

České vysoké učení technické v Praze
Fakulta jaderná a fyzikálně inženýrská

Diferenciální disperzní relace a jejich význam pro
vysokoenergetický rozptyl hadronů

Jan Smotlacha

Katedra fyziky
Akademický rok: 2002/2003
Školitel: prof. RNDr. Jan Fischer, DrSc.

V Praze, 15. září 2003

Obsah

1	Úvod	3
2	Kinematika binárních srážek	5
3	Matice rozptylu a poruchový rozvoj	11
4	Problémy dynamiky procesů a disperzní relace	15
5	O třídě funkcí, do níž řadíme amplitudu rozptylu	18
6	Funkce tříd $\mathcal{E}$, $\mathcal{E}'$ a jejich vlastnosti	24
7	Ilustrace platnosti obecných vět o rozptylu pro funkce třídy $\mathcal{E}$	30
8	Závěr	35
Dodatky		39
A	Odvození diferenciálních analytických relací Bronzanem et al.	39
B	Podmínky konvergence diferenciálního operátoru v DAR	46
C	Důkaz vlastnosti (vii) pro funkce tříd $\mathcal{E}$ a $\mathcal{E}'$	48
Literatura		54

Důležitým prostředkem ke studiu hadronových srážek jsou tzv. disperzní relace, což je integrální vztah mezi reálnou a imaginární částí amplitudy rozptylu. Jsou vlastně vyjádřením analytických vlastností amplitudy rozptylu v komplexní rovině energie nebo jiné kinematické proměnné; při jejich odvození je využito známých nebo předpokládaných informací o rozložení, poloze a povaze singularit amplitudy rozptylu v příslušné komplexní rovině.

Prudký rozvoj techniky urychlovačů a možnost dosažení velmi vysokých srážkových energií obrátil pozornost teoretiků ke studiu disperzních relací v oblasti extrémně vysokých energií a k odvození tzv. asymptotických teorémů, tj. korelací mezi rozptylovými veličinami při limitně vysokých energiích. Ukázalo se také, že v této oblasti lze za určitých předpokladů nahradit standardní disperzní relace vztahem, v němž disperzní integrál je aproximován výrazem obsahujícím jednu nebo více derivací imaginární nebo reálné části amplitudy. Tato práce se zabývá vlastnostmi disperzních relací standardního i diferenciálního typu a podmínek jejich platnosti a praktické použitelnosti.

Text je členěn na tyto části:

První část se skládá z osmi kapitol, z nichž první tři pojednávají o základních pojmech, se kterými budeme v této práci zacházet. V 1.kapitole se seznámíme se zachovávacími se veličinami srážek a počtem nezávislých parametrů, kterými jsou jednotlivé srážky určeny. Ve 2.kapitole budeme tyto parametry blíže konkretizovat pro binární srážky. V další kapitole si něco řekneme o S -matici a zavedeme pojem amplitudy rozptylu.

Ve čtvrté kapitole si definujeme pojem disperzní relace. V 5.kapitole si povíme o vlastnostech amplitud rozptylu a v 6.kapitole se omezíme na jednu třídu vhodných kandidátů, jejíž vlastnosti ověříme v následující 7.kapitole. Závěrem v 8.kapitole probereme praktické problémy, se kterými se potýká užívání integrálních i diferenciálních disperzních relací.

Tvar těch druhých pak odvodíme v prvním kapitole druhé části, tedy dodatku, se zřetelem na omezující předpoklady, které dosazovaná funkce musí splňovat. Ty dále specifikujeme v další kapitole. Třetí kapitola v dodatku se podrobně zabývá důkazem jedné z vlastností funkcí popisovaných v 6.kapitole.

Zvláštní poděkování patří Janu Fischerovi za vydatnou pomoc při vzniku této práce.

1 Úvod

Pro hledání a studium vlastností elementárních částic jsou nejpodstatnější 2 základní experimenty:

- rozpad 1 částice na jiné částice, což schematicky zapisujeme

$$a \rightarrow b_1 + b_2 + \dots + b_n$$

- srážka 2 částic za případného vzniku dalších částic; to zapisujeme jako

$$a_1 + a_2 \rightarrow b_1 + b_2 + \dots + b_n,$$

eventuelně (pokud se v koncovém stavu nacházejí i částice stavu počátečního) např.

$$a_1 + a_2 \rightarrow a_1 + a_2 + b_3 + \dots + b_n.$$

Přitom n značí počet částic v koncovém stavu. Je-li v posledním schématu $n=2$, nazýváme srážku pružnou.

Ve zkoumaných procesech se často musíme oprostít od vžitých představ o reálném světě, získaných na základě každodenní zkušenosti. Za každých okolností zůstává zachováno jen několik nejzákladnějších principů. Mezi tyto principy patří zákony zachování energie, hybnosti, momentu hybnosti a elektrického náboje. Proto jedním z hlavních prostředků užívaných k popisu elementární částice je čtyřvektor energie-hybnosti (čtyřhybnost) $p = (p_0, \vec{p})$, pro jehož složky platí

$$p_0 = \sqrt{\vec{p}^2 + m^2}, \quad (1)$$

kde m je klidová hmotnost dané elementární částice (používáme přirozenou soustavu jednotek, v níž $c = 1$).

Při studiu srážkových procesů mezi elementárními částicemi však bylo zjištěno, že se zachovávají i další, v jiných oborech fyziky nepoužívané veličiny, jako je baryonové a leptonové číslo, podivnost aj. Ty jsou definovány takto: baryonové číslo baryonů [9] je rovno jedné, jejich antičástice ho mají rovno minus jedné a pro ostatní částice je nulové. Obdobně jsou zavedena také leptonová čísla. Podivnost souvisí s tzv. podivnými částicemi, jimiž se zde podrobněji zabývat nebudeme.

Hodnoty složek čtyřhybností jsou určeny hodnotami nezávislých parametrů, jejichž počet se mění podle typu srážky, resp. rozpadu, tedy podle počtu a typu výchozích a koncových částic. Vstupují-li do procesu 2 částice a n částic z něho vzejde, pak ve čtyřhybnostech vystupuje celkem $4(n+2)$ složek. Přitom víme, že mezi nimi platí $n+2$ vztahů typu (1). Další vzájemné závislosti jsou dány invariancemi vůči translacím a rotacím. Rozdíl počtu složek čtyřhybností a jejich vzájemných závislostí a invariancí udává počet nezávislých parametrů. Přitom zanedbáváme existenci spinu. Od $4(n+2)$ složek čtyřhybností tedy odečteme tyto položky:

- $n+2$ vztahů mezi energií, hybností a hmotou (vztah (1))
- celkem 4 zákony zachování energie a hybnosti
- invariance vůči translacím podél (3 stupně volnosti)
- invariance vůči rotacím ve třech dimenzích (3 Eulerovy úhly)

Celkem tedy dostáváme $3n - 4$ nezávislých veličin.

V dalším se budeme zabývat takovými procesy, při nichž se srazí 2 částice a vzniknou jiné 2 částice. Takovéto procesy nazýváme binární srážky.

2 Kinematika binárních srážek

K popisu binárních srážek je důležité znát 4-hybnosti všech zúčastněných částic. Označíme je postupně $p_1, p_2, -p_3$ a $-p_4$. Podle zákonů zachování energie a hybnosti musí platit

$$p_1 + p_2 + p_3 + p_4 = 0. \quad (2)$$

Označíme-li $p_i = (p_{io}, \vec{p}_i)$, $i = 1, 2, 3, 4$, tento vztah přejde v

$$p_{10} + p_{20} + p_{30} + p_{40} = 0 \quad (3)$$

a

$$\vec{p}_1 + \vec{p}_2 + \vec{p}_3 + \vec{p}_4 = 0. \quad (4)$$

Tím dostáváme celkem 16 na sobě závislých parametrů. Z předchozí kapitoly plyne, že jen 2 z nich jsou nezávislé. Za tyto parametry se obvykle volí některé z následujících veličin:

$$s = (p_1 + p_2)^2 = (p_3 + p_4)^2, \quad (5)$$

$$t = (p_1 + p_3)^2 = (p_2 + p_4)^2 \quad (6)$$

a

$$u = (p_1 + p_4)^2 = (p_2 + p_3)^2. \quad (7)$$

Zjistíme závislost těchto veličin na hybnostech a energiích jednotlivých částic v těžišťové soustavě.

Víme, že v těžišťové soustavě platí

$$\vec{p}_1 + \vec{p}_2 = \vec{p}_3 + \vec{p}_4 = 0, \quad (8)$$

tedy hybnost částic vstupujících do srážky je stejná, ale opačně orientovaná. Ze vztahu (8) lze za použití vztahu (5) snadno odvodit, že s je kvadrát těžišťové energie. Kromě toho pro jednotlivé veličiny vychází

$$s = (p_1 + p_2)^2 = p_1^2 + 2p_1p_2 + p_2^2 = m_1^2 + m_2^2 + 2p_{10}p_{20} + 2\vec{p}_1\vec{p}_2, \quad (9)$$

$$t = (p_1 + p_3)^2 = p_1^2 + 2p_1p_3 + p_3^2 = m_1^2 + m_3^2 + 2p_{10}p_{30} - 2\vec{p}_1\vec{p}_3, \quad (10)$$

a

$$u = (p_1 + p_4)^2 = p_1^2 + 2p_1p_4 + p_4^2 = m_1^2 + m_4^2 + 2p_{10}p_{40} - 2\vec{p}_1\vec{p}_4, \quad (11)$$

kde $m_i, i = 1, 2, 3, 4$ jsou hmotnosti jednotlivých částic. Sečtením těchto veličin a s využitím rovnosti $p_{20} + p_{30} + p_{40} = -p_{10}$ dostáváme

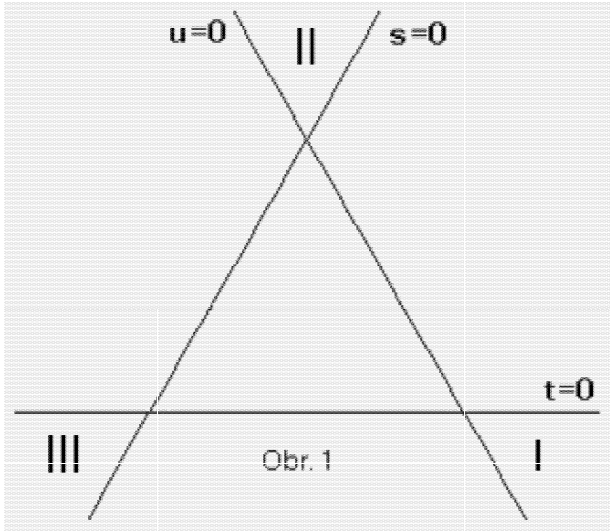
$$s + t + u = 2\vec{p}_1^2 + 3m_1^2 + m_2^2 + m_3^2 + m_4^2 - 2(\vec{p}_1^2 + m_1^2) = \sum_{i=1}^4 m_i^2, \quad (12)$$

tedy součet s, t a u je (až na příslušné jednotky) roven součtu kvadrátů hmotností jednotlivých částic. Veličiny s, t, u jsou, stejně jako jejich součet, kvadráty čtyřvektorů, a jsou tedy relativisticky invariantní. Proto získaný výsledek je platný nejen v těžišťové, ale také v libovolné soustavě.

Vzájemné závislosti parametrů s, t, u lze [2] graficky znázornit v rovině (viz obr. 1), kterou schematicky dělíme mj. na oblasti I, II a III, ve kterých je vždy jeden parametr kladný a ostatní 2 jsou záporné. V oblasti I se hodnoty parametrů nacházejí, pokud je parametr s kladný a ostatní záporné. To odpovídá situaci, kdy počátečnímu stavu přísluší částice 1 a 2 a stavu koncovému částice 3 a 4. Oblasti II odpovídá kladný parametr t a záporné parametry s, u a počátečnímu a koncovému stavu přísluší postupně částice 1,3 a 2,4. V oblasti III, kde je kladný parametr u a parametry s, t jsou záporné, přísluší počátečnímu stavu částice 1,4 a koncovému stavu přísluší částice 2,3.

Zaměříme se nyní na oblast I a prostudujeme 2 speciální případy v těžišťovém systému. V prvním z nich předpokládáme, že všechny 4 částice mají stejnou hmotnost μ . Zákon zachování energie potom dává

$$2\sqrt{\vec{p}_1^2 + \mu^2} - 2\sqrt{\vec{p}_3^2 + \mu^2} = 0. \quad (13)$$



Odtud dostáváme, že platí $|\vec{p}_1| = |\vec{p}_3| = |\vec{p}|$. Z výše odvozených vztahů pro jednotlivé parametry pak celkem snadno dostáváme

$$s = 4(\vec{p}^2 + \mu^2), \quad (14)$$

$$t = -2\vec{p}^2(1 - \cos \vartheta) \quad (15)$$

a

$$u = -2\vec{p}^2(1 + \cos \vartheta), \quad (16)$$

kde ϑ je úhel, který svírají vektory $\vec{p}_1$ a $\vec{p}_3$.

Ve druhém případě předpokládáme, že platí $m_1 = m_3 = M$ a $m_2 = m_4 = m$. Pak ze zákona zachování energie dostaneme

$$\sqrt{\vec{p}_1^2 + M^2} + \sqrt{\vec{p}_1^2 + m^2} = \sqrt{\vec{p}_3^2 + M^2} + \sqrt{\vec{p}_3^2 + m^2}. \quad (17)$$

Na obou stranách rovnice tak máme výrazy, které jsou ryze monotónní, a proto je splněna pouze v případě, kdy $|\vec{p}_1| = |\vec{p}_3| = |\vec{p}|$. Za předpokladu, že ϑ opět značí úhel mezi vektory $\vec{p}_1$ a $\vec{p}_3$, pro parametry s, t, u dostáváme

$$s = m^2 + M^2 + 2\sqrt{\vec{p}^2 + m^2}\sqrt{\vec{p}^2 + M^2} + 2\vec{p}^2, \quad (18)$$

$$t = -2\vec{p}^2(1 - \cos \vartheta) \quad (19)$$

a

$$u = m^2 + M^2 - 2\sqrt{\vec{p}^2 + m^2}\sqrt{\vec{p}^2 + M^2} - 2\vec{p}^2 \cos \vartheta. \quad (20)$$

Pro oblasti II a III lze také studovat přesné tvary jednotlivých parametrů. Blíže je odvozovat nebudeme, jen poznamenejme, že pro případ stejných hmotností pro všechny částice dostaneme stejné výsledky jako v oblasti I, ale v jiném pořadí pro jednotlivé parametry.

Pro dané vzájemné poměry hmotností jednotlivých částic jsou fyzikální jen některé oblasti roviny reálných. K jejich nalezení je užitečné znát vztah, jehož důkaz zde uvádět nebudeme:

Označíme-li $h = s + t + u$, potom platí nerovnost

$$stu \geq as + bt + cu, \quad (21)$$

kde

$$ah = (m_1^2 m_2^2 - m_3^2 m_4^2)(m_1^2 + m_2^2 - m_3^2 - m_4^2), \quad (22)$$

$$bh = (m_1^2 m_3^2 - m_2^2 m_4^2)(m_1^2 + m_3^2 - m_2^2 - m_4^2) \quad (23)$$

a

$$ch = (m_1^2 m_4^2 - m_2^2 m_3^2)(m_1^2 + m_4^2 - m_2^2 - m_3^2). \quad (24)$$

Pro zjednodušení budeme zkoumat jen speciální případy, kdy některé z hmotností jednotlivých částic si jsou rovny.

Jeden takový případ nastává např. tehdy, když platí

$$m_1 = m_3 = M \text{ a } m_2 = m_4 = m, \quad (25)$$

kde $M > m$. Pak po dosazení do (22), (23) a (24) dostaneme

$$h = 2(M^2 + m^2), a = c = 0 \text{ a } b = (M^2 - m^2)^2, \quad (26)$$

a musí platit

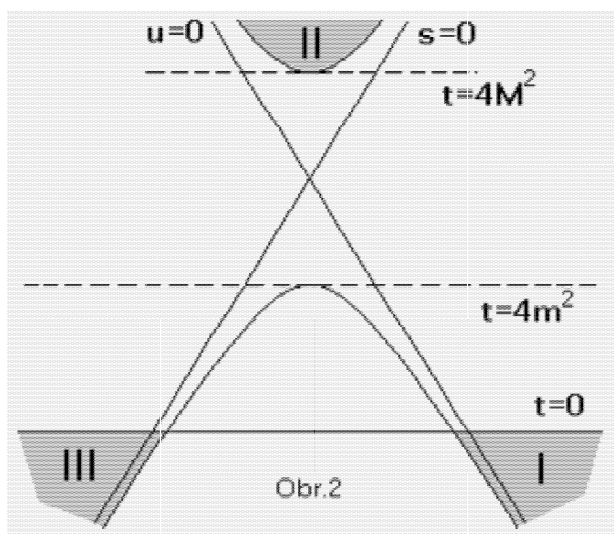
$$stu \geq (M^2 - m^2)^2 t. \quad (27)$$

Tato nerovnost je automaticky splněna, pokud $t = 0$. Jinak musíme odlišit případy

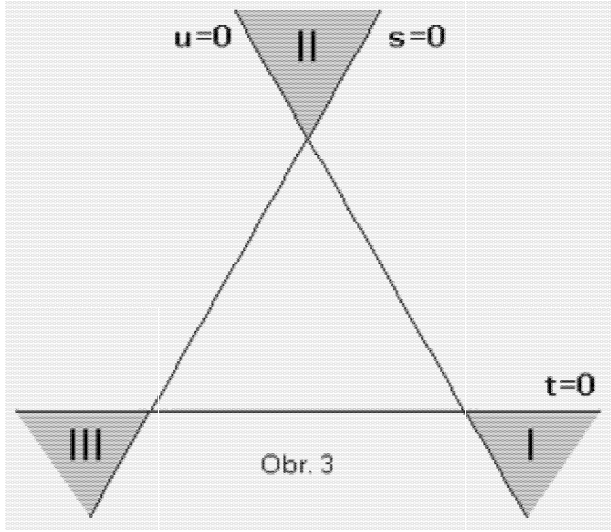
$$t > 0, su > (M^2 - m^2)^2 \text{ a } t < 0, su < (M^2 - m^2)^2. \quad (28)$$

Fyzikální hodnoty parametrů s, t, u pak leží v oblastech roviny ohraničených křivkami, které odpovídají rovnicím

$$t = 0 \text{ a } su = (M^2 - m^2)^2 \quad (29)$$



(viz obr. 2). Pokud navíc bude platit $M = m$, dostaneme $stu \geq 0$ a oblasti fyzikálních hodnot budou odpovídat oblastem vyznačeným na obr. 3 .



V případě, že

$$m_1 = M \text{ a } m_2 = m_3 = m_4 = m \quad (30)$$

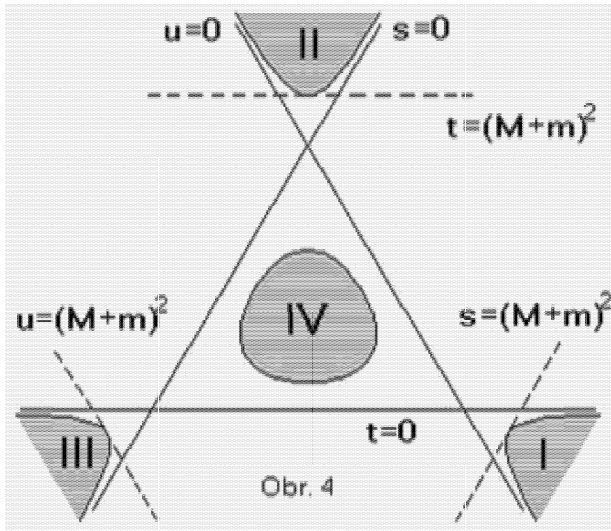
a zároveň

$$M > 3m, \quad (31)$$

pak dostáváme z formulí (22)-(24) vztah

$$stu \geq m^2(M^2 - m^2)^2. \quad (32)$$

Fyzikální hodnoty pak leží ve vyznačených oblastech na obr. 4.



Oblasti IV, kde jsou všechny 3 parametry s, t a u kladné, odpovídá rozpad částice s hmotností M . Takováto oblast hodnot je obecně přípustná jen tehdy, pokud je jedna z hmotností m_1 až m_4 větší než součet ostatních hmotností.

V oblastech přípustných hodnot parametrů rozlišujeme 2 zvláštní případy, a to $t = 0$ a $u = 0$. První z nich nazýváme rozptyl vpřed, druhý nazýváme rozptyl vzad.

Zajímavá je závislost kvadrátem těžišťové energie s na energii E nalétávající částice v laboratorní soustavě. Lze dokázat, že je lineární. Platí totiž (po dosazení $p_{10} = E$)

$$\begin{aligned} s &= (p_1 + p_2)^2 = (p_{10} + p_{20})^2 - (\vec{p}_1 + \vec{p}_2)^2 = (E + m_2)^2 - \vec{p}_1^2 = \\ &= (E + m_2)^2 - (E^2 - m_1^2) = 2m_2E + m_1^2 + m_2^2. \end{aligned} \quad (33)$$

Binární srážky lze uskutečňovat dvojím způsobem: buď jako srážky svazků příslušných částic letících proti sobě nebo jako srážku jedné z částic s nehybným terčem, tvořeným druhou částicí. Většinou se volí první způsob [9]. Při takto pojatém experimentu totiž docílíme s vynaložením podstatně menší energie stejných efektů jako při druhém způsobu (viz tabulka). V důkazu této pozoruhodné skutečnosti vycházíme z právě odvozeného vztahu (33), z něhož po dosazení klidové hmoty protonu $M = m_1 = m_2 \doteq 0.938 \text{ GeV}$ dostaneme

$$s = 2M(E + M), \quad (34)$$

kde E je energie protonu, jejíž hodnoty jsou uvedeny v pravém sloupci tabulky, a z invariance parametru s . Označíme-li hodnoty energie z levého sloupce tabulky symbolem W , můžeme psát

$$s = 2M(E + M) = 4W^2. \quad (35)$$

Energie jednoho z protonů letících proti sobě	Odpovídající energie protonu kolidujícího s nehybným terčem
5 GeV	52 GeV
10 GeV	212 GeV
20 GeV	852 GeV
30 GeV	1918 GeV
50 GeV	5330 GeV
100 GeV	21321 GeV
200 GeV	85287 GeV
270 GeV	155436 GeV

3 Matice rozptylu a poruchový rozvoj

V kvantové teorii se pro popis stavů a pozorovatelných systému v daném čase užívá různých metod. Rozlišujeme Schrödingerovu, Heisenbergovu a Diracovu reprezentaci [8].

Ve Schrödingerově reprezentaci stavy závisí na čase, kdežto pozorovatelné nikoliv. Označíme-li stavy symbolem $|\psi(t)\rangle$ a pozorovatelné symbolem A , můžeme potom psát

$$i\frac{\partial}{\partial t}|\psi(t)\rangle = H|\psi(t)\rangle, \quad (36)$$

kde hamiltonián H je operátorem celkové energie.

V Heisenbergově reprezentaci naopak stavy nezávisí na čase, ale pozorovatelné na nich závisí. Pozorovatelné v Heisenbergově (A_H) a Schrödingerově reprezentaci pak spolu souvisí vztahem

$$A_H(t) = e^{iHt} A e^{-iHt}. \quad (37)$$

V Diracově (též interakční) reprezentaci jsou stavy i pozorovatelné závislé na čase. Stavy tentokrát značíme $|\psi_I(t)\rangle$ a pozorovatelné $A_I(t)$. Hamiltonián má tvar

$$H = H_0 + H_{int}, \quad (38)$$

kde $H_0 \gg H_{int}$, přičemž H_0 je volný a H_{int} interakční hamiltonián, kterým je určen časový vývoj, jak lze dokázat. Mezi pozorovatelnými Diracovy a Schrödingerovy reprezentace platí vztah

$$A_I(t) = e^{iH_0 t} A e^{-iH_0 t} \quad (39)$$

a pro stavy Diracovy a Heisenbergovy reprezentace platí

$$|\psi_I(t)\rangle = e^{-iH_{int}t} |\psi_H\rangle. \quad (40)$$

Platí pak

$$i\frac{\partial}{\partial t}|\psi_I(t)\rangle = H_{int}|\psi_I(t)\rangle. \quad (41)$$

V dalším budeme používat Diracovu reprezentaci, ve které budeme psát $|\psi(t)\rangle$ místo $|\psi_I(t)\rangle$.

Vývoj částice, která se v čase t_0 nalézá ve stavu $|\psi(t_0)\rangle$, popisujeme pomocí evolučního operátoru U , který je dán vztahem

$$|\psi(t)\rangle = U(t, t_0)|\psi(t_0)\rangle. \quad (42)$$

Tento operátor je unitární, tzn. splňuje podmínku

$$U^\dagger U = I, \quad (43)$$

kde $U^\dagger$ je operátor hermitovsky sdružený k operátoru U . Dosazením do příslušné diferenciální rovnice dostáváme, že musí platit

$$\frac{\partial}{\partial t}U(t, t_0) = H_{int}(t)U(t, t_0). \quad (44)$$

Integrací (44) dostáváme

$$U(t, t_0) = I - i \int_{t_0}^t dt' H_{int}(t')U(t', t_0). \quad (45)$$

Dalšími integracemi obdržíme postupně nekonečnou řadu ve tvaru poruchového rozvoje

$$\begin{aligned} U(t, t_0) = & I - i \int_{t_0}^t dt_1 H_{int}(t_1) + (-i)^2 \int_{t_0}^t dt_1 \int_{t_0}^{t_1} dt_2 H_{int}(t_1) H_{int}(t_2) + \dots \\ & \dots + (-i)^n \int_{t_0}^t dt_1 \int_{t_0}^{t_1} dt_2 \dots \int_{t_0}^{t_{n-1}} dt_n H_{int}(t_1) \cdot \dots \cdot H_{int}(t_n) + \dots \end{aligned} \quad (46)$$

Přitom předpokládáme, že n -tý člen tohoto rozvoje, tedy člen tvaru

$$(-i)^n \int_{t_0}^t dt_1 \int_{t_0}^{t_1} dt_2 \dots \int_{t_0}^{t_{n-1}} dt_n H_{int}(t_1) \cdot \dots \cdot H_{int}(t_n)$$

se limitně blíží nule. K témuž výsledku se lze dopracovat iteračním postupem, kdy ve vztahu (45) na pravé straně nejdříve dosadíme za U jednotkovou matici, a poté vždy levou stranu téhož vztahu.

Položíme-li $t_0 = -\infty$ a $t = +\infty$ a označíme

$$U(+\infty, -\infty) \equiv S, \quad (47)$$

dostáváme matici rozptylu, neboli S -matici. Počáteční stav částice, tj. stav v čase $t_0 = -\infty$ formálně označíme $|i\rangle$ a $|f\rangle$ bude jeden z jejích koncových stavů v čase $t = +\infty$. Koeficienty S -matice pak mají tvar

$$S_{fi} = \langle f | S | i \rangle \quad (48)$$

a výrazy $|S_{fi}|^2$ určují pravděpodobnosti přechodů ze stavů $|i\rangle$ do stavů $|f\rangle$.

Srážce částic, mezi kterými nepůsobí žádná interakce, odpovídá jednotková S -matice, tedy $S_{fi} = \delta_{fi}$. Koeficienty obecné S -matice mají potom v prvním řádu rozvoje tvar

$$S_{fi}^{(1)} = \delta_{fi} + i(2\pi)^4 \delta^{(4)}(P_f - P_i) T_{fi}. \quad (49)$$

4-rozměrná δ -funkce v tomto výrazu vyjadřuje zákon zachování čtyřhybnosti (P_i a P_f dávají součty čtyřhybností všech částic příslušných daným stavům). Koeficienty T_{fi} matice T nazýváme amplitudy rozptylu [2].

Amplitudy rozptylu lze použít k výpočtu měřitelných veličin, pravděpodobnosti přechodu a účinných průřezů.

Pro výpočet pravděpodobnosti přechodu je důležité znát přibližné (formální) vyjádření $\delta^{(4)}$ -funkce:

$$\delta^{(4)}(P_f - P_i) = \frac{1}{(2\pi)^4} \int e^{i(P_f - P_i)x} d^4x. \quad (50)$$

Platí zákony zachování energie a hybnosti, tedy $P_f = P_i$ a integrací pro konečný objem a konečný časový interval dostáváme

$$\delta^{(4)}(P_f - P_i) = \frac{Vt}{(2\pi)^4}. \quad (51)$$

Pak pro nediagonální koeficienty platí

$$|S_{fi}^{(1)}|^2 = (2\pi)^4 \delta^{(4)}(P_f - P_i) |T_{fi}|^2 Vt, \quad (52)$$

což pro $t = 1$ s přepíšeme na tvar

$$w_{i \rightarrow f} = (2\pi)^4 \delta^{(4)}(P_f - P_i) |T_{fi}|^2 V. \quad (53)$$

Na element fázového prostoru $\prod_{\alpha} d^3 p'_{\alpha}$, kde α probíhá přes všechny částice v koncovém stavu a p'_{α} jsou jejich 4-hybnosti, připadá $\prod_{\alpha} \frac{V d^3 p'_{\alpha}}{(2\pi)^3}$ možných stavů. To vyplývá z toho, že pro složku hybnosti p'_{α} a konečný objem $V = L^3$ platí rovnost $L p'_{\alpha} = 2\pi n_{\alpha}$, kde n_{α} je počet přípustných stavů. Pro nekonečně malý fázový objem tedy získáme odvozený tvar.

Element pravděpodobnosti pak bude

$$dw = (2\pi)^4 \delta^{(4)}(P_f - P_i) |T_{fi}|^2 V \prod_{\alpha} \frac{V d^3 p'_{\alpha}}{(2\pi)^3}, \quad (54)$$

a pro 2-částicovou srážku, při které vzniknou jiné 2 částice, dostaneme

$$dw = \frac{V^3}{4\pi^2} \delta^{(4)}(P_f - P_i) |T_{fi}|^2 d^3 p'_3 d^3 p'_4. \quad (55)$$

Z elementu pravděpodobnosti je možno spočítat diferenciální účinný průřez, neboť účinný průřez je definován jako podíl počtu částic uskutečňujících daný typ srážky, dělený hustotou toku všech částic. Počet částic je úměrný pravděpodobnosti

přechodu. Hustota toku částic je úměrná proudové hustotě j , kterou v těžiškové soustavě spočteme (v případě srážky 2 částic) ze vzorce

$$j = \frac{|\vec{p}|}{V} \left(\frac{1}{\epsilon_1} + \frac{1}{\epsilon_2} \right), \quad (56)$$

kde $|\vec{p}| = |\vec{p}_1| = |\vec{p}_2|$ je velikost hybnosti obou částic a ϵ_1 a ϵ_2 jsou jejich energie. Pro diferenciální účinný průřez $d\sigma$ pak bude platit

$$d\sigma = \frac{dw}{j} \quad (57)$$

a po dosazení

$$d\sigma = \frac{V^4}{4\pi^2 |\vec{p}|} \delta^{(4)}(P_f - P_i) |T_{fi}|^2 \frac{\epsilon_1 \epsilon_2}{(\epsilon_1 + \epsilon_2)} d^3 p'_3 d^3 p'_4. \quad (58)$$

V případě rozpadu 1 částice na částice se čtyřhybnostmi p'_α v elementu fázového prostoru $\prod_\alpha d^3 p'_\alpha$ bude mít element pravděpodobnosti opět tvar (54), který v případě rozpadu na 2 částice přejde na tvar (55) s pozměněnými indexy u 4-hybností

$$dw = \frac{V^3}{4\pi^2} \delta^{(4)}(P_f - P_i) |T_{fi}|^2 d^3 p'_1 d^3 p'_2. \quad (59)$$

Kromě diferenciálního účinného průřezu lze také z koeficientů matice T spočítat totální účinný průřez σ_{tot} . K němu dospějeme tímto postupem:

Z unitarity operátoru U plyne také unitarita operátoru S , a proto

$$S^\dagger S = I. \quad (60)$$

Potom platí

$$\sum_n (\delta_{nf} - i(2\pi)^4 \delta^{(4)}(P_n - P_f) T_{nf}^*) (\delta_{ni} + i(2\pi)^4 \delta^{(4)}(P_n - P_i) T_{ni}) = \delta_{fi}, \quad (61)$$

kde index n probíhá přes všechny možné stavy. Podotkněme, že zápis $\sum_n$ je zde pouze symbolický, protože zahrnuje také integraci přes všechny možné hybnosti a násobení příslušnými konstantami. Ze vztahu (61) plyne

$$T_{fi} - T_{if}^* = i(2\pi)^4 \sum_n \delta^{(4)}(P_f - P_n) T_{fn} T_{in}^*. \quad (62)$$

Pro imaginární části koeficientů T_{ii} (pružný rozptyl vpřed) tak dostáváme

$$2Im T_{ii} = (2\pi)^4 \sum_n |T_{in}|^2 \delta^{(4)}(P_i - P_n). \quad (63)$$

Pravá strana rovnice je vlastně zintegrovaný vztah pro diferenciální účinný průřez. Totální účinný průřez σ_{tot} je definován obdobně, takže toto vynásobíme výrazem $\frac{V}{j}$ a dostáváme

$$\sigma_{tot} = \frac{(2\pi)^4 V}{j} \sum_n |T_{in}|^2 \delta^{(4)}(P_i - P_n) = \frac{2V}{j} \text{Im} T_{ii}. \quad (64)$$

Tomuto vztahu říkáme také optický teorém. Jeho důležitost spočívá především v tom, že dává do souvislosti 2 nezávisle měřitelné veličiny.

4 Problémy dynamiky procesů a disperzní relace

Cílem moderní fyziky je najít způsob, jak popsat veškeré silové působení z hlediska jednotné teorie. V současné době pozorujeme 4 druhy interakcí: silnou, slabou, elektromagnetickou a gravitační [9]. Všechny tyto interakce by se měly uskutečňovat prostřednictvím tzv. zprostředkujících částic, charakteristických pro jednotlivé typy interakcí. Existence těchto částic je potvrzena pro první 3 typy interakcí, graviton (zprostředkující částice gravitační interakce) nebyl dosud úspěšně prokázán. Zatím se podařilo sjednotit slabou a elektromagnetickou interakci do jediné teorie tzv. elektroslabé interakce (Weinberg, Salam, 1967-68, potvrzeno 1983).

V současné době se zatím úspěšně pracuje na ověřování standardního modelu - jednotné teorie silné, slabé a elektroslabé interakce (projekty LEP a LHC v CERNu). Ta pro případ elektroslabých interakcí vyžaduje existenci Higgsovy částice, která ale dosud nebyla experimentálně prokázána. Opírá se také o existenci kvarků, tj. částic, ze kterých se skládají všechny hadrony (částice citlivé na silnou interakci). Blíže se jimi zabývá kvantová chromodynamika. Tyto částice byly teoreticky předpovězeny v 60. letech (M. Gell-Mann, Georg Zweig, 1963) a jejich existence byla zatím prokázána pouze nepřímo, nepodařilo se totiž dosud z žádného hadronu vytěsnit jediný kvark. To je mj. důsledkem neobvyklého charakteru přitažlivých sil mezi kvarky - rostou se zvyšující se vzdáleností. Na druhou stranu experimenty ukazují, že např. do hloubky ostřelovaný proton se chová jako složený ze 3 bodových částic, interpretovatelných jako kvarky.

Tzv. teorie supersymetrie, předpokládá symetrii mezi počtem kvarků a leptonů (částic netečných k silné interakci, tj. elektronů, mionů, tauonů a k nim příslušných neutrin). Potom by byly možné přeměny kvarků na leptony a naopak, což by umožňovalo existenci procesů, při nichž by byly narušeny zákony zachování leptonového a baryonového čísla, např. rozpady

$$p \rightarrow e^+ + \pi$$

$$p \rightarrow \bar{\nu} + \pi.$$

Takovéto procesy jsou možné za předpokladu, že ani proton není stabilní částice, ale částice s velmi vysokým poločasem rozpadu - řádově 10^{30} let. Zatím však žádný rozpad tohoto typu nebyl pozorován.

Závažným problémem jsou obtíže spojené s využíváním poruchové metody (viz kap. 3), která v kvantové chromodynamice vede k řadám, které nejen divergují, ale nejsou ani borelovsky sumovatelné a dosud je u nich známo jen několik prvních členů z důvodů technických potíží spojených s jejich výpočtem. Proto jsou velmi důležité výsledky získané bez použití poruchové metody založené např. na symetriích, teorii strun apod. Výhodné je taky znát informace o singularitách a oblastech analytičnosti některých funkcí, z nichž počítáme jednotlivé veličiny. To platí i pro amplitudu rozptylu.

Amplitudu rozptylu lze definovat jako komplexní funkci energie rozptylu v komplexní rovině energie při pevné hodnotě úhlu rozptylu. Vztahy mezi její reálnou a imaginární částí (které jsou měřitelné) lze studovat pomocí tzv. disperzních relací [7], založených na Cauchyho integrální větě. Jak už ale bylo řečeno, je k tomu nutné znát informace o singularitách. Jinak jsou zapotřebí některé další předpoklady.

Podle Cauchyho integrálního vzorce platného pro holomorfní funkce platí

$$F(z) = \frac{1}{2\pi i} \int_{\varphi} \frac{F(z')}{z' - z} dz', \quad (65)$$

kde $F(z)$ je daná holomorfní funkce a φ je nějaká uzavřená křivka v Gaussově rovině, v jejímž vnitřku se číslo z nalézá. Vzorec můžeme přepsat jako

$$Re F(z) + iIm F(z) = \frac{-i}{2\pi} \int_{\varphi} \frac{Re F(z') + iIm F(z')}{z' - z} dz', \quad (66)$$

což pro reálné hodnoty z přejde na tvar

$$\begin{aligned} Re F(z) + iIm F(z) &= \frac{-i}{2\pi} \cdot 2P \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{Re F(z') + iIm F(z')}{z' - z} dz' = \\ &= \frac{1}{\pi} P \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{Im F(z') - iRe F(z')}{z' - z} dz', \end{aligned} \quad (67)$$

kde P značí hlavní hodnotu integrálu. Položíme-li $z = x$, můžeme psát

$$Re F(x) = \frac{1}{\pi} P \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{Im F(x')}{x' - x} dx', \quad Im F(x) = -\frac{1}{\pi} P \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{Re F(x')}{x' - x} dx'. \quad (68)$$

Předpokládáme-li, že platí

$$Re F(-x) = Re F(x) \quad (69)$$

a

$$\operatorname{Im} F(-x) = -\operatorname{Im} F(x) \quad (70)$$

(viz vlastnost (ii) symetrických amplitud v následující kapitole), můžeme dále psát

$$\begin{aligned} \operatorname{Re} F(x) &= \frac{1}{\pi} P \int_0^{+\infty} \frac{\operatorname{Im} F(x')}{x' - x} dx' + \frac{1}{\pi} P \int_{-\infty}^0 \frac{\operatorname{Im} F(x')}{x' - x} dx' = \frac{1}{\pi} P \int_0^{+\infty} \frac{\operatorname{Im} F(x')}{x' - x} dx' + \\ &\quad - \frac{1}{\pi} P \int_0^{+\infty} \frac{\operatorname{Im} F(x')}{x' - x} dx' = \frac{1}{\pi} P \int_0^{+\infty} \frac{\operatorname{Im} F(x')}{x' - x} dx' + \frac{1}{\pi} P \int_0^{+\infty} \frac{\operatorname{Im} F(-x')}{-x' - x} dx' = \\ &= \frac{1}{\pi} P \int_0^{+\infty} \operatorname{Im} F(x') \left(\frac{1}{x' - x} - \frac{1}{-x' - x} \right) dx' = \frac{2}{\pi} P \int_0^{+\infty} \operatorname{Im} F(x') \frac{x'}{x'^2 - x^2} dx'. \end{aligned} \quad (71)$$

Pro konvergenci integrálu v posledním výrazu je nutné (ale nikoli postačující!), aby platilo

$$\lim_{x' \rightarrow \infty} \operatorname{Im} F(x') = 0. \quad (72)$$

Tuto podmínku lze zeslabit, dosadíme-li místo $F(x)$ výraz $F(x) - F(x_0)$ pro nějaké konkrétní x_0 , tzv. subtrakcí. K tomu je zapotřebí, abychom znali reálnou i imaginární část funkce $F(x)$ v bodě x_0 . Pak můžeme psát

$$\begin{aligned} \operatorname{Re} F(x) - \operatorname{Re} F(x_0) &= \frac{2}{\pi} \int_0^{+\infty} x' \operatorname{Im} F(x') \left(\frac{1}{x'^2 - x^2} - \frac{1}{x'^2 - x_0^2} \right) dx' = \\ &= \frac{2(x^2 - x_0^2)}{\pi} \int_0^{+\infty} \frac{x' \operatorname{Im} F(x')}{(x'^2 - x^2)(x'^2 - x_0^2)} dx'. \end{aligned} \quad (73)$$

Aby konvergoval tento výraz, musí mj. platit

$$\lim_{x' \rightarrow \infty} \frac{\operatorname{Im} F(x')}{x'^2} = 0, \quad (74)$$

tedy je zapotřebí slabší podmínka než v předešlém případě.

Binární srážka (a tedy i příslušná amplituda rozptylu) je, jak bylo odvozeno ve 2.kapitole, závislá na 2 kinematických proměnných, za které můžeme vzít s a t . Položíme-li $x = s$ a t ponecháme pevné, bude vztah (73) tzv. disperzní relací, tj. vztahem mezi reálnou a imaginární částí symetrické (viz následující kapitola) amplitudy rozptylu. V další kapitole podrobněji prostudujeme vlastnosti funkcí splňujících požadavky kladené na amplitudy rozptylu.

5 O třídě funkcí, do níž řadíme amplitudu rozptylu

Podívejme se, jaké matematické vlastnosti má funkce $F(s, t)$ představující amplitudu rozptylu jako funkci s při pevném t . Funkce, které mohou být vhodnými kandidáty na amplitudy rozptylu, musí vyhovovat jistým podmínkám. Rozlišujeme podmínky pro tzv. symetrické a antisymetrické amplitudy rozptylu. Ty jsou definovány tímto způsobem:

Označíme $F_{\pm}(s, t)$ amplitudu rozptylu způsobeného dopadem příslušné konkrétní částice (index "+"), resp. antičástice (index "-") na tentýž terčik, přitom s a t jsou parametry, o kterých jsme mluvili v 2.kapitole. Takto potom můžeme dále definovat sudou a lichou amplitudu rozptylu $F_S(s, t)$ a $F_A(s, t)$, pro které platí

$$F_S(s, t) = \frac{F_+(s, t) + F_-(s, t)}{2} \quad (75)$$

a

$$F_A(s, t) = \frac{F_-(s, t) - F_+(s, t)}{2}. \quad (76)$$

Zaměříme se na ty první. Třidu funkcí, které lze dosadit za symetrické amplitudy rozptylu, označujeme $\mathcal{F}$.

Dříve, než se začneme zabývat jejich vlastnostmi, si ujasníme značení. V dalším položíme proměnnou t rovnou pevné hodnotě t_0 a budeme zkoumat vlastnosti amplitud rozptylu v závislosti na jediné proměnné s . Formálně tedy píšeme $F(s, t = t_0) = F(s)$. Závislost parametru s na parametru E je však lineární (viz kapitola 2.), a proto se často užívá zápis $F(E)$ místo $F(s)$.

Funkce třídy $\mathcal{F}$ jakožto funkce komplexní proměnné splňují 7 základních předpokladů [1, 6]:

(i)

$$(\exists K_1 \geq 0)(F_S(z) \text{ je holomorfní v } D_{K_1} \equiv \{z \mid |z| > K_1, \operatorname{Im} z > 0\})$$

(ii)

$$F_S(z) = \overline{F_S(-\bar{z})} (\forall z \in D_{K_1})$$

(iii)

$$F_S(z) \text{ je spojitá v } \overline{D_{K_1}} \text{ (s možnou výjimkou v bodě } z = \infty).$$

(iv)

$$F_S(z) \text{ je polynomiálně omezena v } D_{K_1} \text{ pro } z \rightarrow \infty.$$

(v)

$\exists C, K_2 > 0 : |F(E)/(E \ln^2 E)| \leq C$ pro každé $E \in \mathcal{R}, E > K_2$.

(vi)

$\text{Im } F_S(E) \geq 0$ pro každé $E \in \mathcal{R}, E > K_3 > 0$.

(vii)

$$\int_{K_4}^{\infty} \frac{\text{Im } F_S(E)}{E} dE > \frac{1}{2} \int_0^{\pi} \text{Re } F_S(K_4 e^{i\varphi}) d\varphi \text{ pro nějaké } K_4 > K_1.$$

Požadavek (v) někdy nahrazujeme slabším požadavkem (v'):

$$\lim_{E \rightarrow \infty} F_S(E)/E^2 = 0.$$

Třidu funkcí, kde je požadavek (v) nahrazen požadavkem (v'), označujeme $\mathcal{F}' : \mathcal{F} \subset \mathcal{F}'$.

Vlastnosti (i)-(vii) tvoří základ axiomatické teorie. Některé z nich mají svůj původ v obecných fyzikálních vlastnostech rozptylu (např. (i), (ii) a (v)), jiné (jako např. spojitost (iii), omezenost (iv)) jsou voleny spíše za účelem zjednodušení výpočtů.

Nyní si definujeme dva symboly, se kterými se v dalším textu budeme často setkávat. Jedná se o symboly $\rho_S(E)$ a $\sigma_S(E)$ a jsou definovány těmito vztahy:

$$\rho_S(E) = \frac{\text{Re } F_S(E)}{\text{Im } F_S(E)}, \quad \sigma_S(E) = \frac{\text{Im } F_S(E)}{E}.$$

Druhý z nich má tedy fyzikální význam účinného průřezu srážky, jak plyne ze vztahu (64).

Uveďme některé fyzikálně významné vysokoenergetické vztahy platné pro funkce tříd $\mathcal{F}$ a $\mathcal{F}'$ [1,4]:

I. Nechť $F_S(E) \in \mathcal{F}$, potom

$$\mathcal{L} = \int_{E_0}^{\infty} \left(\arctan \rho_S(E) - \frac{\pi}{\ln E} \right) \frac{dE}{E} \quad (77)$$

je shora omezeno konečným číslem.

II. Jestliže (i) až (vi) platí a $\rho_S(E)$ je takové, že $\mathcal{L} = \infty$, potom

$$\int_{E_0}^{\infty} \sigma_S(E) dE \text{ a } \left| \int_{E_0}^{\infty} \operatorname{Re} F_S(E) \frac{dE}{E^2} \right|$$

konvergují.

III. Necht $F_S(z)$ splňuje (i) až (vi), jestliže $\rho_S(E)$ splňuje

$$\mathcal{A} = \int_{E_0}^{\infty} \arctan \rho_S(E) \frac{dE}{E} < \infty, \quad (78)$$

potom

$$\liminf_{E \rightarrow \infty} \sigma_S(E) < \infty. \quad (79)$$

IV. Jestliže $\sigma_S(E)$ neomezeně roste, pak $\rho_S(E)$ je asymptoticky omezeno shora i zdola těmito relacemi:

$$\mathcal{A} \equiv \int_{E_0}^{\infty} \arctan \rho_S(E) \frac{dE}{E} = \infty, \quad (80)$$

$$\mathcal{L} \equiv \int_{E_0}^{\infty} \left(\arctan \rho_S(E) - \frac{\pi}{\ln E} \right) \frac{dE}{E} < \infty. \quad (81)$$

V. Necht $F_S(E)$ náleží do třídy $\mathcal{F}$ a $\lim \sigma_S(E)$ a $\lim \rho_S(E)$ (ať konečné nebo nekonečné) existují, potom:

$$1) \lim \sigma_S(E) = \infty \Leftrightarrow \mathcal{A} \equiv \int_{E_0}^{\infty} \arctan \rho_S(E) \frac{dE}{E} = +\infty,$$

$$2) \lim \sigma_S(E) = \text{const} > 0 \Leftrightarrow \mathcal{A} \text{ je konečné,}$$

$$3) \lim \sigma_S(E) = 0 \Leftrightarrow \mathcal{A} = -\infty.$$

VI.

Jestliže

$$\tan \pi \alpha \leq |\rho_S(E)| \leq \tan \pi \beta, 0 < \alpha \leq \beta \leq \frac{1}{2}, \quad (82)$$

pak

$$|F_S(E)| \leq C E^{-1+2\beta} \text{ pro } \operatorname{Re} F_S(E) > 0 \quad (83)$$

a

$$|F_S(E)| \leq C E^{1-2\alpha} \text{ pro } \operatorname{Re} F_S(E) < 0, \quad (84)$$

kde $C > 0$.

VII.

Jestliže

$$\int \rho_S(E) d \ln E$$

konverguje, pak existují taková reálná C_1, C_2 , že

$$C_1 \leq \sigma_S(E) \leq C_2 \quad (85)$$

za předpokladu, že

$$\operatorname{const} E^{1-\varepsilon} \leq |F_S(E)| \leq \operatorname{const} E^{1+\varepsilon}, \quad (86)$$

kde $\operatorname{const} > 0$.

VIII.

$$\left| \int \frac{\operatorname{Re} (F_S(E) - F_S(0))}{E^2 \ln^{2+\varepsilon}} dE \right| < \infty \quad (87)$$

IX.

$$\lim \langle \sigma_S \rangle_E = \infty \Leftrightarrow \lim \int \frac{\operatorname{Re} F_S(E)}{E^2} dE = +\infty; \quad (88)$$

$$\lim \langle \sigma_S \rangle_E = 0(1) \Leftrightarrow \lim \int \frac{\operatorname{Re} F_S(E)}{E^2} dE = 0(1), \quad (89)$$

přičemž platí

$$\langle \sigma_S \rangle_E = \frac{1}{\ln E} \int_{E_0}^E \sigma_S(E) d \ln E. \quad (90)$$

Pro velmi vysoké energie dochází ve vztazích derivací reálné a imaginární části symetrické amplitudy a jiných veličin z ní odvozených k významným zjednodušením.

Toho lze využít při výpočtu různých fyzikálních kvantit týkajících se rozptylové amplitudy (reálné části, fáze, modulu atd.) z jiných naměřených veličin. Jsou známy různé limitní vztahy [6,11] plynoucí z podílových, rozdílových, případně obou typů vět [5]. Ty však nemají univerzální platnost, každá platí pro jiný typ funkcí.

Vezměme si například vztah

$$\frac{d}{d \ln E} \ln \left| \frac{F_S(E)}{E} \right| \rightarrow \frac{2}{\pi} \arctan \left(\frac{\operatorname{Re} F_S(E)}{\operatorname{Im} F_S(E)} \right), \quad (91)$$

který lze chápat buď tak, že podíl jeho levé a pravé strany se pro velmi vysoké energie blíží 1, nebo se rozdíl levé a pravé strany blíží 0.

Jiný vysokoenergetický vztah dává do souvislosti reálnou a imaginární část amplitudy rozptylu tímto způsobem:

$$\frac{\operatorname{Re} F_S(E)}{E} \rightarrow \frac{\pi}{2} \frac{d}{d \ln E} \frac{\operatorname{Im} F_S(E)}{E}. \quad (92)$$

Znak $\rightarrow$ v tomto vztahu interpretujeme podobným způsobem jako ve vztahu (91).

Při dokazování některé z obou možných interpretací vztahu (91) pro konkrétní typ funkce používáme některou z následujících dvou vět.

Věta 1.

Nechť $F_S(E)$ náleží do třídy $\mathcal{F}'$ a splňuje

$$\lim_{E \rightarrow \infty} \left| \ln \left| \frac{F_S(E)}{E^{1-\eta}} \right| \right| = \infty, \quad (93)$$

kde η je reálné číslo. Pokud

$$\lim_{E \rightarrow \infty} \frac{\frac{d}{d \ln E} \ln \left| \frac{F_S(E)}{E^{1-\eta}} \right|}{\eta + \frac{2}{\pi} \arctan \left(\frac{\operatorname{Re} F_S(E)}{\operatorname{Im} F_S(E)} \right)} \quad (94)$$

existuje, pak je rovna 1.

Náznak **důkazu**:

Protože limita (94) existuje, musí být výraz definován na jistém okolí bodu nekonečno, tedy čitatel i jmenovatel zlomku mají smysl a funkce $F_S(E)$ musí být proto nad určitou hodnotou nenulová. Pak v důsledku l'Hospitalova pravidla má limitu také výraz, který vznikne integrací čitatele i jmenovatele zlomku, kde jako integrační proměnnou bereme $\ln E$ (výraz vzniklý integrací jmenovatele bude mít nekonečnou hodnotu, podmínka pro vhodnost užití l'Hospitalova pravidla je tedy

splněna). Obě tyto limity si jsou rovny. Zbývá dokázat, že nově vzniklý výraz má nenulovou limitu, pak má limitu i jeho převrácená hodnota a tvrzení věty plyne z jiné podílové věty uvedené v použité literatuře.

Věta 2.

Nechť výraz

$$D(E) = \frac{d}{d \ln E} \left| \frac{F_S(E)}{E^{1-\eta}} \right| - \left| \frac{F_S(E)}{E^{1-\eta}} \right| \left[\eta + \frac{2}{\pi} \arctan \rho_S(E) \right], \quad (95)$$

kde $\eta \leq 0$ a $F_S(E) \in \mathcal{F}$, má limitu pro $E \rightarrow \infty$, pak je tato limita rovna nule.

Náznak **důkazu**:

Protože limita výrazu (95) existuje, je definován pro libovolnou hodnotu E , která je vyšší než jistá hodnota. Abychom větu dokázali, předpokládejme opak. Z rovnosti [6]

$$\ln \left| \frac{F_S(E)}{E^{1-\eta}} \right| - \int_{E_0}^E \left[\eta + \frac{2}{\pi} \arctan \rho_S(E') \right] \frac{dE'}{E'} + \mu(E) - C_{E_0} + \ln E_0 = 0 \quad (96)$$

a (95) plyne

$$D(E) = - \left| \frac{F_S(E)}{E^{1-\eta}} \right| \frac{d\mu(E)}{d \ln E}. \quad (97)$$

Je-li $\lim_{E \rightarrow \infty} D(E)$ nenulová, pak integrál

$$I(E) = \int_{\ln E_0}^{\ln E} \left| \frac{F_S(E')}{E'^{1-\eta}} \right| \frac{d\mu(E')}{d \ln E'} \frac{d \ln E'}{\ln E'} \quad (98)$$

musí divergovat pro $E \rightarrow \infty$. Díky vlastnosti (v) ho můžeme omezit seshora:

$$\begin{aligned} |I(E)| &< \left| \int_{\ln E_0}^{\ln E} \ln E' \frac{d\mu(E')}{d \ln E'} d \ln E' \right| = \\ &= \left| \mu(E) \ln E - \mu(E_0) \ln E_0 - \int_{\ln E_0}^{\ln E} \mu(E') d \ln E' \right|. \end{aligned} \quad (99)$$

Avšak divergence tohoto výrazu pro $E \rightarrow \infty$ je v rozporu s tvrzením [6]

$$\left| \int_{E_0}^E \mu(E') \frac{dE'}{E'} \right| < \text{const.} \quad (100)$$

Další dvě věty se používají při důkazech vztahu (92).

Věta 3.

Nechť $F_S(E)$ náleží do třídy $\mathcal{F}$, splňuje vztah

$$\lim_{E \rightarrow \infty} \left| \ln \left| \frac{F_S(E)}{E^{1-\eta}} \right| \right| = \infty \quad (101)$$

a necht' $\lim_{E \rightarrow \infty} \rho_S(E)$ existuje a je nezáporná. Pokud existuje

$$\lim_{E \rightarrow \infty} \frac{E^{1-\eta} \frac{d}{d \ln E} \frac{\text{Im } F_S(E)}{E^{1-\eta}}}{\frac{2}{\pi} \text{Re } F_S(E) + \eta \text{Im } F_S(E)}, \quad (102)$$

pak je rovna jedné.

Věta 4.

Nechť

$$D(E) = \frac{d}{d \ln E} \frac{\text{Im } F_S(E)}{E} - \frac{2}{\pi} \frac{\text{Re } F_S(E)}{E} \quad (103)$$

a předpokládejme splnění těchto podmínek:

- $F_S(E) \in \mathcal{F}$ a $\lim_{E \rightarrow \infty} D(E)$ existují
- $\lim_{E \rightarrow \infty} \rho_S(E) \ln E$ existuje
- $\lim_{E \rightarrow \infty} \sigma_S(E)$ existuje
- $\text{Re } F_S(E)$ nemění své znaménko nad určitou energií.

Pak $\lim_{E \rightarrow \infty} D(E) = 0$.

6 Funkce tříd $\mathcal{E}$, $\mathcal{E}'$ a jejich vlastnosti

Prostudujme nyní pro ilustraci jistý speciální případ třídy funkcí, které jsou vhodnými kandidáty na amplitudy rozptylu [1].

Nechť

$$\begin{aligned} F_S(z) &= F_S^{abc}(z) = c(-iz)^a (\ln(-iz))^b = cz^a (-i)^a (\ln(-i) + \ln z)^b = \\ &= cz^a e^{-ia\frac{\pi}{2}} \left(\ln z - i\frac{\pi}{2} \right)^b \Rightarrow F_S^{abc}(E) = cE^a e^{-ia\frac{\pi}{2}} \left(\ln E - i\frac{\pi}{2} \right)^b, \end{aligned} \quad (104)$$

kde a, b, c jsou reálné parametry, $c \neq 0$.

$F_S^{abc}(z)$ vyhovuje vlastnostem **(i)**, **(ii)**, **(iii)**, **(iv)** pro libovolná a, b, c . Ostatní vlastnosti jsou splněny za těchto podmínek:

(v) pro $a < 1 \vee (a = 1 \wedge b < 2) \vee (a = 1 \wedge b = 2 \wedge |c| < C)$,

(v') pro $a < 2 \vee (a = 2 \wedge b < 0)$, vlastnost

(vi) platí, když $(c > 0 \wedge a \in (4k + 2, 4k + 4)) \vee (c < 0 \wedge a \in (4k, 4k + 2))$ nebo $\text{sgn } c = (-1)^{k+1} \text{sgn } b$ pro $a = 2k$ $k \in \mathcal{Z}$ a ke splnění

(vii) je zapotřebí, aby platilo $\text{sgn } c = -\text{sgn } b \vee (c < 0 \wedge b = 0)$ pro $a = 0$, $(k > 0 \wedge (-1)^{k+1}bc > 0) \vee (k < 0 \wedge \text{sgn } [(-1)^{k+1}bc] = \text{sgn } (b - 1))$ za předpokladu $0 \neq a = 2k, k \in \mathcal{Z}$ a $(a > 0 \wedge c \sin \frac{\pi}{2}a < 0) \vee (a < 0 \wedge \text{sgn } b = -\text{sgn } [c \sin \frac{\pi}{2}a])$ pro $a \neq 2k, k \in \mathcal{Z}$.

Funkce $F_S^{abc}(z)$, kde parametry a, b, c vyhovují požadavkům pro splnění podmínek **(v)**, **(vi)** a **(vii)**, tvoří třídu $\mathcal{E}$. Analogicky definujeme třídu funkcí $\mathcal{E}'$, ve které je vlastnost **(v)** nahrazena vlastností **(v')**. Platí přitom $\mathcal{E} \subset \mathcal{E}' \subset \mathcal{F}'$ a $\mathcal{E} \subset \mathcal{F}$. Potom lze podmínky pro parametry a, b, c v případě jednotlivých tříd shrnout takto:

Pro obě třídy, $\mathcal{E}$ i $\mathcal{E}'$, platí

$$\begin{aligned} a = 4k + 2 \wedge [(a > 0 \wedge b > 0 \wedge c > 0) \vee (a > 0 \wedge b < 0 \wedge c < 0) \vee \\ \vee (a < 0 \wedge 1 \neq b > 0 \wedge c > 0)] \end{aligned}$$

nebo

$$\begin{aligned} a = 4k \wedge [(a > 0 \wedge b > 0 \wedge c < 0) \vee (a > 0 \wedge b < 0 \wedge c > 0) \vee \\ \vee (a < 0 \wedge 1 \neq b > 0 \wedge c < 0)]. \end{aligned}$$

Pro třídu $\mathcal{E}$ jsou pak navíc přípustné možnosti

$$[a \in (0, 1) \vee (a < 0 \wedge b > 0)] \wedge c \sin \frac{\pi}{2}a < 0$$

nebo

$$(a = 1 \wedge b < 2 \wedge c < 0) \vee (a = 1 \wedge b = 2 \wedge 0 < -c < C).$$

Pro třídu $\mathcal{E}'$ lze volit

$$[a \in (0, 2) \vee (a < 0 \wedge b > 0)] \wedge c \sin \frac{\pi}{2}a < 0.$$

Otestujme na příkladu funkcí třídy $\mathcal{E}$ platnost vztahů (91) a (92) pro parametry $a \in (0, 1)$ a $c < 0$ (o důvodech této volby budeme mluvit později). Použijeme přitom **věty 1. až 4.** Lze dokázat, že ve vysokoenergetické aproximaci platí

$$F_S^{abc}(E) \sim cE^a \ln^b E e^{-i\frac{\pi}{2}(a+\frac{b}{\ln E})}, \quad (105)$$

$$\operatorname{Re} F_S^{abc}(E) \sim cE^a \ln^b E \cos \left[\frac{\pi}{2} \left(a + \frac{b}{\ln E} \right) \right] \quad (106)$$

a

$$\operatorname{Im} F_S^{abc}(E) \sim -cE^a \ln^b E \sin \left[\frac{\pi}{2} \left(a + \frac{b}{\ln E} \right) \right]. \quad (107)$$

Zkusme tedy dosadit do vztahu (91). Levá strana dává

$$\begin{aligned} \frac{d}{d \ln E} \ln \left| \frac{F_S^{abc}(E)}{E} \right| &= \frac{d}{d \ln E} \left\{ \ln |c| E^{a-1} \ln^b E \right\} = \\ &= \frac{d}{d \ln E} \left\{ \ln |c| + (a-1) \ln E + b \ln \ln E \right\} = a-1 + \frac{b}{\ln E}. \end{aligned} \quad (108)$$

Podíl reálné a imaginární části amplitudy rozptylu na pravé straně relace má tvar

$$\frac{\operatorname{Re} F_S^{abc}(E)}{\operatorname{Im} F_S^{abc}(E)} = -\cot \left[\frac{\pi}{2} \left(a + \frac{b}{\ln E} \right) \right] = -\tan \left[\frac{\pi}{2} \left(1 - a - \frac{b}{\ln E} \right) \right], \quad (109)$$

z čehož po dosazení do funkce arctan a vynásobením příslušnou konstantou dostaneme tentýž výraz jako na levé straně, tedy pro funkci $F_S^{abc}(E)$ vztah (91) platí.

Obtížnější bude ověřování vztahu (92). Podle **věty 3.** musí být splněna podmínka

$$\lim_{E \rightarrow \infty} \left| \ln \left| \frac{F_S^{abc}(E)}{E} \right| \right| = \infty. \quad (110)$$

Zároveň však limita $\rho_S(E)$ musí být nezáporná, což jak lze snadno dokázat, není pravda pro $a \in (0, 1)$. Jediná možná hodnota je $a = 1$, kdy je tato limita rovna 1. Tedy příslušný podíl musí konvergovat k 1 pouze pro $a = 1$.

Předpoklady **věty 4.** jsou splněny bezesbytku, a tedy jde zřejmě příslušný rozdíl k nule.

Ověřme nyní tyto závěry přímým výpočtem:

Bezpochyby platí

$$\frac{\operatorname{Re} F_S(E)}{E} \sim cE^{a-1} \ln^b E \cos \left[\frac{\pi}{2} \left(a + \frac{b}{\ln E} \right) \right]. \quad (111)$$

Pro vyjádření výrazu $\frac{d}{d \ln E} \frac{Im F_S(E)}{E}$ zderivujeme nejdříve funkci $\frac{F_S(E)}{E}$ podle proměnné $\ln E$ a pak z vysokoenergetické aproximace vybereme imaginární část. Důkaz oprávněnosti tohoto postupu v případě funkce reálné proměnné je triviální.

Platí

$$\begin{aligned} \frac{d}{d \ln E} \frac{F_S(E)}{E} &= c(a-1)e^{-ia\frac{\pi}{2}}E^{a-1} \ln^b E \left(1 - \frac{i\pi}{2 \ln E}\right)^b + \\ &+ bce^{-ia\frac{\pi}{2}}E^{a-1} \ln^{b-1} E \left(1 - \frac{i\pi}{2 \ln E}\right)^{b-1}. \end{aligned} \quad (112)$$

Z vysokoenergetické aproximace tohoto výrazu dostáváme

$$\begin{aligned} \frac{d}{d \ln E} \frac{Im F_S(E)}{E} &= Im \left\{ \frac{d}{d \ln E} \frac{F_S(E)}{E} \right\} \sim -c(a-1)E^{a-1} \ln^b E \sin \left[\frac{\pi}{2} \left(a + \frac{b}{\ln E} \right) \right] - \\ &- bcE^{a-1} \ln^{b-1} E \sin \left[\frac{\pi}{2} \left(a + \frac{b-1}{\ln E} \right) \right]. \end{aligned} \quad (113)$$

Pro $a \in (0, 1)$ jdou oba výrazy, $\frac{Re F_S(E)}{E}$ i $\frac{d}{d \ln E} \frac{Im F_S(E)}{E}$, k nule a jejich rozdíl tedy také. Pro jejich podíl dostaneme po vydělení obou výrazů a vykrácení zlomku výraz

$$-\frac{2 \ln E \cot \left[\frac{\pi}{2} \left(a + \frac{b}{\ln E} \right) \right]}{(a-1) \ln E + b} \sim -\frac{2 \cot \frac{\pi}{2} a}{\pi a - 1} = \frac{2}{\pi (1-a) \tan \frac{\pi}{2} a}. \quad (114)$$

Tento výraz je jakožto funkce proměnné a ostře klesající pro $a \in (0, 1)$. Pro a jdoucí k nule se blíží nekonečnu a pro a jdoucí k 1 se blíží 1.

Tímto jsme tedy dokázali platnost vztahů (91) a (92) za splnění předpokladů formulovaných **věťami 1.** až **4.** pro některé z vhodných parametrizací funkcí třídy $\mathcal{E}$.

Dále provedeme **důkaz** vlastností **(i)-(vii)** pro třídy $\mathcal{E}$ a $\mathcal{E}'$:

(i)

Je-li funkce holomorfní na nějaké oblasti, pak na této oblasti musí splňovat Cauchyho-Riemannovy podmínky. Funkce $F_S^{abc}(z)$ je součinem mocninné a logaritmické funkce, o kterých víme, že při dostatečně vysokém K_1 na požadované oblasti holomorfní jsou. Pak je na této oblasti holomorfní i $F_S^{abc}(z)$. Označíme-li totiž

$$\begin{aligned} F_S^{abc}(z) &= f(z)g(z) = f(x+iy)g(x+iy) = (u_1(x,y) + iv_1(x,y)) \cdot \\ &\cdot (u_2(x,y) + iv_2(x,y)) = u(x,y) + iv(x,y), \end{aligned}$$

pak platí

$$u(x,y) = (u_1 u_2 - v_1 v_2)(x,y) \text{ a } v(x,y) = (u_1 v_2 + v_1 u_2)(x,y).$$

Protože funkce $f(z)$ a $g(z)$ jsou holomorfní, platí

$$\frac{\partial u_1}{\partial x} = \frac{\partial v_1}{\partial y}, \frac{\partial u_1}{\partial y} = -\frac{\partial v_1}{\partial x} \quad \text{a} \quad \frac{\partial u_2}{\partial x} = \frac{\partial v_2}{\partial y}, \frac{\partial u_2}{\partial y} = -\frac{\partial v_2}{\partial x}.$$

Ptáme se, jestli také platí

$$\frac{\partial u}{\partial x} = \frac{\partial v}{\partial y} \quad \text{a} \quad \frac{\partial u}{\partial y} = -\frac{\partial v}{\partial x}.$$

Dosadíme-li v těchto rovnicích za u a v výše odvozené vztahy a využijeme Cauchyho-Riemannových podmínek pro f a g , zjistíme, že tyto rovnice vskutku platí.

(ii)

Vlastnost dokážeme přímým dosazením:

$$\begin{aligned} \overline{F_S^{abc}(-\bar{z})} &= \overline{c(-\bar{z})^a e^{-ia\frac{\pi}{2}} \left(\ln(-\bar{z}) - i\frac{\pi}{2} \right)^b} \\ \overline{(-\bar{z})^a} &= (-z)^a, \quad \overline{e^{-ia\frac{\pi}{2}}} = e^{ia\frac{\pi}{2}} \\ \overline{\ln(-\bar{z}) - i\frac{\pi}{2}} &= \ln|z| - i(\pi - \varphi) + i\frac{\pi}{2} = \\ &= \ln|z| + i\left(\varphi - \frac{\pi}{2}\right) = \ln z - i\frac{\pi}{2} \\ \Rightarrow \overline{F_S^{abc}(-\bar{z})} &= c(-z)^a e^{ia\frac{\pi}{2}} \left(\ln z - i\frac{\pi}{2} \right)^b = c(e^{-i\pi}z)^a e^{ia\frac{\pi}{2}} \left(\ln z - i\frac{\pi}{2} \right)^b = \\ &= cz^a e^{-ia\frac{\pi}{2}} \left(\ln z - i\frac{\pi}{2} \right)^b = F_S^{abc}(z) \end{aligned}$$

(iii)

Již víme, že funkce $F_S^{abc}(z)$ je holomorfní na oblasti D_{K_1} . Je proto na této oblasti také spojitá. Funkce $(-iz)^a$ a $\ln^b(-iz)$ lze na uzávěru dané oblasti s výjimkou bodu ∞ spojitě dodefinovat. Pak lze na tomto uzávěru spojitě dodefinovat i funkci $F_S^{abc}(z)$.

(iv)

dokážeme tak, že odhadneme shora velikost absolutní hodnoty:

$$\begin{aligned} |F_S^{abc}(z)| &= |c||z|^a \left| \ln z - i\frac{\pi}{2} \right|^b = |c||z|^a \left| \ln |z| + i \left(\varphi - \frac{\pi}{2} \right) \right|^b = \\ &= |c||z|^a \left[\ln^2 |z| + \left(\varphi - \frac{\pi}{2} \right)^2 \right]^{\frac{b}{2}} \end{aligned}$$

$$\exists K: \text{ pro } |z| > K \text{ je } \ln^2 |z| > \left(\varphi - \frac{\pi}{2} \right)^2 \text{ pro libovolné } \varphi \in (0, \pi)$$

$$\Rightarrow |F_S^{abc}(z)| < |c||z|^a 2^{\frac{b}{2}} (\ln |z|)^b$$

$$\exists C : |z| > C \Rightarrow |z| > |\ln |z||$$

$$D = \max\{C, K\} : |z| > D \Rightarrow |F_S^{abc}(z)| < 2^{\frac{b}{2}} |c||z|^a |z|^b = |2^{\frac{b}{2}} c z^{a+b}|$$

(v)

$$\frac{|F_S^{abc}(E)|}{|E \ln^2 E|} = |c| E^{a-1} \frac{|\ln E - i\frac{\pi}{2}|^b}{\ln^2 E} = |c| E^{a-1} \frac{(\ln^2 E + \frac{\pi^2}{4})^{\frac{b}{2}}}{\ln^2 E} \leq C$$

$$\Rightarrow \text{buď: } - a < 1 \text{ (} E^{a-1} \text{ jde k nule rychleji než } \ln E \text{ k } \infty)$$

$$\text{- nebo } a = 1 \wedge b < 2 \text{ (jen pro } b < 2 \text{ jde zlomek k nule)}$$

$$\text{- nebo } a = 1 \wedge b = 2 \wedge |c| < C$$

(v')

$$\frac{F_S^{abc}(E)}{E^2} = c E^{a-2} e^{-ia\frac{\pi}{2}} (\ln E - i\frac{\pi}{2})^b \sim c e^{-ia\frac{\pi}{2}} E^{a-2} \ln^b E,$$

což jde k nule pro $a = 2 \wedge b < 0$ nebo $a < 2$, jak bylo předpokládáno.

(vi)

$$F_S^{abc}(E) = c E^a e^{-ia\frac{\pi}{2}} \left(\ln E - i\frac{\pi}{2} \right)^b = c E^a \left(\ln^2 E + \frac{\pi^2}{4} \right)^{\frac{b}{2}} e^{i(b\psi - a\frac{\pi}{2})},$$

$$\cos \psi = \frac{\ln E}{(\ln^2 E + \frac{\pi^2}{4})^{\frac{1}{2}}} > 0, \sin \psi = -\frac{\frac{\pi}{2}}{(\ln^2 E + \frac{\pi^2}{4})^{\frac{1}{2}}} \rightarrow 0 -$$

Znamení imaginární části je dáno znamením výrazu $c \sin(-a\frac{\pi}{2} + b\psi)$. Pro $c = 0$ je vlastnost automaticky splněna.

Nechť nyní $a \neq 2k$. Pokud je c kladné, pak musí platit $\sin(-a\frac{\pi}{2} + b\psi) \geq 0$. S rostoucím E jde $\sin \psi$ k nule a tedy také $\psi \rightarrow 0$. Z toho plyne, že musí platit $\sin(-a\frac{\pi}{2}) \geq 0 \Rightarrow a \in (4k+2, 4k+4), k \in \mathbb{Z}$. Pro záporné c dospějeme k opačnému výsledku, tedy $a \in (4k, 4k+2), k \in \mathbb{Z}$.

Pro $a = 2k, k \in \mathbb{Z}$ dostáváme rovnost $\sin(-a\frac{\pi}{2} + b\psi) = (-1)^k \sin b\psi$, a to s využitím součtového vzorce. Výrazy na obou jejích stranách mají být vždy nezáporné. Je-li k sudé, musí pro libovolné $\psi < 0$ platit $b\psi \geq 0$, resp. $b\psi \leq 0$ v závislosti na znamení $c \Rightarrow \operatorname{sgn} b = -\operatorname{sgn} c$. Je-li naopak k liché, pak platí $\operatorname{sgn} b = \operatorname{sgn} c$.

Shrnutím těchto případů dojdeme k předpovězeným podmínkám.

(vii)

Důkaz této vlastnosti je příliš rozsáhlý, a proto je uveden v dodatku C.

•

Takto dojdeme k podmínkám, které jsme předpověděli. Dodejme, že v praxi se zpravidla volí $a \in (0, 1)$ se všemi dalšími omezeními, která této volbě ve třídách $\mathcal{E}$ a $\mathcal{E}'$ odpovídají.¹ Tato omezení budeme automaticky předpokládat při důkazech následujících tvrzení.

7 Ilustrace platnosti obecných vět o rozptylu pro funkce třídy $\mathcal{E}$

Dokážeme nyní tvrzení z 5.kapitoly pro třídy $\mathcal{E}$ a $\mathcal{E}'$. Volíme přitom hodnoty parametrů $c < 0$ a $a \in (0, 1), a = 1 \wedge b < 2$ nebo $a = 1 \wedge b = 2 \wedge |c| < C$.

Důkaz pro třídu $\mathcal{E}$:

I. Ve třídě $\mathcal{E}$ můžeme pro vysoká E výraz $\rho_S(E)$ aproximovat jako

$$\rho_S(E) = \tan \left[\frac{\pi}{2} \left(a - 1 + \frac{b}{\ln E} \right) \right]$$

a dosadíme tedy do integrálu:

$$\mathcal{L} = \int_{E_0}^{\infty} \left(\arctan \tan \left[\frac{\pi}{2} \left(a - 1 + \frac{b}{\ln E} \right) \right] - \frac{\pi}{\ln E} \right) \frac{dE}{E}.$$

¹Ve fenomenologických aplikacích na rozptyl hadronů na hadronech se zpravidla volí hodnoty $a = 1$ a b v intervalu $(0, 2)$.

Víme, že $a \in (0, 1)$, a že pro vysoká E jde zlomek $\frac{b}{\ln E}$ k nule. Za těchto okolností můžeme položit $\arctan \tan \varphi = \varphi$. Dostáváme tak

$$\mathcal{L} = \pi \int_{E_0}^{\infty} \left(\frac{a-1}{2} + \frac{b-2}{2 \ln E} \right) \frac{dE}{E}.$$

Spočteme-li primitivní funkci, dostáváme

$$\int \left(\frac{a-1}{2} + \frac{b-2}{2t} \right) dt = \frac{a-1}{2}t + \frac{b-2}{2} \ln t,$$

kde jsme provedli substituci $t = \ln E$. Požadujeme, aby $\mathcal{L}$ bylo shora omezené, tedy aby platilo $\mathcal{L} < +\infty$ (může také platit $\mathcal{L} = -\infty$). Dosadíme-li primitivní funkci do výrazu pro výpočet určitého integrálu, dostáváme, že pro $a < 1$ (a tedy také pro $a \in (0, 1)$) a pro $a = 1 \wedge b \leq 2$ vždy platí $\mathcal{L} = -\infty$ (protože funkce $-t$ se od nuly vzdaluje rychleji než funkce $\ln t$).

Vidíme tedy, že za našich podmínek je tvrzení pro třídu $\mathcal{E}$ splněno.

II. Jeden z předpokladů tvrzení říká, že $\rho_S(E)$ je takové, aby bylo $\mathcal{L} = \infty$. To však podle předešlého tvrzení nemůže být pro za námi stanovených podmínek splněno. Toto tvrzení tak není potvrzeno ani vyvráceno.

III. V souladu s výsledky předchozích tvrzení je předpoklad (78) pro $a \in (0, 1)$ splněn ($\mathcal{A}$ se od $\mathcal{L}$ liší pouze členem $\frac{\pi}{\ln E}$ v integrandu). Při $a = 1$ je splněn jen pro $b \leq 0$.

Již dříve jsme odvodili, že platí aproximace

$$\sigma_S(E) \approx -cE^{a-1} \ln^b E \sin \left[\frac{\pi}{2} \left(a + \frac{b}{\ln E} \right) \right].$$

Z toho vidíme, že tato část tvrzení je evidentně splněna bez problémů.

IV. Víme, že platí

$$\sigma_S(E) \approx -cE^{a-1} \ln^b E \sin \left[\frac{\pi}{2} \left(a + \frac{b}{\ln E} \right) \right].$$

Tento výraz při naší volbě parametrů neomezeně roste pro $a = 1 \wedge 0 < b \leq 2$. Z důkazů předešlých tvrzení je zřejmé, že také toto tvrzení je splněno.

V. V našem případě máme práci ulehčenou tím, že pro třídu $\mathcal{E}$ limity $\lim \sigma_S(E)$ a $\lim \rho_S(E)$ existují díky tvaru příslušných výrazů pro $E \rightarrow \infty$, takže můžeme přejít rovnou k vyšetřování jednotlivých podmínek:

1) Z důkazů předešlých tvrzení plyne, že výraz $\sigma_S(E)$ neomezeně roste pro $a > 1 \vee (a = 1 \wedge b > 0)$ a totéž platí pro $\mathcal{A}$.

2) Výraz $\sigma_S(E)$ jde v limitě ke konstantě různé od nuly, pokud $a = 1$ a $b = 0$. Za týchž podmínek je $\mathcal{A}$ konečné.

3) Podmínka $\sigma_S(E) \rightarrow 0$ je splněna pro $a < 1$ nebo $a = 1 \wedge b < 0$. Pro tytéž parametry platí $\mathcal{A} \rightarrow -\infty$. Tedy je to splněno také pro $a \in (0, 1) \vee (a = 1 \wedge b < 0)$ a ekvivalence platí.

VI.

$$\operatorname{Re} F_S(E) \sim c E^a \ln^b E \cos \left[\frac{\pi}{2} \left(a + \frac{b}{\ln E} \right) \right]$$

$$\operatorname{Im} F_S(E) \sim -c E^a \ln^b E \sin \left[\frac{\pi}{2} \left(a + \frac{b}{\ln E} \right) \right]$$

$$\Rightarrow |F_S(E)| = \sqrt{(\operatorname{Re} F_S(E))^2 + (\operatorname{Im} F_S(E))^2} \sim |c| E^a \ln^b E = |c| E^{a + \frac{b}{\ln E} \ln(\ln E)}$$

a

$$\rho_S(E) = \frac{\operatorname{Re} F_S(E)}{\operatorname{Im} F_S(E)} \sim -\cot \left[\frac{\pi}{2} \left(a + \frac{b}{\ln E} \right) \right],$$

$$|\rho_S(E)| = \left| \cot \left[\frac{\pi}{2} \left(a + \frac{b}{\ln E} \right) \right] \right| = \left| \tan \left[\frac{\pi}{2} \left(1 - a - \frac{b}{\ln E} \right) \right] \right|$$

Pro $a \in (0, 1)$ a $c < 0$ platí $\operatorname{Re} F_S(E) < 0$ a $|\rho_S(E)| = \rho_S(E)$. Budeme tedy hledat taková α a β ležící v intervalu $(0, \frac{1}{2})$, pro která platí

$$\tan \pi \alpha \leq \tan \left[\frac{\pi}{2} \left(1 - a - \frac{b}{\ln E} \right) \right] \leq \tan \pi \beta$$

při libovolném E . Přitom ověříme, zda platí

$$|F_S(E)| \sim |c| E^{a + \frac{b}{\ln E} \ln(\ln E)} \leq C E^{1-2\alpha}$$

pro nějaké $C > 0$.

Jestliže platí $b > 0$, pak určitě platí $\alpha = \frac{1-a-\frac{b}{\ln E_0}}{2}$ a $1-2\alpha = a + \frac{b}{\ln E_0}$. Aby tedy předpokládaná nerovnost byla splněna, musí existovat takové $C > 0$, že

$$|c| E^{a + \frac{b}{\ln E} \ln(\ln E)} \leq C E^{a + \frac{b}{\ln E_0}}.$$

Vykrátíme-li tuto nerovnici, dostaneme

$$|c| E^{\frac{\ln(\ln E)}{\ln E}} \leq C E^{\frac{1}{\ln E_0}}$$

a tedy C musí splňovat

$$C \geq |c| E^{-\frac{1}{\ln E_0}} \ln E.$$

Takové C určitě existuje, neboť výraz na pravé straně nerovnice konverguje k nule.

Jestliže $b < 0$, pak $\alpha = \frac{1-a}{2}$ a $1 - 2\alpha = a$ a má tedy platit

$$|c| E^{a + \frac{b}{\ln E} \ln(\ln E)} \leq C E^a.$$

To určitě platí, položíme-li $C = |c|$.

Jestliže $a = 1$, pak hledáme α, β ležící v intervalu $(0, \frac{1}{2})$, která vyhovují nerovnosti

$$\tan \pi \alpha \leq \left| \tan \frac{\pi b}{2 \ln E} \right| \leq \tan \pi \beta$$

pro libovolné E , tedy i pro limitní případ $E \rightarrow \infty$. Takové α však v daném intervalu nenalezneme. Předpoklad tvrzení proto není splněn.

VII.

$$\int_{-\infty}^{\infty} \rho_S(E) d \ln E = - \int_{-\infty}^{\infty} \cot \left[\frac{\pi}{2} \left(a + \frac{b}{\ln E} \right) \right] d \ln E,$$

což pro $a \in (0, 1)$ nemůže konvergovat. Integrál totiž můžeme pro vysoká E aproximovat na

$$\int_{-\infty}^{\infty} \cot \frac{\pi}{2} a d \ln E = \cot \frac{\pi}{2} a \int_{-\infty}^{\infty} d \ln E,$$

a to evidentně diverguje.

Pro $a = 1$ dostaneme

$$\int_{-\infty}^{\infty} \rho_S(E) d \ln E = \int_{-\infty}^{\infty} \tan \frac{\pi b}{2 \ln E} d \ln E \sim \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\pi b}{2 \ln E} d \ln E,$$

což, jak lze snadno spočítat, konverguje pro $b = 0$. Pro tento případ tedy navíc ověříme, jestli platí také předpoklad (86). Protože v daném případě $|F_S(E)| = |c|E$, předpoklad (86) platí po dosazení $const = |c|$ pro libovolné $\epsilon > 0$. Tedy by mělo platit také (85). Po dosazení za $\sigma_S(E)$ dostáváme $\sigma_S(E) \sim -c$ a tedy příslušné reálné konstanty C_1, C_2 není problém nalézt.

VIII. Nejdříve spočteme limitu $\lim_{E \rightarrow 0} F_S(E)$ za různých podmínek:

(a) $a \in (0, 1) \wedge b = 0$

$$\Rightarrow \lim_{E \rightarrow 0} F_S(E) = \lim_{E \rightarrow 0} cE^a e^{-ia\frac{\pi}{2}} \left(\ln E - i\frac{\pi}{2} \right)^b = 0$$

(b) $a \in (0, 1) \wedge b < 0$

$$\Rightarrow \lim_{E \rightarrow 0} F_S(E) = \lim_{E \rightarrow 0} cE^a e^{-ia\frac{\pi}{2}} \left(\ln E - i\frac{\pi}{2} \right)^b = 0$$

(c) $a \in (0, 1) \wedge b > 0$

$$\begin{aligned} \Rightarrow \lim_{E \rightarrow 0} F_S(E) &= \lim_{E \rightarrow 0} cE^a e^{-ia\frac{\pi}{2}} \left(\ln E - i\frac{\pi}{2} \right)^b = \lim_{E \rightarrow 0} ce^{-ia\frac{\pi}{2}} \frac{\left(\ln E - i\frac{\pi}{2} \right)^b}{\frac{1}{E^a}} = \\ &= \lim_{E \rightarrow 0} ce^{-ia\frac{\pi}{2}} (-1)^n \frac{b(b-1)(b-2) \cdots (b-n+1) \left(\ln E - i\frac{\pi}{2} \right)^{b-n}}{a^n \frac{1}{E^a}} = 0 (n > b) \end{aligned}$$

Vidíme tedy, že ve všech těchto případech platí $F_S(E) - F_S(0) = F_S(E)$ a po dosazení do integrálu pak dostaneme

$$\begin{aligned} \left| \int \frac{\operatorname{Re}(F_S(E) - F_S(0))}{E^2 \ln^{2+\varepsilon} E} dE \right| &\sim \left| \int \frac{cE^a \ln^b E \cos \left[\frac{\pi}{2} \left(a + \frac{b}{\ln E} \right) \right]}{E^2 \ln^{2+\varepsilon} E} dE \right| = \\ &= \left| \int cE^{a-2} \ln^{b-2-\varepsilon} E \cos \left[\frac{\pi}{2} \left(a + \frac{b}{\ln E} \right) \right] dE \right| \sim \left| c \cos \frac{\pi}{2} a \right| \left| \int E^{a-2} \ln^{b-2-\varepsilon} E dE \right| \end{aligned}$$

To konverguje pro $a < 1 \vee (a = 1 \wedge b \leq 1 + \varepsilon)$ a tedy také pro $a \in (0, 1)$.

V případě, že $a = 1$, je situace mírně odlišná. Platí

$$\begin{aligned} \left| \int \frac{\operatorname{Re}(F_S(E) - F_S(0))}{E^2 \ln^{2+\varepsilon} E} dE \right| &\sim \left| \int cE^{a-2} \ln^{b-2-\varepsilon} E \cos \left[\frac{\pi}{2} \left(a + \frac{b}{\ln E} \right) \right] dE \right| = \\ &= \left| \int cE^{-1} \ln^{b-2-\varepsilon} E \cos \left[\frac{\pi}{2} \left(1 + \frac{b}{\ln E} \right) \right] dE \right| \sim \left| \int c \ln^{b-2-\varepsilon} E \sin \frac{\pi b}{2 \ln E} d \ln E \right| \sim \\ &\sim \left| \int \frac{\pi b c}{2} \ln^{b-3-\varepsilon} E d \ln E \right|. \end{aligned}$$

Poslední výraz konverguje pro $b \leq 2 + \varepsilon$ a tedy také za našich podmínek.

IX.

$$\langle \sigma_S \rangle_E = \frac{1}{\ln E} \int_{E_0}^E \sigma_S(E) d \ln E = -\frac{1}{\ln E} \int_{E_0}^E c E^{a-1} \ln^b E \sin \left[\frac{\pi}{2} \left(a + \frac{b}{\ln E} \right) \right] d \ln E$$

Tento výraz pro $E \rightarrow \infty$ konverguje, právě když

$$a < 1 \vee (a = 1 \wedge b \leq 0) \vee (a = 2k \wedge b = 0), k \in \mathcal{Z},$$

což lze dokázat užitím l'Hospitalova pravidla.

$$\int \frac{Re F_S(E)}{E^2} dE = \int c E^{a-2} \ln^b E \cos \left[\frac{\pi}{2} \left(a + \frac{b}{\ln E} \right) \right] dE$$

Toto při $E \rightarrow \infty$ konverguje, právě když

$$a < 1 \vee (a = 1 \wedge b \leq 0) \vee (a = 2k + 1 \wedge b = 0), k \in \mathcal{Z}.$$

Vidíme, že obě podmínky jsou pro $a \in (0, 1)$ identické a tedy pro náš případ tvrzení platí.

•

8 Závěr

Tímto jsme ověřili důležité vlastnosti symetrických amplitud pro třídu funkcí $\mathcal{E}$. Je zapotřebí znovu zdůraznit, že jsme uvažovali volby parametrů $a \in (0, 1)$ a $c < 0$. Pro jiné hodnoty by ověřování vlastností bylo komplikovanější a někdy by tyto vlastnosti ani nebyly splněny. Tyto hodnoty však nemají praktické uplatnění, a proto není zapotřebí je brát v úvahu.

Závěrem dodejme, že disperzní relace, jak integrální, tak diferenciální (viz dodatky A), jsou hojně používány v aplikacích na interakce částic. Jejich praktická použitelnost se však potýká s podobnými problémy, na jaké naráží každý pokus o analytické zpracování dat. Jde o to, že do disperzní relace nedosazujeme přesný tvar imaginární části amplitudy rozptylu $Im F_S^D(E)$, ale její vysokoenergetickou aproximaci $Im F_S^B(E)$. Přitom [5,10] často může dojít k nekontrolovatelnému růstu rozdílu $Im F_S^B(E) - Im F_S^D(E)$. V důsledku toho se pak totéž stane s rozdílem reálných částí příslušných oběma hodnotám. Příčinou bývají nízkoenergetické příspěvky.

Ukažme si celou situaci názorněji:

Označme

$$\Delta(E) = Im F_S^B(E) - Im F_S^D(E), \quad (115)$$

příslušný rozdíl reálných částí

$$\delta(E) = \operatorname{Re} F_S^B(E) - \operatorname{Re} F_S^D(E). \quad (116)$$

Platí

$$\delta(E) = \delta_1(E) + \delta_2(E) + \delta_3(E), \quad (117)$$

kde

$$\begin{aligned} \delta_1(E) &= \frac{2E^2}{\pi} \int_0^{E_0} \frac{\operatorname{Im} F_S^B(E')}{E'(E'^2 - E^2)} dE', \\ \delta_2(E) &= \frac{2E^2}{\pi} \int_{E_0}^{E_1} \frac{\Delta(E')}{E'(E'^2 - E^2)} dE', \\ \delta_3(E) &= \frac{2E^2}{\pi} \int_{E_1}^{\infty} \frac{\Delta(E')}{E'(E'^2 - E^2)} dE'. \end{aligned} \quad (118)$$

Toto dělení provádíme z toho důvodu, že k měření dochází v intervalu energií (E_0, E_1) , kde je také tvar funkce $\operatorname{Im} F_S^B(E)$ odvozen. Dá se tedy také předpokládat, že v tomto intervalu bude $\Delta(E)$ zanedbatelné, tedy můžeme zanedbat také $\delta_2(E)$. Obdobné to bude s příspěvkem vyššími než E_1 , protože z celistvosti funkcí $\operatorname{Im} F_S^D(E)$ a $\operatorname{Im} F_S^B(E)$ vzhledem k $\ln E$ můžeme předpokládat, že se v tomto intervalu energií téměř rovnají.

Obtíže nastanou při odhadu $\delta_1(E)$. Lze dokázat, že pokud neplatí $\operatorname{Im} F_S^B(0) = 0$, je tento výraz nekonečný. O funkci $\operatorname{Im} F_S^B(E)$ dále víme, že musí splňovat nerovnost

$$|\operatorname{Im} F_S^B(E)| \leq CE^\gamma \ln^n E, \quad (119)$$

kde $\gamma \in (0, 1)$, $n \in \mathcal{N} \cup \{0\}$, tzv. Froissartovu mez. Z toho lze dosazením do nerovnosti a rozvinutím podle Taylorova vzorce zjistit, že platí

$$|\delta_1(E)| \leq 2C \frac{n!}{\pi} \frac{1}{\gamma^{n+1}} + \mathcal{O}\left(\frac{1}{E^2}\right). \quad (120)$$

Z toho vidíme, že výraz $|\delta_1(E)|$ roste pro vyšší γ pomaleji, a že je tedy vhodné použít parametrizaci co nejblíže hranici splnitelnosti dané podmínky.

Jednoduchý příklad k ilustraci situace je následující: Nechť platí

$$\Delta(E) = cE^\alpha, \quad (121)$$

kde $|c|$ je tak malé, že se příliš nezmění předpis a $\alpha \in (0, 1)$. Dosazením do disperzního integrálu postupem obdobným odvozování DAR snadno zjistíme, že pokud $E_0 \rightarrow 0$, vyjde nám $-cE^\alpha \cot(\frac{\alpha\pi}{2})$. Toto roste nade všechny meze pro α jdoucí k nule.

Z uvedeného tedy plyne, že třída funkcí, pro které lze diferenciální disperzní relace použít, je velmi úzká. K dramatické změně dojde, když přejdeme od konečněenergetických relací k vysokoenergetické limitě. Existuje široké spektrum diferenciálních relací platných pro vysokoenergetickou limitu pro velkou třídu funkcí (viz např. 5.kapitola). V této limitě může např. někdy být nekonečná řada $T(x)$ (viz dodatek B) nahrazena jejím prvním členem.

Dodatky

A Odvození diferenciálních analytických relací Bronzanem et al.

Důležitou pomůckou používanou při výpočtu reálné části amplitudy rozptylu jsou diferenciální analytické relace (DAR, [3]). Ty lze odvodit z disperzních relací. Odvození se skládá z dlouhé řady elementárních, ale poměrně pracných kroků, které Bronzan et al. explicitně neuvádějí. Eichmann a Dronkers však dokázali [10], že je platné pouze za značně omezujících podmínek (mj. že amplituda musí být celistvou funkcí logaritmu energie). Níže uvádíme detailní odvození.

Ve 4.kapitole jsme zjistili, že platí (za předpokladu, že $s \gg s_0$)

$$\operatorname{Re} F_S(s, t) = K + \frac{2s^2}{\pi} I, \quad (122)$$

kde $K \equiv \operatorname{Re} F_S(0, t)$ je integrační konstanta (kterou pro zjednodušení položíme rovnou nule) a

$$I = P \int_{s_0}^{+\infty} ds' \frac{1}{s'(s'^2 - s^2)} \operatorname{Im} F_S(s', t). \quad (123)$$

Odvodíme následující **tvrzení**:

$$\begin{aligned} \operatorname{Re} F_S(s, t) &= \frac{2s^2}{\pi} P \int_{s_0}^{\infty} \frac{ds'}{s'(s'^2 - s^2)} \operatorname{Im} F_S(s', t) = \\ &= \frac{s}{\pi} \int_{\ln s_0}^{\infty} d\xi' s'^{\alpha-1} \ln \coth \frac{1}{2} |\xi' - \xi| \cdot \left[\alpha - 1 + \frac{\partial}{\partial \xi'} \right] \left(\frac{\operatorname{Im} F_S(s', t)}{s'^{\alpha}} \right) = \\ &= s^{\alpha} \tan \left[\frac{\pi}{2} \left(\alpha - 1 + \frac{\partial}{\partial \ln s'} \right) \right] \left(\frac{\operatorname{Im} F_S(s, t)}{s^{\alpha}} \right) \end{aligned} \quad (124)$$

(Poslední uvedený výraz nazýváme diferenciální analytická relace. Rovnost však platí pouze za některých dodatečných podmínek, ke kterým dospějeme v průběhu výpočtu.)

Odvození podle [3]:

$$\begin{aligned}
Re F_S(s, t) &= \frac{2s^2}{\pi} P \int_{s_0}^{\infty} \frac{ds'}{s'(s'^2 - s^2)} Im F_S(s', t) = \\
&= \frac{2s^2}{\pi} P \int_{\ln s_0}^{\infty} \frac{Im F_S(s', t)}{s'} \frac{e^{\xi'}}{e^{2\xi'} - e^{2\xi}} d\xi' = \frac{2s^2}{\pi} \left[\frac{Im F_S(s', t)}{s'} \int \frac{e^{\xi'} d\xi'}{e^{2\xi'} - e^{2\xi}} \right]_{\ln s_0}^{\infty} - \\
&\quad - \frac{2s^2}{\pi} \int_{\ln s_0}^{\infty} \left[d\xi' \frac{\partial}{\partial \xi'} \left(\frac{Im F_S(s', t)}{s'} \right) \cdot \int \frac{e^{\xi'} d\xi'}{e^{2\xi'} - e^{2\xi}} \right], \tag{125}
\end{aligned}$$

kde jsme položili $s = e^{\xi}$. Tyto rovnosti jsou splněny pouze za předpokladu, že všechny uvedené výrazy mají po dosazení $s' = \infty$, resp. $\xi' = \infty$ konečnou hodnotu.

Platí:

$$\int \frac{e^{\xi'} d\xi'}{e^{2\xi'} - e^{2\xi}} = -\frac{1}{2s} \ln \coth \frac{1}{2} |\xi' - \xi| \tag{126}$$

a tedy po dosazení

$$\begin{aligned}
Re F_S(s, t) &= -\frac{s}{\pi} \left[\frac{Im F_S(s', t)}{s'} \ln \coth \frac{1}{2} |\xi' - \xi| \right]_{\ln s_0}^{\infty} + \\
&\quad + \frac{s}{\pi} \int_{\ln s_0}^{\infty} \ln \coth \frac{1}{2} |\xi' - \xi| \frac{\partial}{\partial \xi'} \left(\frac{Im F_S(s', t)}{s'} \right) d\xi' \tag{127}
\end{aligned}$$

Pokud výraz $Im F_S(s', t)$ jde pro $s' \rightarrow \infty$ ke konečné hodnotě, nebo alespoň nediverguje příliš rychle, je první člen pro vysoká s' prakticky nulový. Potom platí:

$$\begin{aligned}
Re F_S(s, t) &= \frac{s}{\pi} \int_{\ln s_0}^{\infty} \ln \coth \frac{1}{2} |\xi' - \xi| \frac{\partial}{\partial \xi'} \left(\frac{Im F_S(s', t)}{s'} \right) d\xi' = \\
&= \frac{s}{\pi} \int_{\ln s_0}^{\infty} \ln \coth \frac{1}{2} |\xi' - \xi| \frac{\partial}{\partial \xi'} \left(e^{\xi'(\alpha-1)} \frac{Im F_S(s', t)}{s'^{\alpha}} \right) d\xi' = \\
&= \frac{s}{\pi} \int_{\ln s_0}^{\infty} \ln \coth \frac{1}{2} |\xi' - \xi| e^{\xi'(\alpha-1)} \cdot \left[(\alpha-1) \frac{Im F_S(s', t)}{s'^{\alpha}} + \frac{\partial}{\partial \xi'} \left(\frac{Im F_S(s', t)}{s'^{\alpha}} \right) \right] d\xi' =
\end{aligned}$$

$$= \frac{s}{\pi} \int_{\ln s_0}^{\infty} d\xi' s'^{\alpha-1} \ln \coth \frac{1}{2} |\xi' - \xi| \cdot \left[\alpha - 1 + \frac{\partial}{\partial \xi'} \right] \left(\frac{Im F_S(s', t)}{s'^{\alpha}} \right) \quad (128)$$

Nyní dokážeme druhou rovnici, a to tak, že funkci

$$\left(\frac{Im F_S(s', t)}{s'^{\alpha}} \right)$$

po substituci $s = e^{\xi}$ rozvineme v Taylorovu řadu se středem v bodě ξ . Budeme však navíc předpokládat, že tato funkce má nekonečný poloměr konvergence.

$$\begin{aligned} Re F_S(s, t) &= \frac{s}{\pi} \int_{\ln s_0}^{\infty} d\xi' s'^{\alpha-1} \ln \coth \frac{1}{2} |\xi' - \xi| \left[\alpha - 1 + \frac{\partial}{\partial \xi'} \right] \left(\frac{Im F_S(s', t)}{s'^{\alpha}} \right) = \\ &= \frac{s}{\pi} \int_{\ln s_0}^{\infty} d\xi' s'^{\alpha-1} \cdot \ln \coth \frac{1}{2} |\xi' - \xi| \cdot \\ &\cdot \left[\alpha - 1 + \frac{\partial}{\partial \xi'} \right] \left[\sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!} \frac{\partial^n}{\partial \xi'^n} \left(\frac{Im F_S(s', t)}{s'^{\alpha}} \right) (\xi' - \xi)^n \right] = \\ &= s \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!} \frac{\partial^n}{\partial \xi'^n} \left(\frac{Im F_S(s, t)}{s^{\alpha}} \right) I_n, \end{aligned} \quad (129)$$

kde

$$I_n = \frac{1}{\pi} \int_{\ln s_0}^{\infty} d\xi' s'^{\alpha-1} \ln \coth \frac{1}{2} |\xi' - \xi| \left[\alpha - 1 + \frac{d}{d\xi'} \right] (\xi' - \xi)^n. \quad (130)$$

Provedeme další úpravy roznásobováním, vytýkáním a pomocí metody per partes:

$$\begin{aligned} I_n &= \frac{1}{\pi} \int_{\ln s_0}^{\infty} d\xi' s'^{\alpha-1} \ln \coth \frac{1}{2} |\xi' - \xi| \cdot (\alpha - 1) (\xi' - \xi)^n + \\ &+ \frac{1}{\pi} \int_{\ln s_0}^{\infty} d\xi' s'^{\alpha-1} \ln \coth \frac{1}{2} |\xi' - \xi| \frac{d}{d\xi'} (\xi' - \xi)^n = \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&= \frac{s^{\alpha-1}}{\pi} \cdot \left[\ln \coth \frac{1}{2} |\xi' - \xi| (\xi' - \xi)^n e^{(\xi' - \xi)(\alpha-1)} \right]_{\ln s_0}^{\infty} - \\
&- \frac{s^{\alpha-1}}{\pi} \int_{\ln s_0}^{\infty} \frac{d}{d\xi'} \left(\ln \coth \frac{1}{2} |\xi' - \xi| (\xi' - \xi)^n \right) \cdot e^{(\xi' - \xi)(\alpha-1)} d\xi' + \\
&+ \frac{s^{\alpha-1}}{\pi} \int_{\ln s_0}^{\infty} e^{(\xi' - \xi)(\alpha-1)} \ln \coth \frac{1}{2} |\xi' - \xi| \frac{d}{d\xi'} (\xi' - \xi)^n d\xi'. \tag{131}
\end{aligned}$$

Další úpravy provedeme na základě vzorce pro derivaci součinu 2 funkcí a poté zapomocí substituce $y = \xi' - \xi$:

$$\begin{aligned}
I_n &= \frac{s^{\alpha-1}}{\pi} \cdot \left[\ln \coth \frac{1}{2} |\xi' - \xi| (\xi' - \xi)^n e^{(\xi' - \xi)(\alpha-1)} \right]_{\ln s_0}^{\infty} - \\
&- \frac{s^{\alpha-1}}{\pi} \int_{\ln s_0}^{\infty} e^{(\xi' - \xi)(\alpha-1)} (\xi' - \xi)^n \cdot \frac{d}{d\xi'} \left(\ln \coth \frac{1}{2} |\xi' - \xi| \right) d\xi' = \\
&= \frac{s^{\alpha-1}}{\pi} \left[\ln \coth \frac{1}{2} |\xi' - \xi| (\xi' - \xi)^n e^{(\xi' - \xi)(\alpha-1)} \right]_{\ln s_0}^{\infty} + \\
&+ \frac{s^{\alpha-1}}{\pi} \int_{\ln s_0}^{\infty} e^{(\xi' - \xi)(\alpha-1)} (\xi' - \xi)^n \frac{2e^{\xi' + \xi}}{e^{2\xi'} - e^{2\xi}} d\xi' = \\
&= \frac{s^{\alpha-1}}{\pi} \left[\ln \coth \frac{1}{2} |\xi' - \xi| (\xi' - \xi)^n e^{(\xi' - \xi)(\alpha-1)} \right]_{\ln s_0}^{\infty} + \\
&+ \frac{s^{\alpha-1}}{\pi} \int_{\ln \frac{s_0}{s}}^{\infty} \frac{e^{(\alpha-1)y} y^n}{\sinh y} dy \tag{132}
\end{aligned}$$

Pokud se s_0 blíží k 0 a $0 < \alpha < 2$, je první člen roven nule a dolní mez druhého členu se blíží $-\infty$. To lze dokázat následujícím způsobem:

Výraz v hranaté závorce v prvním členu pro jednoduchost upravíme na tvar

$$\ln \coth \frac{1}{2} |x| x^n e^{x(\alpha-1)},$$

kde $x = \xi' - \xi$. Dá se snadno zjistit, že platí

$$\ln \coth \frac{1}{2} |x| = \ln \frac{e^{|x|} + 1}{e^{|x|} - 1}. \tag{133}$$

Požadavek, který na první člen klademe, zní, že jeho funkční hodnoty po dosazení $x = +\infty$ nebo $x = -\infty$ jsou stejné a v absolutní hodnotě menší než nekonečno při libovolném celém $n \geq 0$. Rozebereme si to tedy na jednotlivé případy:

$$1) x \rightarrow +\infty$$

Výraz

$$\ln \frac{e^{|x|} + 1}{e^{|x|} - 1}$$

jde k nule, jak se snadno po dosazení přesvědčíme. U zbývajících členů v hranaté závorce musíme rozlišit další případy.

$$1a) \alpha > 1$$

Výraz x^n jde k nekonečnu pro $n \neq 0$ a pro $n = 0$ je roven jedné. Výraz $e^{x(\alpha-1)}$ jde k nekonečnu. Setkáváme se tu tedy s násobením nuly a nekonečna a musíme aplikovat nějakou vhodnou metodu pro výpočet dané limity. Pokud výraz převedeme do tvaru zlomku, v jehož čitateli bude

$$\ln \frac{e^x + 1}{e^x - 1}$$

(absolutní hodnoty můžeme pro případ kladného x odstranit) a ve jmenovateli bude převrácená hodnota výrazu $x^n e^{x(\alpha-1)}$, můžeme použít l'Hospitalovo pravidlo. Po jeho použití a úpravě zlomku bude platit

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\ln \frac{e^x + 1}{e^x - 1}}{x^{-n} e^{-x(\alpha-1)}} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{2e^{\alpha x}}{e^{2x} - 1} \cdot \frac{x^{n+1}}{n + (\alpha - 1)x}. \quad (134)$$

Vidíme, že druhý ze zlomků jde k nekonečnu. Aby se neblížil nekonečnu celý výraz, musí se první zlomek blížit k nule (tím již bude konečná, v tomto případě nulová hodnota limity zajištěna, jak se lze snadno přesvědčit opětovným použitím l'Hospitalova pravidla). To je možné pouze v případě, že $\alpha < 2$. Celkově tedy máme $\alpha \in (1, 2)$.

$$1b) \alpha = 1$$

V tomto případě je limita výrazu v hranaté závorce rovna nule, neboť člen x^n jde k nekonečnu pomaleji než jde člen

$$\ln \frac{e^x + 1}{e^x - 1}$$

k nule. Bude to ihned zřejmé v případě, že ho nahradíme zlomkem $\frac{2}{e^x - 1}$, kterým ho lze shora omezit.

$$1c) \alpha < 1$$

Také v tomto případě je limita výrazu rovna nule, neboť jde k nule také výraz $e^{x(\alpha-1)}$ a (kladná) limita výrazu musí být menší nebo rovna než v případě b).

Prozatím jsme tedy zjistili, že parametr α nesmí být větší nebo roven 2.

2) $x \rightarrow -\infty$

V tomto případě bude postup analogický postupu 1), jak se lze snadno přesvědčit, pouze za první výraz dosadíme

$$\ln \frac{1 - e^x}{1 + e^x}.$$

Takže po uvažování $\alpha < 1$ a použití l'Hospitalova pravidla dospějeme ke stejnému výrazu jako prve a zjistíme, že musí platit $\alpha \in (0, 1)$. Dále zjistíme, že α může být také bez jakéhokoliv omezení větší nebo rovno 1.

Celkem tedy musí platit $\alpha \in (0, 2)$, jak již bylo výše řečeno. Potom ovšem platí

$$I_n = s^{\alpha-1} \frac{d^n}{d\alpha^n} I_0, \quad (135)$$

kde

$$\begin{aligned} I_0 &= \frac{1}{\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{e^{(\alpha-1)y}}{\sinh y} dy = \frac{1}{\pi} \int_{-\infty}^0 \frac{e^{(\alpha-1)y}}{\sinh y} dy + \frac{1}{\pi} \int_0^{\infty} \frac{e^{(\alpha-1)y}}{\sinh y} dy = \frac{1}{\pi} \int_{-\infty}^0 \frac{2e^{(\alpha-1)y}}{e^y - e^{-y}} dy + \\ &+ \frac{1}{\pi} \int_0^{\infty} \frac{2e^{(\alpha-1)y}}{e^y - e^{-y}} dy = \frac{1}{\pi} \int_{-\infty}^0 \frac{2e^{\alpha y}}{e^{2y} - 1} dy + \frac{1}{\pi} \int_0^{\infty} \frac{2e^{(\alpha-2)y}}{1 - e^{-2y}} dy. \end{aligned} \quad (136)$$

Výrazy v integrandech lze chápat jako součet nekonečných řad. Proto je rozvineme a dále upravíme:

$$\begin{aligned} I_0 &= -\frac{1}{\pi} \int_{-\infty}^0 2e^{\alpha y} \left(\sum_{n=0}^{\infty} e^{2yn} \right) dy + \frac{1}{\pi} \int_0^{\infty} 2e^{(\alpha-2)y} \left(\sum_{n=0}^{\infty} e^{-2yn} \right) dy = \\ &= \frac{2}{\pi} \sum_{n=0}^{\infty} \left(- \int_{-\infty}^0 e^{(\alpha+2n)y} dy + \int_0^{\infty} e^{(\alpha-2-2n)y} dy \right) = \\ &= \frac{2}{\pi} \sum_{n=0}^{\infty} \left(\frac{-1}{\alpha + 2n} [e^{(\alpha+2n)y}]_{-\infty}^0 + \frac{1}{\alpha - 2 - 2n} [e^{(\alpha-2-2n)y}]_0^{\infty} \right) = \\ &= \frac{2}{\pi} \sum_{n=0}^{\infty} \left(\frac{-1}{\alpha + 2n} - \frac{1}{\alpha - 2 - 2n} \right) = \frac{2}{\pi} \sum_{n=0}^{\infty} \left(\frac{1}{2n + 2 - \alpha} - \frac{1}{2n + \alpha} \right) = \end{aligned}$$

$$= \tan \left[\frac{\pi}{2}(\alpha - 1) \right] \quad (137)$$

Poslední rovnost plyne z Fourierova rozvoje: lze snadno ověřit, že platí

$$\cos ax = \frac{\sin a\pi}{a\pi} + \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \frac{2a \sin a\pi}{\pi(a^2 - n^2)} \cos nx \quad (138)$$

a po dosazení $x = \pi, a\pi = z$ a vydělení sinem dostaneme

$$\cot z = \frac{1}{z} + \sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{1}{z + n\pi} + \frac{1}{z - n\pi} \right). \quad (139)$$

Vužijeme-li rovnosti $\tan z = -\cot(z + \frac{\pi}{2})$ a dosadíme $z = \frac{\pi}{2}(\alpha - 1)$, dostáváme požadovanou rovnost.

Celkem tedy platí:

$$\begin{aligned} \operatorname{Re} F_S(s, t) &= s \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!} \frac{\partial^n}{\partial \xi^n} \left(\frac{\operatorname{Im} F_S(s, t)}{s^\alpha} \right) I_n = \\ &= s^\alpha \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!} \frac{\partial^n}{\partial \xi^n} \left(\frac{\operatorname{Im} F_S(s, t)}{s^\alpha} \right) \frac{d^n}{d\alpha^n} \left\{ \tan \left[\frac{\pi}{2}(\alpha - 1) \right] \right\} = \\ &= s^\alpha \tan \left[\frac{\pi}{2} \left(\alpha - 1 + \frac{\partial}{\partial \ln s'} \right) \right] \left(\frac{\operatorname{Im} F_S(s, t)}{s^\alpha} \right) \end{aligned} \quad (140)$$

Poslední výraz je vlastně formální přepis předchozí sumy do úspornějšího tvaru. Lze totiž snadno spočítat, že sumu na levé straně rovnice formálně dostaneme z výrazu na pravé straně jako "Taylorův rozvoj" funkce $\tan \left[\frac{\pi}{2}(\alpha - 1) \right]$ se středem v bodě α pro "hodnotu" $\alpha + \frac{\partial}{\partial \ln s'}$.

•

Z obdobným způsobem definované integrální disperzní relace pro antisymetrickou amplitudu rozptylu lze dokázat, že

$$\operatorname{Re} F_A(s, t) = s^\alpha \tan \left[\frac{\pi}{2} \left(\alpha + \frac{\partial}{\partial \ln s} \right) \right] \left(\frac{\operatorname{Im} F_A(s, t)}{s^\alpha} \right). \quad (141)$$

Pro $\alpha = 1$ potom platí

$$\frac{\operatorname{Re} F_S(s, t)}{s} = \tan \left(\frac{\pi}{2} \frac{\partial}{\partial \ln s'} \right) \left(\frac{\operatorname{Im} F_S(s, t)}{s} \right) =$$

$$\begin{aligned}
&= \left[\frac{\pi}{2} \frac{\partial}{\partial \ln s'} + \frac{1}{3} \left(\frac{\pi}{2} \frac{\partial}{\partial \ln s'} \right)^3 + \frac{2}{15} \left(\frac{\pi}{2} \frac{\partial}{\partial \ln s'} \right)^5 + \dots \right] \left(\frac{\operatorname{Im} F_S(s, t)}{s} \right) = \\
&= \sum_{n=1}^{\infty} a_n \frac{\partial^{2n-1}}{\partial \ln s'^{2n-1}} \left(\frac{\operatorname{Im} F_S(s, t)}{s} \right), \tag{142}
\end{aligned}$$

kde

$$a_n = \frac{2\pi^{2n-1}(2^{2n} - 1)}{(2n)!} |B_{2n}|, \tag{143}$$

přičemž B_{2n} jsou Bernoulliho čísla.

Obdobně pro antisymetrickou amplitudu platí

$$\frac{\operatorname{Re} F_A(s, t)}{s} = \tan \left[\frac{\pi}{2} \left(1 + \frac{\partial}{\partial \ln s'} \right) \right] \left(\frac{\operatorname{Im} F_A(s, t)}{s} \right), \tag{144}$$

a podle Taylorova vzorce pro funkci $x \cot x$ tedy potom

$$\begin{aligned}
&\frac{\pi}{2} \frac{\partial}{\partial \ln s'} \left(\frac{\operatorname{Re} F_A(s, t)}{s} \right) = \\
&= - \left[1 - \frac{1}{3} \left(\frac{\pi}{2} \frac{\partial}{\partial \ln s'} \right)^2 - \frac{1}{45} \left(\frac{\pi}{2} \frac{\partial}{\partial \ln s'} \right)^4 - \dots \right] \left(\frac{\operatorname{Im} F_A(s, t)}{s} \right). \tag{145}
\end{aligned}$$

B Podmínky konvergence diferenciálního operátoru v DAR

Budeme se nyní blíže zabývat podmínkami, za kterých konverguje tzv. tangenciální suma, tedy rozvoj operátoru

$$\tan \left(\frac{\pi}{2} \frac{\partial}{\partial \ln s} \right),$$

vyjadřujícího vztah mezi imaginární a reálnou částí sudé amplitudy rozptylu, po dosazení nějaké funkce $g(\ln s)$. K tomu účelu zavedeme substituci

$$\ln s = x \tag{146}$$

a

$$\tan \left(\frac{\pi}{2} \frac{\partial}{\partial \ln s} \right) g(\ln s) = \tan \left(\frac{\pi}{2} \frac{\partial}{\partial x} \right) g(x) = T(x). \tag{147}$$

Při vyšetřování konvergence jsou důležité tyto 2 věty [5,11]:

Věta B.1: Nechť $g : \mathcal{R}^1 \rightarrow \mathcal{R}^1$. Suma $T(x)$ je konvergentní v bodě $x \in \mathcal{R}^1$ právě tehdy, když řada

$$D(x) = \sum_{n=1}^{\infty} g^{(2n-1)}(x) \quad (148)$$

je konvergentní.

Tato věta má základní důležitost pro řadu následujících výsledků. Co se týče praktického použití, musíme parametrizovat amplitudu rozptylu v nějakém intervalu energií. Tedy potřebujeme následující větu.

Věta B.2: Nechť $g : \mathcal{I} \rightarrow \mathcal{R}^1$ má všechny derivace v každém $x \in \mathcal{I}$, $\mathcal{I} \subset \mathcal{R}^1$. Pokud $T(x)$ konverguje pro všechna $x \in \mathcal{I} \subset \mathcal{R}^1$, potom celistvá funkce komplexního x existuje na $\mathcal{I}$.

Důkaz věty B.1:

Využijeme *Abelova kritéria*:

Nechť (a_n) je monotonní omezená posloupnost a nechť řada $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ konverguje, pak řada $\sum_{n=1}^{\infty} a_n b_n$ také konverguje.

Nejprve dokážeme, že posloupnost (a_n) ze sumy $T(x) = \sum_{n=1}^{\infty} a_n g^{(2n-1)}(x)$ splňuje podmínky Abelova kritéria: Víme, že platí

$$a_n = \frac{2\pi^{2n-1}2^{2n} - 1}{(2n)!} |B_{2n}| = \frac{4}{\pi} (1 - 2^{-2n}) \zeta(2n), \quad (149)$$

kde $\zeta(2n) = \frac{(2\pi)^{2n}}{2(2n)!} |B_{2n}|$. Pro $n = 1$ platí $\zeta(2) = \frac{(2\pi)^2}{4} \cdot \frac{1}{6} = \frac{\pi^2}{6} \doteq 1,64$. Přitom je nám známo, že $\frac{\pi^2}{6} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2}$, což napovídá, že pro $x > 2$ platí $\zeta(x) = \sum_{n=1}^{\infty} n^{-x}$. Můžeme tedy s určitostí říct, že $1 < \zeta(2n) < 1,64$ a $\zeta(2n)$ je omezenou posloupností. Pro vysoká n pak můžeme psát

$$a_n \sim \frac{4}{\pi} (1 - 2^{-2n}) (1 + 2^{-2n} + 3^{-2n} + 4^{-2n} + O(5^{-2n})) = \frac{4}{\pi} (1 + 3^{-2n} + O(5^{-2n})). \quad (150)$$

Tato posloupnost je při dostatečně vysokém n klesající a tudíž monotonní.

Předpokládejme nyní, že řada $D(x)$ konverguje. Pak vzhledem k vlastnostem posloupnosti (a_n) musí podle Abelova kritéria konvergovat také řada $T(x)$.

Předpokládejme naopak, že konverguje řada $T(x)$. Výraz $D(x)$ můžeme rozepsat jako $D(x) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{a_n} a_n g^{(2n-1)}(x)$. V Abelově kritériu teď úlohu posloupností a_n a b_n hrají posloupnosti $(\frac{1}{a_n})$ a $(a_n g^{(2n-1)}(x))$ které, jak se lze snadno přesvědčit, splňují dané požadavky a řada $D(x)$ tedy konverguje.

•

Tyto výsledky ukazují mimořádně omezenou platnost DAR pro konečnou energii: znamená to, že $T(x)$ je konvergentní v intervalu energií $\mathcal{I} \subset \mathcal{R}^1$, pouze když $g(x)$ je celistvá funkce komplexního x a pokud dvě sumy, $D(x)$ a $E(x) = \sum_{n=0}^{\infty} g^{(2n)}(x)$, také konvergují.

C Důkaz vlastnosti (vii) pro funkce tříd $\mathcal{E}$ a $\mathcal{E}'$

Výrazy v integrandech upravíme pro případ $E \rightarrow \infty$ a $K_4 \rightarrow \infty$:

$$\begin{aligned}
F_S^{abc}(E) &= cE^a e^{-ia\frac{\pi}{2}} \left(\ln E - i\frac{\pi}{2} \right)^b = cE^a e^{-ia\frac{\pi}{2}} \ln^b E \left(1 - i\frac{\pi}{2 \ln E} \right)^b \approx \\
&\approx cE^a e^{-ia\frac{\pi}{2}} \ln^b E \left(1 - i\frac{\pi b}{2 \ln E} \right) \approx cE^a \ln^b E e^{-i\frac{\pi}{2}(a + \frac{b}{\ln E})} \\
&\Rightarrow \operatorname{Re} F_S^{abc}(E) \approx cE^a \ln^b E \cos \left[\frac{\pi}{2} \left(a + \frac{b}{\ln E} \right) \right], \\
&\operatorname{Im} F_S^{abc}(E) \approx -cE^a \ln^b E \sin \left[\frac{\pi}{2} \left(a + \frac{b}{\ln E} \right) \right] \\
F_S^{abc}(K_4 e^{i\varphi}) &= cK_4^a e^{ia(\varphi - \frac{\pi}{2})} \ln^b K_4 \left(1 + i\frac{\varphi - \frac{\pi}{2}}{\ln K_4} \right)^b \approx \\
&\approx cK_4^a \ln^b K_4 e^{i(\varphi - \frac{\pi}{2})(a + \frac{b}{\ln K_4})} \\
&\Rightarrow \operatorname{Re} F_S^{abc}(K_4 e^{i\varphi}) \approx cK_4^a \ln^b K_4 \cos \left(\varphi - \frac{\pi}{2} \right) \left(a + \frac{b}{\ln K_4} \right), \\
&\operatorname{Im} F_S^{abc}(K_4 e^{i\varphi}) \approx cK_4^a \ln^b K_4 \sin \left(\varphi - \frac{\pi}{2} \right) \left(a + \frac{b}{\ln K_4} \right)
\end{aligned}$$

Dosazením do nerovnosti dostáváme

$$\begin{aligned} & - \int_{K_4}^{\infty} c E^{a-1} \ln^b E \sin \left[\frac{\pi}{2} \left(a + \frac{b}{\ln E} \right) \right] dE > \\ & > \frac{1}{2} \int_0^{\pi} c K_4^a \ln^b K_4 \cos \left[\left(\varphi - \frac{\pi}{2} \right) \left(a + \frac{b}{\ln K_4} \right) \right] d\varphi \end{aligned}$$

Věnujme se nyní otázce, za jakých okolností diverguje integrál

$$\int_{K_4}^{\infty} E^{a-1} \ln^b E dE.$$

Pokud má totiž zároveň multiplikační konstanta na levé straně nerovnice záporné znaménko, pak nerovnice evidentně platí.

Je zřejmé, že

$$\lim_{E \rightarrow \infty} E^{a-1} \ln^b E = \infty$$

pro $a \geq 1 \wedge b \geq 0 \wedge (a \neq 1 \vee b \neq 0)$ a pro tyto hodnoty bude tedy také integrál určitě divergovat. Bude také divergovat pro $a = 1 \wedge b = 0$, protože v tomto případě je příslušná limita rovna jedné, tedy konstantě různé od nuly. Zavedeme-li substituci $\ln E = t$, ihned po dosazení do integrálu vidíme, že při stejných hodnotách b integrál diverguje také pro $a \in \langle 0, 1 \rangle$. Použitím l'Hospitalova pravidla při výpočtu limity pro $E \rightarrow \infty$ lze dokázat, že je-li $a > 1$, integrál diverguje nejen pro nezáporná, ale pro libovolná b . To platí i pro $a \in \langle 0, 1 \rangle$, což dokážeme pomocí předešlé substituce a po dosazení do integrálu několikanásobným užitím metody per partes. Jednoduchým výpočtem se přesvědčíme, že v případě, kdy $a = 0$, integrál diverguje jen pro $b \geq -1$.

V ostatních případech, tj. pokud $a < 0$, integrál konverguje. O tom se můžeme přesvědčit na základě úvahy, že ke každému kladnému $q < -a$ lze zvolit E_0 takové, že pro $E > E_0$ platí $E^q > \ln^b E$. Potom platí

$$\int_{K_4}^{\infty} E^{a-1} \ln^b E dE = \int_{K_4}^{E_0} + \int_{E_0}^{\infty} < I + \int_{E_0}^{\infty} E^{a-1+q} dE = I + \left[\frac{E^{a+q}}{a+q} \right]_{E_0}^{\infty} = I - \frac{E_0^{a+q}}{a+q},$$

kde I je nějaké konečné kladné číslo.

Nyní budeme vyšetřovat případ, kdy $a = 0$. Pak dostaneme ze zkoumané nerovnosti

$$-c \int_{K_4}^{\infty} E^{-1} \ln^b E \sin \frac{\pi b}{2 \ln E} dE \sim -\frac{\pi b c}{2} \int_{K_4}^{\infty} E^{-1} \ln^{b-1} E dE >$$

$$> \frac{c}{2} \ln^b K_4 \int_0^\pi \cos \left[\frac{b}{\ln K_4} \left(\varphi - \frac{\pi}{2} \right) \right] d\varphi.$$

Pokud je dále $b = 0$, nerovnice se zredukuje na tvar

$$0 > \frac{\pi c}{2},$$

z čehož plyne, že musí platit $c < 0$. Je-li $b > 0$, bude levá strana nerovnice divergovat. Platnost nerovnosti pak závisí pouze na znaménku konstanty c , neboť výraz vpravo nikdy nedosahuje nekonečna. Aby tedy nerovnice platila, musí být c záporné.

Pokud je $b < 0$, změní se tvar nerovnice po jednoduchých úpravách na

$$\frac{\pi c}{2} > \frac{c}{b} \ln K_4 \sin \frac{\pi b}{2 \ln K_4}.$$

Potom musíme rozlišit případy, kdy podíl $\frac{c}{b}$ má kladné a záporné znaménko. Je-li kladné, pak dostaneme

$$\frac{\pi b}{2 \ln K_4} > \sin \frac{\pi b}{2 \ln K_4},$$

což se s předpokladem $b < 0$ vzájemně vylučuje. Je-li $\frac{c}{b} < 0$, dostaneme

$$\frac{\pi b}{2 \ln K_4} < \sin \frac{\pi b}{2 \ln K_4},$$

což platí pro $b < 0$ platí vždy, takže musí být zároveň $c > 0$.

Pro $a = 2k \neq 0, k \in \mathcal{Z}$ provedeme úpravu funkce sinus v integrandu na levé straně nerovnice a upravíme:

$$\begin{aligned} \sin \left[\frac{\pi}{2} \left(2k + \frac{b}{\ln E} \right) \right] &= \sin \pi k \cos \frac{\pi b}{2 \ln E} + \cos \pi k \sin \frac{\pi b}{2 \ln E} \sim (-1)^k \frac{\pi b}{2 \ln E}, \\ - \int_{K_4}^{\infty} c E^{2k-1} \ln^b E \sin \left[\frac{\pi}{2} \left(2k + \frac{b}{\ln E} \right) \right] dE &\sim -(-1)^k \frac{\pi b c}{2} \int_{K_4}^{\infty} E^{2k-1} \ln^{b-1} E dE. \end{aligned}$$

Na pravé straně nerovnice vznikne po zintegrování a obdobných úpravách, ve kterých navíc využijeme vzorec pro součet 2 funkcí sinus, výraz

$$(-1)^k c \frac{K_4^{2k} \ln^b K_4}{2k + \frac{b}{\ln K_4}} \sin \frac{\pi b}{2 \ln K_4} \sim (-1)^k \frac{\pi b c}{2} \frac{K_4^{2k} \ln^{b-1} K_4}{2k}.$$

Vidíme, že nerovnici můžeme vykrátit zlomkem $\frac{\pi}{2}$. Dále rozlišíme případy pro různá znaménka výrazu $(-1)^{k+1}bc$. Je-li toto znaménko kladné, dostaneme

$$\int_{K_4}^{\infty} E^{2k-1} \ln^{b-1} E dE > -\frac{K_4^{2k} \ln^{b-1} K_4}{2k}.$$

Tato nerovnice je bezpochyby splněna, pokud $k > 0$, protože integrál vlevo potom diverguje. Je-li k záporné, tento integrál konverguje, tedy vyšetřování platnosti nerovnice bude komplikovanější. Pokud navíc $b \leq 1$, platnost nerovnice ověříme odhadem:

$$\int_{K_4}^{\infty} E^{2k-1} \ln^{b-1} E dE \leq \ln^{b-1} K_4 \int_{K_4}^{\infty} E^{2k-1} dE = -\frac{K_4^{2k} \ln^{b-1} K_4}{2k},$$

tedy levá strana nerovnosti má být větší a zároveň menší nebo rovna než výraz na pravé straně. Taková situace nemůže nikdy nastat. Pro $b > 1$ použijeme k odhadu integrálu metodu per partes. Zároveň bez újmy na obecnosti budeme předpokládat $b \in (1, 2)$. Platí

$$\begin{aligned} \int_{K_4}^{\infty} E^{2k-1} \ln^{b-1} E dE &= \left[\frac{E^{2k}}{2k} \ln^{b-1} E \right]_{K_4}^{\infty} - \frac{b-1}{2k} \int_{K_4}^{\infty} E^{2k-1} \ln^{b-2} E dE = \\ &= -\frac{1}{2k} K_4^{2k} \ln^{b-1} K_4 + \frac{b-1}{(2k)^2} K_4^{2k} \ln^{b-2} K_4 + \frac{(b-1)(b-2)}{(2k)^2} \int_{K_4}^{\infty} E^{2k-1} \ln^{b-3} E dE > \\ &> -\frac{1}{2k} K_4^{2k} \ln^{b-1} K_4 + \frac{b-1}{(2k)^2} K_4^{2k} \ln^{b-2} K_4 - \frac{(b-1)(b-2)}{(2k)^3} K_4^{2k} \ln^{b-3} K_4. \end{aligned}$$

Poslední nerovnost je platná, protože exponent logaritmu $b-3$ v integrálu před znaménkem nerovnosti je záporný, tudíž integrál splňuje předpoklady předchozího případu, má však opačné znaménko, a proto také volíme opačné znaménko nerovnosti. Evidentně potřebujeme, aby výraz $\frac{(b-1)(b-2)}{(2k)^3} K_4^{2k} \ln^{b-3} K_4$ byl v absolutní hodnotě menší než výraz $\frac{b-1}{(2k)^2} K_4^{2k} \ln^{b-2} K_4$. Podíl obou výrazů je roven $\frac{b-2}{2k \ln K_4}$, což je za daných předpokladů menší než 1 a tedy skutečně platí

$$\frac{(b-1)(b-2)}{(2k)^3} K_4^{2k} \ln^{b-3} K_4 < \frac{b-1}{(2k)^2} K_4^{2k} \ln^{b-2} K_4.$$

Tím je vyšetřovaná nerovnost dokázána.

Nechť platí $(-1)^{k+1}bc < 0$. Pak má platit

$$\int_{K_4}^{\infty} E^{2k-1} \ln^{b-1} E dE < -\frac{K_4^{2k} \ln^{b-1} K_4}{2k},$$

tedy opačná nerovnost. Dostaneme tedy také přesně opačný výsledek než v předchozím případě, tj. musí být $k < 0$ a $b < 1$.

Přejdeme k případu, kdy $a \neq 2k, k \in \mathbb{Z}$. Potom můžeme logaritmy v argumentech goniometrických funkcí původní nerovnice považovat za nekonečné, tedy budou příslušné zlomky nulové a po vytknutí nám vyjde:

$$-c \sin \frac{\pi}{2} a \int_{K_4}^{\infty} E^{a-1} \ln^b E dE > \frac{1}{2} c K_4^a \ln^b K_4 \int_0^{\pi} \cos \left[a \left(\varphi - \frac{\pi}{2} \right) \right] d\varphi$$

Výraz na pravé straně můžeme upravit na

$$\frac{c}{a} K_4^a \ln^b K_4 \sin \frac{\pi}{2} a.$$

V dalším budeme rozlišovat situace $c \sin \frac{\pi}{2} a < 0$ a $c \sin \frac{\pi}{2} a > 0$, protože na tomto výrazu závisí znaménko nerovnosti. Z konvergenčních vlastností výrazu $\int_{K_4}^{\infty} E^{a-1} \ln^b E dE$ plyne, že pokud $c \sin \frac{\pi}{2} a < 0$, zkoumaná nerovnost určitě platí pro $a > 0$ (případ $a = 0 \wedge b \geq -1$ do toho zahrnovat nebudeme, protože podmínky platnosti nerovnosti při $a = 0$ jsme již zkoumali dříve). Naopak, je-li $c \sin \frac{\pi}{2} a > 0 \wedge a > 0$, pak nerovnost určitě neplatí.

Předpokládejme nyní, že $2k \neq a < 0 \wedge b \leq 0$. Pak snadno nahlédneme, že v intervalu hodnot (K_4, ∞) platí $0 < \ln^b E \leq \ln^b K_4$. Z toho již můžeme odvodit, že

$$\int_{K_4}^{\infty} E^{a-1} \ln^b E dE < \ln^b K_4 \int_{K_4}^{\infty} E^{a-1} dE = \ln^b K_4 \left[\frac{E^a}{a} \right]_{K_4}^{\infty} = -\frac{1}{a} K_4^a \ln^b K_4.$$

Srovnáme-li získaný výraz s výrazem na pravé straně naší nerovnosti spočteným pro případ $a \neq 2k$, vidíme, že jsou až na znaménko shodné. To vylučuje volbu $b = 0$, neboť pro tento případ by se z nerovnosti stala rovnost. Jinak rozlišíme případy $c \sin \frac{\pi}{2} a < 0$ a $c \sin \frac{\pi}{2} a > 0$. V prvním případě z původní nerovnice odvodíme nerovnost, která je v rozporu s tím, co jsme právě odvodili, a tedy za daných podmínek nemůže nerovnice nikdy platit. V druhém případě naopak dospějeme k závěru, že při dané volbě konstant platí nerovnost vždy.

Nechť $2k \neq a < 0 \wedge b > 0$. Postupem obdobným ověřování případu, kdy za stejných podmínek bylo $a = 2k$ a s využitím předchozího případu dojdeme k tomu,

že je-li $b \in (0, 1)$, bezpochyby platí

$$\begin{aligned} \int_{K_4}^{\infty} E^{a-1} \ln^b E dE &> -\frac{1}{a} K_4^a \ln^b K_4 + \frac{b}{a^2} K_4^a \ln^{b-1} K_4 - \frac{b(b-1)}{a^3} K_4^a \ln^{b-2} K_4 > \\ &> -\frac{1}{a} K_4^a \ln^b K_4. \end{aligned}$$

Stejným postupem dostaneme podobný výsledek i pro vyšší hodnoty b .

To vylučuje platnost zkoumané nerovnice pro případ $c \sin \frac{\pi}{2} a > 0$, ve kterém musí platit přesně opačná rovnost. Naopak v případě $c \sin \frac{\pi}{2} a < 0$ je nerovnost automaticky splněna.

•

Literatura

- [1] J. Fischer, Physics Reports (Review Section of Physics Letters) 76, No. 3 (1981) 157-214.
- [2] V. B. Berestěckij, E. M. Lifšic, L. P. Pitajevskij, Těoretická fyzika, sv. 4, Relativistskaja kvantovaja těorija, část 1, 283-288, 295-300, Moskva, (1968).
- [3] J. B. Bronzan, G. L. Kane, U. P. Sukhatme, Phys. Lett. B49 (1974) 272.
- [4] J. Fischer, P. Kolář, J. Vrkoč, Phys. Rev. D13 (1976) 133.
- [5] P. Kolář, J. Fischer, J. Math. Phys. 25 (1984) 2538.
- [6] J. Fischer, P. Kolář, Phys. Rev. D17 (1978) 2168.
- [7] H. Burkhardt, Dispersion Relation Dynamics, 42-48, Amsterdam, (1969).
- [8] J. Formánek, Úvod do relativistické kvantové mechaniky a kvantové teorie pole, část 1, 263-280, Praha, (1998).
- [9] J. Fischer, Průhledy do mikrokosmu, Praha, 1986.
- [10] G.K.Eichmann, J.Dronkers, Phys. Lett., 52B (1974) 428.
- [11] P. Kolář, J. Fischer, hep-th/0110233 v1