

České vysoké učení technické v Praze
Fakulta jaderná a fyzikálně inženýrská

Diferenciální disperzní relace a jejich aplikace na
rozptyl hadronů při vysokých energiích

Jan Smotlacha

Katedra fyziky

Akademický rok: 2003/2004

Vedoucí: prof. RNDr. Jan Fischer, DrSc.

Konzultant: RNDr. Pavel Kolář, CSc.

V Praze, 15. ledna 2004

Obsah

1	Úvodní kapitoly	2
1.1	Kinematika binárních srážek	2
1.2	Matice rozptylu a poruchový rozvoj	10
1.3	Problémy dynamiky procesů a disperzní relace	14
1.4	O třídě funkcí, do níž řadíme amplitudu rozptylu	17
2	Diferenciální disperzní relace (DDR)	19
2.1	Praktické a teoretické důvody pro zavedení DDR	19
2.2	Standardní odvození	20
2.3	Základní věty o DDR	27
2.4	Asymptotický charakter DDR	33
2.5	Diskuse a ilustrace na parametrizacích užívaných v praxi	38
2.6	Aktuálnost DDR v souvislosti s připravovanými experimenty	42
3	Závěr	44
	Reference	45

Důležitým prostředkem ke studiu hadronových srážek jsou tzv. disperzní relace, což je integrální vztah mezi reálnou a imaginární částí amplitudy rozptylu. Jsou vlastně vyjádřením analytických vlastností amplitudy rozptylu v komplexní rovině energie nebo jiné kinematické proměnné; při jejich odvození je využito známých nebo předpokládaných informací o rozložení, poloze a povaze singularit amplitudy rozptylu v příslušné komplexní rovině.

Prudký rozvoj techniky urychlovačů a možnost dosažení velmi vysokých srážkových energií obrátil pozornost teoretiků ke studiu disperzních relací v oblasti extrémně vysokých energií a k odvození tzv. asymptotických teorémů, tj. korelací mezi rozptylovými veličinami při limitně vysokých energiích. Ukázalo se také, že v této oblasti lze za určitých předpokladů nahradit standardní disperzní relace vztahem, v němž disperzní integrál je aproximován výrazem obsahujícím jednu nebo více derivací imaginární nebo reálné části amplitudy. Tato práce se zabývá vlastnostmi disperzních relací standardního i diferenciálního typu a podmínek jejich platnosti a praktické použitelnosti.

Text je členěn na tyto části:

První čtyři kapitoly pojednávají o základních pojmech, se kterými budeme v této práci zacházet. V 1.kapitole se seznámíme se zachovávacími se veličinami srážek a počtem nezávislých parametrů, kterými jsou jednotlivé srážky určeny a dále budeme tyto parametry blíže konkretizovat pro binární srážky. V další kapitole si něco řekneme o S -matici a zavedeme pojem amplitudy rozptylu. Ve třetí kapitole si definujeme pojem disperzní relace a ve čtvrté si povíme o vlastnostech amplitud rozptylu.

V 2.části práce nejprve odvodíme tvar diferenciálních disperzních relací se zřetelem na omezující předpoklady, které dosazovaná funkce musí splňovat. Ty pak dále budeme specifikovat a povíme si také něco o limitním tvaru disperzních relací v případě vysokých energií. Na závěr uvedeme některé užívané parametrizace a projekty, ve kterých se s touto problematikou setkáváme.

Zvláštní poděkování patří Janu Fischerovi za vydatnou pomoc při vzniku této práce.

1 Úvodní kapitoly

1.1 Kinematika binárních srážek

Pro hledání a studium vlastností elementárních částic jsou nejpodstatnější 2 základní experimenty:

- rozpad 1 částice na jiné částice, což schematicky zapisujeme

$$a \rightarrow b_1 + b_2 + \dots + b_n$$

- srážka 2 částic za případného vzniku dalších částic; to zapisujeme jako

$$a_1 + a_2 \rightarrow b_1 + b_2 + \dots + b_n,$$

eventuelně (pokud se v koncovém stavu nacházejí i částice stavu počátečního) např.

$$a_1 + a_2 \rightarrow a_1 + a_2 + b_3 + \dots + b_n.$$

Přitom n značí počet částic v koncovém stavu. Je-li v posledním schématu $n = 2$, nazýváme srážku pružnou.

Ve zkoumaných procesech se často musíme oprostít od vžitých představ o reálném světě, získaných na základě každodenní zkušenosti. Za každých okolností zůstává zachováno jen několik nejzákladnějších principů. Mezi tyto principy patří zákony zachování energie, hybnosti, momentu hybnosti a elektrického náboje. Proto jedním z hlavních prostředků užívaných k popisu elementární částice je čtyřvektor energie-hybnosti (čtyřhybnost) $p = (p_0, \vec{p})$, pro jehož složky platí

$$p_0 = \sqrt{\vec{p}^2 + m^2}, \quad (1)$$

kde m je klidová hmotnost dané elementární částice (používáme přirozenou soustavu jednotek, v níž $c = 1$).

Při studiu srážkových procesů mezi elementárními částicemi však bylo zjištěno, že se zachovávají i další, v jiných oborech fyziky nepoužívané veličiny, jako je baryonové a leptonové číslo, podivnost aj. Ty jsou definovány takto: baryonové číslo baryonů [9] je rovno jedné, jejich antičástice ho mají rovno minus jedné a pro ostatní částice je nulové. Obdobně jsou zavedena také leptonová čísla. Podivnost souvisí s tzv. podivnými částicemi, jimiž se zde podrobněji zabývat nebudeme.

V dalším se budeme zabývat takovými procesy, při nichž se srazí 2 částice a vzniknou jiné 2 částice (mohou být i stejné jako částice původní). Takoveto procesy nazýváme binární. Budeme pro jednoduchost předpokládat, že všechny zúčastněné částice mají nulový spin. Mají-li některé částice spin nenulový, je příslušný proces popsán větším počtem amplitud rozptylu (blíže o tomto pojmu - viz následující kapitola).

K popisu binárních srážek je důležité znát 4-hybnosti všech zúčastněných částic. Označíme je postupně $p_1, p_2, -p_3$ a $-p_4$. Podle zákonů zachování energie a hybnosti musí platit

$$p_1 + p_2 + p_3 + p_4 = 0. \quad (2)$$

Označíme-li $p_i = (p_{i0}, \vec{p}_i)$, $i = 1, 2, 3, 4$, tento vztah přejde v

$$p_{10} + p_{20} + p_{30} + p_{40} = 0 \quad (3)$$

a

$$\vec{p}_1 + \vec{p}_2 + \vec{p}_3 + \vec{p}_4 = 0. \quad (4)$$

Hodnoty složek čtyřhybností jsou určeny hodnotami nezávislých parametrů, jejichž počet se mění podle typu srážky, resp. rozpadu, tedy podle počtu a typu výchozích a koncových částic. Vstupují-li do procesu 2 částice a n částic z něho vzejde, pak ve čtyřhybnostech vystupuje celkem $4(n+2)$ složek. Přitom víme, že mezi nimi platí $n+2$ vztahů typu (1). Další vzájemné závislosti jsou dány invariancemi vůči translacím a rotacím, které mohou a nemusí být nezávislé. Za předpokladu, že tomu tak je, potom rozdíl počtu složek čtyřhybností a jejich vzájemných závislostí a invariancí udává počet nezávislých parametrů. Od $4(n+2)$ složek čtyřhybností tedy odečteme tyto položky:

- $n+2$ vztahů mezi energií, hybností a hmotou (vztah (1))
- celkem 4 zákony zachování energie a hybnosti
- invariance vůči translacím podél (3 stupně volnosti)
- invariance vůči rotacím ve třech dimenzích (3 Eulerovy úhly)

Celkem tedy dostáváme $3n-4$ veličin které, jak lze ukázat volbou speciálních systémů souřadnic, jsou pro $n \geq 2$ opravdu nezávislé.

Zavedením vztahů (2),(3) a (4) dostáváme celkem 16 na sobě závislých parametrů. Z předchozího odstavce plyne, že jen 2 z nich jsou nezávislé. Za tyto parametry se obvykle volí některé z následujících veličin:

$$s = (p_1 + p_2)^2 = (p_3 + p_4)^2, \quad (5)$$

$$t = (p_1 + p_3)^2 = (p_2 + p_4)^2 \quad (6)$$

a

$$u = (p_1 + p_4)^2 = (p_2 + p_3)^2. \quad (7)$$

Zjistíme závislost těchto veličin na hybnostech a energiích jednotlivých částic v těžišťové soustavě.

Víme, že v těžišťové soustavě platí

$$\vec{p}_1 + \vec{p}_2 = \vec{p}_3 + \vec{p}_4 = 0, \quad (8)$$

tedy hybnost částic vstupujících do srážky je stejná, ale opačně orientovaná. Ze vztahu (8) lze za použití vztahu (5) snadno odvodit, že s je kvadrát těžišťové energie. Kromě toho pro jednotlivé veličiny vychází

$$s = (p_1 + p_2)^2 = p_1^2 + 2p_1p_2 + p_2^2 = m_1^2 + m_2^2 + 2p_{10}p_{20} + 2\vec{p}_1\vec{p}_2, \quad (9)$$

$$t = (p_1 + p_3)^2 = p_1^2 + 2p_1p_3 + p_3^2 = m_1^2 + m_3^2 + 2p_{10}p_{30} - 2\vec{p}_1\vec{p}_3, \quad (10)$$

a

$$u = (p_1 + p_4)^2 = p_1^2 + 2p_1p_4 + p_4^2 = m_1^2 + m_4^2 + 2p_{10}p_{40} - 2\vec{p}_1\vec{p}_4, \quad (11)$$

kde $m_i, i = 1, 2, 3, 4$ jsou hmotnosti jednotlivých částic. Sečtením těchto veličin a s využitím rovnosti $p_{20} + p_{30} + p_{40} = -p_{10}$ dostáváme

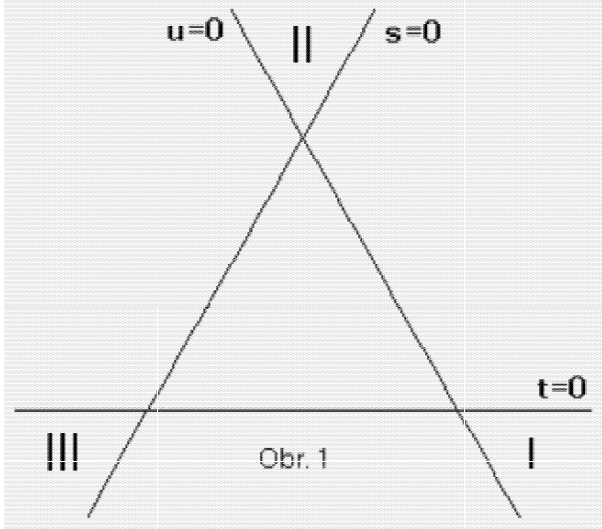
$$s + t + u = 2\vec{p}_1^2 + 3m_1^2 + m_2^2 + m_3^2 + m_4^2 - 2(\vec{p}_1^2 + m_1^2) = \sum_{i=1}^4 m_i^2, \quad (12)$$

tedy součet s, t a u je (až na příslušné jednotky) roven součtu kvadrátů hmotností jednotlivých částic. Veličiny s, t, u jsou, stejně jako jejich součet, kvadráty čtyřvektorů, a jsou tedy relativisticky invariantní. Proto získaný výsledek je platný nejen v těžišťové, ale také v libovolné soustavě.

Vzájemné závislosti parametrů s, t, u lze [8] graficky znázornit v rovině (viz obr. 1), kterou schematicky dělíme mj. na oblasti I, II a III , ve kterých je vždy jeden parametr kladný a ostatní 2 jsou záporné. V oblasti I se hodnoty parametrů nacházejí, pokud je parametr s kladný a ostatní záporné. To odpovídá situaci, kdy počátečnímu stavu přísluší částice 1 a 2 a stavu koncovému částice 3 a 4. Oblasti II odpovídá kladný parametr t a záporné parametry s, u a počátečnímu a koncovému stavu přísluší postupně částice 1,3 a 2,4. V oblasti III , kde je kladný parametr u a parametry s, t jsou záporné, přísluší počátečnímu stavu částice 1, 4 a koncovému stavu přísluší částice 2, 3.

Zaměříme se nyní na oblast I a prostudujeme 2 speciální případy v těžišťovém systému. V prvním z nich předpokládáme, že všechny 4 částice mají stejnou hmotnost μ . Zákon zachování energie potom dává

$$2\sqrt{\vec{p}_1^2 + \mu^2} - 2\sqrt{\vec{p}_3^2 + \mu^2} = 0. \quad (13)$$



Odtud dostáváme, že platí $|\vec{p}_1| = |\vec{p}_3| = |\vec{p}|$. Z výše odvozených vztahů pro jednotlivé parametry pak celkem snadno dostáváme

$$s = 4(\vec{p}^2 + \mu^2), \quad (14)$$

$$t = -2\vec{p}^2(1 - \cos \vartheta) \quad (15)$$

a

$$u = -2\vec{p}^2(1 + \cos \vartheta), \quad (16)$$

kde ϑ je úhel, který svírají vektory $\vec{p}_1$ a $\vec{p}_3$.

Ve druhém případě předpokládáme, že platí $m_1 = m_3 = M$ a $m_2 = m_4 = m$. Pak ze zákona zachování energie dostaneme

$$\sqrt{\vec{p}_1^2 + M^2} + \sqrt{\vec{p}_1^2 + m^2} = \sqrt{\vec{p}_3^2 + M^2} + \sqrt{\vec{p}_3^2 + m^2}. \quad (17)$$

Na obou stranách rovnice tak máme výrazy, které jsou ryze monotónní, a proto je splněna pouze v případě, kdy $|\vec{p}_1| = |\vec{p}_3| = |\vec{p}|$. Za předpokladu, že ϑ opět značí úhel mezi vektory $\vec{p}_1$ a $\vec{p}_3$, pro parametry s, t, u dostáváme

$$s = m^2 + M^2 + 2\sqrt{\vec{p}^2 + m^2}\sqrt{\vec{p}^2 + M^2} + 2\vec{p}^2, \quad (18)$$

$$t = -2\vec{p}^2(1 - \cos \vartheta) \quad (19)$$

a

$$u = m^2 + M^2 - 2\sqrt{\vec{p}^2 + m^2}\sqrt{\vec{p}^2 + M^2} - 2\vec{p}^2 \cos \vartheta. \quad (20)$$

Pro oblasti *II* a *III* lze také studovat přesné tvary jednotlivých parametrů. Blíže je odvozovat nebudeme, jen poznamenejme, že pro případ stejných hmotností pro všechny částice dostaneme stejné výsledky jako v oblasti *I*, ale v jiném pořadí pro jednotlivé parametry.

Pro dané vzájemné poměry hmotností jednotlivých částic jsou fyzikální jen některé oblasti roviny. K jejich nalezení je užitečné znát vztah, jehož důkaz zde uvádět nebudeme:

Označíme-li $h = s + t + u$, potom platí nerovnost

$$stu \geq as + bt + cu, \quad (21)$$

kde

$$ah = (m_1^2 m_2^2 - m_3^2 m_4^2)(m_1^2 + m_2^2 - m_3^2 - m_4^2), \quad (22)$$

$$bh = (m_1^2 m_3^2 - m_2^2 m_4^2)(m_1^2 + m_3^2 - m_2^2 - m_4^2) \quad (23)$$

a

$$ch = (m_1^2 m_4^2 - m_2^2 m_3^2)(m_1^2 + m_4^2 - m_2^2 - m_3^2). \quad (24)$$

Pro zjednodušení budeme zkoumat jen speciální případy, kdy některé z hmotností jednotlivých částic si jsou rovny.

Jeden takový případ nastává např. tehdy, když platí

$$m_1 = m_3 = M \text{ a } m_2 = m_4 = m, \quad (25)$$

kde $M > m$. Pak po dosazení do (22), (23) a (24) dostaneme

$$h = 2(M^2 + m^2), a = c = 0 \text{ a } b = (M^2 - m^2)^2, \quad (26)$$

a musí platit

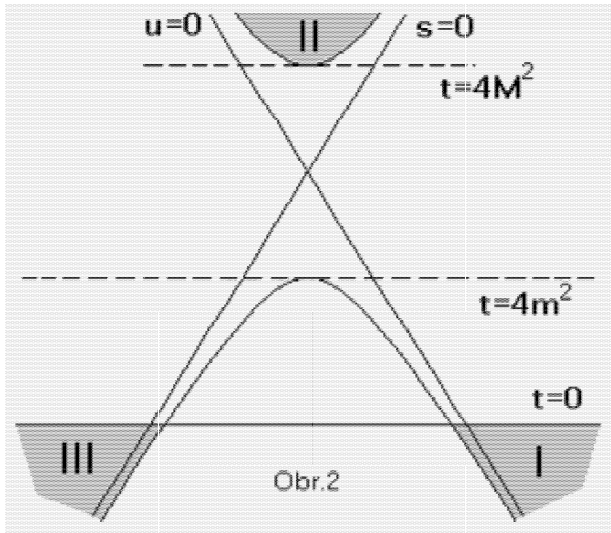
$$stu \geq (M^2 - m^2)^2 t. \quad (27)$$

Tato nerovnost je automaticky splněna, pokud $t = 0$. Jinak musíme odlišit případy

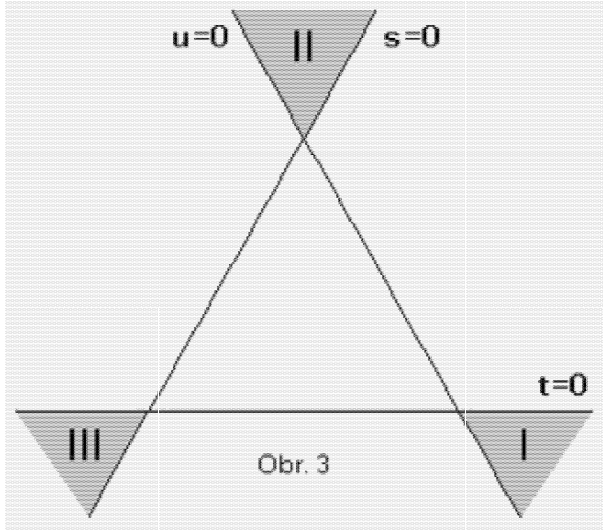
$$t > 0, su > (M^2 - m^2)^2 \text{ a } t < 0, su < (M^2 - m^2)^2. \quad (28)$$

Fyzikální hodnoty parametrů s, t, u pak leží v oblastech roviny ohraničených křivkami, které odpovídají rovnicím

$$t = 0 \text{ a } su = (M^2 - m^2)^2 \quad (29)$$



(viz obr. 2). Pokud navíc bude platit $M = m$, dostaneme $stu \geq 0$ a oblasti fyzikálních hodnot budou odpovídat oblastem vyznačeným na obr. 3.



V případě, že

$$m_1 = M \text{ a } m_2 = m_3 = m_4 = m \quad (30)$$

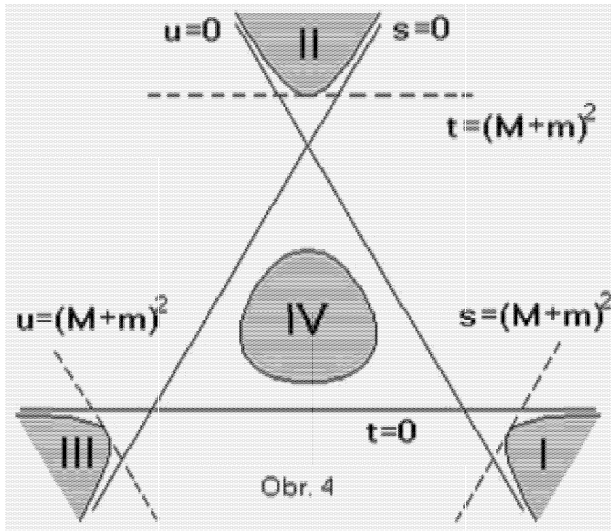
a zároveň

$$M > 3m, \quad (31)$$

pak dostáváme z formulí (22)-(24) vztah

$$stu \geq m^2(M^2 - m^2)^2. \quad (32)$$

Fyzikální hodnoty pak leží ve vyznačených oblastech na obr. 4.



Oblasti *IV*, kde jsou všechny 3 parametry s, t a u kladné, odpovídá rozpad částice s hmotností M . Takováto oblast hodnot je obecně přípustná jen tehdy, pokud je jedna z hmotností m_1 až m_4 větší než součet ostatních hmotností.

V oblastech přípustných hodnot parametrů rozlišujeme 2 zvláštní případy, a to $t = 0$ a $u = 0$. První z nich nazýváme rozptyl vpřed, druhý nazýváme rozptyl vzad.

Zajímavá je závislost kvadrátu těžiškové energie s na energii E nalétávající částice v laboratorní soustavě. Lze dokázat, že je lineární. Platí totiž (po dosazení $p_{10} = E$)

$$\begin{aligned} s &= (p_1 + p_2)^2 = (p_{10} + p_{20})^2 - (\vec{p}_1 + \vec{p}_2)^2 = (E + m_2)^2 - \vec{p}_1^2 = \\ &= (E + m_2)^2 - (E^2 - m_1^2) = 2m_2E + m_1^2 + m_2^2. \end{aligned} \quad (33)$$

Binární srážky lze uskutečňovat dvojím způsobem: buď jako srážky svazků příslušných částic letících proti sobě nebo jako srážku jedné z částic s nehybným terčem, tvořeným druhou částicí. Většinou se volí první způsob [9]. Při takto pojatém experimentu totiž docílíme s vynaložením podstatně menší energie stejných efektů jako při druhém způsobu (viz tabulka). V důkazu této pozoruhodné skutečnosti vycházíme z právě odvozeného vztahu (33), z něhož po dosazení klidové hmoty protonu $M = m_1 = m_2 \doteq 0.938 \text{ GeV}$ dostaneme

$$s = 2M(E + M), \quad (34)$$

kde E je energie protonu, jejíž hodnoty jsou uvedeny v pravém sloupci tabulky, a z invariance parametru s . Označíme-li hodnoty energie z levého sloupce tabulky symbolem W , můžeme psát

$$s = 2M(E + M) = 4W^2. \quad (35)$$

Energie jednoho z protonů letících proti sobě	Odpovídající energie protonu kolidujícího s nehybným terčem
5 GeV	52 GeV
10 GeV	212 GeV
20 GeV	852 GeV
30 GeV	1918 GeV
50 GeV	5330 GeV
100 GeV	21321 GeV
200 GeV	85287 GeV
500 GeV	533048 GeV
1000 GeV	2132195 GeV

1.2 Matice rozptylu a poruchový rozvoj

V kvantové teorii je časový vývoj systému popsán evolučním operátorem, který splňuje příslušnou pohybovou rovnici. Časové změny jsou určeny hamiltoniánem soustavy H a lze je popsat buď cele časovým vývojem vlnové funkce $|\psi_S(t)\rangle$

$$i\frac{\partial}{\partial t}|\psi_S(t)\rangle = H|\psi_S(t)\rangle \quad (36)$$

(tzv. Schrödingerův obraz), nebo cele časovým vývojem příslušného operátoru (tzv. Heisenbergův obraz), kdy pozorovatelné v Heisenbergově (A_H) a Schrödingerově (A_S) reprezentaci spolu souvisí vztahem

$$A_H(t) = e^{iHt} A_S e^{-iHt}. \quad (37)$$

Časové změny lze popsat také nějakým kombinovaným způsobem, kdy část H_1 hamiltoniánu H ,

$$H = H_1 + H_2, \quad (38)$$

popisuje časovou změnu operátoru, a část H_2 časovou změnu vlnové funkce. V případě, že člen H_1 je hamiltonián volných polí a člen H_2 popisuje jejich interakci, $H_2 = H_{\text{int}}$ (přičemž H_{int} lze chápat jako korekci k H_1), nazývá se třetí způsob Diracovým obrazem [10]. Člen H_1 je považován za "velký" vůči H_{int} , ale jednoduchý v tom smyslu, že jeho řešení je známo. Mezi pozorovatelnými Diracovy a Schrödingerovy reprezentace platí vztah

$$A_D(t) = e^{iH_1 t} A_S e^{-iH_1 t} \quad (39)$$

a pro stavy Diracovy a Heisenbergovy reprezentace platí

$$|\psi_D(t)\rangle = e^{-iH_{\text{int}} t} |\psi_H\rangle. \quad (40)$$

Platí pak

$$i\frac{\partial}{\partial t}|\psi_D(t)\rangle = H_{\text{int}}|\psi_D(t)\rangle. \quad (41)$$

V dalším budeme používat Diracovu reprezentaci, ve které budeme psát $|\psi(t)\rangle$ místo $|\psi_D(t)\rangle$.

Evoluční operátor U , který je pro částici, která se v čase t_0 nalézá ve stavu $|\psi(t_0)\rangle$, dán vztahem

$$|\psi(t)\rangle = U(t, t_0)|\psi(t_0)\rangle. \quad (42)$$

Tento operátor je unitární, tzn. splňuje podmínku

$$U^\dagger U = I, \quad (43)$$

kde $U^\dagger$ je operátor hermitovsky sdružený k operátoru U . Dosazením do příslušné diferenciální rovnice dostáváme, že musí platit

$$\frac{\partial}{\partial t}U(t, t_0) = H_{\text{int}}(t)U(t, t_0). \quad (44)$$

Integrací (44) dostáváme

$$U(t, t_0) = I - i \int_{t_0}^t dt' H_{\text{int}}(t')U(t', t_0). \quad (45)$$

Dalšími integracemi obdržíme postupně nekonečnou řadu ve tvaru poruchového rozvoje

$$\begin{aligned} U(t, t_0) = & I - i \int_{t_0}^t dt_1 H_{\text{int}}(t_1) + (-i)^2 \int_{t_0}^t dt_1 \int_{t_0}^{t_1} dt_2 H_{\text{int}}(t_1) H_{\text{int}}(t_2) + \dots \\ & \dots + (-i)^n \int_{t_0}^t dt_1 \int_{t_0}^{t_1} dt_2 \dots \int_{t_0}^{t_{n-1}} dt_n H_{\text{int}}(t_1) \cdot \dots \cdot H_{\text{int}}(t_n) + \dots \end{aligned} \quad (46)$$

Přitom předpokládáme, že n -tý člen tohoto rozvoje, tedy člen tvaru

$$(-i)^n \int_{t_0}^t dt_1 \int_{t_0}^{t_1} dt_2 \dots \int_{t_0}^{t_{n-1}} dt_n H_{\text{int}}(t_1) \cdot \dots \cdot H_{\text{int}}(t_n)$$

se limitně blíží nule. K témuž výsledku se lze dopracovat iteračním postupem, kdy ve vztahu (45) na pravé straně nejdříve dosadíme za U jednotkovou matici, a poté vždy levou stranu téhož vztahu.

Položíme-li $t_0 = -\infty$ a $t = +\infty$ a označíme

$$U(+\infty, -\infty) \equiv S, \quad (47)$$

dostáváme matici rozptylu, neboli S -matici. Počáteční stav částice, tj. stav v čase $t_0 = -\infty$ formálně označíme $|i\rangle$ a $|f\rangle$ bude jeden z jejích koncových stavů v čase $t = +\infty$. Koeficienty S -matice pak mají tvar

$$S_{\text{fi}} = \langle f | S | i \rangle \quad (48)$$

a výrazy $|S_{\text{fi}}|^2$ určují pravděpodobnosti přechodů ze stavů $|i\rangle$ do stavů $|f\rangle$.

Srážce částic, mezi kterými nepůsobí žádná interakce, odpovídá jednotková S -matice, tedy $S_{\text{fi}} = \delta_{\text{fi}}$. Koeficienty obecné S -matice mají potom v prvním řádu rozvoje tvar

$$S_{\text{fi}}^{(1)} = \delta_{\text{fi}} + i(2\pi)^4 \delta^{(4)}(P_{\text{f}} - P_{\text{i}}) T_{\text{fi}}. \quad (49)$$

4-rozměrná δ -funkce v tomto výrazu vyjadřuje zákon zachování čtyřhybnosti (P_i a P_f dávají součty čtyřhybností všech částic příslušných daným stavům). Koeficienty T_{fi} matice T nazýváme amplitudy rozptylu [8].

Amplitudy rozptylu lze použít k výpočtu měřitelných veličin, pravděpodobnosti přechodu a účinných průřezů.

Pro výpočet pravděpodobnosti přechodu je důležité znát přibližné (formální) vyjádření $\delta^{(4)}$ -funkce:

$$\delta^{(4)}(P_f - P_i) = \frac{1}{(2\pi)^4} \int e^{i(P_f - P_i)x} d^4x. \quad (50)$$

Platí zákony zachování energie a hybnosti, tedy $P_f = P_i$ a integrací pro konečný objem a konečný časový interval dostáváme

$$\delta^{(4)}(P_f - P_i) = \frac{Vt}{(2\pi)^4}. \quad (51)$$

Pak pro nediagonální koeficienty platí

$$|S_{fi}^{(1)}|^2 = (2\pi)^4 \delta^{(4)}(P_f - P_i) |T_{fi}|^2 Vt, \quad (52)$$

což pro jednotkový čas ($t = 1$) přepíšeme na tvar

$$w_{i \rightarrow f} = (2\pi)^4 \delta^{(4)}(P_f - P_i) |T_{fi}|^2 V. \quad (53)$$

Na element fázového prostoru $\prod_{\alpha} d^3 p'_{\alpha}$, kde α probíhá přes všechny částice v koncovém stavu a p'_{α} jsou jejich 4-hybnosti, připadá $\prod_{\alpha} \frac{V d^3 p'_{\alpha}}{(2\pi)^3}$ možných stavů. To vyplývá z toho, že pro složku hybnosti p'_{α} a konečný objem $V = L^3$ platí rovnost $L p'_{\alpha} = 2\pi n_{\alpha}$, kde n_{α} je počet přípustných stavů. Pro nekonečně malý fázový objem tedy získáme odvozený tvar.

Element pravděpodobnosti pak bude

$$dw = (2\pi)^4 \delta^{(4)}(P_f - P_i) |T_{fi}|^2 V \prod_{\alpha} \frac{V d^3 p'_{\alpha}}{(2\pi)^3}, \quad (54)$$

a pro 2-částicovou srážku, při které vzniknou jiné 2 částice, dostaneme

$$dw = \frac{V^3}{4\pi^2} \delta^{(4)}(P_f - P_i) |T_{fi}|^2 d^3 p'_3 d^3 p'_4. \quad (55)$$

Z elementu pravděpodobnosti je možno spočítat diferenciální účinný průřez, neboť účinný průřez je definován jako podíl počtu částic uskutečňujících daný typ srážky, dělený hustotou toku všech částic. Počet částic je úměrný pravděpodobnosti

přechodu. Hustota toku částic je úměrná proudové hustotě j , kterou v těžiškové soustavě spočteme (v případě srážky 2 částic) ze vzorce

$$j = \frac{|\vec{p}|}{V} \left(\frac{1}{\epsilon_1} + \frac{1}{\epsilon_2} \right), \quad (56)$$

kde $|\vec{p}| = |\vec{p}_1| = |\vec{p}_2|$ je velikost hybnosti obou částic a ϵ_1 a ϵ_2 jsou jejich energie. Pro diferenciální účinný průřez $d\sigma$ pak bude platit

$$d\sigma = \frac{dw}{j} \quad (57)$$

a po dosazení

$$d\sigma = \frac{V^4}{4\pi^2 |\vec{p}|} \delta^{(4)}(P_f - P_i) |T_{fi}|^2 \frac{\epsilon_1 \epsilon_2}{(\epsilon_1 + \epsilon_2)} d^3 p'_3 d^3 p'_4. \quad (58)$$

V případě rozpadu 1 částice na částice se čtyřhybnostmi p'_α v elementu fázového prostoru $\prod_\alpha d^3 p'_\alpha$ bude mít element pravděpodobnosti opět tvar (54), který v případě rozpadu na 2 částice přejde na tvar (55) s pozměněnými indexy u 4-hybností

$$dw = \frac{V^3}{4\pi^2} \delta^{(4)}(P_f - P_i) |T_{fi}|^2 d^3 p'_1 d^3 p'_2. \quad (59)$$

Kromě diferenciálního účinného průřezu lze také z koeficientů matice T spočítat totální účinný průřez σ_{tot} . K němu dospějeme tímto postupem:

Z unitarity operátoru U plyne také unitarita operátoru S , a proto

$$S^\dagger S = I. \quad (60)$$

Potom platí

$$\sum_n (\delta_{nf} - i(2\pi)^4 \delta^{(4)}(P_n - P_f) T_{nf}^*) (\delta_{ni} + i(2\pi)^4 \delta^{(4)}(P_n - P_i) T_{ni}) = \delta_{fi}, \quad (61)$$

kde index n probíhá přes všechny možné stavy. Podotkněme, že zápis $\sum_n$ je zde pouze symbolický, protože zahrnuje také integraci přes všechny možné hybnosti a násobení příslušnými konstantami. Ze vztahu (61) plyne

$$T_{fi} - T_{if}^* = i(2\pi)^4 \sum_n \delta^{(4)}(P_f - P_n) T_{fn} T_{in}^*. \quad (62)$$

Pro imaginární části koeficientů T_{ii} (pružný rozptyl vpřed) tak dostáváme

$$2\text{Im } T_{ii} = (2\pi)^4 \sum_n |T_{in}|^2 \delta^{(4)}(P_i - P_n). \quad (63)$$

Pravá strana rovnice je vlastně zintegrovaný vztah pro diferenciální účinný průřez. Totální účinný průřez σ_{tot} je definován obdobně, takže toto vynásobíme výrazem $\frac{V}{j}$ a dostáváme

$$\sigma_{\text{tot}} = \frac{(2\pi)^4 V}{j} \sum_n |T_{\text{in}}|^2 \delta^{(4)}(P_i - P_n) = \frac{2V}{j} \text{Im } T_{\text{ii}}. \quad (64)$$

Tomuto vztahu říkáme také optický teorém. Jeho důležitost spočívá především v tom, že dává do souvislosti 2 nezávisle měřitelné veličiny.

1.3 Problémy dynamiky procesů a disperzní relace

Důležitým úkolem fyziky elementárních částic je najít způsob, jak popsat všechny druhy silového působení z hlediska jednotné teorie. V současné době pozorujeme 4 druhy interakcí: silnou, slabou, elektromagnetickou a gravitační [9]. V souladu s principem kalibrační invariance by se všechny tyto interakce měly uskutečňovat prostřednictvím tzv. zprostředkujících částic, charakteristických pro jednotlivé typy interakcí. Existence těchto částic je potvrzena pro první 3 typy interakcí, graviton (zprostředkující částice gravitační interakce) nebyl dosud úspěšně prokázán. Zatím se podařilo sjednotit slabou a elektromagnetickou interakci do jediné teorie tzv. elektroslabé interakce (Weinberg, Salam, 1967-68, potvrzeno 1983). Úspěšně je na kalibračním principu budována i teorie silných interakcí (kvantová chromodynamika).

V současné době se úspěšně pracuje na ověřování standardního modelu - jednotné teorie silné, slabé a elektroslabé interakce. Ta pro případ elektroslabých interakcí vyžaduje existenci Higgsovy částice, která ale dosud nebyla experimentálně prokázána. Opírá se také o existenci kvarků, tj. částic, ze kterých se skládají všechny hadrony (částice citlivé na silnou interakci). Tyto částice byly teoreticky předpovězeny v 60. letech (M. Gell-Mann, Georg Zweig, 1963) a jejich existence byla zatím prokázána pouze nepřímo, nepodařilo se totiž dosud z žádného hadronu vytěsnit jediný kvark. To je mj. důsledkem neobvyklého charakteru přitažlivých sil mezi kvarky - rostou se zvyšující se vzdáleností. Na druhou stranu experimenty ukazují, že např. do hloubky ostřelovaný proton se chová jako složený ze 3 bodových částic, interpretovatelných jako kvarky.

Tzv. teorie supersymetrie předpokládá symetrii mezi počtem kvarků a leptonů (částic netečných k silné interakci, tj. elektronů, mionů, tauonů a k nim příslušných neutrin). Potom by byly možné přeměny kvarků na leptony a naopak, což by umožňovalo existenci procesů, při nichž by byly narušeny zákony zachování leptonového a baryonového čísla, např. rozpady

$$p \rightarrow e^+ + \pi$$

$$p \rightarrow \bar{\nu} + \pi.$$

Takovéto procesy jsou možné za předpokladu, že ani proton není stabilní částice, ale částice s velmi vysokým poločasem rozpadu - řádově 10^{30} let. Zatím však žádný rozpad tohoto typu nebyl pozorován.

K praktickým projevům účinných průřezů a rozpadových veličin se většinou používají poruchové řady typu (46), které u procesů s elektromagnetickou nebo slabou interakcí vedou již v nejnižších řádech k souhlasu s experimentem na mnoho desetinných míst. V případě silných interakcí však již první korekční členy mají velké hodnoty a řady nejen divergují, ale ani numericky nejví známky konvergence.

Amplitudu rozptylu lze definovat jako komplexní funkci energie srážky v komplexní rovině energie, např. při pevné hodnotě úhlu rozptylu nebo přenosu hybnosti. Vztahy mezi její reálnou a imaginární částí (které jsou měřitelné) lze studovat pomocí tzv. disperzních relací [11], založených na Cauchyho integrální větě. Jak už ale bylo řečeno, je k tomu nutné znát informace o singularitách. Jinak jsou zapotřebí některé další předpoklady.

Podle Cauchyho integrálního vzorce platného pro holomorfní funkce platí

$$F(z) = \frac{1}{2\pi i} \int_{\varphi} \frac{F(z')}{z' - z} dz', \quad (65)$$

kde $F(z)$ je daná holomorfní funkce a φ je nějaká uzavřená křivka v Gaussově rovině, v jejímž vnitřku se číslo z nalézá. Vzorec můžeme přepsat jako

$$\operatorname{Re} F(z) + i \operatorname{Im} F(z) = \frac{-i}{2\pi} \int_{\varphi} \frac{\operatorname{Re} F(z') + i \operatorname{Im} F(z')}{z' - z} dz', \quad (66)$$

což pro reálné hodnoty z přejde na tvar

$$\begin{aligned} \operatorname{Re} F(z) + i \operatorname{Im} F(z) &= \frac{-i}{2\pi} \cdot 2P \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\operatorname{Re} F(z') + i \operatorname{Im} F(z')}{z' - z} dz' = \\ &= \frac{1}{\pi} P \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\operatorname{Im} F(z') - i \operatorname{Re} F(z')}{z' - z} dz', \end{aligned} \quad (67)$$

kde P značí hlavní hodnotu integrálu.¹ Položíme-li $z = x$, můžeme psát

$$\operatorname{Re} F(x) = \frac{1}{\pi} P \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\operatorname{Im} F(x')}{x' - x} dx', \quad \operatorname{Im} F(x) = -\frac{1}{\pi} P \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\operatorname{Re} F(x')}{x' - x} dx'. \quad (68)$$

¹Hlavní hodnota integrálu $\int_a^b \varphi(z) dz$ je definována takto: nachází-li se z_0 na reálné ose, pak $P \int_a^b \varphi(z) dz = \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \left(\int_a^{z_0 - \varepsilon} \varphi(z) dz + \int_{z_0 + \varepsilon}^b \varphi(z) dz \right)$. V dalším budeme často značení hlavní hodnoty vynechávat, ale budeme mít na mysli stále výraz téhož typu.

Předpokládáme-li, že platí

$$\operatorname{Re} F(-x) = \operatorname{Re} F(x) \quad (69)$$

a

$$\operatorname{Im} F(-x) = -\operatorname{Im} F(x) \quad (70)$$

(viz vlastnost **(ii)** symetrických amplitud v následující kapitole), můžeme dále psát

$$\begin{aligned} \operatorname{Re} F(x) &= \frac{1}{\pi} \mathcal{P} \int_0^{+\infty} \frac{\operatorname{Im} F(x')}{x' - x} dx' + \frac{1}{\pi} \mathcal{P} \int_{-\infty}^0 \frac{\operatorname{Im} F(x')}{x' - x} dx' = \frac{1}{\pi} \mathcal{P} \int_0^{+\infty} \frac{\operatorname{Im} F(x')}{x' - x} dx' + \\ &\quad - \frac{1}{\pi} \mathcal{P} \int_0^{+\infty} \frac{\operatorname{Im} F(x')}{x' - x} dx' = \frac{1}{\pi} \mathcal{P} \int_0^{+\infty} \frac{\operatorname{Im} F(x')}{x' - x} dx' + \frac{1}{\pi} \mathcal{P} \int_0^{+\infty} \frac{\operatorname{Im} F(-x')}{-x' - x} dx' = \\ &= \frac{1}{\pi} \mathcal{P} \int_0^{+\infty} \operatorname{Im} F(x') \left(\frac{1}{x' - x} - \frac{1}{-x' - x} \right) dx' = \frac{2}{\pi} \mathcal{P} \int_0^{+\infty} \operatorname{Im} F(x') \frac{x'}{x'^2 - x^2} dx'. \end{aligned} \quad (71)$$

Pro konvergenci integrálu v posledním výrazu je nutné (ale nikoli postačující!), aby platilo

$$\lim_{x' \rightarrow \infty} \operatorname{Im} F(x') = 0. \quad (72)$$

Tuto podmínku lze zeslabit, dosadíme-li místo $F(x)$ výraz $F(x) - F(x_0)$ pro nějaké konkrétní x_0 , tzv. subtrakcí. K tomu je zapotřebí, abychom znali reálnou i imaginární část funkce $F(x)$ v bodě x_0 . Pak můžeme psát

$$\begin{aligned} \operatorname{Re} F(x) - \operatorname{Re} F(x_0) &= \frac{2}{\pi} \int_0^{+\infty} x' \operatorname{Im} F(x') \left(\frac{1}{x'^2 - x^2} - \frac{1}{x'^2 - x_0^2} \right) dx' = \\ &= \frac{2(x^2 - x_0^2)}{\pi} \int_0^{+\infty} \frac{x' \operatorname{Im} F(x')}{(x'^2 - x^2)(x'^2 - x_0^2)} dx'. \end{aligned} \quad (73)$$

Aby konvergoval tento výraz, musí mj. platit

$$\lim_{x' \rightarrow \infty} \frac{\operatorname{Im} F(x')}{x'^2} = 0, \quad (74)$$

tedy je zapotřebí slabší podmínka než v předešlém případě.

Binární srážka (a tedy i příslušná amplituda rozptylu) je, jak bylo odvozeno ve 2.kapitole, závislá na 2 kinematických proměnných, za které můžeme vzít s a t . Položíme-li $x = s$ a t ponecháme pevné, bude vztah (73) tzv. disperzní relací v proměnné s při pevném t , tj. vztahem mezi reálnou a imaginární částí symetrické (viz následující kapitola) amplitudy rozptylu. V další kapitole podrobněji prostudujeme vlastnosti funkcí splňujících požadavky kladené na amplitudy rozptylu.

1.4 O třídě funkcí, do níž řadíme amplitudu rozptylu

Podívejme se, jaké matematické vlastnosti má funkce $F(s, t)$ představující amplitudu rozptylu jako funkci s při pevném t . Funkce, které mohou být vhodnými kandidáty na amplitudy rozptylu, musí vyhovovat jistým podmínkám. Rozlišujeme podmínky pro tzv. křížově symetrické a antisymetrické amplitudy rozptylu. Ty jsou definovány tímto způsobem:

Označíme $F_{\pm}(s, t)$ amplitudu rozptylu způsobeného dopadem příslušné konkrétní částice (index "+"), resp. antičástice (index "-") na tentýž terčik, přitom s a t jsou parametry, o kterých jsme mluvili v 2.kapitole. Takto potom můžeme dále definovat sudou a lichou amplitudu rozptylu $F_S(s, t)$ a $F_A(s, t)$, pro které platí

$$F_S(s, t) = \frac{F_+(s, t) + F_-(s, t)}{2} \quad (75)$$

a

$$F_A(s, t) = \frac{F_-(s, t) - F_+(s, t)}{2}. \quad (76)$$

Zaměříme se na ty první. Třídu funkcí, které lze dosadit za symetrické amplitudy rozptylu, označujeme $\mathcal{F}$.

Dříve, než se začneme zabývat jejich vlastnostmi, si ujasníme značení. V dalším položíme proměnnou t rovnou pevné hodnotě t_0 a budeme zkoumat vlastnosti amplitud rozptylu v závislosti na jediné proměnné s . Formálně tedy píšeme $F(s, t = t_0) = F(s)$. Závislost parametru s na parametru E je však lineární (viz kapitola 2.), a proto se často užívá zápis $F(E)$ místo $F(s)$.

Funkce třídy $\mathcal{F}$ jakožto funkce komplexní proměnné splňují 7 základních předpokladů [3]:

(i)

$$(\exists K_1 \geq 0)(F_S(z) \text{ je holomorfní v } D_{K_1} \equiv \{z \mid |z| > K_1, \text{Im } z > 0\})$$

(ii)

$$F_S(z) = \overline{F_S(-\bar{z})} (\forall z \in D_{K_1})$$

(iii)

$$F_S(z) \text{ je spojitá v } \overline{D_{K_1}} \text{ (s možnou výjimkou v bodě } z = \infty).$$

(iv)

$$F_S(z) \text{ je polynomiálně omezena v } D_{K_1} \text{ pro } z \rightarrow \infty.$$

(v)

$$\exists C, K_2 > 0 : |F_S(E)/(E \ln^2 E)| \leq C \text{ pro každé } E \in \mathcal{R}, E > K_2.$$

(vi)

$$\operatorname{Im} F_S(E) \geq 0 \text{ pro každé } E \in \mathcal{R}, E > K_3 > 0.$$

(vii)

$$\int_{K_4}^{\infty} \frac{\operatorname{Im} F_S(E)}{E} dE > \frac{1}{2} \int_0^{\pi} \operatorname{Re} F_S(K_4 e^{i\varphi}) d\varphi \text{ pro nějaké } K_4 > K_1.$$

Požadavek (v) někdy nahrazujeme slabším požadavkem (v'):

$$\lim_{E \rightarrow \infty} F_S(E)/E^2 = 0.$$

Třídu funkcí, kde je požadavek (v) nahrazen požadavkem (v'), označujeme $\mathcal{F}'$: $\mathcal{F} \subset \mathcal{F}'$.

Vlastnosti (i)-(vii) tvoří základ axiomatické teorie. Některé z nich mají svůj původ v obecných fyzikálních vlastnostech rozptylu (např. (i), (ii) a (v)), jiné (jako např. spojitost (iii), omezenost (iv)) jsou voleny spíše za účelem zjednodušení výpočtů.

Nyní si definujeme dva symboly, se kterými se v dalším textu budeme často setkávat. Jedná se o symboly $\rho_S(E)$ a $\sigma_S(E)$ a jsou definovány těmito vztahy:

$$\rho_S(E) = \frac{\operatorname{Re} F_S(E)}{\operatorname{Im} F_S(E)}, \quad \sigma_S(E) = \frac{\operatorname{Im} F_S(E)}{E}.$$

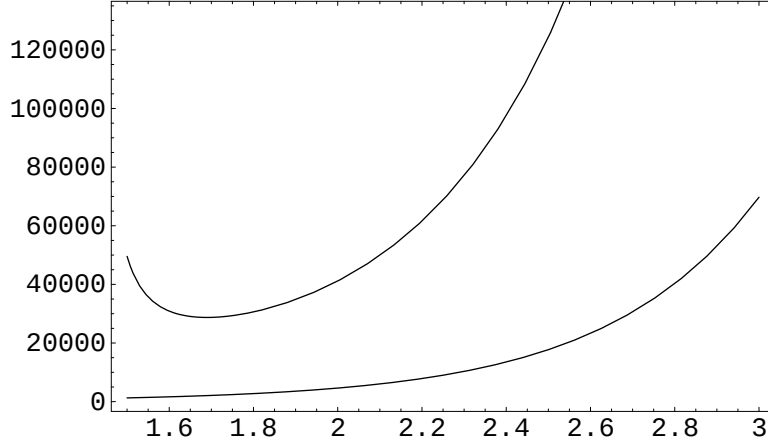
Druhý z nich má tedy fyzikální význam účinného průřezu srážky, jak plyne ze vztahu (64).

2 Diferenciální disperzní relace (DDR)

Důležitou pomůckou používanou při výpočtu reálné části amplitudy rozptylu jsou diferenciální disperzní relace [1]. Ty lze odvodit z integrální disperzní relace. Odvození se skládá z dlouhé řady elementárních, ale poměrně pracných kroků, které Bronzan et al. explicitně neuvádějí. Také se nezabývají otázkou, jaké podmínky má splňovat amplituda rozptylu, aby odvození bylo platné. Eichmann a Dronkers však dokázali [2], že je platné pouze za značně omezujících podmínek (mj. že amplituda musí být celistvou funkcí logaritmu energie). Níže uvádíme detailní odvození.

2.1 Praktické a teoretické důvody pro zavedení DDR

Jistým nedostatkem disperzní relace je skutečnost, že k výpočtu hodnoty imaginární části amplitudy rozptylu pro jednu hodnotu energie je zapotřebí znát reálnou část pro všechny energie vystupující v disperzním integrálu (73). Nahrazení integrálu v disperzní relaci jeho diferenciální aproximací má výhodu v tom, že její užití k výpočtu reálné části amplitudy rozptylu nevyžaduje znalost chování imaginární části téže veličiny pro libovolnou energii, ale stačí pouze znát její průběh na jistém okolí dané energie. K tomu je však na druhou stranu zapotřebí znát derivace všech řádů a je otázka, zda je možno si za určitých okolností vystačit jen s prvním, maximálně druhým řádem. Ukázalo se, že to lze jen v aproximaci extrémně vysokých energií. V roce 1965 Khuri a Kinoshita [19] odvodili z obecných principů platných pro funkce použitelné k aproximacím amplitud rozptylu, že v případě neomezeného růstu totálního účinného průřezu (veličiny přímo úměrné imaginární části amplitudy rozptylu) při asymptoticky vysokých energiích je od jisté hodnoty energie reálná část amplitudy rozptylu vpřed nezáporná. Hodnota, v níž reálná část amplitudy rozptylu je nulová (resp. blízká nule), je řádově srovnatelná s energií, v níž má minimum totální účinný průřez a začíná neomezeně růst (viz obr.5). Zde se nabízí myšlenka přibližné korelace reálné části a první derivace imaginární části amplitudy rozptylu při asymptoticky vysokých energiích. Tento teoretický výsledek nabyl na své důležitosti v první polovině sedmdesátých let, kdy byl pro vysoké energie pozorován neomezený růst účinného průřezu pro proton-protonové srážky. Myšlenka DDR byla poprvé použita Gribovem a Migdalem v r. 1968 [20].



Obrázek 5: Průběh reálné a imaginární části amplitudy rozptylu při vysokých energiích, převzato z [6]

2.2 Standardní odvození

Ve 4.kapitole jsme zjistili, že platí (za předpokladu, že $s \gg s_0$)

$$\operatorname{Re} F_S(s, t) = K + \frac{2s^2}{\pi} I, \quad (77)$$

kde $K \equiv \operatorname{Re} F_S(0, t)$ je integrační konstanta (kterou pro zjednodušení položíme rovnou nule) a

$$I = \text{P} \int_{s_0}^{+\infty} ds' \frac{1}{s'(s'^2 - s^2)} \operatorname{Im} F_S(s', t). \quad (78)$$

Odvodíme následující **tvrzení**:

$$\begin{aligned} \operatorname{Re} F_S(s, t) &= \frac{2s^2}{\pi} \text{P} \int_{s_0}^{\infty} \frac{ds'}{s'(s'^2 - s^2)} \operatorname{Im} F_S(s', t) = \\ &= \frac{s}{\pi} \int_{\ln s_0}^{\infty} d\xi' s'^{\alpha-1} \ln \coth \frac{1}{2} |\xi' - \xi| \cdot \left[\alpha - 1 + \frac{\partial}{\partial \xi'} \right] \left(\frac{\operatorname{Im} F_S(s', t)}{s'^{\alpha}} \right) = \\ &= s^{\alpha} \tan \left[\frac{\pi}{2} \left(\alpha - 1 + \frac{\partial}{\partial \ln s'} \right) \right] \left(\frac{\operatorname{Im} F_S(s, t)}{s^{\alpha}} \right) \end{aligned} \quad (79)$$

(Poslední uvedený výraz nazýváme diferenciální disperzní relace. Rovnost však platí pouze za některých dodatečných podmínek, ke kterým dospějeme v průběhu výpočtu.)

Odvození podle [1]:

$$\begin{aligned}
\operatorname{Re} F_S(s, t) &= \frac{2s^2}{\pi} \mathcal{P} \int_{s_0}^{\infty} \frac{ds'}{s'(s'^2 - s^2)} \operatorname{Im} F_S(s', t) = \\
&= \frac{2s^2}{\pi} \mathcal{P} \int_{\ln s_0}^{\infty} \frac{\operatorname{Im} F_S(s', t)}{s'} \frac{e^{\xi'}}{e^{2\xi'} - e^{2\xi}} d\xi' = \frac{2s^2}{\pi} \left[\frac{\operatorname{Im} F_S(s', t)}{s'} \int \frac{e^{\xi'} d\xi'}{e^{2\xi'} - e^{2\xi}} \right]_{\ln s_0}^{\infty} - \\
&\quad - \frac{2s^2}{\pi} \int_{\ln s_0}^{\infty} \left[d\xi' \frac{\partial}{\partial \xi'} \left(\frac{\operatorname{Im} F_S(s', t)}{s'} \right) \cdot \int \frac{e^{\xi'} d\xi'}{e^{2\xi'} - e^{2\xi}} \right], \tag{80}
\end{aligned}$$

kde jsme položili $s = e^{\xi}$. Tyto rovnosti jsou splněny pouze za předpokladu, že všechny uvedené výrazy mají po dosazení $s' = \infty$, resp. $\xi' = \infty$ konečnou hodnotu.

Platí:

$$\int \frac{e^{\xi'} d\xi'}{e^{2\xi'} - e^{2\xi}} = -\frac{1}{2s} \ln \coth \frac{1}{2} |\xi' - \xi| \tag{81}$$

a tedy po dosazení

$$\begin{aligned}
\operatorname{Re} F_S(s, t) &= -\frac{s}{\pi} \left[\frac{\operatorname{Im} F_S(s', t)}{s'} \ln \coth \frac{1}{2} |\xi' - \xi| \right]_{\ln s_0}^{\infty} + \\
&\quad + \frac{s}{\pi} \int_{\ln s_0}^{\infty} \ln \coth \frac{1}{2} |\xi' - \xi| \frac{\partial}{\partial \xi'} \left(\frac{\operatorname{Im} F_S(s', t)}{s'} \right) d\xi' \tag{82}
\end{aligned}$$

Pokud výraz $\operatorname{Im} F_S(s', t)$ jde pro $s' \rightarrow \infty$ ke konečné hodnotě, nebo alespoň nediverguje příliš rychle, je první člen pro vysoká s' prakticky nulový. Potom platí:

$$\begin{aligned}
\operatorname{Re} F_S(s, t) &= \frac{s}{\pi} \int_{\ln s_0}^{\infty} \ln \coth \frac{1}{2} |\xi' - \xi| \frac{\partial}{\partial \xi'} \left(\frac{\operatorname{Im} F_S(s', t)}{s'} \right) d\xi' = \\
&= \frac{s}{\pi} \int_{\ln s_0}^{\infty} \ln \coth \frac{1}{2} |\xi' - \xi| \frac{\partial}{\partial \xi'} \left(e^{\xi'(\alpha-1)} \frac{\operatorname{Im} F_S(s', t)}{s'^{\alpha}} \right) d\xi' =
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&= \frac{s}{\pi} \int_{\ln s_0}^{\infty} \ln \coth \frac{1}{2} |\xi' - \xi| e^{\xi'(\alpha-1)} \cdot \left[(\alpha-1) \frac{\operatorname{Im} F_S(s', t)}{s'^{\alpha}} + \frac{\partial}{\partial \xi'} \left(\frac{\operatorname{Im} F_S(s', t)}{s'^{\alpha}} \right) \right] d\xi' = \\
&= \frac{s}{\pi} \int_{\ln s_0}^{\infty} d\xi' s'^{\alpha-1} \ln \coth \frac{1}{2} |\xi' - \xi| \cdot \left[\alpha - 1 + \frac{\partial}{\partial \xi'} \right] \left(\frac{\operatorname{Im} F_S(s', t)}{s'^{\alpha}} \right) \quad (83)
\end{aligned}$$

Nyní dokážeme druhou rovnici, a to tak, že funkci

$$\left(\frac{\operatorname{Im} F_S(s', t)}{s'^{\alpha}} \right)$$

po substituci $s = e^{\xi}$ rozvineme v Taylorovu řadu se středem v bodě ξ . Budeme však navíc předpokládat, že tato funkce má nekonečný poloměr konvergence.

$$\begin{aligned}
\operatorname{Re} F_S(s, t) &= \frac{s}{\pi} \int_{\ln s_0}^{\infty} d\xi' s'^{\alpha-1} \ln \coth \frac{1}{2} |\xi' - \xi| \left[\alpha - 1 + \frac{\partial}{\partial \xi'} \right] \left(\frac{\operatorname{Im} F_S(s', t)}{s'^{\alpha}} \right) = \\
&= \frac{s}{\pi} \int_{\ln s_0}^{\infty} d\xi' s'^{\alpha-1} \cdot \ln \coth \frac{1}{2} |\xi' - \xi| \cdot \\
&\cdot \left[\alpha - 1 + \frac{\partial}{\partial \xi'} \right] \left[\sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!} \frac{\partial^n}{\partial \xi'^n} \left(\frac{\operatorname{Im} F_S(s, t)}{s^{\alpha}} \right) (\xi' - \xi)^n \right] = \\
&= s \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!} \frac{\partial^n}{\partial \xi'^n} \left(\frac{\operatorname{Im} F_S(s, t)}{s^{\alpha}} \right) I_n, \quad (84)
\end{aligned}$$

kde

$$I_n = \frac{1}{\pi} \int_{\ln s_0}^{\infty} d\xi' s'^{\alpha-1} \ln \coth \frac{1}{2} |\xi' - \xi| \left[\alpha - 1 + \frac{d}{d\xi'} \right] (\xi' - \xi)^n. \quad (85)$$

Provedeme další úpravy roznásobováním, vytýkáním a pomocí metody per partes:

$$I_n = \frac{1}{\pi} \int_{\ln s_0}^{\infty} d\xi' s'^{\alpha-1} \ln \coth \frac{1}{2} |\xi' - \xi| \cdot (\alpha-1)(\xi' - \xi)^n +$$

$$\begin{aligned}
& + \frac{1}{\pi} \int_{\ln s_0}^{\infty} d\xi' s'^{\alpha-1} \ln \coth \frac{1}{2} |\xi' - \xi| \frac{d}{d\xi'} (\xi' - \xi)^n = \\
& = \frac{s^{\alpha-1}}{\pi} \cdot \left[\ln \coth \frac{1}{2} |\xi' - \xi| (\xi' - \xi)^n e^{(\xi' - \xi)(\alpha-1)} \right]_{\ln s_0}^{\infty} - \\
& - \frac{s^{\alpha-1}}{\pi} \int_{\ln s_0}^{\infty} \frac{d}{d\xi'} \left(\ln \coth \frac{1}{2} |\xi' - \xi| (\xi' - \xi)^n \right) \cdot e^{(\xi' - \xi)(\alpha-1)} d\xi' + \\
& + \frac{s^{\alpha-1}}{\pi} \int_{\ln s_0}^{\infty} e^{(\xi' - \xi)(\alpha-1)} \ln \coth \frac{1}{2} |\xi' - \xi| \frac{d}{d\xi'} (\xi' - \xi)^n d\xi'. \tag{86}
\end{aligned}$$

Další úpravy provedeme na základě vzorce pro derivaci součinu 2 funkcí a poté zapomocí substituce $y = \xi' - \xi$:

$$\begin{aligned}
I_n & = \frac{s^{\alpha-1}}{\pi} \cdot \left[\ln \coth \frac{1}{2} |\xi' - \xi| (\xi' - \xi)^n e^{(\xi' - \xi)(\alpha-1)} \right]_{\ln s_0}^{\infty} - \\
& - \frac{s^{\alpha-1}}{\pi} \int_{\ln s_0}^{\infty} e^{(\xi' - \xi)(\alpha-1)} (\xi' - \xi)^n \cdot \frac{d}{d\xi'} \left(\ln \coth \frac{1}{2} |\xi' - \xi| \right) d\xi' = \\
& = \frac{s^{\alpha-1}}{\pi} \left[\ln \coth \frac{1}{2} |\xi' - \xi| (\xi' - \xi)^n e^{(\xi' - \xi)(\alpha-1)} \right]_{\ln s_0}^{\infty} + \\
& + \frac{s^{\alpha-1}}{\pi} \int_{\ln s_0}^{\infty} e^{(\xi' - \xi)(\alpha-1)} (\xi' - \xi)^n \frac{2e^{\xi' + \xi}}{e^{2\xi'} - e^{2\xi}} d\xi' = \\
& = \frac{s^{\alpha-1}}{\pi} \left[\ln \coth \frac{1}{2} |\xi' - \xi| (\xi' - \xi)^n e^{(\xi' - \xi)(\alpha-1)} \right]_{\ln s_0}^{\infty} + \\
& + \frac{s^{\alpha-1}}{\pi} \int_{\ln \frac{s_0}{s}}^{\infty} \frac{e^{(\alpha-1)y} y^n}{\sinh y} dy \tag{87}
\end{aligned}$$

Pokud se s_0 blíží k 0 a $0 < \alpha < 2$, je první člen roven nule a dolní mez druhého členu se blíží $-\infty$. To lze dokázat následujícím způsobem:

Výraz v hranaté závorce v prvním členu pro jednoduchost upravíme na tvar

$$\ln \coth \frac{1}{2} |x| x^n e^{x(\alpha-1)},$$

kde $x = \xi' - \xi$. Dá se snadno zjistit, že platí

$$\ln \coth \frac{1}{2} |x| = \ln \frac{e^{|x|} + 1}{e^{|x|} - 1}. \quad (88)$$

Požadavek, který na první člen klademe, zní, že jeho funkční hodnoty po dosazení $x = +\infty$ nebo $x = -\infty$ jsou stejné a v absolutní hodnotě menší než nekonečno při libovolném celém $n \geq 0$. Rozebereme si to tedy na jednotlivé případy:

1) $x \rightarrow +\infty$

Výraz

$$\ln \frac{e^{|x|} + 1}{e^{|x|} - 1}$$

jde k nule, jak se snadno po dosazení přesvědčíme. U zbývajících členů v hranaté závorce musíme rozlišit další případy.

1a) $\alpha > 1$

Výraz x^n jde k nekonečnu pro $n \neq 0$ a pro $n = 0$ je roven jedné. Výraz $e^{x(\alpha-1)}$ jde k nekonečnu. Setkáváme se tu tedy s násobením nuly a nekonečna a musíme aplikovat nějakou vhodnou metodu pro výpočet dané limity. Pokud výraz převedeme do tvaru zlomku, v jehož čitateli bude

$$\ln \frac{e^x + 1}{e^x - 1}$$

(absolutní hodnoty můžeme pro případ kladného x odstranit) a ve jmenovateli bude převrácená hodnota výrazu $x^n e^{x(\alpha-1)}$, můžeme použít l'Hospitalovo pravidlo. Po jeho použití a úpravě zlomku bude platit

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\ln \frac{e^x + 1}{e^x - 1}}{x^{-n} e^{-x(\alpha-1)}} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{2e^{\alpha x}}{e^{2x} - 1} \cdot \frac{x^{n+1}}{n + (\alpha - 1)x}. \quad (89)$$

Vidíme, že druhý ze zlomků jde k nekonečnu. Aby se neblížil nekonečnu celý výraz, musí se první zlomek blížit k nule (tím již bude konečná, v tomto případě nulová hodnota limity zajištěna, jak se lze snadno přesvědčit opětovným použitím l'Hospitalova pravidla). To je možné pouze v případě, že $\alpha < 2$. Celkově tedy máme $\alpha \in (1, 2)$.

1b) $\alpha = 1$

V tomto případě je limita výrazu v hranaté závorce rovna nule, neboť člen x^n jde k nekonečnu pomaleji než jde člen

$$\ln \frac{e^x + 1}{e^x - 1}$$

k nule. Bude to ihned zřejmé v případě, že ho nahradíme zlomkem $\frac{2}{e^x - 1}$, kterým ho lze shora omezit.

1c) $\alpha < 1$

Také v tomto případě je limita výrazu rovna nule, neboť jde k nule také výraz $e^{x(\alpha-1)}$ a (kladná) limita výrazu musí být menší nebo rovna než v případě b).

Prozatím jsme tedy zjistili, že parametr α nesmí být větší nebo roven 2.

2) $x \rightarrow -\infty$

V tomto případě bude postup analogický postupu 1), jak se lze snadno přesvědčit, pouze za první výraz dosadíme

$$\ln \frac{1 - e^x}{1 + e^x}.$$

Takže po uvažování $\alpha < 1$ a použití l'Hospitalova pravidla dospějeme ke stejnému výrazu jako prve a zjistíme, že musí platit $\alpha \in (0, 1)$. Dále zjistíme, že α může být také bez jakéhokoliv omezení větší nebo rovno 1.

Celkem tedy musí platit $\alpha \in (0, 2)$, jak již bylo výše řečeno. Potom ovšem platí

$$I_n = s^{\alpha-1} \frac{d^n}{d\alpha^n} I_0, \quad (90)$$

kde

$$\begin{aligned} I_0 &= \frac{1}{\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{e^{(\alpha-1)y}}{\sinh y} dy = \frac{1}{\pi} \int_{-\infty}^0 \frac{e^{(\alpha-1)y}}{\sinh y} dy + \frac{1}{\pi} \int_0^{\infty} \frac{e^{(\alpha-1)y}}{\sinh y} dy = \frac{1}{\pi} \int_{-\infty}^0 \frac{2e^{(\alpha-1)y}}{e^y - e^{-y}} dy + \\ &+ \frac{1}{\pi} \int_0^{\infty} \frac{2e^{(\alpha-1)y}}{e^y - e^{-y}} dy = \frac{1}{\pi} \int_{-\infty}^0 \frac{2e^{\alpha y}}{e^{2y} - 1} dy + \frac{1}{\pi} \int_0^{\infty} \frac{2e^{(\alpha-2)y}}{1 - e^{-2y}} dy. \end{aligned} \quad (91)$$

Výrazy v integrandech lze chápat jako součet nekonečných řad. Proto je rozvineme a dále upravíme:

$$\begin{aligned} I_0 &= -\frac{1}{\pi} \int_{-\infty}^0 2e^{\alpha y} \left(\sum_{n=0}^{\infty} e^{2yn} \right) dy + \frac{1}{\pi} \int_0^{\infty} 2e^{(\alpha-2)y} \left(\sum_{n=0}^{\infty} e^{-2yn} \right) dy = \\ &= \frac{2}{\pi} \sum_{n=0}^{\infty} \left(- \int_{-\infty}^0 e^{(\alpha+2n)y} dy + \int_0^{\infty} e^{(\alpha-2-2n)y} dy \right) = \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&= \frac{2}{\pi} \sum_{n=0}^{\infty} \left(\frac{-1}{\alpha + 2n} \left[e^{(\alpha+2n)y} \right]_{-\infty}^0 + \frac{1}{\alpha - 2 - 2n} \left[e^{(\alpha-2-2n)y} \right]_0^{\infty} \right) = \\
&= \frac{2}{\pi} \sum_{n=0}^{\infty} \left(\frac{-1}{\alpha + 2n} - \frac{1}{\alpha - 2 - 2n} \right) = \frac{2}{\pi} \sum_{n=0}^{\infty} \left(\frac{1}{2n + 2 - \alpha} - \frac{1}{2n + \alpha} \right) = \\
&= \tan \left[\frac{\pi}{2}(\alpha - 1) \right]
\end{aligned} \tag{92}$$

Poslední rovnost plyne z Fourierova rozvoje: lze snadno ověřit, že platí

$$\cos ax = \frac{\sin a\pi}{a\pi} + \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \frac{2a \sin a\pi}{\pi(a^2 - n^2)} \cos nx \tag{93}$$

a po dosazení $x = \pi$, $a\pi = z$ a vydělení sinem dostaneme

$$\cot z = \frac{1}{z} + \sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{1}{z + n\pi} + \frac{1}{z - n\pi} \right). \tag{94}$$

Vužijeme-li rovnosti $\tan z = -\cot(z + \frac{\pi}{2})$ a dosadíme $z = \frac{\pi}{2}(\alpha - 1)$, dostáváme požadovanou rovnost.

Celkem tedy platí:

$$\begin{aligned}
\operatorname{Re} F_S(s, t) &= s \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!} \frac{\partial^n}{\partial \xi^n} \left(\frac{\operatorname{Im} F_S(s, t)}{s^\alpha} \right) I_n = \\
&= s^\alpha \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!} \frac{\partial^n}{\partial \xi^n} \left(\frac{\operatorname{Im} F_S(s, t)}{s^\alpha} \right) \frac{d^n}{d\alpha^n} \left\{ \tan \left[\frac{\pi}{2}(\alpha - 1) \right] \right\} = \\
&= s^\alpha \tan \left[\frac{\pi}{2} \left(\alpha - 1 + \frac{\partial}{\partial \ln s'} \right) \right] \left(\frac{\operatorname{Im} F_S(s, t)}{s^\alpha} \right)
\end{aligned} \tag{95}$$

Poslední výraz je vlastně formální přepis předchozí sumy do úspornějšího tvaru. Lze totiž snadno spočítat, že sumu na levé straně rovnice formálně dostaneme z výrazu na pravé straně jako "Taylorův rozvoj" funkce $\tan \left[\frac{\pi}{2}(\alpha - 1) \right]$ se středem v bodě α pro "hodnotu" $\alpha + \frac{\partial}{\partial \ln s'}$.

•

Z obdobným způsobem definované integrální disperzní relace pro antisymetrickou amplitudu rozptylu lze dokázat, že

$$\operatorname{Re} F_A(s, t) = s^\alpha \tan \left[\frac{\pi}{2} \left(\alpha + \frac{\partial}{\partial \ln s} \right) \right] \left(\frac{\operatorname{Im} F_A(s, t)}{s^\alpha} \right). \tag{96}$$

Pro $\alpha = 1$ potom platí

$$\begin{aligned}
\frac{\operatorname{Re} F_S(s, t)}{s} &= \tan \left(\frac{\pi}{2} \frac{\partial}{\partial \ln s'} \right) \left(\frac{\operatorname{Im} F_S(s, t)}{s} \right) = \\
&= \left[\frac{\pi}{2} \frac{\partial}{\partial \ln s'} + \frac{1}{3} \left(\frac{\pi}{2} \frac{\partial}{\partial \ln s'} \right)^3 + \frac{2}{15} \left(\frac{\pi}{2} \frac{\partial}{\partial \ln s'} \right)^5 + \dots \right] \left(\frac{\operatorname{Im} F_S(s, t)}{s} \right) = \\
&= \sum_{n=1}^{\infty} a_n \frac{\partial^{2n-1}}{\partial \ln s'^{2n-1}} \left(\frac{\operatorname{Im} F_S(s, t)}{s} \right), \tag{97}
\end{aligned}$$

kde

$$a_n = \frac{2\pi^{2n-1}(2^{2n} - 1)}{(2n)!} |B_{2n}|, \tag{98}$$

přičemž B_{2n} jsou Bernoulliho čísla.

Obdobně pro antisymetrickou amplitudu platí

$$\frac{\operatorname{Re} F_A(s, t)}{s} = \tan \left[\frac{\pi}{2} \left(1 + \frac{\partial}{\partial \ln s'} \right) \right] \left(\frac{\operatorname{Im} F_A(s, t)}{s} \right), \tag{99}$$

a podle Taylorova vzorce pro funkci $x \cot x$ tedy potom

$$\begin{aligned}
&\frac{\pi}{2} \frac{\partial}{\partial \ln s'} \left(\frac{\operatorname{Re} F_A(s, t)}{s} \right) = \\
&= - \left[1 - \frac{1}{3} \left(\frac{\pi}{2} \frac{\partial}{\partial \ln s'} \right)^2 - \frac{1}{45} \left(\frac{\pi}{2} \frac{\partial}{\partial \ln s'} \right)^4 - \dots \right] \left(\frac{\operatorname{Im} F_A(s, t)}{s} \right). \tag{100}
\end{aligned}$$

2.3 Základní věty o DDR

Nyní se budeme blíže zabývat podmínkami, za kterých konverguje tzv. tangentsní suma, tedy rozvoj operátoru

$$\tan \left(\frac{\pi}{2} \frac{\partial}{\partial \ln s} \right),$$

vyjadřujícího vztah mezi imaginární a reálnou částí sudé amplitudy rozptylu, po dosazení nějaké funkce $g(\ln s)$. K tomu účelu zavedeme substituci

$$\ln s = x \quad (101)$$

a

$$\tan\left(\frac{\pi}{2} \frac{\partial}{\partial \ln s}\right) g(\ln s) = \tan\left(\frac{\pi}{2} \frac{\partial}{\partial x}\right) g(x) = T(x). \quad (102)$$

Při vyšetřování konvergence je důležitých několik následujících vět [5]:

Věta 1.

Nechť $g : \mathcal{R}^1 \rightarrow \mathcal{R}^1$. Suma $T(x)$ je konvergentní v bodě $x \in \mathcal{R}^1$ právě tehdy, když řada

$$D(x) = \sum_{n=1}^{\infty} g^{(2n-1)}(x) \quad (103)$$

je konvergentní.

Tato věta má základní důležitost pro řadu následujících výsledků. Co se týče praktického použití, musíme parametrizovat amplitudu rozptylu v nějakém intervalu energií. Tedy potřebujeme následující větu.

Věta 2.

Nechť $g : \mathcal{I} \rightarrow \mathcal{R}^1$ má všechny derivace v každém $x \in \mathcal{I}, \mathcal{I} \subset \mathcal{R}^1$. Pokud $T(x)$ konverguje pro všechna $x \in \mathcal{I} \subset \mathcal{R}^1$, potom celistvá funkce komplexního x existuje na $\mathcal{I}$.

Důkaz věty 1:

Využijeme *Abelova kritéria*:

Nechť (a_n) je monotonní omezená posloupnost a nechť řada

$\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ konverguje, pak řada $\sum_{n=1}^{\infty} a_n b_n$ také konverguje.

Nejprve dokážeme, že posloupnost (a_n) ze sumy $T(x) = \sum_{n=1}^{\infty} a_n g^{(2n-1)}(x)$ splňuje podmínky Abelova kritéria: Víme, že platí

$$a_n = \frac{2\pi^{2n-1}2^{2n} - 1}{(2n)!} |B_{2n}| = \frac{4}{\pi} (1 - 2^{-2n}) \zeta(2n), \quad (104)$$

kde $\zeta(2n) = \frac{(2\pi)^{2n}}{2(2n)!} |B_{2n}|$ je Riemannova funkce běžně definovaná jako $\zeta(x) = \sum_{n=1}^{\infty} n^{-x}$ [12]. Pro $n = 1$ platí $\zeta(2) = \frac{(2\pi)^2}{4} \cdot \frac{1}{6} = \frac{\pi^2}{6} \doteq 1,64$. Můžeme tedy s určitostí říct, že $1 < \zeta(2n) < 1,64$ a $\zeta(2n)$ je omezenou posloupností. Pro vysoká n pak můžeme psát

$$a_n \sim \frac{4}{\pi}(1 - 2^{-2n})(1 + 2^{-2n} + 3^{-2n} + 4^{-2n} + O(5^{-2n})) = \frac{4}{\pi}(1 + 3^{-2n} + O(5^{-2n})). \quad (105)$$

Tato posloupnost je při dostatečně vysokém n klesající a tudíž monotonní.

Předpokládejme nyní, že řada $D(x)$ konverguje. Pak vzhledem k vlastnostem posloupnosti (a_n) musí podle Abelova kritéria konvergovat také řada $T(x)$.

Předpokládejme naopak, že konverguje řada $T(x)$. Výraz $D(x)$ můžeme rozepsat jako $D(x) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{a_n} a_n g^{(2n-1)}(x)$. V Abelově kritériu teď úlohu posloupností a_n a b_n hrají posloupnosti $(\frac{1}{a_n})$ a $(a_n g^{(2n-1)}(x))$ které, jak se lze snadno přesvědčit, splňují dané požadavky a řada $D(x)$ tedy konverguje.

•

Tyto výsledky ukazují mimořádně omezenou platnost DDR pro konečnou energii: znamená to, že $T(x)$ je konvergentní v intervalu energií $\mathcal{I} \subset \mathcal{R}^1$, pouze když $g(x)$ je celistvá funkce komplexního x a pokud dvě sumy, $D(x)$ a $E(x) = \sum_{n=0}^{\infty} g^{(2n)}(x)$, také konvergují. Další věta říká, za jakých okolností lze funkci g dodefinovat na celou komplexní rovinu.

Věta 3.

Nechť g je funkce regulární na oblasti B komplexní roviny. Jestliže sumy $D(x)$ a $E(x)$ konvergují pro nějaké $x = x_0 \in D$, pak g lze rozšířit na celistvou funkci $\tilde{g}$ identickou s g na B takovou, že $\sum_{n=0}^{\infty} \tilde{g}^{(2n+1)}(x)$ a $\sum_{n=0}^{\infty} \tilde{g}^{(2n)}(x)$ konvergují stejnoměrně na každé omezené podmnožině komplexní roviny.

Důkaz:

Předpoklady věty implikují platnost Taylorova rozvoje funkce g

$$g(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!} g^{(n)}(x_0)(x - x_0)^n \quad (106)$$

na nějakém okolí x_0 . Protože tento rozvoj konverguje pro každé x z komplexní roviny, funkce g je rozšířitelná na celistvou funkci $\tilde{g}$. Nyní stačí dokázat jen konvergenci sumy

$\sum_{n=0}^{\infty} \tilde{g}^{(2n+1)}(x)$, protože důkaz konvergence druhé sumy je analogický. Poznamenejme, že věta platí také pro sumu $\sum_{n=0}^{\infty} \tilde{g}^{(n)}(x)$.

Označíme $S_{n,m} = \sum_{k=0}^{\infty} g^{(m+2k+1)}(x_0)$ a provedeme úpravu sumy

$$\begin{aligned} \sum_{k=N}^M \tilde{g}^{(2k+1)}(x) &= \sum_{k=N}^M \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!} g^{(n+2k+1)}(x_0) (x - x_0)^n = \\ &= \sum_{n=0}^{\infty} (S_{M,n} - S_{N-1,n}) (x - x_0)^n. \end{aligned} \quad (107)$$

Vezměme komplexní x takové, že $|x - x_0| \leq R$ a nějaké kladné ε . Použitím Bolzanova-Cauchyho kritéria pro sumy $D(x)$ a $E(x)$ odvodíme existenci N_0 takového, že

$$|S_{M,n} - S_{N-1,n}| < \varepsilon e^{-R} \quad (108)$$

platí pro všechna $M, N > N_0$ a každé nezáporné n . Odtud plyne, že

$$\left| \sum_{k=N}^M \tilde{g}^{(2k+1)}(x) \right| < \varepsilon e^{-R} e^{|x - x_0|} < \varepsilon \quad (109)$$

platí pro x taková, že $|x - x_0| \leq R$ a $M, N > N_0$.

•

Nyní budeme zkoumat, v jakých jiných tvarech lze také sumy $D(x)$ a $T(x)$ zapsat. O tom mluví následující dvě věty.

Věta 4.

Nechť g je celistvá funkce. Jestliže suma $D(x)$ konverguje pro nějaké $x \in \mathcal{R}^1$, pak

$$D(x) = \frac{1}{2} \int_0^{\infty} e^{-t} [g(x+t) - g(x-t)] dt. \quad (110)$$

Důkaz:

Pro Taylorův rozvoj funkcí $g(x+t)$ a $g(x-t)$ se středem v bodě x platí na nějakém okolí

$$g(x+t) = \sum_{n=0}^{\infty} g^{(n)}(x) \frac{t^n}{n!}, \quad (111)$$

resp.

$$g(x-t) = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n g^{(n)}(x) \frac{t^n}{n!}. \quad (112)$$

Odtud snadno zjistíme, že

$$\frac{1}{2}[g(x+t) - g(x-t)] = \sum_{n=0}^{\infty} g^{(2n+1)}(x) \frac{t^{2n+1}}{(2n+1)!}. \quad (113)$$

Jestliže má dokazovaná rovnost platit, pak také musí platit

$$\sum_{n=0}^{\infty} g^{(2n+1)}(x) = \int_0^{\infty} e^{-t} \sum_{n=0}^{\infty} g^{(2n+1)}(x) \frac{t^{2n+1}}{(2n+1)!} dt \quad (114)$$

Integrál na pravé straně rovnice má integrabilní majorantu, a proto můžeme prohodit sumu a integrál a dostáváme tak

$$\begin{aligned} & \int_0^{\infty} e^{-t} \sum_{n=0}^{\infty} g^{(2n+1)}(x) \frac{t^{2n+1}}{(2n+1)!} dt = \\ &= \sum_{n=0}^{\infty} \frac{g^{(2n+1)}(x)}{(2n+1)!} \int_0^{\infty} e^{-t} t^{2n+1} dt = \sum_{n=0}^{\infty} g^{(2n+1)}(x) I_n, \end{aligned} \quad (115)$$

kde

$$I_n = \frac{1}{(2n+1)!} \int_0^{\infty} e^{-t} t^{2n+1} dt. \quad (116)$$

Integrací per partes odvodíme, že

$$\begin{aligned} (2n+1)! I_n &= [-e^{-t} t^{2n+1}]_0^{\infty} + (2n+1) \int_0^{\infty} e^{-t} t^{2n} dt = \\ &= [-e^{-t} t^{2n+1}]_0^{\infty} - [e^{-t} t^{2n}]_0^{\infty} + (2n+1) 2n \int_0^{\infty} e^{-t} t^{2n-1} dt = \\ &= (2n+1)(2n)(2n-1)! I_{n-1}, \end{aligned} \quad (117)$$

tedy

$$I_n = I_{n-1}. \quad (118)$$

Protože platí

$$I_1 = \int_0^{\infty} e^{-t} t dt = [-e^{-t} t]_0^{\infty} + \int_0^{\infty} e^{-t} dt = 1, \quad (119)$$

rovnost je tímto dokázána.

•

Věta 5.

Jestliže g je celistvá funkce a $T(x)$ konverguje v nějakém $x \in \mathcal{R}^1$, potom

$$T(x) = \int_0^{\infty} a(t) e^{-t} [g(x+t) - g(x-t)] dt, \quad (120)$$

kde

$$a(t) = \frac{2}{\pi} (1 - e^{-2t})^{-1}. \quad (121)$$

Důkaz:

Pokud položíme $x = \ln s$, dostáváme

$$T(x) = \tan \left(\frac{\pi}{2} \frac{d}{d \ln s} \right) g(\ln s) = \frac{2s}{\pi} \int_0^{\infty} \frac{g(\ln s')}{s'^2 - s^2} ds'. \quad (122)$$

Dosadíme-li $g(\ln s) = \operatorname{Im} F_S(s)/s$, získáme výše dokázaný vztah.

Je však zapotřebí dokázat, že opravdu platí

$$\int_0^{\infty} a(t) e^{-t} [g(\ln s + t) - g(\ln s - t)] dt = \frac{2s}{\pi} \int_0^{\infty} \frac{g(\ln s')}{s'^2 - s^2} ds'. \quad (123)$$

Toho dosáhneme užitím substituce

$$\ln s + t = \ln s' \Rightarrow t = \ln \frac{s'}{s}, \quad dt = \frac{ds'}{s'}.$$

Zároveň dosadíme za $a(t)$ a obdržíme tak

$$\begin{aligned} \int_0^{\infty} a(t) e^{-t} [g(\ln s + t) - g(\ln s - t)] dt &= \frac{2}{\pi} \int_s^{\infty} \frac{\frac{s'}{s}}{\frac{s'^2}{s^2} - 1} \left[g(\ln s') - g \left(\ln \frac{s^2}{s'} \right) \right] \frac{ds'}{s'} = \\ &= \frac{2s}{\pi} \int_s^{\infty} \frac{g(\ln s')}{s'^2 - s^2} ds' - \frac{2s}{\pi} \int_s^{\infty} \frac{g(\ln \frac{s^2}{s'})}{s'^2 - s^2} ds'. \end{aligned} \quad (124)$$

Nyní je zřejmé, že uvedená rovnost platí, pokud

$$- \int_s^{\infty} \frac{g(\ln \frac{s^2}{s'})}{s'^2 - s^2} ds' = \int_0^s \frac{g(\ln s')}{s'^2 - s^2} ds'. \quad (125)$$

K ověření zavedeme substituci

$$\frac{s^2}{s'} = u \Rightarrow s' = \frac{s^2}{u}, \quad ds' = -\frac{s^2}{u^2} du.$$

Potom

$$-\int_s^\infty \frac{g(\ln \frac{s^2}{s'})}{s'^2 - s^2} ds' = -\int_s^0 \frac{g(\ln u)}{\frac{s^4}{u^2} - s^2} \left(-\frac{s^2}{u^2}\right) du = \int_0^s \frac{g(\ln u)}{u^2 - s^2} du. \quad (126)$$

Zaměníme-li u za s' , vidíme, že jsme získali požadovaný vztah.

•

2.4 Asymptotický charakter DDR

Diferenciální disperzní relace jsou hojně používány v aplikacích na interakce částic. Jejich praktická použitelnost má však své hranice, jak plyne z výše uvedených vět. Jde o to, že do disperzní relace nedosazujeme přesný tvar imaginární části amplitudy rozptylu $\text{Im } F_S^D(E)$, ale její vysokoenergetickou aproximaci $\text{Im } F_S^B(E)$, přičemž funkce $\frac{\text{Im } F_S^B(E)}{E}$, tedy účinný průřez, je celistvá v argumentu $\ln E$. Tento výraz pro imaginární část skutečné amplitudy rozptylu $\text{Im } F_S^D(E)$ tuto vlastnost nemá díky četným singularitám. Z těchto důvodů [5, 2] často může dojít k nekontrolovatelnému růstu rozdílu $\text{Im } F_S^B(E) - \text{Im } F_S^D(E)$. V důsledku toho se pak totéž stane s rozdílem reálných částí příslušných oběma hodnotám. Nejvíce se na tomto efektu podílejí nízkoenergetické příspěvky.

Ukažme si celou situaci názorněji:

Označme

$$\Delta(E) = \text{Im } F_S^B(E) - \text{Im } F_S^D(E), \quad (127)$$

příslušný rozdíl reálných částí

$$\delta(E) = \text{Re } F_S^B(E) - \text{Re } F_S^D(E). \quad (128)$$

Platí

$$\delta(E) = \delta_1(E) + \delta_2(E) + \delta_3(E), \quad (129)$$

kde

$$\begin{aligned} \delta_1(E) &= \frac{2E^2}{\pi} \int_0^{E_0} \frac{\text{Im } F_S^B(E')}{E'(E'^2 - E^2)} dE', \\ \delta_2(E) &= \frac{2E^2}{\pi} \int_{E_0}^{E_1} \frac{\Delta(E')}{E'(E'^2 - E^2)} dE', \end{aligned} \quad (130)$$

$$\delta_3(E) = \frac{2E^2}{\pi} \int_{E_1}^{\infty} \frac{\Delta(E')}{E'(E'^2 - E^2)} dE'.$$

Dělení provádíme z toho důvodu, že ve skutečnosti se srážky odehrávají jen v intervalu energií (E_0, E_1) , protože energie srážky nemůže klesnout pod klidovou energii částic a na druhou stranu nemůže převýšit určitou maximální mez, které lze na daném urychlovači dosáhnout. V tomto intervalu je tedy také tvar funkce $\text{Im } F_S^B(E)$ odvozen a dá se proto předpokládat, že tu $\Delta(E)$ a v důsledku toho i $\delta_2(E)$ budou zanedbatelné. Obdobné to bude s příspěvkem vyššími než E_1 , protože s rostoucí energií se funkce $\text{Im } F_S^D(E)$ a $\text{Im } F_S^B(E)$ liší čím dál méně.

Obtíže nastanou při odhadu $\delta_1(E)$. Lze dokázat, že pokud neplatí $\text{Im } F_S^B(0) = 0$, je tento výraz nekonečný. O funkci $\text{Im } F_S^B(E)$ dále víme, že musí splňovat nerovnost

$$|\text{Im } F_S^B(E)| \leq CE^\gamma \ln^n E, \quad (131)$$

kde $\gamma \in (0, 1)$, $n \in \mathcal{N} \cup \{0\}$, tzv. Froissartovu mez (vlastnost (v) v kapitole 1.4). Z toho lze dosazením do nerovnosti a rozvinutím podle Taylorova vzorce zjistit, že platí

$$|\delta_1(E)| \leq 2C \frac{n!}{\pi} \frac{1}{\gamma^{n+1}} + \mathcal{O}\left(\frac{1}{E^2}\right). \quad (132)$$

Z toho vidíme, že výraz $|\delta_1(E)|$ roste pro vyšší γ pomaleji, a že je tedy vhodné použít parametrizaci co nejblíže hranici splnitelnosti dané podmínky.

Jednoduchý příklad k ilustraci situace je následující: Nechť platí

$$\Delta(E) = cE^\alpha, \quad (133)$$

kde $\alpha \in (0, 1)$ a $|c|$ je tak malé, že přidání členu (133) nezpůsobí znatelnou změnu přesnosti fitu $\text{Im } F_S^D$. Dosazením do disperzního integrálu postupem obdobným odvozování DDR (vztahy 91, 92) lze zjistit, že platí rovnost

$$\int_0^{+\infty} ds' \frac{s'^\gamma}{s'^2 - s^2} = \frac{\pi}{2} s^{\gamma-1} \tan \frac{\pi\gamma}{2}. \quad (134)$$

Pokud tedy $E_0 \rightarrow 0$, vyjde nám

$$\delta(E) = -cE^\alpha \cot\left(\frac{\alpha\pi}{2}\right). \quad (135)$$

Toto roste nade všechny meze pro α jdoucí k nule.

Z uvedeného tedy plyne, že třída funkcí, pro které lze diferenciální disperzní relace použít, je velmi úzká. K dramatické změně dojde, když přejdeme od konečněenergetických relací k vysokoenergetické limitě. Existuje široké spektrum diferenciálních relací platných pro vysokoenergetickou limitu pro velkou třídu funkcí. V této

limitě může např. někdy být nekonečná řada $T(x)$ nahrazena jejím prvním členem.

Jak už bylo řečeno, do diferenciální disperzní relace je možné dosadit pouze takovou funkci, která je celistvá v $\ln E$. Jinými slovy, pro praktické použití je nutné, aby platilo [4]

$$\frac{\operatorname{Im} F_S(E)}{E} = \sum_{n=0}^{\infty} (\ln E - \ln E_0)^n \cdot a_n, \quad (136)$$

kde a_n , $n \in \mathcal{N} \cup \{0\}$ jsou reálné konstanty nezávislé na E . Tento závěr nás vede k zavedení parametrizace

$$\operatorname{Im} F_S(E) = AE + BE \ln E + CE \ln^2 E + DE^\alpha, \quad (137)$$

kde A, B, C, D jsou reálná čísla, $\alpha \in (0, 1)^2$. Dosazením tohoto vztahu do DDR dostaneme

$$\operatorname{Re} F_S(E) = \frac{\pi}{2} BE + \pi CE \ln E - DE^\alpha \cot \frac{\pi}{2} \alpha. \quad (138)$$

Pokud v DDR použijeme jen první člen tangenciálního rozvoje, získáme výraz

$$\operatorname{Re} F_S(E) = \frac{\pi}{2} BE + \pi CE \ln E + \frac{\pi}{2} D(\alpha - 1)E^\alpha. \quad (139)$$

Odečtením vztahů (138), (139) vznikne

$$DE^\alpha \left[\cot \frac{\pi}{2} \alpha + \frac{\pi}{2} (\alpha - 1) \right], \quad (140)$$

což pro $\alpha \in (0, 1)$ konverguje k nule s rostoucím E . Tento výsledek lze zobecnit a vyslovit jednu z vět týkajících se diferenciálních relací platných pro vysokoenergetickou limitu pro podstatně širší třídu funkcí než u DDR [3]:

Věta 6.

Nechť

$$D(E) = \frac{d}{d \ln E} \frac{\operatorname{Im} F_S(E)}{E} - \frac{2}{\pi} \frac{\operatorname{Re} F_S(E)}{E} \quad (141)$$

a předpokládejme splnění těchto podmínek:

- $F_S(E) \in \mathcal{F}$ a $\lim_{E \rightarrow \infty} D(E)$ existují
- $\lim_{E \rightarrow \infty} \rho_S(E) \ln E$ existuje
- $\lim_{E \rightarrow \infty} \sigma_S(E)$ existuje

²Správně by v argumentech logaritmů měla vystupovat bezrozměrná veličina E/E_0 . Protože však platí $\ln \frac{E}{E_0} = \ln E - \ln E_0$ - což vysvětluje vztah (136) -, lze to chápat tak, že členy závislé na E_0 jsou zahrnuty v konstantách A, B, C, D . Tak to bude nadále platit vždy, když v argumentu logaritmu nebude vystupovat bezrozměrná veličina.

- $\operatorname{Re} F_S(E)$ nemění své znaménko nad určitou energií.
Pak $\lim_{E \rightarrow \infty} D(E) = 0$.

Náznak **důkazu**:

Probereme 2 případy, a to $\operatorname{Re} F_S(E) \leq 0$ a $\operatorname{Re} F_S(E) \geq 0$.

a) $\operatorname{Re} F_S(E) \leq 0$:

Stačí dokázat omezenost výrazu

$$J(E) = \int_{\ln E_0}^{\ln E} \left[\frac{d}{d \ln E'} \frac{\operatorname{Im} F_S(E')}{E'} - \frac{2}{\pi} \frac{\operatorname{Re} F_S(E')}{E'} \right] d \ln E' \quad (142)$$

pro $E \rightarrow \infty$. Platí

$$J(E) = \left[\frac{\operatorname{Im} F_S(E')}{E'} \right]_{E_0}^E - \frac{2}{\pi} \int_{E_0}^E \frac{\operatorname{Re} F_S(E')}{E'^2} dE'. \quad (143)$$

Lze dokázat, že obě primitivní funkce ve vztahu (143) jsou omezeny konstantou nezávislou na E .

b) $\operatorname{Re} F_S(E) \geq 0$:

Protože existuje $\lim_{E \rightarrow \infty} \rho_S(E) \ln E$, je omezená. V důsledku toho $\lim_{E \rightarrow \infty} \rho_S(E) = 0$ a

$$\lim_{E \rightarrow \infty} [\arctan \rho_S(E) - \rho_S(E)] \operatorname{Im} F_S(E)/E = 0. \quad (144)$$

Potom

$$\lim_{E \rightarrow \infty} D(E) = \lim_{E \rightarrow \infty} \left[\frac{d}{d \ln E} \frac{\operatorname{Im} F_S(E)}{E} - \frac{2}{\pi} \frac{\operatorname{Im} F_S(E)}{E} \arctan \rho_S(E) \right]. \quad (145)$$

Je možné ukázat, že

$$\frac{d}{d \ln E} \frac{\operatorname{Im} F_S(E)}{E} - \frac{2}{\pi} \frac{\operatorname{Im} F_S(E)}{E} \arctan \rho_S(E) = -\frac{d\bar{\mu}(E)}{d \ln E} \frac{\operatorname{Im} F_S(E)}{E}, \quad (146)$$

kde $\bar{\mu}(E) = \mu(E) + \frac{1}{2} \ln[1 + \rho_S^2(E)]$. Výraz na pravé straně vztahu konverguje k nule, jak lze ukázat pomocí jiných teorémů.

•

Právě dokázaná věta připomíná jednu z vysokoenergetických relací, která se běžně zapisuje jako

$$\frac{\operatorname{Re} F_S(E)}{E} \rightarrow \frac{\pi}{2} \frac{d}{d \ln E} \frac{\operatorname{Im} F_S(E)}{E}. \quad (147)$$

Zde znak " $\rightarrow$ " znamená, že rozdíl obou stran vztah jde s rostoucím E k nule, nebo jde jejich podíl s rostoucím E k jedné. Věta 6 se zabývala případem, kdy jde rozdíl k nule. Uveďme tedy ještě další, tzv. podílovou větu:

Věta 7.

Nechť $F_S(E)$ náleží do třídy $\mathcal{F}$, splňuje vztah

$$\lim_{E \rightarrow \infty} \left| \ln \left| \frac{F_S(E)}{E^{1-\eta}} \right| \right| = \infty \quad (148)$$

a nechť $\lim_{E \rightarrow \infty} \rho_S(E)$ existuje a je nezáporná. Pokud existuje

$$\lim_{E \rightarrow \infty} \frac{E^{1-\eta} \frac{d}{d \ln E} \frac{\operatorname{Im} F_S(E)}{E^{1-\eta}}}{\frac{2}{\pi} \operatorname{Re} F_S(E) + \eta \operatorname{Im} F_S(E)}, \quad (149)$$

pak je rovna jedné.

Náznak důkazu:

Lze ukázat, že má-li být $\lim_{E \rightarrow \infty} \rho_S(E)$ nezáporná a zároveň mají platit předpoklady věty, pak je tato limita rovna nule. Z toho důvodu je $\operatorname{Im} F_S(E)$ při dostatečně vysokých energiích určitě nenulová - jinak by při každé nule $\operatorname{Im} F_S(E)$ musel být nulový celý jmenovatel výrazu, pro který hledáme limitu. Z l'Hospitalova pravidla a chování výrazu $\rho_S(E)$ při nízkých hodnotách plyne

$$\begin{aligned} \lim_{E \rightarrow \infty} \frac{E^{1-\eta} \frac{d}{d \ln E} \frac{\operatorname{Im} F_S(E)}{E^{1-\eta}}}{\frac{2}{\pi} \operatorname{Re} F_S(E) + \eta \operatorname{Im} F_S(E)} &= \lim_{E \rightarrow \infty} \frac{\ln \frac{\operatorname{Im} F_S(E)}{E^{1-\eta}}}{\int_{E_0}^E \left[\eta + \frac{2}{\pi} \arctan \rho_S(E') \right] \frac{dE'}{E'}} = \\ &= \lim_{E \rightarrow \infty} \frac{\ln \left| \frac{F_S(E)}{E^{1-\eta}} \right|}{\int_{E_0}^E \left[\eta + \frac{2}{\pi} \arctan \rho_S(E') \right] \frac{dE'}{E'}}. \end{aligned} \quad (150)$$

Poslední výraz konverguje k nule, což plyne z jiné věty uvedené v použité literatuře.

•

2.5 Diskuse a ilustrace na parametrizacích užívaných v praxi

Vraťme se k parametrizacím účinného průřezu

$$\sigma_S(E) = \frac{\text{Im } F_S(E)}{E}. \quad (151)$$

$$\sigma_S(E) = A + B \ln E + C \ln^2 E + DE^\beta. \quad (152)$$

Příkladem může být Donnachie-Landshoffova parametrizace závislá na parametru s použitá pro proton-protonové srážky³ [7]:

$$\sigma_+(s) = X s^\varepsilon + Y s^{-\eta} \quad (153)$$

a

$$\sigma_-(s) = X s^\varepsilon + Z s^{-\eta}. \quad (154)$$

K výpočtu výrazu

$$\rho_\pm(s)\sigma_\pm(s) = \frac{\text{Re } F_\pm(s)}{s} \quad (155)$$

lze použít dříve odvozený vztah (134). Protože však, jak již bylo uvedeno, energie srážky nemůže klesnout pod klidovou energii, přesnějšího výsledku se dosáhne, pokud se dolní mez integrálu zamění za s_0 a k úpravě se použijí tabulky. Autoři tímto způsobem dospěli k výsledku

$$\int_{s_0}^{+\infty} ds' \frac{s'^\gamma}{s'^2 - s^2} = \frac{\pi}{2} s^{\gamma-1} \tan \frac{\pi\gamma}{2} + \frac{s_0^\gamma}{2\gamma s} \left[{}_2F_1\left(1, \gamma, 1 + \gamma, \frac{s_0}{s}\right) - {}_2F_1\left(1, \gamma, 1 + \gamma, -\frac{s_0}{s}\right) \right],$$

kde ${}_2F_1(a, b, c, z)$ je hypergeometrická funkce definovaná jako

$${}_2F_1(a, b, c, z) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{z^k}{k!} \prod_{i=0}^{k-1} \frac{(a+i)(b+i)}{c+i}. \quad (156)$$

Výsledek lze dále upravit:

$$\begin{aligned} \int_{s_0}^{+\infty} ds' \frac{s'^\gamma}{s'^2 - s^2} &= \frac{\pi}{2} s^{\gamma-1} \tan \frac{\pi\gamma}{2} - \frac{s_0^{\gamma+1}}{s^2(\gamma+1)} {}_2F_1\left(1, \frac{\gamma+1}{2}, \frac{\gamma+3}{2}, \frac{s_0^2}{s^2}\right) = \\ &= \frac{\pi}{2} s^{\gamma-1} \tan \frac{\pi\gamma}{2} + \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{s_0^{2k+1+\gamma}}{s^{2k+2}} \frac{1}{2k+1+\gamma}. \end{aligned} \quad (157)$$

³ Zde tedy půjde o parametrizace týkající se amplitudy rozptylu $F_+(s)$. Pod pojmem energie srážky budeme nadále chápat celkovou energii kolidujících částic, tedy $s = E^2$.

Na základě tohoto odvodíme, že platí

$$\begin{aligned}
\rho_{\pm}(s)\sigma_{\pm}(s) &= \frac{\operatorname{Re} F_{\pm}(s)}{s} = \frac{K}{s} + \frac{2s}{\pi} \int_0^{+\infty} \frac{ds'}{s'(s'^2 - s^2)} \operatorname{Im} F_S(s') \pm \\
&\pm \frac{2}{\pi} \int_0^{+\infty} \frac{ds'}{s'^2 - s^2} \operatorname{Im} F_A(s') = \frac{K}{s} \pm \frac{Y-Z}{2} s^{-\eta} \cot\left(\eta \frac{\pi}{2}\right) + \\
&+ X s^{\varepsilon} \tan\left(\varepsilon \frac{\pi}{2}\right) - \frac{Y+Z}{2} s^{-\eta} \tan\left(\eta \frac{\pi}{2}\right)
\end{aligned} \tag{158}$$

a v případě nenulové dolní meze

$$\begin{aligned}
\rho_{\pm}(s)\sigma_{\pm}(s) &= \frac{K}{s} \pm \frac{Y-Z}{\pi} \left[\frac{\pi}{2} s^{-\eta} \cot \frac{\pi\eta}{2} - \frac{s_0^{2-\eta}}{(2-\eta)s^2} {}_2F_1\left(1, \frac{2-\eta}{2}, \frac{4-\eta}{2}, \frac{s_0^2}{s^2}\right) \right] + \\
&+ \frac{2X}{\pi} \left[\frac{\pi}{2} s^{\varepsilon} \tan \frac{\pi\varepsilon}{2} - \frac{s_0^{1+\varepsilon}}{(1+\varepsilon)s^2} {}_2F_1\left(1, \frac{1+\varepsilon}{2}, \frac{3+\varepsilon}{2}, \frac{s_0^2}{s^2}\right) \right] - \\
&- \frac{Y+Z}{\pi} \left[\frac{\pi}{2} s^{-\eta} \tan \frac{\pi\eta}{2} + \frac{s_0^{1-\eta}}{(1-\eta)s^2} {}_2F_1\left(1, \frac{1-\eta}{2}, \frac{3-\eta}{2}, \frac{s_0^2}{s^2}\right) \right] = \\
&= \frac{K}{s} \pm \frac{Y-Z}{\pi} \left[\frac{\pi}{2} s^{-\eta} \cot \frac{\pi\eta}{2} + \sum_{k=0}^{\infty} \frac{s_0^{2k+2-\eta}}{s^{2k+2}} \frac{1}{2k+2-\eta} \right] + \\
&+ \frac{2X}{\pi} \left[\frac{\pi}{2} s^{\varepsilon} \tan \frac{\pi\varepsilon}{2} + \sum_{k=0}^{\infty} \frac{s_0^{2k+1+\varepsilon}}{s^{2k+1}} \frac{1}{2k+1+\varepsilon} \right] - \\
&- \frac{Y+Z}{\pi} \left[\frac{\pi}{2} s^{-\eta} \tan \frac{\pi\eta}{2} - \sum_{k=0}^{\infty} \frac{s_0^{2k+1-\eta}}{s^{2k+1}} \frac{1}{2k+1-\eta} \right].
\end{aligned} \tag{159}$$

Uvedené parametrizace však nespĺňujú některé důležité vlastnosti kladené na amplitudy rozptylu, např. vlastnost (v) v kapitole 1.4. Proto se v praktických výpočtech užívá jiných parametrizací.

Z parametrizace (137), plyne pro účinný průřez vztahený k symetrické amplitudě rozptylu

$$\sigma_S(E) = A + B \ln E + C \ln^2 E + DE^{\beta}. \tag{160}$$

Ávila, Luna a Menon [6] na základě tohoto zavedli pro proton-protonové srážky tyto parametrizace:

$$\sigma_+(s) = A + B \ln s + C \ln^2 s, \tag{161}$$

$$\sigma_+(s) = A + B \ln s + C \ln^D s, \tag{162}$$

$$\sigma_+(s) = A + B \ln s + C \ln^2 s + R s^{-1/2} \tag{163}$$

a

$$\sigma_+(s) = A + B \ln s + C \ln^D s + R s^{-1/2}. \quad (164)$$

K vyhodnocení závislosti účinného průřezu na energii srážky použili data z [13], [14] a [15], která byla získána na urychlovači LHC v CERNu. Dále použili výsledky uvedené v [17] a [18], získané z vlastností kosmického záření. Tyto hodnoty jsou uvedeny v následující tabulce. Energie je brána v jednotkách GeV a účinný průřez v mb (milibarn = 10^{-26} cm²).

	energie srážky						
	23.5	30.7	44.7	52.8	62.5	30000	40000
σ_{tot}	38.7	40.0	42.5	42.9	44.1	120	133

Na základě statistického zpracování naměřených hodnot byly navrženy 4 možné kombinace hodnot konstant A , B , C , D a R , jak je uvedeno v další tabulce.

typ parametrizace	1	2	3	4
A	45.78	42.64	38.74	33.67
B	-3.315	-1.875	-1.868	-0.3201
C	0.3654	0.1220	0.2894	0.09465
D	2	2.312	2	2.288
R	-	-	21.52	31.40

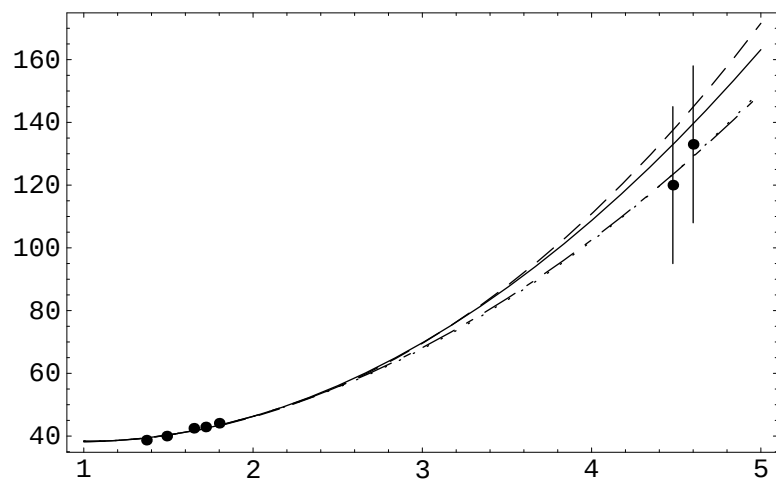
Na obrázku 6 vidíme grafická znázornění závislostí účinného průřezu na energii srážky pro tyto kombinace konstant. Grafy pro jednotlivé parametrizace jsou označeny tímto způsobem: 1 - plně, 2 - čárkovaně, 3 - čerchovaně, 4 - tečkovaně.

Podobně jako závislost účinného průřezu na energii srážky je předmětem zkoumání také obdobná závislost parametru $\rho_+(s)$. Pomocí disperzních relací lze dokázat, že přibližně platí vzorec

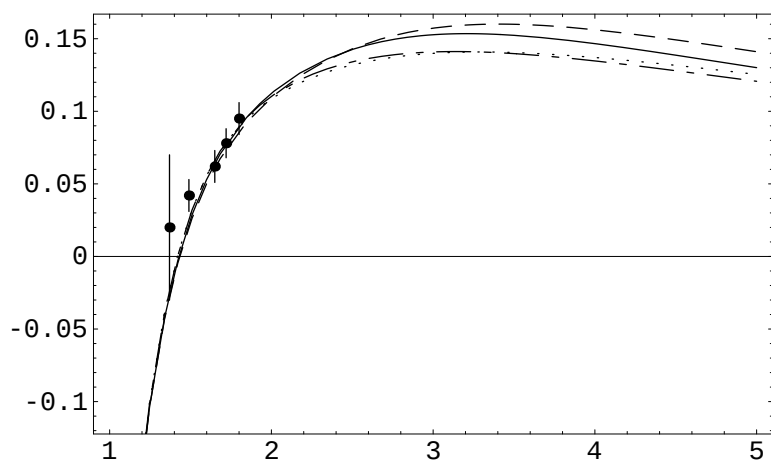
$$\rho_+(s) = \frac{4\pi K}{s\sigma_+(s)} + \frac{1}{\sigma_+(s)} \frac{\pi}{2} \frac{d}{d \ln s} (\sigma_+(s)). \quad (165)$$

K určení koeficientu K autoři nejprve ve vzorci dosadili za účinný průřez a poté opět statisticky zpracovali hodnoty získané měřením (viz [15], [16]), které vidíme v další tabulce.

	energie srážky				
	23.5	30.7	44.7	52.8	62.5
ρ	0.02	0.042	0.062	0.078	0.095



Obrázek 6: Různé parametrizace účinného průřezu. Převzato z [6].



Obrázek 7: Různé parametrizace ρ_+ . Viz [6].

Za koeficient K pak dosadili tyto hodnoty:

hodnoty K pro typ parametrizace:			
1	2	3	4
-134.1	-135.6	-130.3	-129.6

Pro různé soubory hodnot pak opět vytváříme grafy se 4 druhy možných parametrizací (viz obr. 7), které jsou označeny stejným způsobem jako na obr. 6.

2.6 Aktuálnost DDR v souvislosti s připravovanými experimenty

Diferenciální disperzní relace se v současné době dostávají do popředí zájmu mj. také v souvislosti se stavbou urychlovacího zařízení LHC v CERNu, na kterém se v rámci projektu TOTEM připravuje měření totálních účinných průřezů, elastického rozptylu a difrakční disociace hadronů. Projekt TOTEM se zabývá následujícími tématy:

- Měřením totálního účinného průřezu metodou nezávislou na intenzitě svazku částic, při které se zároveň měří pružný rozptyl při nízkých hodnotách parametru t (interpretovatelného jako moment hybnosti) a četnost nepružných srážek. Toto měření by mělo dosahovat přesnosti 1 mb.
- Pružným rozptylem v co největším rozsahu hodnot parametru t (řádově $|t| \sim 5 \cdot 10^{-4} \text{ GeV}^2$ až 10 GeV^2).
- Vlastnostmi procesu

$$p + p \rightarrow p + X,$$

zvláště fyzikálními veličinami pro rozptyl protonů účastnících se srážky a konkrétními částicemi, které při srážce vzniknou.

Z těchto témat je pro naše téma nejzajímavější měření totálního účinného průřezu. Ten vypočteme ze vzorce

$$N_{\text{el}} + N_{\text{inel}} = \mathcal{L} \sigma_{\text{tot}}, \quad (166)$$

kde symboly N s příslušnými indexy určují počet registrovaných pružných, resp. nepružných srážek a $\mathcal{L}$ (integrovaná luminozita) je počet částic svazku na jednotku

plochy, které vstoupily do reakce. Zderivováním a z optického teorému odvodíme

$$\left(\frac{dN_{\text{el}}}{dt}\right)_{t=0} = \mathcal{L}\left(\frac{d\sigma}{dt}\right)_{t=0} = \mathcal{L}\frac{\sigma_{\text{tot}}^2(1+\rho^2)}{16\pi}, \quad (167)$$

kde t je výše zmíněný parametr. Kombinací obou vzorců dostaneme

$$\sigma_{\text{tot}} = \frac{16\pi}{1+\rho^2} \frac{(dN_{\text{el}}/dt)_{t=0}}{N_{\text{el}} + N_{\text{inel}}}. \quad (168)$$

K výpočtu tohoto výrazu jsou dále blíže zkoumány tyto veličiny:

- Vztah mezi totálním účinným průřezem a parametrem ρ pro rozptyl vpřed plynoucí z DDR. Užívá se jeho přibližná aproximace

$$\rho \simeq \frac{\pi}{2\sigma_{\text{tot}}} \frac{d\sigma_{\text{tot}}}{d \ln s}.$$

- Poměr účinného průřezu pružných srážek k účinnému průřezu všech srážek $\frac{\sigma_{\text{el}}}{\sigma_{\text{tot}}}$. Tato veličina by v souladu s dosavadními poznatky měla nejprve růst jakožto funkce veličiny $\ln s$ a v limitě velmi vysokých energií se blížit konstantě rovné $1/2$.
- Závislost diferenciálního účinného průřezu na konkrétní energii. V případě rozptylu vpřed je tato závislost dobře aproximována jako $\frac{d\sigma}{dt} = e^{-B|t|}$, kde B závisí na konkrétní energii jako $B(s) = B_0 + 2\alpha' \ln s$, kde B_0 a α' jsou nezávislé konstanty, $\alpha' \simeq 0.25 \text{ GeV}^{-2}$.

Měřicí aparaturu tvoří detektory pružných a nepružných srážek. Podrobnosti jsou uvedeny v [21].

3 Závěr

Ústředním tématem této práce byla problematika diferenciálních disperzních relací.

V úvodních kapitolách jsme se seznámili s řadou pojmů, které se užívají při studiu procesů mezi elementárními částicemi. Nejprve jsme si objasnili pojmy z oblasti srážek, zvláště binárních, a to především veličiny s , t a u , které se užívají k jejich popisu a vztahy mezi nimi a energií srážky. V praxi se k popisu srážky užívají zejména parametry s a t , kde t při různých s zůstává konstantní, někdy i nulové, jedná-li se o rozptyl vpřed. Dále jsme se seznámili s metodami popisu časového vývoje částice a v této souvislosti jsme si objasnili pojem S -matice a veličin závislých na jejích koeficientech - amplitud rozptylu. Z nich lze spočítat účinný průřez srážky. Přitom imaginární část amplitudy rozptylu a účinný průřez srážky jsou dvě nezávisle měřitelné veličiny. Poté následoval výklad o způsobech hledání jednotné teorie silového působení částic a dosažených poznatcích. V této souvislosti hrají důležitou úlohu právě měření účinných průřezů a amplitud rozptylu binárních srážek v závislosti na jejich energii. Mezi reálnou a imaginární částí amplitudy rozptylu musí být navíc splněn matematický vztah - tzv. disperzní relace. Tento vztah umožňuje spočítat reálnou část amplitudy rozptylu na základě znalosti její imaginární části. Nevýhoda tohoto vztahu ovšem spočívá v tom, že znalost reálné části pro jednu energii vyžaduje znalost imaginární části amplitudy rozptylu pro všechny energie. Tato nevýhoda je dána integrálním tvarem disperzní relace. Bylo by proto výhodné nahradit integrál nějakým diferenciálním operátorem, který by při dané energii požadoval znalost imaginární části amplitudy rozptylu jen na jistém okolí. Touto otázkou se zabývá druhá část práce.

V druhé části jsme nejprve provedli odvození vztahu, ve kterém je vskutku integrál v disperzní relaci nahrazen diferenciálním operátorem, a to tak, jak jej provedli Bronzan, Kane a Sukhatme [1]. Ti se však nezabývali dodatečnými podmínkami, které musí funkce dosazená za amplitudu rozptylu splňovat. Tyto podmínky jsme proto dále uvedli na pravou míru. Diferenciální disperzní relaci lze totiž použít jen za určitých speciálních podmínek. Dále jsme poukázali na výrazná zjednodušení, ke kterým v DDR dochází při asymptoticky vysokých energiích, při kterých se dokonce i rozšiřuje třída funkcí, které lze za amplitudu rozptylu dosadit. V závěrečných 2 kapitolách jsme probrali některé v praxi užívané parametrizace účinného průřezu a tedy i imaginární části amplitudy rozptylu a zmínili se o konkrétních projektech, v nichž má tato problematika své uplatnění.

Reference

- [1] J. B. Bronzan, G. L. Kane, U. P. Sukhatme, Phys. Lett. B49 (1974) 272.
- [2] G. K. Eichmann, J. Dronkers, Phys. Lett. B52 (1974) 428.
- [3] J. Fischer, P. Kolář, Phys. Rev. D17 (1978) 2168.
- [4] P. Kolář, Asymptotické vlastnosti rozptylu. Kandidátská disertační práce, FzÚ AV, Praha 1980.
- [5] P. Kolář, J. Fischer, J. Math. Phys. 25 (1984) 2538.
- [6] R. F. Ávila, E. G. S. Luna, M. J. Menon, hep-ph/0105065 v2 (2001).
- [7] R. F. Ávila, M. J. Menon, hep-ph/0309028 (2003).
- [8] V. B. Berestěckij, E. M. Lifšic, L. P. Pitajevskij, Těoretická fyzika, sv. 4, Relativistická kvantová teorie, část 1, 283-288, 295-300, Moskva 1968.
- [9] J. Fischer, Průhledy do mikrokosmu, Praha 1986.
- [10] J. Formánek, Úvod do relativistické kvantové mechaniky a kvantové teorie.
- [11] H. Burkhardt, Dispersion Relation Dynamics, 42-48, Amsterdam 1969.
- [12] L. Vrána, Matematická analýza III (Funkční posloupnosti a řady).
- [13] A. S. Carrol et al., Phys. Lett. B61 (1976) 303.
- [14] A. S. Carrol et al., Phys. Lett. B80 (1979) 423.
- [15] U. Amaldi, K. Schubert, Nucl. Phys. B166 (1980) 301.
- [16] L. A. Fajardo et al., Phys. Rev. D24 (1981) 46.
- [17] H. Honda et al., Phys. Rev. Lett. 70 (1993) 525.
- [18] R. M. Baltrusaitis et al., Phys. Rev. Lett. 52 (1984) 1380.
- [19] N. N. Khuri, T. Kinoshita, Phys. Rev. B706 (1965) 140.
- [20] V. N. Gribov, A. A. Migdal, Yad. Fiz. 8 (1968) 1213 [Sov. J. Nucl. Phys. 8 (1969) 702].
- [21] TOTEM - Letter of Intent, CERN/LHCC 97-49, LHCC/I11, 15.8.1997; CERN/LHCC 99-7, LHCC/P5, 15.3.1999; <http://greybook.cern.ch>.