

České vysoké učení technické v Praze
Fakulta jaderná a fyzikálně inženýrská

Rešeršní práce

České vysoké učení technické v Praze
Fakulta jaderná a fyzikálně inženýrská

Evoluční rovnice kvantové chromodynamiky a metody
jejich řešení

Jiří Hejbal

Katedra fyziky

Akademický rok: 2001/2002

Školitel: Prof. Jiří Chýla, CSc., FzÚ AV ČR

V Praze 11. října 2002

1 Úvod

Mezníkem v moderní éře fyziky elementárních částic se stal objev elektronu J.J.Thomsonem v 1897. Byl to první přímý důkaz o existenci částic menších nežli atomy. Tato skutečnost byla podstatnou pro představu o elementárních částicích. Jestliže před rokem 1897 byly za základní částice tvořící hmotu považovány atomy, v průběhu 20. století tuto roli zastávali atomová jádra, potom protony, neutrony a další hadrony ($\pi, \rho, K, \Lambda, \dots$)

Dnes jsou za elementární částice považovány kvarky a leptony, kdežto hadrony považujeme za složené z kvarků. Elektron považujeme za elementární částici již více než 100 let a v dohledné době jí pro nás zůstane i nadále. Není všem vyloučeno, že by i tyto částice měly vnitřní strukturu, která by mohla být zjištěna na základě některého z budoucích experimentů.

1.1 Experimenty částicové fyziky

Experimenty hrají ve fyzice klíčovou úlohu. Mezi hlavní druhy experimentů užívané ve fyzice elementárních částic patří srážky vysokoenergetických částic. Protože interakce během takových procesů probíhají na úrovni 10^{-15}m , což jsou rozměry hadronu, není možné studovat tyto reakce přímo. Veškeré efekty a jevy spojené se srážkami lze studovat nepřímo pomocí detekce částic vzniklých během srážky. Rozvoj částicové fyziky pak jde ruku v ruce s technickou úrovní urychlovačů a detektorů. Důvod plyne z Heisenbergovy relace neurčitosti. Pro rozlišení malých objektů je potřeba velkých předaných energií. Z tohoto důvodu je pak částicová fyzika označována jako fyzika vysokých energií.

Ke studovaným procesům patří srážky elektron-proton, elektron-positron a proton-antiproton. Elektron-protonové srážky s vysokým rozlišením patří k hlubokonepružným rozptylům a umožňují studovat vnitřní strukturu protonu. Tato znalost je velmi důležitá pro pochopení silné interakce mezi kvarky a gluony. Proton-antiprotonové reakce poskytují dnes největší energie, ale protože jde o srážku dvou částic s vnitřní strukturou, jsou také v mnohém rozmanité.

Urychlovače a detektory užívané v částicové fyzice jsou velmi nákladná a složitá zařízení. Z tohoto důvodu jsou experimenty soustředěny jen na několika místech světa. K nejvýznamnějším laboratorům patří CERN v Ženevě, Fermilab blízko Chicaga, SLAC ve Stanfordu a DESY v Hamburku.

2 Standardní model

Úspěch částicové fyziky je z velké části zásluhou formulování Standardního modelu. Podle něj je veškerá hmota složena ze sady částic se spinem 1/2: kvarků a leptonů. Tyto částice navzájem interagují elektroslabě a silně, okrajově se zde podílí i gravitace. Jsou rozděleny do tří generací. Každý ze šesti druhů kvarků se odlišuje kvantovým číslem, zvaným vůně. Elementární částice mají jisté vlastnosti, které definují jejich chování při interakcích. Příkladem může být hmotnost, která je určující při gravitaci. Podobně je elektrický náboj zdrojem elektromagnetické interakce, slabý isospin souvisí se slabou interakcí a barevný náboj je zdrojem silné interakce.

První generace leptonů a kvarků se sestává z elektronu, elektronového neutrina a up a down kvarku. Její důležitost vyplývá z faktu, že veškerá hmota, která nás obklopuje je složena právě z těchto částic. Protony a neutrony v atomovém jádře jsou složeny z u and d kvarku, atomy jsou pak složeny z protonu nebo jádra obklopeného elektrony. Neutrina interagují velmi slabě a v běžném makroskopickém životě mají velmi slabý efekt, ale mají velký význam v některých jaderných

procesech, kde se pomocí nich popisuje například beta rozpad. Dále mají význam v některých astrofyzikálních procesech za extrémních teplot a tlaků, například v centru hvězd. Když hvězda exploduje v supernovu, uvolní se velké množství energie vyzářené právě neutriny. Jádro hvězdy potom kolapsuje v neutronovou hvězdu.

Druhé dvě generace nehrají tak důležitou roli jako generace předchozí, neboť se, s výjimkou neutrin, velmi rychle rozpadají. Nicméně, tyto dvě generace částic jsou velmi důležité v experimentech částicové fyziky (ověření platnosti standardního modelu).

2.1 Základní interakce

Základní síly ovlivňující interakci mezi částicemi jsou gravitace, elektroslabá a silná interakce. Gravitace byla popsána Einsteinovou obecnou teorií relativity a je důležitá při makroskopických procesech. Elementární částice ovlivňovala významně pouze při extrémně vysokých teplotách a tlacích v ranném stadiu vesmíru a v blízkosti velmi hmotných objektů (např. černé díry).

Elektromagnetická síla je v současnosti zahrnována do elektroslabé interakce. Při nízkých energiích, $E \ll 100\text{GeV}$, se často uvažuje pouze čistá elektromagnetická interakce, neboť slabá část elektroslabé interakce může být zanedbána.

Standardní model je kvantovou teorií pole, tedy silová pole jsou kvantována a interakce jsou zprostředkovány výměnou částic. Elektromagnetická interakce je zprostředkována fotony, slabá interakce bosony W^+ , W^- a Z^0 , silná interakce gluony. Všechny jsou bosony se spinem 1.

Slabá interakce popisuje rozpad leptonů a kvarků z druhé a třetí generace na své lehčí příbuzné z první generace. Podobně je slabou interakcí popsán i radioaktivní beta rozpad neutronů a jader. V interakcích jsou zprostředkující částice virtuální tj. $p^2 \neq m^2$. Jejich doba života je dána Heisenbergovou relací neurčitosti $\Delta E \cdot \Delta T \sim \hbar$. Protože W a Z jsou velmi těžké částice, mohou interagovat pouze na malých vzdálenostech v řádech $10^{-18}m$. Elektroslabé W a Z byly objeveny v SPS proton-antiproton collider v CERN v roce 1983.

Na malých vzdálenostech jsou elektromagnetická a slabá interakce sjednocené a lze je popsat jednotnou teorií. Předpověď elektroslabé teorie je, že reálné částice získávají svou hmotnost mechanismy, v nichž hrají důležitou roli Higgsova částice, která zatím nebyla objevena. Jedním z hlavních důvodů pro budování hadronového urychlovače (LHC) v CERN je právě snaha objevit Higgsovu částici.

Silná interakce se uplatňuje mezi částicemi s barevným nábojem. Kvarky mezi sebou silně interagují výměnou osmi gluonů. Navíc stejně jako při elektroslabé interakci, gluony mohou interagovat přímo mezi sebou. Důvodem je fakt, že gluon taky nese barevný náboj.

Existují tři druhy barevných nábojů. Nazývají se červený, zelený a modrý. Důvod je zřejmý - složení těchto barevných nábojů je podobné skládání základních barev. Antikvarky mohou mít jeden ze tří barevných nábojů nazývané anti-barvami. Výsledný barevný náboj tří kvarků nebo tří antikvarků musí být barevně neutrální. Podobně složením náboje a příslušného antináboje vznikne náboj barevně neutrální.

Jedním z problémů, který v rámci standardního modelu čeká na objasnění, je otázka proč nemohou existovat volné kvarky. Bylo experimentálně ověřeno, že kvarky jsou vždy uzavřeny v hadronu. To mimo jiné znamená, že silná interakce má krátký dosah, řádově $10^{-15}m$. Fakt, že kvarky nevystupují jako volné částice stěžuje možnost určit jejich hmoty.

Hadrony patří do dvou významných skupin částic. Jsou jimi baryony, sestávající ze tří kvarků a mezony, složené z kvarku a antikvarku. Známý jsou i anti-baryony, tvořené třemi anti-kvarky. Poznamenejme, že kvarkový model hadronů byl znám dlouho před vznikem moderní teorie silné

interakce.

Další jev, který je potřeba ještě precizněji vysvětlit je jaderná síla, která drží protony a neutrony v atomovém jádře. Uvažuje se o analogii s Van der Waalsovou silou uplatňující se mezi neutrálními atomy. Silná interakce mezi kvarky a gluony v tomto ohledu ovšem zatím nepřináší uspokojivé vysvětlení.

2.2 Hluboko nepružný rozptyl

V současnosti se jedním z nejběžnějších prostředků ke zkoumání vnitřní struktury subatomárních částic experimenty založené na hluboko nepružných rozptylech. Svazek vysokoenergetických bodových částic, nejčastěji elektronů nebo mionů je rozptylován na terči se zkoumanými částicemi. Ze zjištěných energetických a uhlových rozdělení rozptýlených leptonů se pak rekonstruuje struktura zkoumané částice. Mezi hlavní takové experimenty patří rozptyl nabitých (e^- , μ^-) nebo neutrálních (ν_e , ν_μ) leptonů a jejich antičástic na nukleonech, uvažujme proton:

$$l(k) + proton(P) \rightarrow l'(k') + X; \quad l, l' = e, \mu, \nu_e, \nu_\mu, \quad (1)$$

Kde X značí konečný stav, respektující zákony zachování, symboly v závorkách pak značí čtyřhybnosti příslušných částic. Speciálním případem (1) je pružný lepton-nukleonový rozptyl, kdy $X = proton$ a $l = l'$. Rozlišujeme dva typy hluboko nepružných rozptylů. Jedním jsou tzv. "neutrální proudy", které jsou zprostředkovány buď fotonem nebo (neutrálním) intermediálním vektorovým bosonem (IVB) Z . Druhým jsou potom "nabité proudy". Tyto procesy jsou zprostředkovány výměnou nabitých intermediálních vektorových bosonů W^\pm . Nejčastěji používané proměnné, popisující procesy (1) jsou:

$$S \equiv (k + P)^2 = M_p^2 + 2kP = M_p(2E_{lab} + M_p) \quad (2)$$

$$Q^2 \equiv -q^2 \equiv -(k - k')^2 = 2kk' = 4EE' \sin^2\left(\frac{\theta}{2}\right) \quad (3)$$

$$y \equiv \frac{qP}{kP} = \frac{E_{lab} - E'_{lab}}{E_{lab}} = \frac{\nu}{E_{lab}} = \left(\frac{s - M_p^2}{s}\right) \frac{1 - \cos\theta^*}{2} \quad (4)$$

$$x \equiv -\frac{q^2}{2Pq} = -\frac{q^2}{2M_p\nu} = \frac{Q^2}{Q^2 + W^2 - M_p^2} \quad (5)$$

$$W^2 \equiv (q + P)^2 = \frac{Q^2(1 - x)}{x} + M_p^2. \quad (6)$$

Proměnná W má jasnou interpretaci jako invariantní hmotnost hadronového systému X , vzniklého absorpcí fotonu nebo IVB terčovým nukleonem. Poznamenejme, že pro výpočet x , y a Q^2 je potřeba konečnou hybnost k' (společně s počátečními hybnostmi k , P), navíc poslední rovnost v (6) platí v libovolné referenční soustavě. Existují dvě základní referenční soustavy, ve kterých se proces (1) obvykle popisuje: laboratorní soustava, kde je ostřelovaný proton v klidu a těžišťová (center-of-mass) soustava, kde ostřelující lepton a proton mají opačné hybnosti téže velikosti. Poznamenejme, že všech pět veličin výše definovaných jsou relativistickými invarianty. V laboratorní soustavě mohou být vyjádřeny pomocí rozptylového úhlu θ_{lab} a energií E_{lab} a E'_{lab} nalétávajícího a rozptýleného leptonu. Veličina S určuje počáteční stav elektronu a protonu. Spolu s dalšími třemi veličinami, x , y a q^2 a s azimutálním úhlem ϕ , popisují konečný stav elektronu. Pouze dvě z těchto veličin jsou nezávislé, zbylé lze vyjádřit pomocí ostatních. Můžeme tedy volit některou z dvojic proměnných

$(x, y), (x, q^2), (y, q^2)$ nebo (E'_{lab}, θ_{lab}) , která pak společně s ϕ plně určuje konečný stav rozptýleného elektronu. Veškeré úvahy činíme za předpokladu, že částice v experimentu jsou nepolarizované. Pochopitelný význam v těchto experimentech bude hrát účinný průřez. Pro jeho vyjádření volíme buď veličiny (x, y) nebo $(x, Q^2 \equiv -q^2)$. Pro pružný rozptyl elektronu na protonu je situace jednodušší, neboť v tomto případě $x = 1$ a tedy pro určení konečného stavu postačuje jediná proměnná. V tomto případě se volí rozptylový úhel θ_{lab} nebo $y \doteq (1 - \cos \theta^*)/2$. Termín hluboce nepružný znamená, že invarianty Q^2 a Pq jsou mnohem větší v porovnání s hmotností protonu M_p

$$Q^2 = -q^2 \gg M_p^2; \quad \nu \gg M_p, \quad (7)$$

ale poměr $x = \frac{Q^2}{2Pq}$ v (5) zůstává konečný. Takové omezení se nazývá Bjorkenovo.

Při pružných rozptylech dochází poměrně málo často k velkým přenosům hybnosti: daleko pravděpodobnější je to v případech, kdy máme na konci víc než opět elektron a proton - k tomu dochází u nepružného rozptylu. Nejjednodušší měřený typ účinného průřezu je takzvaný 'inclusive' účinný průřez, který popisuje pouze elektron v konečném stavu. V tomto případě půjde o vysítané účinné průřezy přes všechny možné konečné stavy daného hadronu. Tento proces je popsán diagramem na obr. ? Interakce je uskutečněna výměnou jednoho fotonu. Detailní struktura konečného stavu hadronu je v tomto digramu ignorována, symbolicky je znázorněna "kapkou" v protonovém vrcholu. X symbolizuje sumu přes všechny možné hadronové stavy. Předpoklad o výměně fotonu, který je dobrou, experimentálně podloženou aproximací, znamená, že účinný průřez bude možné zapsat pomocí leptonového tensoru a tensoru popisující hadronový vrchol.

$$d\sigma \sim L_{\mu\nu} W^{\mu\nu} \quad (8)$$

Leptonový tensor je velmi dobře popsán kvantovou elektrodynamikou (QED). Jeho tvar je dán vztahem:

$$L_{\mu\nu} = 2[k'_\mu k_\nu + k'_\nu k_\mu + (q^2/2)g_{\mu\nu}] \quad (9)$$

Na druhé straně pro hadronový tensor předpokládáme, že hlavní roli sehraje silná interakce. Pro jeho odvození se vychází z Lorentzovy invariance a zachování elektromagnetického proudu. Uvažovat budeme, jak už bylo řečeno rozptyl nepolarizovaných částic. Suma přes všechny konečné stavy, X, obsahuje všechna možná kvantová čísla pro každý stav hadronu s celkovým momentem hybnosti p' . Budeme-li uvažovat inclusive účinný průřez, potom fázový prostor po rozptylu zahrnuje pouze rozptýlený elektron. Navíc, protože neomezujeme proces rozptýlení volbou nějakého konkrétního stavu z X, jsou energie k' a úhel rozptylu Θ , případně jinak zvolené dvojice proměnných navzájem nezávislé.

Obecně je hluboko nepružný rozptyl velmi komplikovaný proces a tuto skutečnost plně reflektuje i chování strukturálních funkcí. Nicméně, v roce 1967 Bjorken předpověděl, že v oblasti nepružných srážek - velká $\tilde{\nu}$ a Q^2 při konečném poměru $Q^2/\tilde{\nu}$ - se chování těchto funkcí značně zjednodušuje. Předpověděl, že strukturální funkce budou škalovány tj. přestanou být funkcemi nezávislých proměnných Q^2 a $\tilde{\nu}$, ale budou záviset pouze na jejich poměru $Q^2/\tilde{\nu}$. Tato okolnost nakonec zásluhou Feynmana přispěla k vytvoření moderního kvark partonového modelu.

2.3 Strukturální funkce

Jak bylo řečeno, rozhodující roli při formulaci partonového modelu, hrají experimenty s hluboko nepružným rozptylem leptonů na protonech. Jednou ze základních veličin zde vystupujících je dvojitý diferenciální průřez. Pro ilustraci uvažujme nepružný rozptyl nepolarizovaných elektronů

na nepolarizovaných protonech. K dispozici máme dvě nezávislé proměnné, které jednoznačně určují (vedle azimutálního úhlu) konečný stav elektronu po rozptylu. Vhodným výběrem zde může být dvojice proměnných x, y . Pro diferenciální účinný průřez potom platí:

$$\frac{d\sigma}{dx dy} = \frac{4\pi\alpha^2(2kP)}{Q^4} \left[\left(1 - y - \frac{M_p^2}{S} \right) F_2(x, Q^2) + \frac{1}{2}y^2 2xF_1(x, Q^2) \right] \quad (10)$$

kde $S \equiv (k + P)^2$ je kvadrát celkové energie těžišťového systému. Neznámé funkce $F_i(x, Q^2)$ se nazývají nepružné formfaktory nebo častěji strukturní funkce protonu. V rovnici (13) jsou vyjádřeny v proměnných x, Q^2 , zatímco diferenciály na levé straně rovnice v proměnných x, y . Bylo tak učiněno s ohledem na to, že libovolnou z proměnných x, y, Q^2 lze, pro dané S , vyjádřit pomocí zbývajících dvou, přesněji $Q^2 = S \cdot x \cdot y$. Rovnost (10) byla odvozena ze čtyř základních vlastností elektromagnetické interakce: Lorenzova invariance, unitarity, kalibrační invariance a zachování parity.

V partonovém modelu jsou strukturní funkce formálně zapisovány jako suma příspěvků různých partonů. Jsou-li jejich náboje e_i potom máme pro strukturní funkci F_2 :

$$F_2(x) = \sum_i e_i^2 x f_i(x) \quad (11)$$

F_1 je potom dáno Callan-Gross vztahem $F_2(x, Q^2) = 2xF_1(x, Q^2)$. Výsledky experimentů týkajících se hluboko nepružných rozptylů s elektrony či miony jsou obvykle popisovány pomocí strukturní funkce $F_2(x, Q^2)$

Otázkou zůstává jak je to s proporcionálním rozdělením celkové hybnosti protonu mezi partony. Z měření nejrůznějších hluboko nepružných rozptylů se ukázalo, že se nabitě partony na přenosu hybnosti protonu podílejí zhruba 50%. Zbytek hybnosti nesou neutrální partony. Neutrální v tom smyslu, že neinteragují elektromagneticky. Tento efekt kvantová chromodynamika popisuje zcela přirozeně tím, že neutrální partony ztotožňuje s gluony. Protože kvarky a gluony jsou jedinými částicemi představující roli partonů v rámci standardního modelu, přijmeme, že jsou takto někdy nazývány.

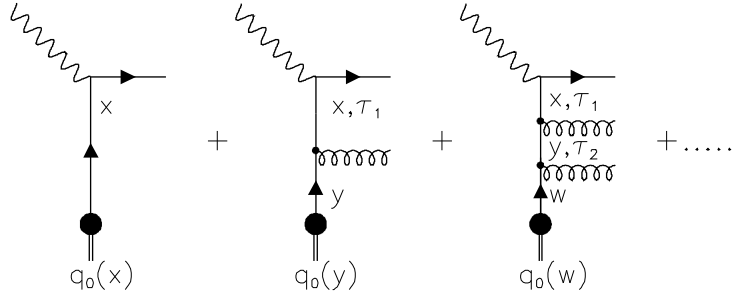
2.4 Partonový model

Poznatky o vnitřní struktuře protonu přinesl klasický experiment ve Stanford Linear Accelerator Center v Californii. Elektrony s vysokou energií byly rozptylovány na protonech umístěných v kapalném vodíku. Ukázalo se, že účinný průřez při tomto procesu je menší, než by se očekávalo za předpokladu, že je proton bodovou částicí. Vše tedy ukazovalo na vnitřní strukturu protonu. Byla nabídnuta teoretická interpretace, ve které je proton složen z menších částic nazvaných partony.

Interakce mezi různými partony se zanedbává. Každý parton nese zlomek x celkové hybnosti p . Pro každý parton uvažujeme distribuční funkci $f_i(x)$, popisující pravděpodobnost nalezení partonu typu i mající zlomek hybnosti x . Celková hybnost nesená všemi partony by se měla rovnat celkové hybnosti protonu, tedy:

$$\sum_i \int_0^1 x f_i(x) dx = 1 \quad (12)$$

kde suma probíhá přes všechny partony.



Obrázek 1: Grafická reprezentace definice "oblečené" partonové distribuční funkce uvnitř daného hadronu pro nesingletní kvarkovou distribuční funkci. τ_i značí absolutní hodnotu virtuality daného intermediálního stavu.

V partonovém modelu se účinné průřezy vyjadřují jako konvoluce distribučních funkcí a účinných průřezů $\hat{\sigma}_i$ rozptylu na partonu i . Pro celkový účinný průřez potom máme:

$$\sigma = \sum_i \int f_i(x) \hat{\sigma}_i(x) dx \quad (13)$$

Partonový model lze s úspěchem aplikovat na všechny hadrony. Partonové distribuční funkce $f_i(x)$ jsou pak universální v tom smyslu, že pro daný hadron mohou být při všech interakcích použity tytéž distribuční funkce. Pochopitelně různé hadrony jsou popisovány různými distribučními funkcemi.

V případě, kdy dochází ke srážce dvou hadronů, bude v účinném průřezu vystupovat partonová distribuční funkce každého hadronu v konvoluci s účinným průřezem $\hat{\sigma}_{ij}$ rozptylu dvou partonů i, j . Celkový účinný průřez opět získáme jako sumu přes všechny partony:

$$\sigma = \sum_{i,j} \int \int f_i(x_1) f_j(x_2) \hat{\sigma}_{ij}(x_1, x_2) dx_1 dx_2 \quad (14)$$

3 Evoluční rovnice

Doposud byly kvarky a gluony před a po kolizi považovány za volné částice a to i přes experimentálně podloženou skutečnost, že kvarky a gluony existují pouze uvnitř hadronu a za volné je tedy považujeme pouze pokud je zkoumáme na malých vzdálenostech. Evoluční rovnice, které se nyní pokusíme odvodit berou tento fakt do úvahy. Důležité je zmínit ještě jednu podstatnou okolnost. V distribučních rovnicích v QCD, která zachycuje efekty mnohonásobné emise gluonů se objevuje závislost na nové proměnné - škále Q^2 . Ta v partonovém modelu nevystupovala (viz např. 11). QCD nezmění původní rámec, pouze ji o tuto závislost obohatí.

Odvození začneme zavedením "primordial" (nebo též holými) distribučními funkcemi partonů uvnitř hadronů, $q_0(x), G_0(x)$, které závisejí pouze na x a jsou interpretovány ve smyslu kvark partonového modelu. První případ takových funkcí představují takzvané nesingletní kvarkové distribuční funkce, které se ve vedoucím řádu (LO) poruchové kvantové chromodynamiky schodují s distribučními valenčními funkcemi. Definujme tedy renormalizační nebo "oblečené" nesingletní

kvarkovou distribuční funkci

$$q_{NS}(x, M) \equiv q_{NS,0}(x) + \int_x^1 \frac{dy}{y} \left[P_{qq}^{(0)}\left(\frac{x}{y}\right) \int_{m^2}^{M^2} \frac{d\tau_1}{\tau_1} \frac{\alpha_s(\tau_1)}{2\pi} \right] q_{NS,0}(y) + \int_x^1 \frac{dy}{y} \int_y^1 \frac{d\omega}{\omega} \int_{m^2}^{M^2} \frac{d\tau_1}{\tau_1} \int_{m^2}^{\tau_1} \frac{d\tau_2}{\tau_2} \frac{\alpha_s(\tau_1)}{2\pi} \frac{\alpha_s(\tau_2)}{2\pi} \left[P_{qq}^{(0)}\left(\frac{x}{y}\right) P_{qq}^{(0)}\left(\frac{y}{\omega}\right) \right] q_{NS,0}(\omega) + \dots \quad (15)$$

kde nově zavedená škála M představuje maximální virtualitu kvarku interagujícím s fotonem. Derivováním obou stran rovnice podle M dostáváme:

$$\frac{dq_{NS}(x, M)}{d \ln M^2} = \frac{\alpha_s(M)}{2\pi} \int_x^1 \frac{dy}{y} P_{qq}^{(0)}\left(\frac{x}{y}\right) [q_{NS,0}(y) + \int_y^1 \frac{d\omega}{\omega} \int_{m^2}^{M^2} \frac{d\tau_2}{\tau_2} \frac{\alpha_s(\tau_2)}{2\pi} P_{qq}^{(0)}\left(\frac{y}{\omega}\right) q_{NS,0}(\omega) + \dots], \quad (16)$$

tj.

$$\frac{dq_{NS}(x, M)}{d \ln M^2} = \frac{\alpha_s(M)}{2\pi} \int_x^1 \frac{dy}{y} P_{qq}^{(0)}\left(\frac{x}{y}\right) q_{NS}(y, M) = \frac{\alpha_s}{2\pi} \int dz \int dy P_{qq}^{(0)}(z) q_{NS}(y) \delta(x - yz) \equiv \frac{\alpha_s}{2\pi} P_{qq}^{(0)} \otimes q_{NS}, \quad (17)$$

kteřá se nazývá Altarelli-Parisi (AP) evoluční rovnicí pro "oblečenou" NS kvarkovou distribuční funkci $q_{NS}(x, M)$.

3.1 Větvící funkce

V kvantové chromodynamice existují tzv. větvící funkce (branching functions) popisující větvení kvark na kvark, kvark na gluon, gluon na kvark či gluon na gluon:

$$P_{qq}^{(0)}(x) = P_{\bar{q}\bar{q}}^{(0)}(x) = \frac{4}{3} \left[\frac{1+x^2}{1-x} \right]_+ \quad (18)$$

$$P_{Gq}^{(0)}(x) = P_{G\bar{q}}^{(0)}(x) = \frac{4}{3} \left[\frac{1+(1-x)^2}{x} \right] \quad (19)$$

$$P_{qG}^{(0)}(x) = P_{\bar{q}G}^{(0)}(x) = \left[\frac{x^2+(1-x)^2}{2} \right] \quad (20)$$

$$P_{GG}^{(0)}(x) = 6 \left\{ \left[\frac{x}{1-x} \right]_+ + \frac{1-x}{x} + x(1-x) + \left(\frac{33-2n_f}{36} - 1 \right) \delta(1-x) \right\} \quad (21)$$

Tyto větvící funkce jsou stejné pro všechny kvarky q_i, \bar{q}_i . Pro vyjádření této skutečnosti bylo použito symbolů q, \bar{q}

Ve větvících funkcích (18) a (21) vystupuje "+" distribuce, která je definována:

$$[f(x)]_+ \equiv \lim_{\beta \rightarrow 0} \left(f(x) \Theta(1-x-\beta) - \delta(1-x-\beta) \int_0^{1-\beta} f(y) dy \right) \quad (22)$$

kde $\Theta(x)$ a $\delta(x)$ jsou skoková funkce a Diracova δ -funkce.

Například, větvičí funkce $P_{qG}^{(0)}(z)$, popisuje pravděpodobnost nalezení kvarku (libovolné vůně) uvnitř gluonu, navíc vystupuje v evoluční rovnici pro "oblečenou" kvark/antikvarkovou distribuční funkci

$$\frac{dq_i(x, M)}{d \ln M} = \frac{\alpha_s(M)}{\pi} \left[\int_x^1 \frac{dy}{y} P_{qq}^{(0)}\left(\frac{x}{y}\right) q_i(y, M) + \int_x^1 \frac{dy}{y} P_{qG}^{(0)}\left(\frac{x}{y}\right) G(y, M) \right] \quad (23)$$

$$\frac{d\bar{q}_i(x, M)}{d \ln M} = \frac{\alpha_s(M)}{\pi} \left[\int_x^1 \frac{dy}{y} P_{q\bar{q}}^{(0)}\left(\frac{x}{y}\right) \bar{q}_i(y, M) + \int_x^1 \frac{dy}{y} P_{qG}^{(0)}\left(\frac{x}{y}\right) G(y, M) \right] \quad (24)$$

kde gluonová distribuční funkce $G(x, M)$ splňuje podobnou evoluční rovnici

$$\frac{dG(x, M)}{d \ln M} = \frac{\alpha_s(M)}{\pi} \left[\sum_{i=1}^{n_f} \int_x^1 \frac{dy}{y} P_{Gq}^{(0)}\left(\frac{x}{y}\right) (q_i(y, M) + \bar{q}_i(y, M)) + \int_x^1 \frac{dy}{y} P_{GG}^{(0)}\left(\frac{x}{y}\right) (G(y, M)) \right] \quad (25)$$

V předcházejících evolučních rovnicích je M interpretováno pouze jako horní mez partonových virtualit obsažených v definici "oblečených" partonových distribučních funkcí, bez nijaké specifikace jeho vztahu ke kinematickým proměnným nějakého fyzikálního procesu. V případě hluboko nepružného procesu se obvykle pokládá $M^2 = Q^2$.

K tomu abychom mohli řešit Altarelli-Parisiho rovnici je zapotřebí znalost hraničních podmínek, které zahrnují informace o závislosti partonové distribuční funkce na x při nějaké počáteční škále M_0 . Výběr této počáteční škály je poměrně delikátní záležitostí, neboť hledané řešení AP rovnice na výběru M_0 pochopitelně závisí. Běžně se pak M_0 volí v rozsazích několika GeV. Poruchová teorie tyto počáteční podmínky neumožňuje vypočítat, musí být získány z experimentálních dat. Evoluční rovnice potom určují pouze závislost partonové distribuční funkce na M , nikoliv jejich absolutní hodnotu.

K řešení evolučních rovnic jsou k dispozici rozmanité metody. Nejprůběžnější z nich řeší systém vázaných evolučních rovnic pomocí důmyslných numerických algoritmů na výkonných počítačích. Standardní analýza experimentálních dat se provádí v následujících krocích: provede se volba počáteční škály M_0 , zvolí se vhodná parametrizace počátečních podmínek pro partonové distribuční funkce $D_i(x, M_0)$, $i = q, \bar{q}, G$, příkladem může být

$$D_i(x, M_0) = A_i x^{\alpha_i} (1-x)^{\beta_i} (1+\gamma_i x) \quad (26)$$

kde $A_i, \alpha_i, \beta_i, \gamma_i$ jsou volné parametry. Pro zvolenou sadu těchto parametrů spolu s hodnotou hlavního parametru QCD Λ , vstupujícím do $\alpha_s(M/\Lambda)$ řešíme rovnice (23)-(25). Takto získáme $D_i(x, M)$ pro všechna x a M . Tato řešení se pak porovnávají s experimentálními daty a na základě těchto srovnání se hodnoty uvedených parametrů dále zpřesňují. Výsledkem je sada parametrů $A_i, \alpha_i, \beta_i, \gamma_i$ určující hraniční podmínku tak, že řešením evolučních rovnic s touto podmínkou jsou hledané distribuční funkce.

3.2 Momenty strukturních funkcí a sumační pravidla

Tvar Altarelli-Parisiho rovnici je možné zjednodušit, pokud zavedeme takzvané momenty definované

$$f(n) \equiv \int_0^1 x^n f(x) dx \quad (27)$$

Místo konvolucí v (23)-(25) získáme pouze násobením námi zavedených momentů

$$\frac{dq_i(n, M)}{d \ln M} = \frac{\alpha_s(M)}{\pi} \left(P_{qq}^{(0)}(n) q_i(n, M) + P_{qG}^{(0)}(n) G(n, M) \right), \quad (28)$$

$$\frac{d\bar{q}_i(n, M)}{d \ln M} = \frac{\alpha_s(M)}{\pi} \left(P_{q\bar{q}}^{(0)}(n) \bar{q}_i(n, M) + P_{qG}^{(0)}(n) G(n, M) \right), \quad (29)$$

$$\frac{dG(n, M)}{d \ln M} = \frac{\alpha_s(M)}{\pi} \left(\sum_{i=1}^{n_f} P_{Gq}^{(0)}(n) (q_i(n, M) + \bar{q}_i(n, M)) + P_{GG}^{(0)}(n) G(n, M) \right), \quad (30)$$

Výrazně jednodušší rovnice platí pro momenty nesingletních kvarkových distribučních funkcí ($a \equiv \alpha_s/\pi$)

$$\frac{dq_{NS}(n, M)}{d \ln M} = \frac{\alpha_s(M)}{\pi} P_{qq}^{(0)}(n) q_{NS}(n, M) \Rightarrow q_{NS}(n, M) = A_n \left(\frac{ca(M)}{1 + ca(M)} \right)^{-P_{qq}^{(0)}(n)/b} \quad (31)$$

kde A_n jsou neznámé konstanty, které hrají stejnou roli jako hraniční podmínky (26) distribuční funkce a které musí být zjištěny z experimentálních dat. Poznamenejme, že nulový moment (tj. integrál přes) q_{NS} nezávisí na M , neboť $P_{qq}^{(0)}(0) = 0$. Kombinací evolučních rovnic (28)-(30) můžeme napsat evoluční rovnici pro sumu

$$\sum(n, M) \equiv \sum_{i=1}^{n_f} (q_i(n, M) + \bar{q}_i(n, M)) + G(n, M) = q(n, M) + \bar{q}(n, M) + G(n, M) \quad (32)$$

Rovnice má tvar:

$$\frac{d\sum(n, M)}{d \ln M} = \frac{\alpha_s(M)}{\pi} \left[\left(P_{qq}^{(0)}(n) + P_{Gq}^{(0)}(n) \right) (q(n, M) + \bar{q}(n, M)) + \left(2n_f P_{qG}^{(0)}(n) + P_{GG}^{(0)}(n) \right) G(n, M) \right] \quad (33)$$

Rovnice (33) nabývá zvláštního významu pro $n = 1$, protože potom má $\sum(1, M)$ význam frakce hybnosti protonu nesené všemi partony. Jako takový ovšem musí být roven jedné při libovolné škále M a derivace (33) musí být nulová. To dává:

$$P_{qq}^{(0)}(1) + P_{Gq}^{(0)}(1) = \int_0^1 dz z \left(P_{qq}^{(0)}(z) + P_{Gq}^{(0)}(z) \right) = 0, \quad (34)$$

$$2n_f P_{qG}^{(0)}(1) + P_{GG}^{(0)}(1) = \int_0^1 dz z \left(2n_f P_{qG}^{(0)}(z) + P_{GG}^{(0)}(z) \right) = 0. \quad (35)$$

Přímý výpočet těchto integrálů použitím explicitních vyjádření (18)- (21) větvících funkcí ukazuje, že v QCD jsou tyto podmínky opravdu splněny.

3.3 Vlastnosti distribučních funkcí

V této části se blíže seznámíme s vlastnostmi partonových distribučních funkcí, jejich základními vlastnostmi a fyzikální interpretací.

Přijmeme v následujícím pro distribuční funkci kvarku uvnitř hadronu h označení $q(x)$, $q = u, d, s, c$. Analogicky i pro antikvarky

$$u^h(x), d^h(x), s^h(x), c^h(x), \bar{u}^h(x), \bar{d}^h(x), \bar{s}^h(x), \bar{c}^h(x), \quad (36)$$

K jejich měření jsou k dispozici nejrůznější experimenty za pomoci svazků elektronů, mionů a (anti)neutrin a to užitím mnoha různých metod a technik. Získat distribuční funkce z experimentálních dat pro strukturní funkce je poměrně pracnou záležitostí. Důvodem je fakt, že strukturní funkce jsou vždy kombinací právě distribučních funkcí. V případě protonu a neutronu:

$$F_2^{ep}(x) = x \left(\frac{4}{9}[u(x) + \bar{u}(x) + c(x) + \bar{c}(x)] + \frac{1}{9}[d(x) + \bar{d}(x) + s(x) + \bar{s}(x)] \right) \quad (37)$$

$$F_2^{en}(x) = x \left(\frac{4}{9}[d(x) + \bar{d}(x) + c(x) + \bar{c}(x)] + \frac{1}{9}[u(x) + \bar{u}(x) + s(x) + \bar{s}(x)] \right) \quad (38)$$

Užitečný může být průměr 37, (38):

$$F_2^{eN} \equiv \frac{1}{2}(F_2^{ep} + F_2^{en}) = \frac{5}{18}x \underbrace{[u(x) + d(x) + \bar{u}(x) + \bar{d}(x) + s(x) + \bar{s}(x) + c(x) + \bar{c}(x)]}_{\Sigma(x)} - \frac{1}{6}xk(x), \quad (39)$$

kde $k(x) \equiv s(x) + \bar{s}(x) - c(x) + \bar{c}(x)$ je číselně zanedbatelné vzhledem k $\Sigma(x)$. Při přechodu od 37 k (38) se využila symetrie izospinu kvarkové distribuční funkce (u-kvark v protonu je totéž jako d-kvark v neutronu a naopak.

Kvarkové distribuční funkce se vyznačují dvěma základními rysy:

Pro $x \rightarrow 0$ se jak kvarková, tak antikvarková distribuční funkce chová zhruba jako $1/x$ a integrál

$$\int_0^1 q(x)dx \quad (40)$$

tedy diverguje. Tento fakt znamená, že počet nabitých partonů v protonu je nekonečný. Na první pohled je tato skutečnost značně znepokojivá, nicméně, jak se později ukáže lehce vysvětlitelná a v podstatě nepředstavující nijaký problém pro kvark partonový model. Pro vysvětlení nejprve uvažujme takzvanou valenční distribuční funkci, definovanou jako rozdíl kvarkové a antikvarkové distribuční funkce

$$q_v \equiv q(x) - \bar{q}(x); \quad q = u, d, s, c \quad (41)$$

Tyto valenční distribuční funkce poskytují spojení mezi kvark-partony v kvark partonovém modelu a kvarky starého konstituentního kvarkového modelu. Takovéto distribuční funkce jsou integrovatelné a integrály

$$\int_0^1 u_v(x)dx \doteq 2; \quad \int_0^1 d_v(x)dx \doteq 1 \quad (42)$$

navíc souhlasí s předpověďmi konstituentního kvarkového modelu. Další důležitý integrál

$$\int_0^1 xq(x)dx; \quad q = u, d, s \quad (43)$$

má jasnou interpretaci jako zlomek hybnosti protonu neseného kvarkem q . Připojme ještě další platný vztah:

$$\frac{18}{5} \int_0^1 F_2^{eN}(x)dx \doteq \int_0^1 x \Sigma(x)dx, \quad (44)$$

kteřý udává zlomek celkové hybnosti protonu nesené u , d , s a c kvarky a příslušnými antikvarky. Část hybnosti nesená t a b kvarky je zcela zanedbatelná. Experimentální hodnota, zhruba 0.5 ukazuje na to, že v protonu musí být ještě další, elektricky neutrální partony, které nesou zbyvající

polovinu jeho hybnosti. Brzy po experimentálních měřeních (44) byly tyto partony identifikovány s gluony. Naše současné poznatky o původu antikvarků a gluonů jsou shrnuty v následující části. Při procesech s malou rozlišovací schopností, například při rozptylu doprovázeném malým přenosem hybnosti, se proton chová jako systém tří konstitučních kvarků, držené pohromadě ve statickém potenciálu, který zhruba odpovídá výsledkům komplikovaných výměn gluonů, zprostředkujících síly mezi kvarky. Tento potenciál nebyl zatím v QCD spolehlivě spočítán, ale nadějně se v tomto ohledu jeví jisté techniky kalibříční teorie, které by mohli přinést očekávané výsledky. V procesech s vyšším rozlišením, uskutečněném tvrdým rozptylem se obraz mění. Statické pole vyvolává gluony, které se přeměňují v pár kvark, antikvark, které opět září gluony a tak dále. Všechny vytvořené kvarky a gluony jsou virtuální a musí se tedy po nějakém čase rekombinovat. Pokud ovšem bude jejich virtualita ($k^2 - m^2$, kde k a m je hybnost a hmotnost virtuální částice) malá vzhledem k $\sqrt{Q^2}$, kde Q^2 je míra tvrdosti kolize, potom budou žít dostatečně dlouho na to, aby se na něm elektron rozptýlil jako na reálné částici.

V tomto případě mohou být distribuční funkce kvarku u a d (v protonu) rozděleny na část valenční a část "mořskou", která je podle definice identická s antikvarkovou distribuční funkcí

$$\bar{u}(x) = \bar{u}_{sea}(x) = u_{sea}(x), \quad \bar{d}(x) = \bar{d}_{sea}(x) = d_{sea}(x), \quad (45)$$

Podivné, půvabné a další těžké kvarkové distribuční funkce protonu mají pouze "mořské" komponenty.

4 Metody řešení evolučních rovnic

Cílem této části bude představit některé z metod řešení evolučních rovnic pro kvarkové a gluonové distribuční funkce. Některé z nich budou zajímavé pouze z historického hlediska, přesto je užitečné se o nich zmínit.

Všechny metody používají počáteční podmínku ve formě specifikace kvarkové a gluonové funkce v nějaké počáteční škále M_0 . V dalším bude věnována pozornost případu nesingletních kvarkových distribučních funkcí.

4.1 Buras-Gaemers metoda

Tato metoda byla historicky první metodou užívanou pro řešení evolučních rovnic v LO. Nejprve je nutné deklarovat počáteční podmínky nesingletními tj. valenčními u_v a d_v kvarkovými distribučními funkcemi kvarků ve tvaru:

$$q_v(x, M_0) = A^q x^{\eta_1^q} (1-x)^{\eta_2^q}, \quad (46)$$

což nám pro příslušné momenty dává

$$q_v(n, M_0) = A^q \frac{\Gamma(\eta_1^{q+n+1})\Gamma(\eta_2^q + 1)}{\Gamma(\eta_1^q + n + \eta_2^q + 2)}. \quad (47)$$

Použití těchto počátečních podmínek v evolučních rovnicích (17) pro momenty $q_v(n, M)$ umožňuje získat závislost na škále v explicitním analytickém vyjádření. Je důležité poznamenat, že při transformaci zpět do x -prostoru je jednoduchost těchto explicitních řešení ztracena. Pro zachování "jednoduchosti" i v x -prostoru Buras s Gaemers předpokládali, že tato řešení mohou být slušně aproximována ve tvaru (46) pro všechna M , kde nyní ovšem koeficienty A^q , η_1^q , η_2^q závisí na M .

Přesněji, předpokládali následující jednoduchou závisost na M .

$$\eta_i^q(s) = \eta_i^q + \eta_i'^q s, i = 1, 2; \quad A^q = \frac{\delta_q}{B(\eta_1^q(s), 1 + \eta_2^q(s))}; \quad s \equiv \ln \left[\frac{\ln(M/\Lambda)}{\ln(M_0\Lambda)} \right] \quad (48)$$

kde $\delta_u = 2$ a $\delta_d = 1$. Proměnná s definovaná v (48) je obvykle nazývána "evoluční proměnnou". Koeficienty η_i^q , $\eta_i'^q$ byly zjištěny dosazením, pro zvolené počáteční M_0 , aproximace založené na (??) do exaktních řešení pro prvních 10 momentů. Přestože se tato aproximativní procedura příliš neslučuje s exaktními řešeními evoluční rovnice (17), je extrémně jednoduchá a byla později hojně užívána.

4.2 Metoda Laguerových polynomů

Tato metoda řeší evoluční rovnice (17) v analytické formě a to za použití rozvoje do sady Laguerreových polynomů. Tato metoda může být v podstatě libovolně přesná, v praxi však musí být tento rozvoj samozřejmě konečný. Tato metoda byla používána v polovině osmdesátých let a to mnoha skupinami experimentátorů.

4.3 Numerické integrační metody

Poměrně záhy se začalo přistupovat k numerickým metodám řešení evolučních rovnic a to především zásluhou obrovského zvýšení výkonu a kapacit moderních počítačů. Tyto numerické postupy jsou obvykle vytvářeny tak, že jejich relativní jednoduchost umožňuje jejich použití i neodborníky, případně experimentátory. V následující části jednu takovou numerickou metodu představíme.

4.3.1 Qcdnum

Pomocí programu QCDNUM lze počítat evoluci Q^2 partonových distribučních funkcí v předem určené síti x , Q^2 . Předem musí být známy hodnoty partonových distribučních funkcí v nějakém pevném $Q^2 = Q_0^2$ pro všechna x naší sítě. Výpočet evoluce je založena na výpočtu konvolučních integrálů. Ty jsou počítány za předpokladu, že partonové distribuční funkce můžeme lineárně interpolovat (ve všech Q^2) mezi jednotlivými x sítě. S tímto předpokladem mohou být konvoluční integrály vypočteny jako vážené sumy. Váhy, které, jak se později ukáže, budou představovány integrály QCD větvičích funkcí, jsou s vysokou přesností vypočteny při inicializaci programu.

Z hodnot dané vložené partonové distribuční funkce a vypočtených derivací v Q_0^2 , může být vypočtena distribuční funkce v dalším bodě sítě $Q_1^2 > Q_0^2$ (nebo $Q_1^2 < Q_0^2$). Tato distribuční funkce pak slouží k výpočtu derivací v Q_1^2 a tak dále. Tímto způsobem může výpočet proběhnout celou $x - Q^2$ sítí. V algoritmu Qcdnum, je evoluce založena na kvadratické interpolaci v $\ln Q^2$. V dřívějších verzích tohoto programu byla této kvadratické interpolaci dosaženo iterativně. Začínalo se lineární evolucí v $\ln Q^2$ z jednoho Q^2 do dalšího. V současnosti je toho dosaženo bez iterací řešením lineárních rovnic v každém evolučním kroku.

Počet bodů sítě v x a Q^2 musí být zvolen s jistou opatrností. Vyšší počet bodů sítě zlepšuje numerickou přesnost (interpolace v evolučním algoritmu bude lépe aproximovat) ale nesmí být zase příliš vysoký, protože s počtem bodů x (Q^2) roste čas CPU lineárně (kvadraticky). Rozumným kompromisem mezi přesností a rychlostí bývá volba sítě $x - Q^2$ 100×40 bodů. Pro pokrytí dostatečně velkého kinematického rozsahu se volí x od 10^{-5} a $4 < Q^2 < 10000 \text{ GeV}^2$.

Nyní se zaměříme na výpočet konvolučních integrálů. Qcdnum počítá partonové hybnostní hustoty $H(x) = xh(x)$. Ty bývají někdy opět nazývány distribučními funkcemi. V následujícím textu se přidržíme tohoto pojmenování. Konvoluční integrály mají následující tvar

$$I(x_0) = \int_{x_0}^1 \frac{x_0 dz}{z^2} P\left(\frac{x_0}{z}\right) H(z) \quad (49)$$

kde $P(x)$ je větvicí funkce. Pro distribuční funkci $H(x)$ se vyčlení body

$$x_0 < x_1 < \dots x_n < x_{n+1} \equiv 1; \quad H(x_{n+1}) = H(1) \equiv 0 \quad (50)$$

Distribuční funkce se lineárně interpoluje mezi body zvolené sítě v x :

$$\begin{aligned} H(x_i < x < x_{i+1}) &= (1-t)H(x_i) + tH(x_{i+1}) \\ t &= (x - x_i)/(x_{i+1} - x_i). \end{aligned} \quad (51)$$

Dosadíme-li (52) do (49) můžeme konvoluční integrál psát jako váženou sumu:

$$I(x_0) = \sum_{i=0}^n w(x_i, x_0) H(x_i) \quad (52)$$

s

$$w(x_0, x_0) = S_1(s_1, s_0) \quad (53)$$

$$w(x_i, x_0) = S_1(s_{i+1}, s_i) - S_2(s_i, s_{i-1}) \quad (54)$$

kde

$$S_1(u, v) = \frac{v}{v-u} \int uv(z-u)P(z) \frac{dz}{z} \quad (55)$$

$$S_2(u, v) = \frac{u}{v-u} \int uv(z-v)P(z) \frac{dz}{z} \quad (56)$$

Qcdnum počítá váhy při inicializaci integrací rovnic (55), (56) pro všechny LO a NLO větvicí funkce a jsou ukládány ve 2-rozměrném prostoru.

S použitím rovnice (49) můžeme evoluční rovnice partonových hybnostních hustot psát jako vážené sumy, tj. pro singletní kvarkovou hybnostní hustotu máme:

$$\begin{aligned} \frac{dx_0 \sum(x_0)}{d \ln Q^2} &= \frac{\alpha_s}{2\pi} \sum_{i=0}^n [w_{FF}^{(0)}(x_i, x_0) + \frac{\alpha_s}{2\pi} w_{FF}^{(1)}(x_i, x_0)] x_i \sum(x_i) + \\ & [w_{FG}^{(0)}(x_i, x_0) + \frac{\alpha_s}{2\pi} w_{FF}^{(1)}(x_i, x_0)] x_i g(x_i) \end{aligned} \quad (57)$$

V následující části bude popsán výpočet evoluce v Q^2 nesingletní kvarkové hybnostní hustoty $H(x, Q^2) = xq^\pm(x, Q^2)$. Je výhodné zavést novou proměnou $t = \ln Q^2$ a psát pro daný bod sítě x_i, t_j evoluční rovnici pro H jako:

$$H'(x_i, t_j) = \frac{\alpha_s(t_j)}{2\pi} \sum_{k=i}^n [w_{\pm}^{(0)}(x_k, x_i) + \frac{\alpha_s(t_j)}{2\pi} w_{\pm}^{(1)}(x_k, x_i)] H(x_k, t_j) \quad (58)$$

kde $H' = \partial H / \partial t$. Tato derivace nemůže být vypočtena přímo, protože první člen v sumě na pravé straně rovnice (58) obsahuje $H(x_i, t_j)$, který je apriori neznámý. Vyčleněním tohoto členu ze sumy a označením zbývajících sumy (jdoucích od $k = i + 1$ do n) symbolem S můžeme rovnici (58) psát jako:

$$H'_j = wH_j + S \quad (59)$$

V následujícím budeme předpokládat, že jsou splněny následující podmínky:

Podmínka (i): V předcházejících krocích evoluce byla vypočtena $H(x_k, t_j)$ pro všechny hodnoty $x_k > x_i$, tj. pro $k > i$.

S tímto předpokladem může být vypočtena suma S a v důsledku toho na rovnici (59) nahlížíme jako na lineární rovnici se dvěma neznámými H'_j a H_j . Nyní, z důvodu, který vyplyne později, odvodíme druhou lineární rovnici. Hustotu $H(x_i, t)$ mezi body t_{j-1} a t_j kvadraticky interpoluje:

$$H(x_i, t_{j-1} < t < t_j) = at^2 + bt + c \quad (60)$$

S takovou interpolací je $H(x_i, t_j)$ s $H(x_i, t_{j-1})$, $H'(x_i, t_j)$ a $H'(x_i, t_{j-1})$ ve vztahu:

$$H(x_i, t_j) = H(x_i, t_{j-1}) + \frac{1}{2}[H'(x_i, t_j) + H'(x_i, t_{j-1})] \Delta t_j \quad (61)$$

kde $\Delta t_j = t_j - t_{j-1}$. Budeme-li předpokládat, že je splněna i následující podmínka:

Podmínka (ii): v předcházejících krocích evoluce byly vypočteny $H(x_i, t_{j-1})$ i $H'(x_i, t_{j-1})$ pro všechny $t_{j-1} < t_j$

potom je i rovnice (??) lineární s neznámými H_j a H'_j . Zkráceně můžeme psát:

$$H_j = H_{j-1} + \frac{1}{2}(H'_{j-1} + H'_j) \Delta_j \quad (62)$$

Řešením rovnic (59) a (61) dostáváme:

$$H_j = \frac{2H_{j-1} + (H'_{j-1} + S)\Delta_j}{2 - w\Delta_j} \quad (63)$$

Díky podmínkám (i) a (ii) jsou všechny výše uvedené veličiny na pravé straně předcházející rovnice známy. Hodnotu H'_j pak snadno nalezneme zpětným dosazením (63) do (59).

4.4 Metoda Jacobiho polynomů

Technika této metody je založena na rozvoji do sady Jacobiho polynomů

$$\Theta_k^{\alpha\beta}(x) \equiv \sum_{j=0}^k c_{kj}^{\alpha\beta} x^j, \quad (64)$$

ortogonálních na intervalu $(0, 1)$ s vahou $x^\alpha(1-x)^\beta$

$$\int_0^1 dx x^\alpha(1-x)^\beta \Theta_k^{\alpha\beta}(x) \Theta_l^{\alpha\beta}(x) = \delta_{kl}. \quad (65)$$

Nesingletní strukturní funkce $F_{NS}(x, Q^2)$ můžeme rozvinout

$$F_{NS}(x, Q^2) = x^\alpha(1-x)^\beta \sum_{k=0}^{\infty} \Theta_k^{\alpha\beta}(x) a_k^{\alpha\beta}(Q^2) \quad (66)$$

v Jacobiho momentech $a_k^{\alpha\beta}(Q^2)$, které jsou dány lineárními kombinacemi momentů $F_{NS}(j, Q^2)$:

$$a_k^{\alpha\beta}(Q^2) \equiv \int_0^1 dx F_{NS}(x, Q^2) \Theta_k^{\alpha\beta}(x) = \sum_{j=0}^k c_{kj}^{\alpha\beta} F_{NS}(j, Q^2). \quad (67)$$

Tato cesta již vede k explicitnímu vyjádření F_{NS} .

4.5 Mellinova inverzní transformace

Pro další práci budeme užívat evoluční rovnice pro distribuční funkce $f(x, Q^2)$ ve tvaru

$$Q^2 \frac{\partial f(x, Q^2)}{\partial Q^2} = P(x, Q^2) \otimes f(x, Q^2), \quad (68)$$

kde x značí zlomek hybnosti protonu nesený partonem, $P(x, Q^2)$ je Altarelli-Parisiho jádro a \otimes značí konvoluci:

$$A(x) \otimes B(x) = \int_0^1 dy \int_0^1 dz \delta(x - yz) A(y) B(z). \quad (69)$$

Rovnici (68) můžeme faktorizovat použitím Mellinových momentů:

$$A(z) = \int_0^1 dx x^{z-1} A(x) \quad (70)$$

získáme tak rovnici

$$Q^2 \frac{\partial f(z)(Q^2)}{\partial Q^2} = P(z)(Q^2) \cdot f(z)(Q^2). \quad (71)$$

Při řešení rovnice (71) existuje několik možností jak postupovat dál. Všechny spočívají ve vhodných úpravách této rovnice. Předvedeme některé z nich.

Nejprve přejdeme od proměnné Q^2 k proměnné $a_s = \alpha_s(Q^2)/\pi$. Důvodem jsou známé rozvoje (přesněji vyjádření v NLO) funkcí vystupujících v rovnici (71). Máme tedy:

$$\frac{\partial f(z, Q^2)}{\partial a_s} = \frac{P(z, a_s)}{\beta(a_s)} f(z, Q^2), \quad (72)$$

kde

$$\beta(a_s) \equiv Q^2 \frac{\partial a_s}{\partial Q^2} \quad (73)$$

Funkce a_s , která mimochodem hraje v kvantové chromodynamice velmi významnou roli je dána rovnicí:

$$\frac{\partial a_s(Q^2)}{\partial \ln(Q^2)} = -\beta_0 a_s^2(Q^2) - \beta_1 a_s^3(Q^2). \quad (74)$$

Řešení této rovnice můžeme psát jako:

$$\frac{1}{a_s(Q^2)} + \frac{\beta_1}{\beta_0} \ln \left[\frac{\beta_1 a_s(Q^2)}{b_0 + \beta_1 a_s(Q^2)} \right] = \beta_0 \ln \left(\frac{Q^2}{\Lambda^2} \right). \quad (75)$$

kde Λ představuje základní parametr QCD, který může být pro tuto chvíli definován jako škála, při které se nuluje levá strana rovnice (75). Rovnici (75) také můžeme psát výhradně se členy a_s při nějaké vložené škále Q_0^2 :

$$\frac{1}{a_s(Q^2)} = \frac{1}{a_s(Q_0^2)} + \beta_0 \ln \left(\frac{Q^2}{Q_0^2} \right) - \frac{\beta_1}{\beta_0} \ln \left\{ \frac{a_s(Q^2)[\beta_0 + \beta_1 a_s(Q_0^2)]}{a_s(Q_0^2)[\beta_0 + \beta_1 a_s(Q^2)]} \right\} \quad (76)$$

Tyto rovnice se obvykle řeší numericky. Zavedeme-li označení $L = \ln \frac{Q^2}{\Lambda^2}$, pak řešení lze rozvinout do mocninné řady v $1/L$ ve tvaru:

$$a_s = \frac{1}{\beta_0 L} \left(1 - \frac{\beta_1 \ln L}{\beta_0^2 L} \right) + \dots \quad (77)$$

Doposud je evoluční jádro známo do druhého řádu poruchové QCD:

$$P(z, a_s) = a_s P_0(z) + a_s^2 P_1(z) + O(a_s^3) \quad (78)$$

V těchto řádech je funkce β dána takto:

$$\beta(a_s) = -\beta_0 a_s^2 - \beta_1 a_s^3 + O(a_s^4). \quad (79)$$

Použitím rovnic (78) a (79) v rovnici (72) a rozvojem pravé strany v $1/a_s$ máme:

$$\frac{\partial f(z, Q^2)}{\partial a_s} = -\frac{1}{\beta_0 a_s} \left[P_0(z) + a_s \left(P_1(z) - \frac{\beta_1}{\beta_0} P_0(z) \right) \right] f(z, Q^2). \quad (80)$$

Místo toho je možné řešit rovnici (72) přímo, dosazením (78) a (79). Dostáváme:

$$\frac{\partial f(z, Q^2)}{\partial a_s} = -\frac{(P_0(z) + a_s P_1(z))}{a_s(\beta_0 + \beta_1 a_s)} f(z, Q^2) \quad (81)$$

Rovnice (80) a (81) jsou formálně řešeny pomocí takzvaných evolučních operátorů $E(z)$:

$$f(z, Q^2) = E(z, a_s(Q^2), a_s(Q_0^2)) f(z, Q_0^2) \quad (82)$$

Zmíníme ještě jeden tvar rovnice se kterým se dá v rámci této metody úspěšně pracovat. Jednoduše budeme uvažovat vyjádření v proměnné Q^2 , docílíme toho tím, že do rovnice (71) dosadíme s ohledem na (77) vyjádření (78). V tom případě pak pro momenty máme:

$$Q^2 \frac{\partial f(z, Q^2)}{\partial Q^2} = \left(\frac{1}{\beta_0 L} \left(1 - \frac{\beta_1 \ln L}{\beta_0^2 L} \right) P_0(z) + \left(1 - \frac{\beta_1 \ln L}{\beta_0^2 L} \right)^2 P_1(z) \right) f(z, Q^2). \quad (83)$$

I v tomto případě bude tato rovnice formálně řešena evolučním operátorem, který nyní závisí na Q^2 a Q_0^2 :

$$f(z, Q^2) = \hat{E}(z, Q^2, Q_0^2) f(z, Q_0^2) \quad (84)$$

Rovnice pro momenty (80),(81) a (83) jsou řešitelné analyticky. Nyní uvedeme konkrétní tvary evolučních operátorů. Evoluční operátor, který řeší rovnici (80) je pro nesingletní případ dán do druhého řádu v poruchové QCD:

$$E_\eta(z, a_s(Q^2), a_s(Q_0^2)) = \left(\frac{a_s(Q^2)}{a_s(Q_0^2)} \right)^{\frac{\gamma_0(z)}{2\beta_0}} \left[1 + \frac{a_s(Q^2) - a_s(Q_0^2)}{2\beta_0} \left(\gamma_1(z, \eta) - \frac{\beta_1}{\beta_0} \gamma_0(z) \right) \right]. \quad (85)$$

Zde η nabývá dvou hodnot a to podle typu uvažované nesingletní distribuční funkce (existují dva typy nesingletních distribučních funkcí). Ve výrazu vystupují tzv. anomální dimenze $\gamma_0(z)$ a $\gamma_1(z)$, které souvisí s evolučním jádrem: $P_i(z) = -\frac{1}{2}\gamma_i(z)$.

Pro singletní případ platí:

$$E^z(a_s(Q^2), a_s(Q_0^2)) = \left(\frac{a_s(Q^2)}{a_s(Q_0^2)}\right)^{\frac{\alpha_-^z}{2\beta_0}} \left[P_-^z + \frac{a_s(Q^2) - a_s(Q_0^2)}{2\beta_0} P_-^z \gamma^z P_-^z - \left(a_s(Q_0^2) - a_s(Q^2) \right) \left(\frac{a_s(Q^2)}{a_s(Q_0^2)}\right)^{\frac{\alpha_+^z - \alpha_-^z}{2\beta_0}} \frac{P_-^z \gamma^z P_+^z}{2\beta_0 + \lambda_+^z - \lambda_-^z} \right] \quad (86)$$

kde

$$\gamma^z = \gamma_1^z - \frac{\beta_1}{\beta_0} \gamma_0^z, \quad (87)$$

$$\alpha_{\pm}^z = \frac{1}{2} \left(\gamma_{0,qq}^z + \gamma_{0,gg}^z \pm \sqrt{(\gamma_{0,gg}^z - \gamma_{0,qq}^z)^2 + 4\gamma_{0,qg}^z \gamma_{0,gq}^z} \right), \quad (88)$$

$$P_{\pm}^z = \pm \frac{1}{\alpha_{\mp}^z} - \alpha_{\pm}^z (\gamma_0^z - \alpha_{\mp}^z). \quad (89)$$

Evoluční operátor, který řeší rovnici (81) má v nesingletním případě tvar:

$$E_{\eta}^z(a_s(Q^2), a_s(Q_0^2)) = \left(\frac{a_s(Q^2)}{a_s(Q_0^2)}\right)^{\frac{\gamma_0^z}{2\beta_0}} \left(\frac{\beta_0 + \beta_1 a_s(Q^2)}{\beta_0 + \beta_1 a_s(Q_0^2)}\right)^{\frac{\gamma^z(\eta)}{2\beta_1}}. \quad (90)$$

V případě singletních distribučních funkcí není známé řešení v konečném tvaru. V tomto případě řešení zapíšeme pomocí posloupnosti evolučních operátorů, z nichž každý působí pouze v malém intervalu:

$$E_{\eta}^z(a_s(Q^2), a_s(Q_0^2)) = E^z(a^{(n)}, a^{(n-1)}) E^z(a^{(n-1)}, a^{(n-2)}) \dots E^z(a^{(1)}, a^{(0)}), \quad (91)$$

kde $a^{(j)} = a_s(Q_0^2) + (a_s(Q^2) - a_s(Q_0^2)) j/n$. V malém intervalu můžeme evoluční operátor v singletním případě aproximovat:

$$E_{\eta}^z(a_s(Q^2), a_s(Q_0^2)) = \left(\frac{a_s(Q^2)}{a_s(Q_0^2)}\right)^{\frac{\lambda_-^z}{2\beta_0}} \left[P_-^z + \frac{1}{2\beta_1} \ln \left(\frac{\beta_0 + \beta_1 a_s(Q^2)}{\beta_0 + \beta_1 a_s(Q_0^2)} \right) P_-^z \gamma^z P_-^z + \frac{P_-^z \gamma^z P_+^z}{2\beta_0 + \lambda_+^z - \lambda_-^z} \left(a_s(Q^2) \left(\frac{a_s(Q^2)}{a_s(Q_0^2)}\right)^{\frac{\lambda_+^z - \lambda_-^z}{2\beta_0}} F_1 \left(1, 1 + \frac{\lambda_+^z - \lambda_-^z}{2\beta_0}, 2 + \frac{\lambda_+^z - \lambda_-^z}{2\beta_0}, -\frac{\beta_1}{\beta_0} a_s(Q^2) \right) - a_s(Q_0^2) {}_2F_1 \left(1, 1 + \frac{\lambda_+^z - \lambda_-^z}{2\beta_0}, 2 + \frac{\lambda_+^z - \lambda_-^z}{2\beta_0}, -\frac{\beta_1}{\beta_0} a_s(Q^2) \right) \right) \right] \quad (92)$$

Nakonec pro evoluční operátor řešící rovnici (83), máme v nesingletním případě:

$$\begin{aligned} \hat{E}_\eta^z(Q^2, Q_0^2) = & \left(\frac{L_0}{L}\right)^{\frac{\gamma_0^z}{2\beta_0}} \exp \left[-\frac{1}{2\beta_0^2} \left(\frac{1}{L_0} - \frac{1}{L}\right) \left(\gamma_1^z(\eta) - \frac{\beta_1}{\beta_0} \gamma_0^z\right) + \right. \\ & \frac{\beta_1}{2\beta_0^3} \left(\frac{\ln L_0}{L_0} - \frac{\ln L}{L}\right) \gamma_0^z + \frac{\beta_1}{4\beta_0^4} \left(\frac{1+2\ln L_0}{L_0^2} - \frac{1+2\ln L}{L^2}\right) \gamma_1^z(\eta) \\ & \left. - \frac{\beta_1^2}{54\beta_0^6} \left(\frac{2+6\ln L_0+9\ln^2 L_0}{L_0^3} - \frac{2+6\ln L+9\ln^2 L}{L^3}\right) \gamma_1^z(\eta) \right] \end{aligned} \quad (93)$$

kde $L_i = \ln Q_i^2/\Lambda^2$. Podobně jako v (91) je v tomto případě u singletních distribučních funkcí evoluční operátor dán:

$$\hat{E}^z(Q^2, Q_0^2) = \hat{E}^z(Q_{(n)}^2, Q_{(n-1)}^2) \hat{E}^z(Q_{(n-1)}^2, Q_{(n-2)}^2) \dots \hat{E}^z(Q_{(1)}^2, Q_{(0)}^2), \quad (94)$$

kde $Q_{(j)}^2 = Q_0^2 + (Q^2 - Q_0^2)j/n$. V nějakém malém intervalu může být tento operátor aproximován:

$$\begin{aligned} E_\eta^z(Q^2, Q_0^2) = & \left(\frac{L_0}{L}\right)^{\frac{\lambda_-^z}{2\beta_0}} \left\{ P_-^z + P_-^z \left[-\frac{1}{2\beta_0^2} \left(\frac{1}{L_0} - \frac{1}{L}\right) \gamma^z + \frac{\beta_1}{2\beta_0^3} \left(\frac{\ln L_0}{L_0} - \frac{\ln L}{L}\right) \gamma_0^z \right. \right. \\ & \left. \left. + \frac{\beta_1}{4\beta_0^4} \left(\frac{1+2\ln L_0}{L_0^2} - \frac{1+2\ln L}{L^2}\right) \gamma_1^z - \frac{\beta_1^2}{54\beta_0^6} \left(\frac{2+6\ln L_0+9\ln^2 L_0}{L_0^3} - \frac{2+6\ln L+9\ln^2 L}{L^3}\right) \gamma_1^z \right] P_-^z \right. \\ & \left. + P_-^z \gamma_1^z P_+^z \left[-\frac{1}{\beta_0(2\beta_0 + \lambda_+^z - \lambda_-^z)} \left(\frac{1}{L_0} - \frac{1}{L} \left(\frac{L_0}{L}\right)^{\delta^z}\right) + \frac{2\beta_1}{\beta_0^3(4\beta_0 + \lambda_+^z - \lambda_-^z)} \left(\frac{\ln L_0}{L_0^2} - \frac{\ln L}{L^2} \left(\frac{L_0}{L}\right)^{\delta^z}\right) \right. \right. \\ & \left. \left. + \frac{2\beta_1}{\beta_0^2(4\beta_0 + \lambda_+^z - \lambda_-^z)} \left(\frac{1}{L_0^2} - \frac{1}{L^2} \left(\frac{L_0}{L}\right)^{\delta^z}\right) - \frac{\beta_1^2}{\beta_0^5(6\beta_0 + \lambda_+^z - \lambda_-^z)} \left(\frac{\ln^2 L_0}{L_0^3} - \frac{\ln^2 L}{L^3} \left(\frac{L_0}{L}\right)^{\delta^z}\right) \right. \right. \\ & \left. \left. - \frac{2\beta_1^2}{\beta_0^4(6\beta_0 + \lambda_+^z - \lambda_-^z)} \left(\frac{\ln L_0}{L_0^3} - \frac{\ln L}{L^3} \left(\frac{L_0}{L}\right)^{\delta^z}\right) - \frac{2\beta_1^2}{\beta_0^3(6\beta_0 + \lambda_+^z - \lambda_-^z)} \left(\frac{1}{L_0^3} - \frac{1}{L^3} \left(\frac{L_0}{L}\right)^{\delta^z}\right) \right] \right\} \end{aligned} \quad (95)$$

kde $\delta^z = (\lambda_+^z - \lambda_-^z)/2\beta_0$

Nyní bude potřeba zpětně transformovat získané momenty distribučních funkcí a přejít tak k vyjádření distribučních funkcí v proměnných x a Q^2 . Provedeme zpětnou Mellinovu transformaci:

$$f(x, Q^2) = \frac{1}{2\pi i} \int_C dz x^{-z} f^z(Q^2) \quad (96)$$

zde C obíhá všechny singularitu v integrandu. Partonové distribuční funkce jsou při zvolené počáteční škále Q_0^2 parametrizované

$$xf(x, Q_0^2) = \sum_i A_i x^{\alpha_i} (1-x)^{\beta_i} \quad (97)$$

po Mellinově transformaci nabydou tvar:

$$f^z(Q_0^2) = \sum_i A_i B(z + \alpha_i - 1, 1 + \beta_i), \quad (98)$$

kde $B(x, y)$ je Eulerova beta funkce. Vynecháme-li nyní argumenty Q^2 a Q_0^2 stojí před námi úkol vypočítat integrál:

$$I = \operatorname{Re} \frac{1}{\pi i} \int_{C_s} dz E^z F(z) \quad (99)$$

kde

$$F(z) = x^{-z} \sum_i A_i B(z + \alpha_i - 1, 1 + \beta_i), \quad (100)$$

Nejvhodnějším způsobem řešení tohoto problému je vybrat integrační obor tak, že v něm bude možné integrand velmi dobře aproximovat sadou ortogonálních polynomů. Volí se parabolická křivka, plně určená partonovou distribuční funkcí v počáteční škále Q_0^2 . Získaný integrál je pak možné spočítat pomocí Gauss-Laguerrovy metody pro výpočet určitého integrálu. Při této metodě je k dosažení vysoké přesnosti (0,02%) potřeba zhruba čtyři až pět výpočtů integrandu.

Podívejme se blíže na tuto metodu v nesingletním případě. Křivka podél, které probíhá integrace je dána:

$$z(u) = z_0 + ic_2\sqrt{u} + \frac{1}{2}c_2^2c_3u, \quad u = 0, \dots, \infty \quad (101)$$

kde z_0 jsou minima funkce $F(z)$ na reálné ose. Parametry c_2 a c_3 mají tvar:

$$c_2 = \sqrt{\frac{2F'(z_0)}{F''(z_0)}}, \quad c_3 = \frac{F'''(z_0)}{3F''(z_0)}. \quad (102)$$

$F'(z)$, $F''(z)$ a $F'''(z)$ jsou první tři derivace $F(z)$ podle z . S použitou parametrizací (97) jsou tyto derivace dány:

$$F' = \sum_i G'_i F_i \quad (103)$$

$$F'' = \sum_i (G''_i + G_i'^2) F_i \quad (104)$$

$$F''' = \sum_i (G_i'''' + 3G_i''G_i' + G_i'^3) F_i \quad (105)$$

$$(106)$$

kde $F_i = x^{-z} A_i B(z + \alpha_i - 1, 1 + \beta_i)$ a

$$G_i = \ln(x^{-z} B(z + \alpha_i - 1, 1 + \beta_i)), \quad (107)$$

$$G_i' = -\ln x + \Psi(z + \alpha_i - 1) - \Psi(z + \alpha_i + \beta_i), \quad (108)$$

$$G_i'' = \Psi'(z + \alpha_i - 1) - \Psi'(z + \alpha_i + \beta_i), \quad (109)$$

$$G_i''' = \Psi''(z + \alpha_i - 1) - \Psi''(z + \alpha_i + \beta_i), \quad (110)$$

Zde Ψ , Ψ' a Ψ'' jsou polygamní funkce. S touto parametrizací máme pro integrál (99):

$$I = \frac{c_2}{2\pi} \int_0^\infty \frac{du}{\sqrt{u}} e^{-u} \operatorname{Re} \left[e^u (1 - ic_2c_3\sqrt{u}) E^{z(u)} F(z(u)) \right]. \quad (111)$$

Funkce $u^{-1/2}e^{-u}$ jsou vážené funkce Laguerrových polynomů $L_k^{-1/2}(x)$ a integrál můžeme aproximovat pomocí Gauss-Laguerrova vzorce:

$$I \approx \frac{c_2}{2\pi} \sum_{j=1}^k w_j \operatorname{Re} \left[e^{u_j} (1 - ic_2c_3\sqrt{u_j}) E^{z(u_j)} F(z(u_j)) \right]. \quad (112)$$

kde u_j jsou kořeny $L_k^{-1/2}(x)$ a váhy w_j jsou dány:

$$w_j = \frac{\Gamma(n + \frac{1}{2})}{n!(n + 1)^2} \frac{u_j}{\left(L_{k+1}^{-1/2}(u_j)\right)^2}. \quad (113)$$

GeV² získané čtyřmi různými parametrizacemi. Data jsou získána z CERN PDFLIB knihovny distribučních funkcí. První tři jsou nedávno získaná skupinami CTEQ, MRS a GRV. Poslední (čerchovaná křivka) je získaná parametrizací MRS zhruba před deseti lety.

Reference

- [1] Chýla, J.: *Quarks, partons a Quantum Chromodynamics*, Fyzikální ústav AV ČR, 2001
- [2] Weinzierl, S.: *Fast evolution of parton distributions*, Univerzita Parma, 2002
- [3] Botje, M.A.J.: *QCDNUM16: A fast QCD evolution program*, Amsterdam, 1998
- [4] Chýla, J., Rameš J.: *On Methods of Analyzing Scaling Violation in Deep Inelastic Scattering*, Fyzikální ústav AV ČR, 1985
- [5] Edin, A.: *Interplay between Soft and Hard Processes in Quantum Chromodynamics*, Acta Universitatis Upsaliensis, Uppsala, 1998
- [6] Aitchinson, I.G., Hoy, A.J.: *Gauge Theories in Particle Physics*, Bristol, 1982
- [7] Formánek, J.: *Úvod do kvantové teorie pole*, Academia, 1983
- [8] Úlehla, I.: *Atomy, jádra, částice*, Academia, 1990
- [9] Bock, R.K. et al.: *Formulae and Methods in Experimental Data Evaluation*, Vol 1., European Physical Society, 1984
- [10] Bock, R.K. et al.: *Formulae and Methods in Experimental Data Evaluation*, Vol 2., European Physical Society, 1984
- [11] Bock, R.K. et al.: *Formulae and Methods in Experimental Data Evaluation*, Vol 3., European Physical Society, 1984
- [12] Groom, D.E. et al.: *Particle Physics Booklet*, The European Physical Journal **C15**, **2000**

Obsah

1	Úvod	1
1.1	Experimenty částicové fyziky	1
2	Standardní model	1
2.1	Základní interakce	2
2.2	Hluboko nepružný rozptyl	3
2.3	Strukturní funkce	4
2.4	Partonový model	5
3	Evoluční rovnice	6
3.1	Větvící funkce	7
3.2	Momenty strukturních funkcí a sumační pravidla	8
3.3	Vlastnosti distribučních funkcí	9
4	Metody řešení evolučních rovnic	11
4.1	Buras-Gaemers metoda	11
4.2	Metoda Laguerových polynomů	12
4.3	Numerické integrační metody	12
4.3.1	Qcdnum	12
4.4	Metoda Jacobiho polynomů	14
4.5	Mellinova inverzní transformace	15