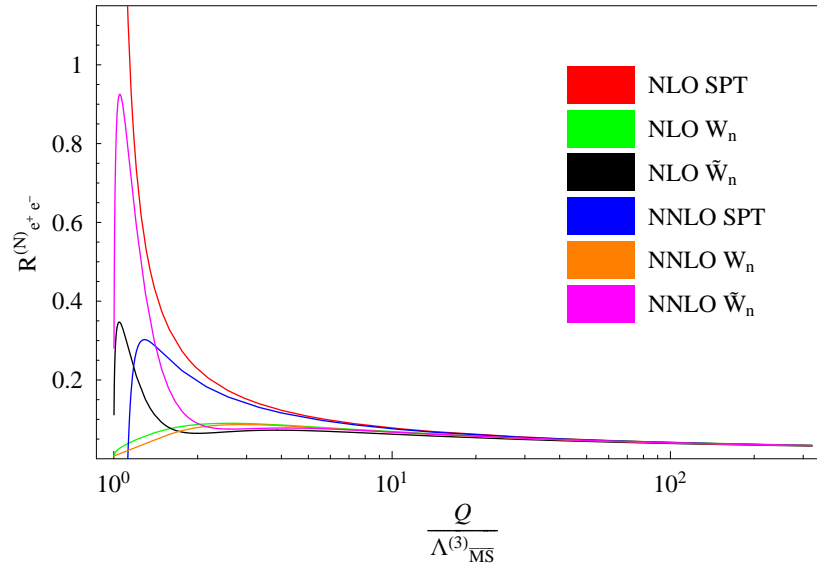
čo pri našej voľbe $n_f = 3$ implikuje $c_2(\overline{\text{MS}}) = 4,47$. Pre koeficient r_1 v tejto RS platí [20]

$$r_1(\overline{\text{MS}}) = 1,986 - 0,115n_f \xrightarrow{n_f=3} r_1(\overline{\text{MS}}) = 1,941. \tag{3.36}$$

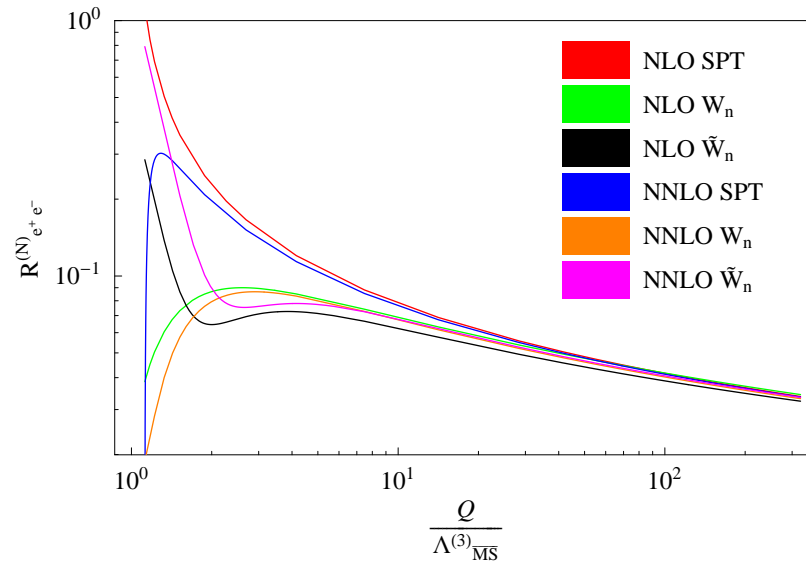
Pre invariant ρ_2 máme [20]

$$\rho_2 = -12,2. \tag{3.37}$$

Samotné aproximanty rozvojov $\mathcal{R}_{e^+e^-}$ vo funkciách \mathcal{W}_n , resp. $\overline{\mathcal{W}}_n$ budeme konštruovať analogicky ako v prípade τ -leptónu vo vzťahu (3.14). Pre koeficienty \bar{r}_n rozvoja $\mathcal{R}_{e^+e^-}$ opäť platí vzťah (3.19), kde za ζ_{nk} dosadzujeme relevantné hodnoty z rozvojov (3.32), (3.33), (3.34).



(a)



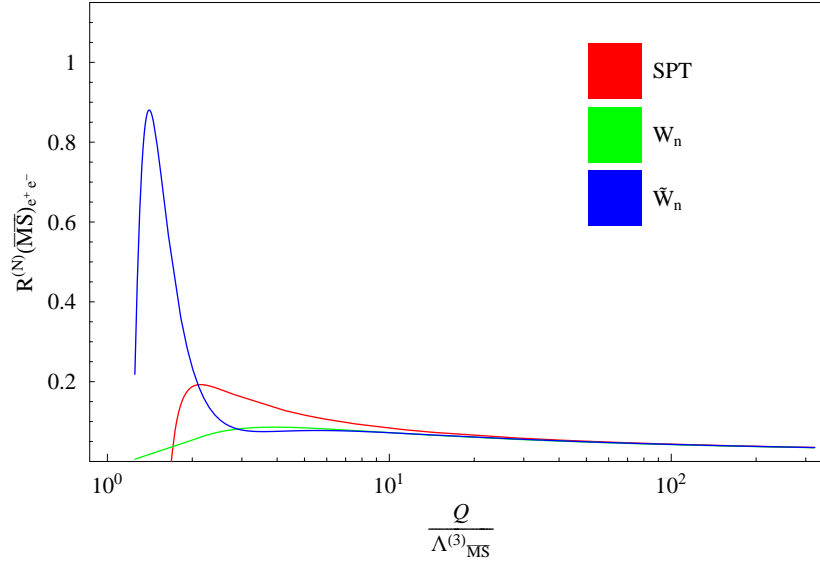
(b)

Obr. 3.13: RS závislosť pre $\mathcal{R}_{e^+e^-}^{(N)}(Q)$

Výsledky numerických testov sú zachytené na grafoch 3.13. Aj tieto výsledky potvrdzujú kvalitatívne výrazne odlišné vlastnosti aproximantov poruchového rozvoja v nových alternatívnych funkciách W_n , ako je tomu u štandardného poruchového radu v

mocninách renormalizovaného kuplantu. Pre lepšiu prehľadnosť sú výsledky zobrazené aj v logaritmickej mierke, graf 3.13(b).

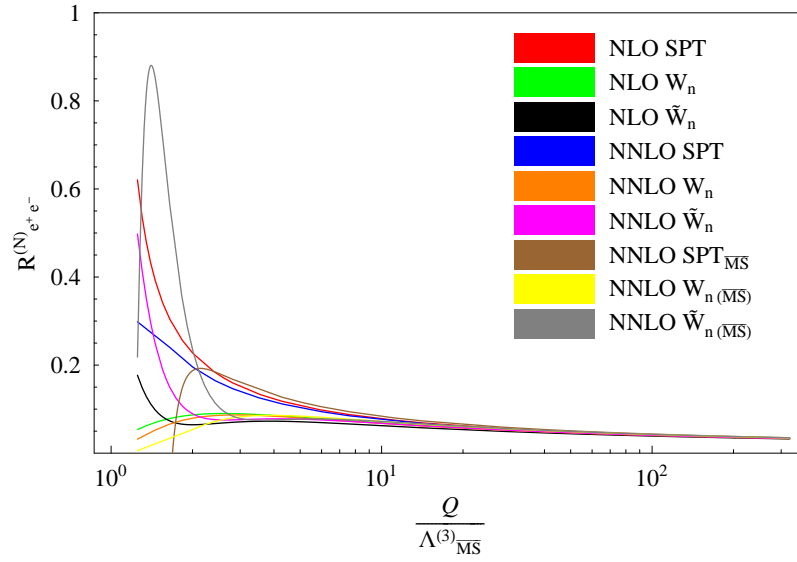
Výsledky analogických výpočtov v $\overline{\text{MS}}$ RS sú obsahom obrázka 3.14. Graf 3.15(a) je kombináciou grafov 3.13 a 3.14. Ide o porovnanie s predchádzajúcim výpočtom v t'Hooftovej schéme. Pre lepšiu orientáciu je taktiež použitá logaritmická mierka 3.15(b). V $\overline{\text{MS}}$ RS uvažujeme aproximanty automaticky do rádu NNLO, pretože v nižších rádoch nemáme k dispozícii parameter c_2 .



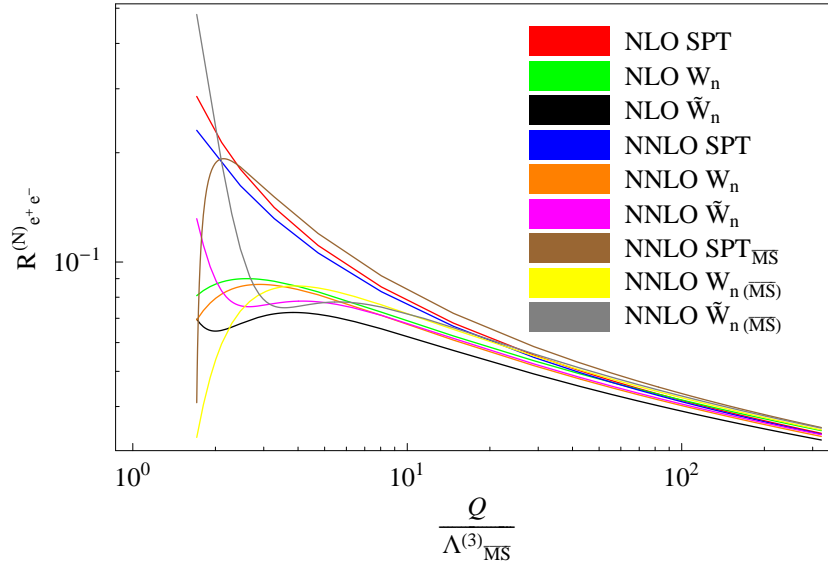
Obr. 3.14: RS závislosť pre $\mathcal{R}_{e^+e^-}^{(N)}(Q)$, výsledky v $\overline{\text{MS}}$ RS

Vlastnosti konečných aproximantov za použitia rozvojových funkcií \overline{W}_n môžeme nájsť na obrázkoch 3.16. Graf 3.18 obsahuje hodnoty získané v $\overline{\text{MS}}$ RS. Graf 3.17(a) je kombináciou grafov 3.16 a 3.18. Zobrazenie v logaritmickej mierke možno nájsť na grafe 3.17(b).

Prehľad RS stability uzatvárajú optimalizované grafy 3.19 pre aproximanty vo funkciách $\mathcal{W}_n(a)$. Tento graf bol získaný vynesением numerických hodnôt týchto aproximantov uvažovaných do rádu NNLO v bodoch, v ktorých majú lokálne extrém, prípadne vykazujú stabilné chovanie. V tomto prípade sú teda výsledky počítané v PMS RS.

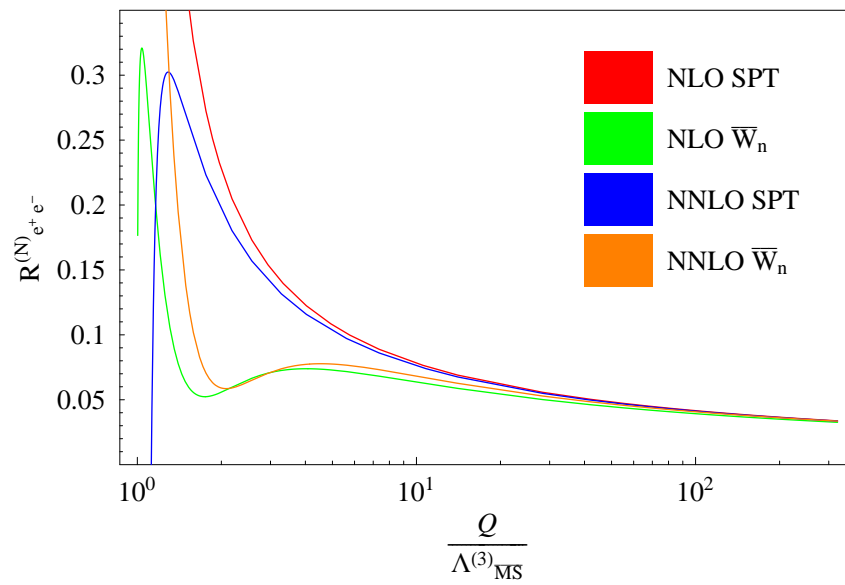


(a)

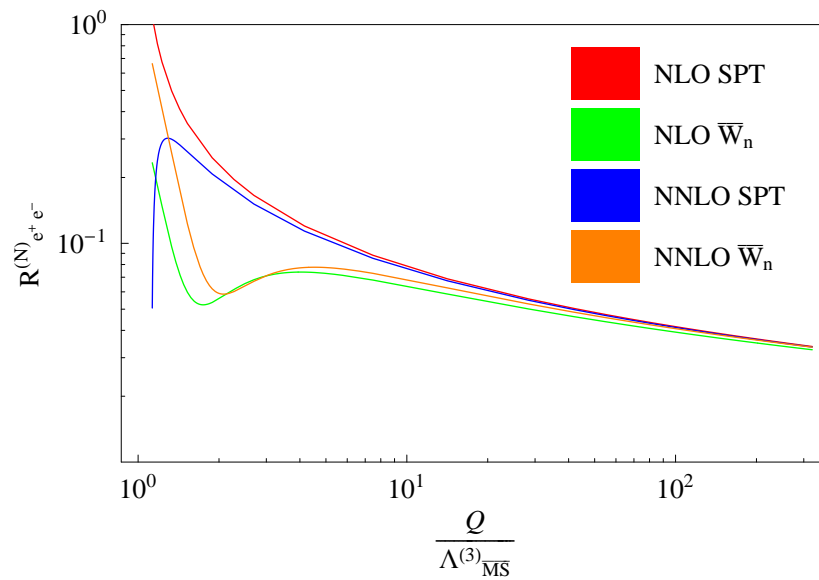


(b)

Obr. 3.15: RS závislosť pre $\mathcal{R}_{e^+e^-}^{(N)}(Q)$; porovnanie $\mathcal{R}_{e^+e^-}^{(N)}(a, Q)$, $\mathcal{R}_{e^+e^-}^{(N)}(W_n(a), Q)$ s výsledkami v $\overline{\text{MS}}$ RS

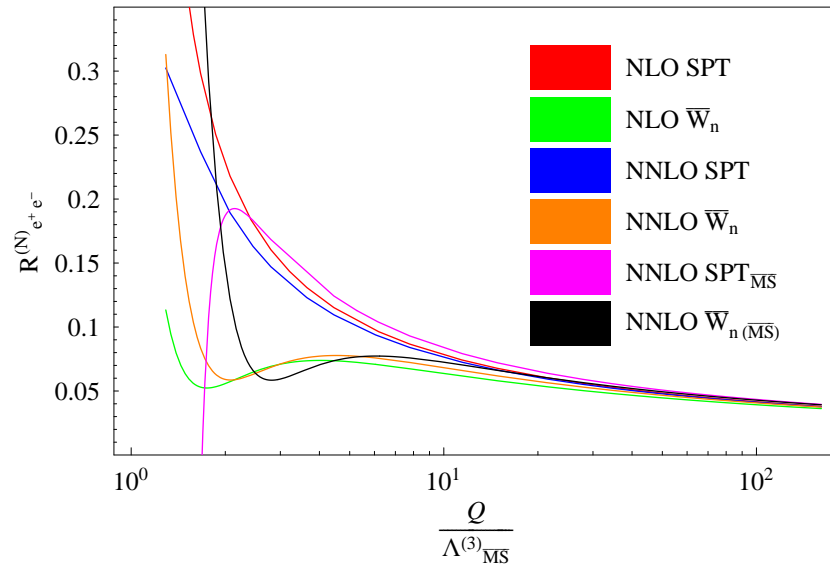


(a)

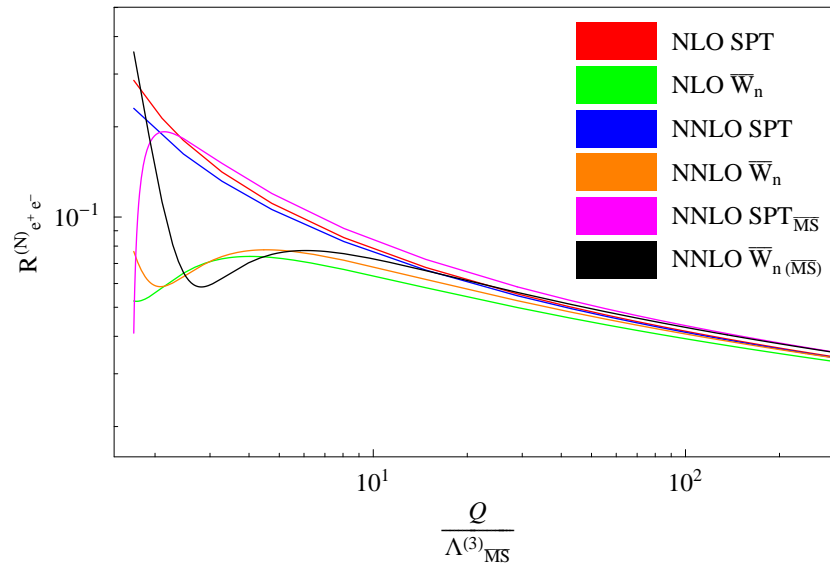


(b)

Obr. 3.16: RS závislosť pre $\mathcal{R}_{e^+e^-}^{(N)}(Q)$; porovnanie $\mathcal{R}_{e^+e^-}^{(N)}(a, Q)$, $\mathcal{R}_{e^+e^-}^{(N)}(\overline{W}_n(a), Q)$

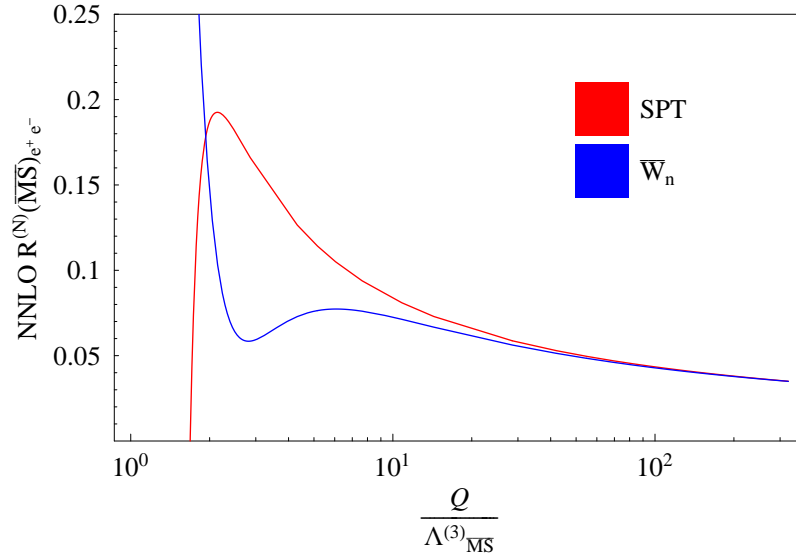


(a)

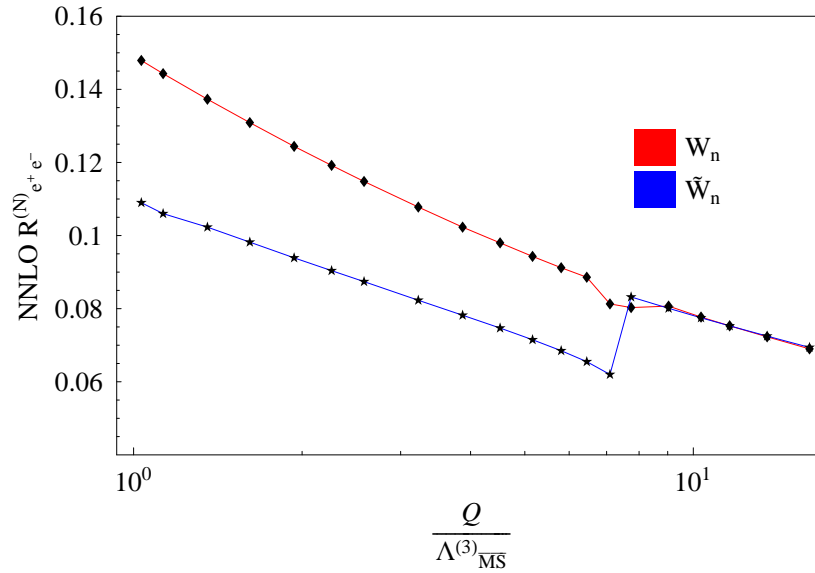


(b)

Obr. 3.17: RS závislosť pre $\mathcal{R}_{e^+e^-}^{(N)}(Q)$; porovnanie $\mathcal{R}_{e^+e^-}^{(N)}(a, Q)$, $\mathcal{R}_{e^+e^-}^{(N)}(\overline{W}_n(a), Q)$ s výsledkami v \overline{MS} RS



Obr. 3.18: RS závislosť pre $\mathcal{R}_{e^+e^-}^{(N)}(Q)$, rozvoj do NNLO; porovnanie $\mathcal{R}_{e^+e^-}^{(N)}(a, Q)$, $\mathcal{R}_{e^+e^-}^{(N)}(\bar{W}_n(a), Q)$, výsledky v $\overline{\text{MS}}$ RS



Obr. 3.19: $\mathcal{R}_{e^+e^-}^{(N)}(W_n(a), Q)$ v NNLO založené na výbere sedlového bodu

Záver

Hlavným cieľom práce je štúdium správania sa poruchových rozvojev v infračervenej oblasti. Pod infračervenou oblasťou chápeme oblasť malých energií, kde sa obvykle výsledky získané poruchovou metódou nepovažujú za dôveryhodné. Štúdiu RS závislosti sme podrobili rôzne rozvoje, či to už boli štandardné poruchové rozvoje pre procesy rozpadu τ -leptónu alebo e^+e^- anihilácie, alebo resumované poruchové rozvoje pre tieto procesy vyjadrené v alternatívnej množine funkcií \mathcal{W}_n , resp. $\overline{\mathcal{W}}_n$. Ukazuje sa, že poruchové rozvoje konštruované v týchto nových funkciách vykazujú oveľa lepšie správanie sa v infračervenej oblasti, dokonca môžeme zreteľne pozorovať oblasti RS parametrov, v ktorých majú tieto rozvoje stacionárne body. V týchto oblastiach preto majú jednotlivé aproximanty lokálne práve tie vlastnosti, ktoré vyžadujeme na základe podmienky konzistencie poruchovej teórie od úplných súčtov. Preto tieto alternatívne rozvoje, podľa môjho názoru, otvárajú novú cestu aplikácii poruchovej teórie v infračervenej oblasti.

Literatúra

- [1] F. J. Dyson, Phys. Rev. 85 (1952) 4, 631
- [2] J. Chýla, Teoretická analýza nejednoznačností poruchové QCD
- [3] G. Hardy, Divergent series, Oxford University Press, Oxford 1963
- [4] M. Beneke, Phys. Rep. 317 (1999), 1
- [5] J. Fischer, Fortschr. Phys. 42 (1994) 8, 665
- [6] I. Caprini, J. Fischer, Phys. Rev. D60 (1999), 054014 1
- [7] I. Caprini, J. Fischer, Phys. Rev. D62 (2000), 054007 1
- [8] I. Caprini, J. Fischer, Eur. Phys. J. C24 (2002), 127
- [9] P. M. Stevenson, Phys. Rev. D23 (1981) 12, 2916
- [10] S. Ciulli, J. Fischer, Nucl. Phys. 24 (1961), 465
- [11] E. Braaten, C. S. Li, Phys. Rev. D42 (1990) 11, 3888
- [12] E. Braaten, S. Narison, A. Pich, Nucl. Phys. B373 (1992), 581
- [13] W. J. Marciano, A. Stirlin, Phys. Rev. Lett. 61 (1988) 16, 1815
- [14] E. Braaten, Phys. Rev. Lett. 60 (1988) 16, 1606
- [15] E. Braaten, Phys. Rev. D39 (1989) 5, 1458
- [16] G. Altarelli, P. Nason, G. Ridolfi, Z. Phys. C68 (1995), 257
- [17] J. Fischer, J. Chýla, I. Caprini, Acta Phys. Slovaca 52 (2002) 6, 483
- [18] M. Beneke, V. M. Braun, N. Kivel, Phys. Lett. B404 (1997), 315
- [19] A. Mueller, Nucl. Phys. B250 (1985), 327

- [20] J. Chýla, A. Kataev, S. A. Larin, Phys. Lett. B267 (1991), 269
- [21] G. Grunberg, Phys. Rev. D29 (1984) 10, 2315
- [22] D. E. Soper, L. R. Surguladze, Phys. Rev. D54 (1996), 4566
- [23] J. Chýla, Quarks, partons and Quantum Chromodynamics,
www-hep.fzu.cz/chyla/lectures/text.pdf
- [24] J. Chýla, Czech. J. Phys. 42 (1992) 3, 263
- [25] J. Fischer, Int. J. Mod. Phys. A12 (1997) 21, 3625
- [26] J. Fischer, Čs. čas. fyz. 50 (2000), 300
- [27] J. Zinn-Justin, Quantum Field Theory and Critical Phenomena, kap. 40,40A, Clarendon Press, Oxford 1989, 1993
- [28] J. Zinn-Justin, Phys. Rep. C70 (1981) 2, 109
- [29] C. S. Lam, T. M. Yan, Phys. Rev. D16 (1977) 3, 703
- [30] M. Luo, W. J. Marciano, preprint BNL-47187 (1992)