REŠERŠNÍ PRÁCE : KOHERENTNÍ STAVY

PETR LUFT

Contents

1. Úvod

V této rešeršní práci se budu nejdříve zabývat pro jednoduchost problematikou standardních koherenrtních stavů, včetně jejich úplných podsystémů. Dále se zmíním o obecné definici koherentních stavů a o některých jiných příkladech systému koherentních stavů.

2. Standardní Koherentní Stavy na $L^2(\mathbb{R})$

Standardní koherentní stavy na Hilbertově prostoru $L^2(\mathbb{R}, dx)$ (dále již jen L^2) tvoří množinu stavů se spoustou specifických vlastností. Proto je můžeme definovat více způsoby. Zřejmě nejsnazší se zdá defiovat koherentní stavy jako vlastní vektory anihilačního operátoru $\mathbf{a}$. Komplikovanější, avšak vzhledem k obecné definici mnohem užitečnější, je konstrukce koherentních stavů pomocí reprezentace Heisenbergovy - Weylovy grupy. Tato konstrukce tedy následuje.

2.1. **Heisenberg - Weylova grupa a její reprezentace na L^2.** Na Hilbertově prostoru $L^2(\mathbb{R})$ máme definovaný operátor polohy $\widehat{\mathbf{Q}}$, který působí jako operátor násobení nezávislou proměnnou, dále operátor hybnosti $\widehat{\mathbf{P}}$, který definujeme jako derivaci $\widehat{\mathbf{P}} :=$ - i$\hbar\frac{d}{dx}$ a identický operátor $\widehat{\mathbf{I}}$. Pomocí operátorů polohy a hybnosti definujeme nové operátory. Anihilační operátor $\mathbf{a} := \frac{\widehat{\mathbf{Q}}+i\widehat{\mathbf{P}}}{\sqrt{2\hbar}}$ a k němu sdružený kreační operátor $\mathbf{a}^+ = \frac{\widehat{\mathbf{Q}}-i\widehat{\mathbf{P}}}{\sqrt{2\hbar}}$. Snadno se přesvědčíme, že platí následující komutační relace:

$$[\widehat{\mathbf{Q}}, \widehat{\mathbf{P}}] = i\hbar\widehat{\mathbf{I}},\ [\widehat{\mathbf{P}}, \widehat{\mathbf{I}}] = [\widehat{\mathbf{Q}}, \widehat{\mathbf{I}}] = 0, \tag{2.1}$$

dále také

$$[\mathbf{a}, \mathbf{a}^+] = \widehat{\mathbf{I}},\ [\mathbf{a}^+, \widehat{\mathbf{I}}] = [\widehat{\mathbf{I}}, \mathbf{a}] = 0. \tag{2.2}$$

Komutační relace (2.1), respekive (2.2), definují trojrozměrnou reálnou Lieovu algebru, kterou nazýváme Heisenberg - Weylova algebra a značíme $\mathcal{W}$. Bázi této algebry jsou operátory

$$\frac{i}{\sqrt{\hbar}}\widehat{\mathbf{Q}},\ \frac{i}{\sqrt{\hbar}}\widehat{\mathbf{P}}\ a \quad i\widehat{\mathbf{I}}. \tag{2.3}$$

Uvažujme nyní obecný prvek algebry $\mathcal{W}$ ve tvaru

$$\widehat{\mathbf{X}} = \xi_1\frac{i}{\sqrt{\hbar}}\widehat{\mathbf{Q}} + \xi_2\frac{i}{\sqrt{\hbar}}\widehat{\mathbf{P}} + \xi_3 i\widehat{\mathbf{I}}, \tag{2.4}$$

kde (ξ_1, ξ_2, ξ_3) jsou souřadnice v bázi (2.3). Z definice operátorů $\mathbf{a}$ a $\mathbf{a}^+$ vyplývá, že operátory polohy a hybnosti můžeme psát ve tvaru

$$\widehat{\mathbf{Q}} = \sqrt{\frac{\hbar}{2}}(\mathbf{a} + \mathbf{a}^+), \quad \widehat{\mathbf{P}} = -i\sqrt{\frac{\hbar}{2}}(\mathbf{a} - \mathbf{a}^+). \tag{2.5}$$

Pokud tento tvar operátorů $\widehat{\mathbf{P}}$ a $\widehat{\mathbf{Q}}$ dosadíme do (2.4), obdržíme obecný prvek algebry $\mathcal{W}$ ve tvaru

$$\widehat{\mathbf{X}} = \mathbf{a}(\frac{\xi_2 + i\xi_1}{\sqrt{2}}) + \mathbf{a}^+(\frac{-\xi_2 + i\xi_1}{\sqrt{2}}) + \xi_3 i\widehat{\mathbf{I}} = \alpha\mathbf{a}^+ - \bar{\alpha}\mathbf{a} + \xi_3 i\widehat{\mathbf{I}}, \tag{2.6}$$

kde $\alpha = \frac{-\xi_2+i\xi_1}{\sqrt{2}}$. Nyní můžeme přejít ke konstrukci příslušné Heisenberg - Weylovy grupy W. Předtím ovšem připomeňme jedno užitečné tvrzení *(Baker, Campbell, Hausdorff)*:

Nechť operátory $\widehat{\mathbf{A}}$ a $\widehat{\mathbf{B}}$ komutují se svým komutátorem, tj.

$$[[\widehat{\mathbf{A}},\widehat{\mathbf{B}}],\widehat{\mathbf{A}}] = [[\widehat{\mathbf{A}},\widehat{\mathbf{B}}],\widehat{\mathbf{B}}] = 0, \tag{2.7}$$

potom platí

$$exp(\widehat{\mathbf{A}}+\widehat{\mathbf{B}}) = exp(-\frac{1}{2}[\widehat{\mathbf{A}},\widehat{\mathbf{B}}])exp(\widehat{\mathbf{A}})exp(\widehat{\mathbf{B}}). \tag{2.8}$$

Důkaz tohoto tvrzuní je velmi snadný (viz. např. [6]). Z tohoto tvrzení navíc vyplývá, že za stejných předpokladů platí pro operátory $\widehat{\mathbf{A}}$ a $\widehat{\mathbf{B}}$ vztah:

$$exp(\widehat{\mathbf{A}})exp(\widehat{\mathbf{B}}) = exp([\widehat{\mathbf{A}},\widehat{\mathbf{B}}])exp(\widehat{\mathbf{B}})exp(\widehat{\mathbf{A}}). \tag{2.9}$$

Tříparametrickou grupu W zkonstruujeme dosazením algebry $\mathcal{W}$ do exponenciely: $\rho((\xi_1,\xi_2,\xi_3)) = exp(\xi_1\frac{i}{\sqrt{\hbar}}\widehat{\mathbf{Q}}+\xi_2\frac{i}{\sqrt{\hbar}}\widehat{\mathbf{P}}+\xi_3 i\widehat{\mathbf{I}}) = exp(\alpha\mathbf{a}^+ - \bar{\alpha}\mathbf{a}+\xi_3 i\widehat{\mathbf{I}})$, kde ξ_1,ξ_2 a ξ_3 jsou libovoná reálná čísla. Tato exponenciela definuje operátor unitární irreducibilní reprezentace ρ grupy W. Reprezentace ρ je podrobně popsána a rozebrána níže. Obecný element grupy W zapisujeme ve tvaru $(\xi_1,\xi_2,\xi_3)\in W$.

Jelikož dvojice operátorů $\widehat{\mathbf{P}}$ a $\widehat{\mathbf{Q}}$ (stejně tak $\mathbf{a}$ a $\mathbf{a}^+$) splňují podmínku (2.7), můžeme uplatnit vztah (2.8) a psát

$$\rho((\xi_1,\xi_2,\xi_3)) = exp(i\xi_3\widehat{\mathbf{I}})exp(\xi_1\frac{i}{\sqrt{\hbar}}\widehat{\mathbf{Q}}+\xi_2\frac{i}{\sqrt{\hbar}}\widehat{\mathbf{P}}) = \tag{2.10}$$

$$= exp(i(\xi_3+\frac{\xi_1\xi_2}{2})\widehat{\mathbf{I}})exp(\xi_1\frac{i}{\sqrt{\hbar}}\widehat{\mathbf{Q}})exp(\xi_2\frac{i}{\sqrt{\hbar}}\widehat{\mathbf{P}}) \tag{2.11}$$

(první rovnost je opět triviální důsledek relací (2.1) a vztahu (2.9)). Užitím vztahu (2.6) můžeme ještě vyjádřit prvek grupy W takto:

$$\rho((\xi_1,\xi_2,\xi_3)) = exp(i\xi_3\widehat{\mathbf{I}})\mathbf{D}(\alpha), \tag{2.12}$$

kde operátor $\mathbf{D}(\alpha)$ je definován takto:

$$\mathbf{D}(\alpha) = exp(\alpha\mathbf{a}^+ - \bar{\alpha}\mathbf{a}). \tag{2.13}$$

Nyní pomocí (2.9), (2.10) a (2.11) snadno odvodíme následující vztah pro grupové násobení ve W:

$$(\xi_1,\xi_2,\xi_3)\cdot(\zeta_1,\zeta_2,\zeta_3) = (\xi_1+\zeta_1,\xi_2+\zeta_2,\xi_3+\zeta_3+\frac{\xi_2\zeta_1-\xi_1\zeta_2}{2}). \tag{2.14}$$

Ze vztahu (2.14) je vidět, že v grupě W existuje podgrupa H, tvořená prvky $\rho((0,0,\xi_3)) = exp(i\xi_3\widehat{\mathbf{I}})$. Prvky této podgrupy komutují se všemi ostatními prvky grupy W, grupa H tedy tvoří centrum W. Ze vztahu (2.14) se snadno ukáže, že H je největší komutativní podgrupa ve W. Při zkoumání Heisenberg - Weylovy algebry a grupy již byla několikrát použita její konkrétní reprezentace v Hilbertově prostoru $L^2(\mathbb{R},dx)$ popsaná vztahem (2.10). Nyní se podívejme na obecný tvar unitární irreducibilní reprezentace grupy W na L^2. Nejdříve poznamenejme, že reprezentace podgrupy H musí být vždy tvaru

$$\rho((0,0,\xi_3)) = exp(i\lambda\xi_3)\widehat{I}, \tag{2.15}$$

kde $\lambda\in\langle 0,2\pi)$. Toto tvrzení vyplývá ze Shurova lemmatu (viz. [9]) následujícím způsobem. Jelikož každý prvek H komutuje s libovolným prvkem W, platí totéž pro jeho reprezentaci, tj. $\rho((0,0,\xi_3))$ komutuje s libovolným operátorem dané reprezentace. Protože ρ je irreducibilní, pak lze použít Schurovo lemma, jehož důsledkem je $\rho((0,0,\xi_3)) = \gamma\widehat{I}$, kde $\gamma \in \mathbb{C}$. Z unitarity pak již snadno vyplývá tvrzení. Nechť ρ je tedy unitární irreducibilní reprezentace grupy W. Pak reprezentace podgrupy H lze parametrizovat parametrem λ tak, že platí (2.15). Otázku všech unitárních irreducibilních reprezentací W na L^2 pak řeší následující věta (*von Neumannn*):

Nechť $\lambda \neq 0$ je pevné. Potom libovolné dvě unitární irreducibilní reprezentace W *jsou unitárně ekvivalentní.*

Všimněme si nyní operátoru $\mathbf{D}(\alpha)$, definovaného v (2.13). Z (2.10) je zřejmé, že reprezentace H (parametr ξ_3) mění pouze fázi vektorů, nikoliv však paprsek. Pro změnu paprsku je relevantní pouze část reprezentace daná operátorem $\mathbf{D}(\alpha)$. Vzniká tedy otázka, jestli by nešlo operátor $\mathbf{D}(\alpha)$ definovat jako reprezentaci menší, tedy dvouparametrické, grupy $\tilde{\mathrm{W}}$, kde grupové násobení je definováno

$$(\xi_1,\xi_2)\cdot(\zeta_1,\zeta_2) = (\xi_1+\zeta_1,\xi_2+\zeta_2). \tag{2.16}$$

Bohužel, vztah

$$\tilde{\rho}((\xi_1,\xi_2)) = exp(\xi_1\frac{i}{\sqrt{\hbar}}\widehat{\mathbf{Q}} + \xi_2\frac{i}{\sqrt{\hbar}}\widehat{\mathbf{P}}), \tag{2.17}$$

nedefinuje reprezentaci, neboť se nejedná o homomorfizmus. Zobrazení $\tilde{\rho}$ je pouze projektivní reprezentace grupy $\tilde{\mathrm{W}}$, protože zřejmě platí

$$\tilde{\rho}((\xi_1,\xi_2)\tilde{\rho}(\zeta_1,\zeta_2)) = exp(i\frac{\xi_2\zeta_1-\xi_1\zeta_2}{2})\tilde{\rho}((\xi_1,\xi_2)\cdot(\zeta_1,\zeta_2)). \tag{2.18}$$

Grupu $\tilde{\mathrm{W}}$ je tedy třeba centrálně rozšířit na grupu W. Ze vztahů (2.13) a (2.17) vyplývá

$$\tilde{\rho}((\xi_1,\xi_2)) = \mathbf{D}(\alpha). \tag{2.19}$$

Ze vztahu (2.18) a z definice čísla α dále vyplývá vztah

$$\mathbf{D}(\alpha)\mathbf{D}(\beta) = exp(iIm(\alpha\bar{\beta}))\mathbf{D}(\alpha+\beta) \tag{2.20}$$

a také

$$\mathbf{D}(\alpha)\mathbf{D}(\beta) = exp(2iIm(\alpha\bar{\beta}))\mathbf{D}(\beta)\mathbf{D}(\alpha). \tag{2.21}$$

Zde stojí za zmínku ten fakt, že výraz $|Im(\alpha\bar{\beta})|$, který se nachází v argumentu exponenciely výrazu (2.21), má geometrický význam dvojnásobku plochy trojúhelníku v komplexní rovině, který je ohraničen body $(0,\alpha,\beta)$. Na závěr ještě zbývá uvést explicitní tvar operátoru $\mathbf{D}(\alpha)$ na L^2. Buď $f(x) \in L^2$. Použijeme-li definici operátorů $\widehat{\mathbf{Q}}$ a $\widehat{\mathbf{P}}$, pak dostaneme

$$exp(\xi_1\frac{i}{\sqrt{\hbar}}\widehat{\mathbf{Q}})f(x) = \sum\frac{(xi\xi_1)^k}{\sqrt{\hbar}k!}f(x) = exp(\frac{i\xi_1 x}{\sqrt{\hbar}})f(x), \tag{2.22}$$

pro hybnost máme

$$exp(\xi_2\frac{i}{\sqrt{\hbar}}\widehat{\mathbf{P}})f(x) = \sum\frac{(\xi_2\sqrt{\hbar})^k}{k!}(f^{(k)})(x) = f(x-\sqrt{\hbar}\xi_2). \tag{2.23}$$

Použitím vztahů (2.8), (2.22) a (2.23) dostaneme výsledný vztah

$$\mathbf{D}(\alpha)f(x) = exp(\frac{i\xi_1\xi_2}{2})exp(\frac{i\xi_1 x}{\sqrt{\hbar}})f(x-\sqrt{\hbar}\xi_2). \tag{2.24}$$

2.2. **Konstrukce Standardních koherentních Stavů na L^2 a jejich vlastnosti.** Nyní je již vše připraveno k definici koherentních stavů:

Buď $|\psi_0\rangle$ libovolný nenulový vektor z prostoru L^2. Potom množinu stavů $|\psi_\alpha\rangle = \mathbf{D}(\alpha)|\psi_0\rangle$, kde $\alpha \in \mathbb{C}$, nazveme koherentními stavy na L^2. Je-li speciálně $|\psi_0\rangle = |0\rangle$, kde $|0\rangle$ je základní stav harmonického oscilátoru, pak hovoříme o standardních koherentních stavech.

Jako první vlastnost koherentních stavů uveďme, že aplikujeme-li operátor $\mathbf{D}(\alpha)$ na libovolný jiný koherentní stav, pak výsledný stav je opět koherentní stav ze stejného systému, platí tedy

$$\mathbf{D}(\beta)|\psi_\alpha\rangle = exp(iIm(\beta\bar{\alpha}))|\psi_{\beta+\alpha}\rangle, \tag{2.25}$$

což přímo vyplývá ze vztahu (2.20). Dále platí, zě libovolné dva různé koherentní stavy (stejného systému) nemohou lezět ve stejném paprsku. Toto dokáěme následovně: Buď $\beta \neq \alpha$. Z (2.25) vyplývá $|\psi_\beta\rangle = \exp(-iIm(\beta\overline{\alpha}))\mathbf{D}(\beta-\alpha)|\psi_\alpha\rangle$. Stačí tedy ukázat, že pro libovolnou funkci $f \in L^2$ nemůže operátor $\mathbf{D}(\alpha)$ působit jako operátor změny fáze pro $\alpha \neq 0$. To ukážeme sporem: Nechť platí opak, tedy existuje dvojice reálných čísel $(\xi_1, \xi_2) \neq (0,0)$ tak, že platí

$$\mathbf{D}(\alpha)f(x) = exp(\frac{i\xi_1\xi_2}{2})exp(\frac{i\xi_1 x}{\sqrt{\hbar}})f(x-\sqrt{\hbar}\xi_2) = exp(i\lambda)f(x), \tag{2.26}$$

kde $\lambda \in \langle 0, 2\pi)$. Potom pro modul zřejmě platí $|f(x)| = |f(x-\sqrt{\hbar}\xi_2)|$. Modul funkce f je tedu periodický s periodou ξ_2. Aby ale funkce f byla z L^2, pak musí být $\xi_2 = 0$. (Předpokládáme, že $f \neq 0$.) Pak ovšem z (2.26) vaplývá

$$exp(\frac{i\xi_1 x}{\sqrt{\hbar}})f(x) = exp(i\lambda)f(x). \tag{2.27}$$

Musí tedy existovat množina $I \subset \mathbb{R}$, která má míru $\mu(I) > 0$ taková, že $\forall x \in I$ platí $\xi_1 x - \lambda = 2k\pi$, kde $k \in \mathbb{Z}$. Odtud vyplývá $\xi_1 = 0$, což je spor s předpokladem. Další vlastnost koherentních stavů se týká jejich skalárního součinu. Pro součin dvou koherentních stavů platí $\langle\psi_\alpha|\psi_\beta\rangle = \langle\psi_0|\mathbf{D}(\alpha)^+\mathbf{D}(\beta)|\psi_0\rangle$. Jelikož zřejmě platí

$$\mathbf{D}(\alpha)^+ = \mathbf{D}(-\alpha), \tag{2.28}$$

pak s použitím (2.20) dostaneme

$$\langle\psi_\alpha|\psi_\beta\rangle = exp(iIm(\beta\bar{\alpha}))\langle\psi_0|\mathbf{D}(\beta-\alpha)|\psi_0\rangle. \tag{2.29}$$

Podívejme se, jak bude vypadat skalární součin (překryv) dvou standardních koherentních stavů. Proto je třeba si připomenout několik základních vztahů pro anihilační a kreační operátory. Nechť $|n\rangle$, $n \in \mathbb{N} \cup 0$, jsou vlastní stavy harmonického oscilátoru, které tvoří ortonormální bázi L^2. Pak z definice operátorů $\mathbf{a}$ a $\mathbf{a}^+$ lze snadno odvodit následující vztahy:

$$\mathbf{a}|n\rangle = \sqrt{n}|n-1\rangle \ , \ \mathbf{a}^+|n\rangle = \sqrt{n+1}|n+1\rangle, \tag{2.30}$$

dále

$$|n\rangle = \frac{1}{\sqrt{n!}}(\mathbf{a}^+)^n|0\rangle, \tag{2.31}$$

konečně

$$\mathbf{a}|0\rangle = 0 \ a \ \langle n|n'\rangle = \delta_{n,n'}, \tag{2.32}$$

kde $|0\rangle$ je základní stav harmonického osciátoru.

Stav $|\alpha\rangle$ lze vyjádřit následovně:

$$|\alpha\rangle = \mathbf{D}(\alpha)|0\rangle = exp(\alpha\mathbf{a}^+ - \bar{\alpha}\mathbf{a})|0\rangle = exp(-\frac{1}{2}|\alpha|^2)exp(\alpha\mathbf{a}^+)exp(-\bar{\alpha}\mathbf{a})|0\rangle, \tag{2.33}$$

kde druhá rovnost plyne z (2.13) a třetí z (2.2) a (2.8). Rozvineme-li poslední exponencielu v (2.33) do řady, pak pomocí (2.32) a (2.31) dostaneme vyjádření stavu $|\alpha\rangle$ v bázi $|n\rangle_{n=0}^{\infty}$:

$$|\alpha\rangle = exp(-\frac{1}{2}|\alpha|^2)exp(\alpha\mathbf{a}^+)|0\rangle = exp(-\frac{1}{2}|\alpha|^2)\sum_{n=0}^{\infty}\frac{\alpha^n}{\sqrt{n!}}|n\rangle. \tag{2.34}$$

Pro standardní koherentní stavy bude jejich skalární součin vypadat následovně:

$$\langle\beta|\alpha\rangle = exp(-\frac{1}{2}(|\alpha|^2 + |\beta|^2))\sum_{n,m=0}^{\infty}\frac{\bar{\beta}^m\alpha^n}{\sqrt{m!n!}}\langle m|n\rangle = exp(-\frac{|\alpha|^2}{2} - \frac{|\beta|^2}{2} + \bar{\beta}\alpha), \tag{2.35}$$

kde jsme při výpočtu využili ortonormality báze. Pro absolutní hodnotu překryvu pak snadno dostaneme

$$|\langle\beta|\alpha\rangle| = exp(-\frac{1}{2}|\alpha - \beta|^2), \tag{2.36}$$

odkud plyne, že libovlné dva standardní koherentní stavy nemohou být ortogonální.

V úvodu bylo řečeno, že standardní koherentní stavy lze definovat také jako vlastní vektory anihilačního operátoru $\mathbf{a}$. (Jako obecnou definici však toto použít nelze.) Nyní ukážeme, že zde definované koherentní stavy jsou skutečně vlastní stavy anihilačního operátoru s vlastními čísly α, tedy že platí

$$\mathbf{a}|\alpha\rangle = \alpha|\alpha\rangle. \tag{2.37}$$

K tomu nejdříve ukážeme vztah

$$\mathbf{D}^+(\alpha)\mathbf{a}\mathbf{D}(\alpha) = \mathbf{a} + \alpha\widehat{\mathbf{I}}. \tag{2.38}$$

Rozvineme-li třetí člen výrazu nalevo do řady, obdržíme

$$\mathbf{D}^+(\alpha)\mathbf{a}\mathbf{D}(\alpha) = exp(-\frac{1}{2}|\alpha|^2)\mathbf{D}^+(\alpha)\mathbf{a}exp(\alpha\mathbf{a}^+)exp(-\bar{\alpha}\mathbf{a}) \tag{2.39}$$

Indukcí a pomocí komutačních relací (2.2) snadno odvodíme

$$\mathbf{a}(\mathbf{a}^+)^k = k(\mathbf{a}^+)^{k-1} + (\mathbf{a}^+)^k\mathbf{a}. \tag{2.40}$$

Rozvineme-li nyní předposlední člen v (2.39) do řady a použijeme-li vztah (2.40), pak obdržíme (2.38). Pokud do vztahu (2.38) dosadíme $-\alpha$, pak s použitím (2.28) obdržíme

$$\mathbf{D}(\alpha)\mathbf{a}\mathbf{D}(-\alpha) = \mathbf{a} - \alpha\widehat{\mathbf{I}}. \tag{2.41}$$

Z (2.32) vyplývá

$$\mathbf{D}(\alpha)\mathbf{a}\mathbf{D}(-\alpha)|\alpha\rangle = 0, \tag{2.42}$$

což je podle (2.41) ekvivalentní (2.37), tedy stav $|\alpha\rangle$ je vlastní stav operátoru $\mathbf{a}$ s vlastní hodnotou α.

Nyní ověříme další vlastnost, totiž rozklad jednotky:

$$\widehat{\mathbf{I}} = \frac{1}{\pi}\int_{\mathbb{C}} d^2\alpha|\alpha\rangle\langle\alpha|. \tag{2.43}$$

Vlastnost (2.43) nám tedy dává vyjádření jednotkového operátoru pomocí (nespočetného) počtu vektorů, což se podobá klasickému rozkladu jednotky pomocí spočetného počtu vektorů ortonormální báze

$$\widehat{\mathbf{I}} = \sum_{n=0}^{\infty} |n\rangle\langle n|, \tag{2.44}$$

kde vektory $|n\rangle$ jsou vektory libovolné ortonormální báze, například tedy vlastní stavy harmonického oscilátoru v L^2. Výraz $|n\rangle\langle n|$ mají smysl ortogonálních projektorů na jednorozměrné podprostory generované stavy $|n\rangle$. Obdobná situace je i u stavů $|\psi_\alpha\rangle$. Výraz (2.43) nám tedy dává rozklad jednotky pomcí nespočetné množiny stavů, která není ortogonální (viz. (2.36)).

K odvození vztahu (2.43) uvažujme nejdříve obecně translačně invariantní míru $d\mu(\alpha)$, definovanou na komplexní rovině $\mathbb{C}$, dále operátor

$$\widehat{\mathbf{A}} = \int_{\mathbb{C}} d\mu(\alpha)|\psi_\alpha\rangle\langle\psi_\alpha|, \tag{2.45}$$

kde $|\psi_\alpha\rangle$ jsou koherentní stavy. Zde pracujeme s obecnějšími koherentními stavy definovanými na počátku kapitoly 2.2, nikoliv pouze se standardními koherentními stavy. Vztah (2.43) ovšem platí pouze pro standardní koherentní stavy. Dokážeme nyní, že operátor $\widehat{\mathbf{A}}$ komutuje s operátorem $\mathbf{D}(\alpha)$, tedy

$$[\widehat{\mathbf{A}}, \mathbf{D}(\alpha)] = 0 \quad \forall\alpha \in \mathbb{C}. \tag{2.46}$$

S využitím (2.25) obdržíme $\mathbf{D}(\alpha)\widehat{\mathbf{A}} = \int_{\mathbb{C}} d\mu(\beta) exp(iIm(\alpha\bar{\beta}))|\psi_{\alpha+\beta}\rangle\langle\psi_\beta|$. Nyní tedy provedeme substitici $\gamma = \alpha + \beta$. Díky požadované translační invarianci míry μ obdržíme $d\mu(\beta) = d\mu(\gamma)$. Můžeme tedy pokračovat ve výpočtu a psát $\mathbf{D}(\alpha)\widehat{\mathbf{A}} = \int_{\mathbb{C}} d\mu(\gamma) exp(iIm(\alpha\overline{(\gamma-\alpha)}))|\psi_\gamma\rangle\langle\psi_{\gamma-\alpha}|$. Jelikož platí

$exp(iIm(\alpha\overline{(\gamma-\alpha)})) = exp(iIm(\alpha\bar{\gamma}))$, je snadné ověřit vztah

$$\langle\psi_{\gamma-\alpha}|exp(iIm(\alpha\overline{(\gamma-\alpha)})) = \langle\psi_\gamma|\mathbf{D}^+(-\alpha) \tag{2.47}$$

Pomocí (2.28) a (2.47) již snadno obdržíme (2.46). Protože operátory $\mathbf{D}(\alpha)$ tvoří irreducibilní reprezentaci, pak podle Schurova lematu musí být

$$\widehat{\mathbf{A}} = c\widehat{\mathbf{I}}, \tag{2.48}$$

kde c je libovolná konstanta. Předpokládejme míru μ ve tvaru $d^2\mu(\alpha) = \frac{1}{c}d^2\alpha$. Určíme tedy konstantu c. Pomocí (2.34) a ortogonality báze $|n\rangle$ obdržíme

$$\int_{\mathbb{C}} d^2\alpha|\alpha\rangle\langle\alpha| = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{|n\rangle\langle n|}{n!} \int_{\mathbb{C}} d^2\alpha exp(-|\alpha|^2)|\alpha|^{2n}. \tag{2.49}$$

Pomocí substituce $\alpha = \rho\exp(i\varphi)$; $d^2\alpha = \rho d\rho d\varphi$ dostaneme

$\int_{\mathbb{C}} d^2\alpha|\alpha\rangle\langle\alpha| = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{|n\rangle\langle n|}{n!} \int_0^\infty exp(-\rho^2)\rho^{2n+1}d\rho \int_0^{2\pi} d\varphi =$

$$= \sum_{n=0}^{\infty} \frac{|n\rangle\langle n|}{n!}(\pi\Gamma(n+1)) = \pi\widehat{\mathbf{I}}, \tag{2.50}$$

kde poslední rovnost plyne z (2.44). Zvolíme-li $c = \pi$, pak je rovnost (2.43) dokázána.

Pokud vyjádříme základní stav harmonického oscilátoru explicitně v souřadnicové reprezentaci

$$\langle x|0\rangle = \frac{1}{\sqrt[4]{\pi\hbar}} exp(-\frac{x^2}{2\hbar}), \tag{2.51}$$

Potom pomocí (2.24) obdržíme explicitní tvar pro standardní koherentní stavy (tedy jejich tvar v souřsdnicové reprezentaci)

(2.52)

$$\varphi_\alpha(x) = \langle x|\alpha\rangle = \exp(-iRe(\alpha)Im(\alpha)) \exp(i\sqrt{\frac{2}{\hbar}}Im(\alpha)x) \exp(-\frac{(x-\sqrt{2\hbar}Re(\alpha))^2}{\hbar}).$$

Pomocí přímého výpočtu ze vztahu (2.52) snadno ukážeme, že standardní koherentní stavy minimalizují Heisenbergovy relace neurčitosti, tj.

$$\triangle_\alpha \widehat{\mathbf{Q}} \triangle_\alpha \widehat{\mathbf{P}} = \frac{\hbar}{2} \quad \forall \alpha \in \mathbb{C}. \tag{2.53}$$

Kromě toho také platí, že střední kvadratická odchylka obou operátorů pro stav $|\alpha\rangle$ je stejná pro všechna $\alpha \in \mathbb{C}$.

3. Úplné podsystémy množiny standardnch koherentních stavů

Ze vztahu (2.43) bezprostředně vyplývá

$$|\alpha\rangle = \int_{\mathbb{C}} d\mu(\beta)|\beta\rangle\langle\beta|\alpha\rangle. \tag{3.1}$$

Vztah (3.1) nám tedy udává lineární závislost mezi standardními koherentními stavy. Systém standardních koherentních stavů je tedy nejen úplný (což vyplývá z (2.43)), ale obsahuje dokonce mnohem více vektorů, než je pro úplnost třeba. Vzniká tedy otázka, zda můžeme nalézt podsystémy standardních koherentních stavů (tedy nějakou podmnožinu v $\mathbb{C}$), který by byl také úplný a určit jeho tvar. Vzhledem k separabilitě L^2 lze očekávat, že tento podsystḿ bude spučetný.

V této kapitole se tedy budu zabývat jedním konrétním podsystémem, totiž mřížkou v $\mathbb{C}$. K tomu je ovsem nejdříve připomenout pojem Fock - Bargmannovy reprezentace (= Hilbertův prostor analytických funkcí) a její souvislosti s L^2.

3.1. Hilbertův prostor analytických funkcí.

Definujme na komplexní rovině $\mathbb{C}$ komplexní míru $\tilde{\mu}$ vztahem

$$d\tilde{\mu}(z) = \frac{1}{\pi} exp(-|z|^2) d^2 z. \tag{3.2}$$

Symbolem $\mathcal{A}$ označme množinu všech celistvých funkcí kvadraticky integrabilních s mírou $\tilde{\mu}$. Na vektorovém prostoru $\mathcal{A}$ zavedeme skalární součin vztahem

$$\langle f(z)|g(z)\rangle_{\mathcal{A}} = \int_{\mathbb{C}} \overline{f(z)} g(z) d\tilde{\mu}(z). \tag{3.3}$$

Lze ukázat (viz. [2]), že $\mathcal{A}$ je separabilní Hilbertův prostor nekonečné dimenze. Ortonormální bázi tohoto prostoru tvoří funkce

$$e_n(z) = \frac{z^n}{\sqrt{n!}}. \tag{3.4}$$

Uvažujme nyní množinu celistvých funkcí parametrizovaných komplexními čísly

$$\chi_\alpha(z) := exp(z\bar{\alpha}) \qquad \alpha \in \mathbb{C}. \tag{3.5}$$

Jelikož snadno pomocí přímého výpočtu integrálu ukážeme

$$\|\chi_\alpha\|_{\mathcal{A}} = exp(|\alpha|^2), \tag{3.6}$$

pak je zřejmé, že $\chi_\alpha \in \mathcal{A}$. Důležitou vlastností funkcí (3.6) je následující rovnost

$$f(y) = \int_{\mathbb{C}} f(z)\overline{\chi_y(z)}d\tilde{\mu}(z) = \langle \chi_y|f\rangle_{\mathcal{A}}\ \forall y \in \mathbb{C} \tag{3.7}$$

důkaz této rovnosti je možno nalézt v [2]. Pokud použijeme (3.7) ještě jednou, pak obdržíme

$$f(y) = \int_{\mathbb{C}} \langle \chi_z|f\rangle_{\mathcal{A}}\chi_z(y)d\tilde{\mu}(z). \tag{3.8}$$

Zde je třeba využít vztahu $\chi_y(z) = \overline{\chi_z(y)}$, který je zřejmý z (3.5). Dostáváme tedy vztah analogický (3.1), což již dává tušit souvislost s koherentními stavy.

Vzhledem k tomu, že $\mathcal{A}$ je separabilní, pak musí být izomorfní L^2 (viz. [2]). Definujme tedy izomorfismus $\mathcal{A}$ a L^2 následovně: Nechť

$$|\psi\rangle = \sum_{k=0}^{\infty} c_k|k\rangle \in L^2,\ kde\ c_k \in \mathbb{C}\ a\ \sum_{k=0}^{\infty}|c_k|^2 < \infty, \tag{3.9}$$

pak definujeme izomorfizmus $\mathcal{U}$

$$\mathcal{U} : L^2 \to \mathcal{A} : |\psi\rangle = \sum_{k=0}^{\infty} c_k|k\rangle \mapsto \sum_{k=0}^{\infty} c_k e_k(z) = \tilde{\psi}(z) \in \mathcal{A}. \tag{3.10}$$

Za povšimnutí stojí fakt, že když spočítáme skalární součin libovolného standardního koherentního stavu $|\alpha\rangle$ s libovolným prvkem L^2, pak snadno obdržíme pomocí (2.34)

$$\langle\alpha|\psi\rangle = exp(-\frac{|\alpha|^2}{2})\sum_{k=0}^{\infty} c_k\frac{\bar{\alpha}^k}{\sqrt{k!}} = exp(-\frac{|\alpha|^2}{2})\tilde{\psi}(\bar{\alpha}). \tag{3.11}$$

Vztah (3.11) nám tedy vyjadřuje funkci z $\mathcal{A}$ v bodě z jako skalární součin jejího obrazu z L^2 se stavem $|z\rangle$. Ze vztahů (2.34) a (3.11) přímo vyplývá, že obraz koherentního stavu $|\alpha\rangle$ má v $\mathcal{A}$ tvar

$$\mathcal{U}(|\alpha\rangle) = exp(-\frac{|\alpha|^2}{2} + \alpha z) = exp(-\frac{|\alpha|^2}{2})\chi_{\bar{\alpha}}(z). \tag{3.12}$$

Toto lze také ověřit použitím (2.35).

Explicitní tvar izomorfizmu $\mathcal{U}$ je dán vztahem

$$\tilde{\psi}(z) = \int_{\mathbb{R}} \langle x|z\rangle\psi(x)dx, \tag{3.13}$$

kde výrazem $\langle x|z\rangle$ rozumíme explicitní tvar koherentního stavu $|z\rangle$ v souřadnicové reprezentaci (tj. v L^2), který je dán pomocí (2.52). Vztah (3.13) dokážeme tak, že si pomocí (2.34) vyjádříme

$$\langle x|z\rangle = exp(-\frac{|z|^2}{2})\sum_{n=0}^{\infty}\frac{z^n}{\sqrt{n!}}\varphi_n(x), \tag{3.14}$$

kde $\varphi_n(x)$ je explicitní tvar vlastních stavů harmonického oscilátoru (tj. $\varphi_n(x) = \langle x|n\rangle$). Funkce $\varphi_n(x)$ mají tvar

$$\varphi_n(x) = \frac{1}{\sqrt[4]{\pi\hbar}} \frac{\mathbf{H}_n(\frac{x}{\sqrt{\hbar}})}{2^{\frac{n}{2}}} exp(-\frac{x^2}{2\hbar}), \tag{3.15}$$

kde $\mathbf{H}_n$ jsou Hermitovy polynomy. k důkazu (3.13) stačí již jen dosadit (3.14) a využít ortonormality funkcí $\varphi_n(x)$. Inverzní transformace $\mathcal{U}^{-1}$ má tvar

$$\psi(x) = \int_{\mathbb{C}} \langle x|z\rangle \tilde{\psi}(z) d\tilde{\mu}(z). \tag{3.16}$$

Zobrazení $\mathcal{U}$ je zřejmě unitární.

Anihilační a kreační operátory mají v $\mathcal{A}$ tvar

$$\mathbf{a}_{\mathcal{A}} = \frac{d}{dz};\ \mathbf{a}_{\mathcal{A}}^{+} = z. \tag{3.17}$$

Jedná se tedy o operátory derivace a násobení nezávislou proměnnou, což je analogická operátorům hybnosti a polohy v L^2. Vlastnosti (2.30), (2.31) a (2.32) snadno ověříme přímým výpočtem. Stejně snadno ověříme i tvar operátoru $\mathbf{D}(\alpha)$ v $\mathcal{A}$

$$\mathbf{D}(\alpha)\tilde{\psi}(z) = exp(-\frac{|\alpha|^2}{2}) exp(\alpha z)\tilde{\psi}(z - \bar{\alpha}). \tag{3.18}$$

3.2. **Příklady úplných podsystémů množiny standardních koherentních stavů.** Klíčová úvaha pro následující část spočívá ve výpočtu skalárního součinu prvků L^2 s koherentními stavy. Ze vztahu (3.11) vyplývá, že skalární součin $\langle\alpha|\psi\rangle$ je roven nule, právě když obraz vektoru $|\psi\rangle$ v prostoru $\mathcal{A}$, tj. funkce $\tilde{\psi}(z)$, má v bodě $z = \bar{\alpha}$ nulový bod, tj. $\tilde{\psi}(\bar{\alpha}) = 0$. Pokud tedy podsystém standardních koherentních stavů není úplný, pak musí existovat nenulová funkce $\tilde{\psi}(z) \in \mathcal{A}$ taková, že platí $\tilde{\psi}(\alpha_I) = 0$, pro všechna α_I z daného podsystému. Opačné tvrzení zřejmě také platí. Funkce $\tilde{\psi}(z)$ by tedy byla nenulová a kolmá ke všem koherentním stavům z daného podsystému.

Jeden z nejjednodušších příkladů netriviálního úplného podsystému množiny standardních koherentních stavů je libovolná podmnožina, která je parametrizována množinou komplexních čísel s alespoň jedním hromadným bodem. Takovýto stav by totiž ve Fock - Bargmannově reprezentaci byl reprezentován celistvou funkcí, jejíž nulové body by měli hromadný bod, podle [8], str. 232, však tato funkce musí být nulová.

Dalším příkladem úplného podsystému koherentních stavů je libovolná nekonečná podmnožina, která neobsahuje $|0\rangle$ a splňuje podmínku

$$\sum_n \frac{1}{|\alpha_n|^{2+\varepsilon}} = \infty \tag{3.19}$$

pro nějaké $\varepsilon > 0$. Důkaz úplnosti takového podsystému je možno najít např. v [7].

Podmínkou k tomu, aby byla celistvá funkce $\tilde{\psi}(z)$ prvkem prostoru $\mathcal{A}$ je

$$\int_{\mathbb{C}} |\tilde{\psi}(z)|^2 exp(-|z|^2) d\tilde{\mu}(z) < \infty. \tag{3.20}$$

Najdeme-li tedy celistvou funkci $\tilde{\psi}(z)$ takovou, která je kolmá ke všem koherentním stavům (respektive k jejich obrazům v $\mathcal{A}$), pak ještě musíme ověřit podmínku (3.20).

Dalším a velmi důležitým příkladem úplného podsystému standardních koherentních stavů je regulární mřížka v $\mathbb{C}$. Regulární mřížkou generovanou dvojicí komplexních čísel (ω, ω') v $\mathbb{C}$ rozumíme množinu vsech komlexních čísel, které je možno psát ve tvaru

$$\alpha_{m,n} = m\omega + n\omega', \ kde \quad m, n \in \mathbb{Z}. \tag{3.21}$$

K regularitě je ještě zapotřebí podmínky

$$Im(\omega\bar{\omega'}) \neq 0. \tag{3.22}$$

Tento výraz má geometrický význam dvojnásobku plochy trojúhelníku vymezeného body $(0, \omega, \omega')$ (viz. kapitola 2.1). Podmínka (3.22) vlastně říká, že elementární buňka mřížky má nenulový obsah. Uvažujme tedy takovouto podmnožinu standardních koherentních stavů $|\alpha_{m,n}\rangle$ definovanou pomocí (3.21) a ptejme se jestli a za jakých podmínek je tato podmnožina úplná. Odpověd̆ na tuto otázku nám vyčerpávajícím způsobem dává následující věta (viz. [7]):

Necht̆ $|\alpha_{m,n}\rangle$ je podmnožina standardních koherentních stavů, která odpovídá mřížce definované v (3.21). Označme $\mathrm{S} = Im(\omega\bar{\omega'})$ *obsah elementární buňky této mřížky. Potom platí:*

1) Je-li $\mathrm{S} < \pi$*, potom daná podmnožina je úplná a zůstává úplná i po odstranění konečného počtu stavů.*

2) Je-li $\mathrm{S} > \pi$*, potom podsystém není úplný.*

3) Je-li $\mathrm{S} = \pi$*, potom podsystém koherentních stavů je také úplný a zůstává úplný po odstranění jednoho libovolného stavu. Odstraníme-li však již dva různé libovolné stavy, tak potom již podsystém nebude úplný.*

Pokud tedy budeme mít mřížku o obsahu elementární buňky přesně $\mathrm{S} = \pi$ a odstraníme-li jeden stav (např. $|0\rangle$), pak budeme mít podsystém standardních koherentních stavů, který je úplný a neobsahuje již žádné "přebytečné" stavy. Jinými slovy řečeno, obdržíme lineárně nezávislou úplnou (tj. totální) množinu v L^2, která ovšem není ortogonální.

K důkazu této věty je třeba nejdříve určit celistvou funkci $\tilde{\psi}(z)$, která splňuje podmínku

$$\tilde{\psi}(\alpha_{m,n}) = 0 \qquad \forall m, n \in \mathbb{Z}. \tag{3.23}$$

Takováto funkce je pro danou mřížku určena jednoznačně až na multiplikativní konstantu, jedná se o známou funkci σ:

$$\sigma(z) = z \prod_{m,n} (1 - \frac{z}{\bar{\alpha}_{m,n}}) exp(\frac{z}{\bar{\alpha}_{m,n}} + \frac{1}{2} \frac{z^2}{(\bar{\alpha}_{m,n})^2}); \ (m, n) \neq (0, 0). \tag{3.24}$$

Tato funkce zřejmě závisí na volbě mřížky. Nyní je tedy třeba ověřit, za jakých podmínek vyhovuje funkce σ(z) podmínce (3.20). Výpočet je podrobně provedený v [7]. Ukazuje se, že skutečně pro pro případ $\mathrm{S} \leq \pi$ nevyhovuje funkce $\sigma(z)$ podmínce (3.20), podsystém je tedy úplný. Pro případ $\mathrm{S} > \pi$ je tomu naopak. V případě, že z mřížky odstraníme vektor $|\alpha_{k,l}\rangle$, pak se funkce, odpovídající této redukované mřížce, změní na funkci $\frac{\sigma(z)}{z - \alpha_{k,l}}$. Pokud odstraníme další body mřížky, pak tuto funkci opět vydělíme příslušným rozdílem.

Uvažujme nyní tedy minimální úplný podsystém standardních koherentních stavů takový, že z regulární mřížky o elementární ploše π odstraníme vektor $|0\rangle$. Ukažme, jak bude vypadat liovolný vektor L^2 vyjádřený pomocí tohoto úplného podsystému. Podle [7] existuje úplný systém stavů $|\beta_{m,n}\rangle$, kde $(m, n) \neq (0, 0)$ takový, že platí podmínka

$$\langle \alpha_{kl} | \beta_{mn} \rangle = \delta_{km} \delta_{ln}. \tag{3.25}$$

Množina $\{\beta_{m,n}\}$ je sice úplná a minimální (tzn. pokud vypustíme jeden stav, už tato množina nebude úplná), ale nemůže být podsystémem zde popisovaného systému koherentních stavů $\{|\alpha\rangle\}$, nemůže být dokonce ani normovaná.

Pomocí vztahu (3.11) obdržíme vyjádření pro systém $|\beta\rangle$ ve Fock - Bargmannově reprezentaci:

$$\psi^{\beta}_{kl}(\bar{z}) = exp(\frac{|\alpha_{kl}|^2}{2}) \frac{\overline{\alpha_{kl}}}{\sigma'_{(\beta)}(\overline{\alpha_{kl}})} \frac{\sigma_{(\beta)}(\bar{z})}{\bar{z}(\bar{z} - \overline{\alpha_{kl}})}, \tag{3.26}$$

kde $\sigma'_{(\beta)}(\overline{\alpha_{kl}})$ je derivace funkce σ příslušející mřížce $|\beta_{mn}\rangle$ v bodě α_{kl}. Podle (3.11) je tedy zřejmě

$$\langle \alpha | \beta_{kl} \rangle = \frac{\overline{\alpha_{kl}}}{\sigma'_{(\beta)}(\overline{\alpha_{kl}})} \frac{\sigma_{(\beta)}(\bar{z})}{\bar{z}(\bar{z} - \overline{\alpha_{kl}})}. \tag{3.27}$$

Předpokládejme nyní libovolný vektor z L^2 ve tvaru

$$|\psi\rangle = \sum_{m,n \in \mathbb{Z}} \gamma_{mn} |\alpha_{mn}\rangle, \quad (m,n) \neq 0. \tag{3.28}$$

Potom podle (3.25) platí

$$\langle \beta_{kl} | \psi \rangle = \sum_{m,n \in \mathbb{Z}} \gamma_{mn} \langle \beta_{kl} | \alpha_{mn} \rangle = \gamma_{mn}. \tag{3.29}$$

Tím máme určeny koeficienty γ_{mn}. Nyní určíme rozvoj vakuového stavu $|0\rangle$ pomocí našeho minimálního úplného podsystému. Hledejme tedy komplexní koeficienty c_{mn} tak, že

$$|0\rangle = \sum_{m,n} c_{mn} |\alpha_{mn}\rangle; \ (m,n) \neq (0,0). \tag{3.30}$$

Podle (3.27) a (3.29) je

$$c_{mn} = \langle \beta_{mn} | 0 \rangle = -(-1)^{mn+m+n}, \tag{3.31}$$

odkud vyplývá

$$\sum_{m,n} (-1)^{mn+m+n} |\alpha_{mn}\rangle = 0. \tag{3.32}$$

Přesný výpočet je proveden v [7]. Je třeba připomenout, že uvažujeme pouze mřížku o elementární ploše π.

4. Obecná definice koherentních stavů

Přejdeme nyní k problému, jak definovat (pokud možno co nejobecněji) množinu koherentních stavů na libovolném (separabilním) komplexním Hilbertově prostoru. Těchto definic existuje hned několik. Liší se od sebe ovšem jen velmi málo, většinou je jedna zobecněním druhé a záleží na každém autorovi, kterou definici pojme za svou.

Nejdříve uveďme definici koherentních stavů podle Klaudra, kterou lze najít např. v [4]. Mějme separabilní Hilbertův prostor $\mathcal{H}$. K tomu, aby nějaká množina stavů z $\mathcal{H}$ mohla být označena za koherentní stavy, je třeba splnění následujících dvou podmínek

1) Množina koherentních stavů musí být parametrizována nějakým parametrem x, kde $x \in \mathcal{X}$, $\mathcal{X}$ je libovolný topologický prostor. Množina koherentních stavů pak musí být silně spojitá v této parametrizaci.

Ekvivalentně lze tuto vlastnost zapsat následovně:

$$\lim_{n\to\infty} x_n = x \; v \, \mathcal{X} \quad \Rightarrow \; \| \, |x_n\rangle - |x\rangle \| \, \to \, 0 \; v \, \mathcal{H}. \tag{4.1}$$

Zde je $|x\rangle$ vektor z $\mathcal{H}$ parametrizovaný prvkem x z $\mathcal{X}$. Pokud se v této vlastnosti omezíme na topologické prostory $\mathcal{X}$, které by byly vektorové prostory s Euklidovskou topologií, pak nám již tato vlastost vylučuje ortogonální systémy stavů z $\mathcal{H}$, jako například vlastní vektory Hermitovských operátorů na $\mathcal{H}$. Systémy, které by splňovaly vlastnost

$$\langle x|x'\rangle = \delta_{x,x'} \quad \forall x, x' \in \mathcal{X} \tag{4.2}$$

by totiž zřejmě nemohly být spojitě parametrizované. Druhou požadovanou vlastností je rozklad jednotky, se kterým jsem již pracoval v druhé kapitole:

2) Na prostoru $\mathcal{X}$ existuje pozitivní míra $d\mu(x)$ taková, že platí

$$\widehat{I} = \int_{\mathcal{X}} |x\rangle\langle x| d\mu(x). \tag{4.3}$$

Důležitý pojem jsou tzv. koherentní stavy parametrizované grupou. V knize [4] je tento pojem defiován takto:

Buď $\mathcal{G}$ souvislá (Lieovská) grupa a $U(g)$, $g \in \mathcal{G}$, její silně spojitá unitární ireducibilní reprezentace na Hilbertově prostoru $\mathcal{H}$. Nechť $|\psi_0\rangle$ označuje libovolný normalizovaný vektor z $\mathcal{H}$. Potom množinou koherentních stavů nazveme množinu vektorů $|\psi_g\rangle$, pro které platí

$$|\psi_g\rangle = U(g)|\psi_0\rangle; \; g \in \mathcal{G}. \tag{4.4}$$

Skalární součin dvou koherentních stavů je zřejmě roven

$$\langle\psi_g|\psi_{g'}\rangle = \langle\psi_0|U^{+}(g)U(g')|\psi_0\rangle = \langle\psi_0|U(g^{-1}g')|\psi_0\rangle. \tag{4.5}$$

Druhá rovnost vyplývá z unitarity U. Podívejme se nyní, jak souvisí tato definice s definicí předchozí. První podmínka, tj. silná spojitost, je zřejmě splněna, neboť je explicitně obsažena v definici. K tomu, aby platila i druhá podmínka, totiž rozklad jednotky, je ještě třeba stanoviti další dvě podmínky:

1) Na grupě $\mathcal{G}$ musí existovat levoinvariantní míra $d\mu(g)$, tj. musí platit

$$d\mu(g_0 \cdot g) = d\mu(g) \quad \forall g_0 \in \mathcal{G}. \tag{4.6}$$

Pro kompaktní grupy je levoinvariantní míra vždy totožná s pravoinvariantní mírou, na nekompaktních grupách toto neplatí. Teorie se ovšem nezmění, pokud místo levoinvariantní míry budeme požadovat pravoinvariantní míru.

2) Druhá podmínka říká, že daná reprezentace musí být kvadraticky integrabilní:

$$\int_{\mathcal{G}} |\langle\psi_0|U(g)|\psi_0\rangle|^2 d\mu(g) < \infty. \tag{4.7}$$

Tatoto vlastnost je automaticky splňena pro grupy, které splňují podmínku

$$\mu(\mathcal{G}) = \int_{\mathcal{G}} d\mu(g) < \infty, \tag{4.8}$$

tedy pro konečnoměrné grupy. Mezi grupy, které splňují tuto podmínku patří například kompaktní grupy. To, že z podmínky (4.8) vyplývá kvadratická integrabilita reprezentace U snadno dokážeme: Z unitarity reprezentace U a z předpokladu, že vektor $|\psi_0\rangle$ je normovaný, vyplývá

$$|\langle\psi_0|U(g)|\psi_0\rangle|^2 = |\langle\psi_0|\psi_g\rangle|^2 \leq \|\psi_0\|^2 \cdot \|\psi_g\|^2 = 1. \tag{4.9}$$

Zde byla při výpočtu použita Schwartzova nerovnost. Pokud dosadíme výsledek (4.9) do (4.7), pak obdržíme

$$\int_{\mathcal{G}} |\langle\psi_0|U(g)|\psi_0\rangle|^2 d\mu(g) \leq \int_{\mathcal{G}} d\mu(g) < \infty. \tag{4.10}$$

Unitární reprezentace konečnoměrné grupy je tedy kvadraticky integrabilní.

Pokud tedy máme kvadraticky integrabilní reprezentaci, pak můžeme pomocí vhodné konstanty přeškálovat míru $d\mu$ tak, aby platilo

$$\int_{\mathcal{G}} |\langle\psi_0|U(g)|\psi_0\rangle|^2 d\mu(g) = 1. \tag{4.11}$$

Použijeme-li předpokládanou invarianci míry $d\mu$, pak obdržíme

$$\int_{\mathcal{G}} |\langle\psi_{g'}|\psi_g\rangle|^2 d\mu(g) = \int_{\mathcal{G}} |\langle\psi_0|U((g')^{-1}\cdot g)|\psi_0\rangle|^2 d\mu(g'\cdot((g')^{-1}\cdot g)) =$$

$$= \int_{\mathcal{G}} |\langle\psi_0|U(g'')|\psi_0\rangle|^2 d\mu(g'') = 1. \tag{4.12}$$

Vztah (4.11) platí pro všechna $g \in \mathcal{G}$. Zde byla použita substituce $g'' = (g')^{-1}\cdot g$. Nyní uvažujme operátor $\widehat{\mathbf{A}}$ definovaný vztahem

$$\widehat{\mathbf{A}} := \int_{\mathcal{G}} |\psi_g\rangle\langle\psi_g| d\mu(g). \tag{4.13}$$

Ze Schurova lemmatu díky irreducibilitě reprezentace $\mathcal{U}$ obdobně jako v kapitoe 2.2 (viz. (2.48)) plyne vztah

$$\widehat{\mathbf{A}} = c\widehat{\mathbf{I}}. \tag{4.14}$$

Pomocí vztahu (4.12) obdržíme vztah pro střední hodnotu operátoru $\widehat{\mathbf{A}}$ ve stavu $|\psi_g\rangle$:

$$\langle\psi_g|\widehat{\mathbf{A}}|\psi_g\rangle = \int_{\mathcal{G}} |\langle\psi_g|\psi_{g'}\rangle|^2 d\mu(g') = 1. \tag{4.15}$$

Tuto střední hodnotu však také můžeme vypočítat pomocí pomocí vztahu (4.14) a předpokladu normovanosti vektorů $|\psi_g\rangle$, dostaneme tak $c = 1$, tedy $\widehat{\mathbf{A}} = \widehat{\mathbf{I}}$. Odtud tedy

$$\widehat{\mathbf{I}} = \int_{\mathcal{G}} |\psi_g\rangle\langle\psi_g| d\mu(g). \tag{4.16}$$

Rozklad jednotky tedy platí, pokud existuje levoinvariantní míra na $\mathcal{G}$ a pokud je reprezentace U irreducibilní a kvadraticky integrabilní.

V kapitole 2.1 jsme již narazili na jev, že v grupě $\mathcal{G}$ můžou existovat prvky různé od jednotky takové, že k nim příslušné operátory v reprezentaci U působí na základní stav (tj. na stav $|\psi_0\rangle$) pouze jako operátory změny fáze, jinak řečeno v $\mathcal{G}$ mohou existovat prvky, pro které platí

$$|\psi_h\rangle = U(h)|\psi_0\rangle = exp(i\varphi(h))|\psi_0\rangle,\ h \in \mathcal{G},\ h \neq e. \tag{4.17}$$

Funkce $\varphi(h)$ je fázový faktor, který závisí na grupovém prvku h. Označme si H jako množinu všech prvků z $\mathcal{G}$, které vyhovují podmínce (4.16). Množina H je zřejmě podgrupou $\mathcal{G}$ a nazývá se izotropní podgrupou prvku $|\psi_0\rangle$. Definujme nyní množinu M vztahem

$$M := \mathcal{G}/H. \tag{4.18}$$

Jelikož H je normální podgrupou grupy $\mathcal{G}$, což vyplývá z toho, že H je centrum grupy $\mathcal{G}$ a její prvky tedy komutují s každým prvkem z $\mathcal{G}$, pak je zřejmé (viz. [5]), že M je také grupa. Prvky grupy M jsou třídy prvků z $\mathcal{G}$. Prvky každé této třídy mají tu společnou vlastnost, že k nim příslušné koherentní stavy se liší jen o fázi. Není tedy třeba mezi nimi rozlišovat a daný systém koherentních stavů lze parametrizovat pouze prvky $m \in M$. Podle [4] pak existuje míra $d\nu(m)$ na M, která je indukovaná mírou $d\mu(g)$ na $\mathcal{G}$ a je levoinvariantní. Splňuje též požadavek

$$\widehat{\mathbf{I}} = \int_M |\psi_m\rangle\langle\psi_m| d\nu(m). \tag{4.19}$$

Je logické, že ke splnění požadavku silné spojitost je všude třeba předpokládat, že uvažovaná grupa je alespoň topologická. Pokud navíc přidáme požadavek, aby grupa $\mathcal{G}$ byla Lieova a podgrupa H byla uzavřená, potom z teorie Lieových grup vyplývá, že H je Lieova podgrupa grupy $\mathcal{G}$ a faktorgrupa $M = \mathcal{G}/H$ je také Lieova. (M je tedy také varieta.) Grupu $\mathcal{G}$ pak můžeme chápat jako fibrovaný prostor

$$\mathbf{G} = (\mathcal{G}, M, \pi, H). \tag{4.20}$$

Pokud dále nechceme pod pojmem koherentní stav chápat celou třídu koherentních stavů, lišící se pouze o konstantu, ale chceme si zvolit z každé třídy jen jeden stav, který by tuto třídu charakterizoval, pak můžeme ve fibrovaném prostoru $\mathbf{G}$ zvolit hladký řez $\sigma(m)$. Systémem koherentních stavů pak budeme rozumět množinu stavů

$$|\psi_m\rangle := |\psi_{\sigma(m)}\rangle, \ kde \quad m \in M, \ \sigma(m) \in \mathcal{G}. \tag{4.21}$$

Volbou řezu σ vlastně provádíme fázovou konvenci.

Další možný způsob, jak definovat koherentní stavy nám nabízí Perelomov, jehož definice tak, jak je uvaděná v [6], vypadá takto:

Buď $\mathcal{H}$ Hilbertův prostor, $\mathcal{G}$ grupa, $T(g)$ libovolná reprezentace grupy $\mathcal{G}$ na $\mathcal{H}$ a $|\psi_0\rangle$ libovolný normalizovaný vektor z $\mathcal{H}$. Potom množinu stavů, definovanou

$$|\psi_g\rangle = T(g)|\psi_0\rangle, \ kde \ g \in \mathcal{G} \quad ; \tag{4.22}$$

nazveme systémem koherentních stavů náležející k repezentaci T a počátečnímu stavu $|\psi_0\rangle$.

Tuto definici lze ještě pozměnit tak, že na reprezentaci T položíme podmínku unitarity a irreducibility, na grupu $\mathcal{G}$ pak můžeme klást požadavek, aby byla Lieovská, či alespoň topologická.

Jak je vidět, výše uvedená Perelomova definice není ekvivalentní s Klauderovou definicí uvedenou na předchozích stránkách, neplatí ani, že by jedna definice byla speciální případ té druhé. Zatímco Klauder požaduje ve své definici silně spojité zobrazení z indexové množiny do Hilbertava prostoru společně s platností rozkladu jednotky (4.3), Perelomov ve své definici požaduje, aby indexová množina byla grupou. (Což umožňuje obdobnou úvahu o parametrizaci grupy $\mathcal{G}$ podle izotropní podgrupy H, jaká již v této kapitole byla učiněna.) Konstrukci koherentních stavů pak provádí pomocí reprezentace dané grupy. Perelomova definice ale nevyžaduje, aby grupa $\mathcal{G}$ byla topologická, což je pro Klauderovu definici nezbytné, aby vůbec mělo smysl uvažovat o silné spojitosti. Perelomova definice dokonce ani neimplikuje platnost rozkladu jednotky. Pokud ovšem v Perelomově definici předpokládáme, že grupa $\mathcal{G}$ je topologická, tedy grupové operace inverze a grupové násobení jsou spojité, předpokládáme-li také, že reprezentace T je unitární, pak zjistíme, že z tohoto vyplývá, že daná množina koherentních stavů je silně spojitá v parametrizaci dané grupou $\mathcal{G}$, tedy že platí první předpoklad Klauderovy definice. K důkazu tohoto snadného tvrzení ukažme platnost výroku (4.1):

Nechť $g_n \to g$ v $\mathcal{G}$. Potom pomocí unitarity T(g) a spojitosti operace inverze dostaneme

$$\| |g_n\rangle - |g\rangle \| = \|T(g_n)|\psi_0\rangle - T(g)|\psi_0\rangle\| \leq \|T(g_n) - T(g)\| \cdot \| |\psi_0\rangle\| \leq$$

$$\leq \|T(g_n g^{-1}) - \widehat{I}\| \cdot \|T(g)\| \cdot \| |\psi_0\rangle\|. \tag{4.23}$$

Jelikož $g_n \to g$, pak $g_n g^{-1} \to e$, odkud plyne

$$\|T(g_n g^{-1}) - \widehat{I}\| \to 0. \tag{4.24}$$

Vztah (4.1) tedy platí a parametrizace je silně spojitá.

Budeme-li dále v Perelomově definici požadovat irreducibilitu reprezentace T, pak odvodíme platnost rozkladu jednotky. K tomu je třeba předpokládat existenci levoinvariantní míry na grupě $\mathcal{G}$ a konvergenci integrálu $\int_{\mathcal{G}} |\psi_g\rangle\langle\psi_g| d\mu(g)$. Potom pomocí Schurova lemmatu odvodíme (viz. výše) platnost rozkladu jednotky, tedy vztahu (4.16). Budeme-li konečne predpokládat, že grupa $\mathcal{G}$ je Lieovská a izotropní podgrupa H je uzavřená, pak získáme strukturu fibrovaného prostoru (4.20), což již také bylo rozebráno výše.

Na závěr této kapitoly bych ještě zmínil jednu definici koherentních stavů, kterou je možné nalézt v publikaci [1]:

Buď $\mathcal{H}$ komplexní Hilbertův prostor, $\mathcal{X}$ lokálně kompaktní topologický prostor opatřený regulární mírou $d\mu$. Buď dále $x \mapsto F(x)$ měřitelná, pozitivní operátorová funkce z $\mathcal{X}$ do $\mathcal{H}$, $x \in \mathcal{X}$. Předpokládejme, že operátory $F(x)$ majtí konečnou dimenzi a že platí

$$dim\, Ran\, F(x) = n \qquad \forall x \in \mathcal{X},\ kde\ n \in \mathbb{N}. \tag{4.25}$$

Dále je třeba předpokládat konvergenci integrálu

$$\widehat{A} = \int_{\mathcal{X}} F(x) d\mu(x), \tag{4.26}$$

kde $\widehat{A}$ je omezený a pozitivní operátor takový, že existuje $\widehat{A^{-1}}$, který má hustý definiční obor v $\mathcal{H}$. Jelikož F(x) má obor hodnot dimenze n pro všechna $x \in \mathcal{X}$, pak v $\mathcal{H}$ existuje systém vektorů

$$\{|\eta_x^i\rangle | i \in \widehat{n};\ x \in \mathcal{X}\}, \tag{4.27}$$

který splňuje

$$F(x) = \sum_{i=1}^{n} |\eta_x^i\rangle\langle\eta_x^i|. \tag{4.28}$$

Potom tento systém nazveme systémem koherentních stavů na $\mathcal{H}$.

Tato definice opět není ekvivalentní ani s jednou z předchozích definic, vyžaduje lokální kompaktnost prostoru $\mathcal{X}$. Nevyžaduje ovšem ani silnou spojitost, ale ani grupové vlastnosti prostoru $\mathcal{X}$. Je snadno vidět, že rozklad jednotky je speciální případ vlastnosti (4.26). Jedná se totiž o následující případ:

$$\widehat{A} = \widehat{I}; \qquad F(x) = |\psi_x\rangle\langle\psi_x|; \quad n = 1. \tag{4.29}$$

Operátory $F(x)$ jsou tedy jednorozměrné projektory na podprostory generované vektorem $|\psi_x\rangle$. Požadavek, aby topologický prostor $\mathcal{X}$ byl lokálně kompaktní, spolu s předpokladem, že prostor $\mathcal{X}$ je grupou, nám zajišťuje existenci levoinvariantní míry na $\mathcal{X}$. Toto tvrzení je obsahem tzv. *Haarovy věty* , která říká, že na lokálně kompaktní grupě vždy existuje levoinvariantní i pravoinvariantní míra. Pokud je grupa navíc kompaktní, pak tyto míry splývají.

5. Některé příklady systémů koherentních stavů

Nyní je tedy vše připraveno k tomu, abych uvedl některé další příklady systémů koherentních stavů v duchu předchozích definic. Nejdříve se ovšem ještě stručně vrátím ke standardním koherentním stavům a objasním je z hlediska výše uvedených obecných definic.

5.1. **Standardní koherentní stavy.** Vraťme se tedy ke standardním koherentním stavům popsaným podrobně v kapitole 2. Indexová množina $\mathcal{X}$ je v tomto případě Heisenberg - Weylova grupa W, která je Lieovská. Izotropní podgrupa je, jak je odvozeno v kapitole 2.1, jednoparametrická podgrupa S^1, což je patrné z (2.15). Odtud přímo vyplývá vztah pro faktorgrupu

$$\mathcal{X} = \mathcal{G}/H = W/S^1 \cong \mathbb{R}^2 \cong \mathbb{C}. \tag{5.1}$$

Toto plně souhlasí s obsahem druhé kapitoly, kde jsou prvky podgrupy S^1 parametrizovány parametrem ξ_3 a prvky faktorgrupy jsou parametrizovány pomocí reálných parametrů ξ_1 a ξ_2, respektive komplexního parametru α. Reprezentace grupy W tvoří operátory $exp(i\xi_3)\mathbf{D}(\alpha)$. Tato reprezentace je, jak bylo zmíněno, unitární a ireducibilní. Parametrizace standardních koherentních stavů je tedy podle předchozí kapitoly silně spojitá.

Standardní koherentní stavy tedy vyhovují všem obecný definicím uvedeným v kapitole 4. Toto je ale zcela logické, neboť tyto stavy stály na počátku této teorie a veškeré definice je tedy musely zohledňovat.

5.2. **Standardní koherentní stavy pro více stupňů volnosti.** Zde uvažujeme Hilbertův prostor kvantového systému pro částici (částice) s větším (ale konečným) počtem stupňů volnosti. Nechť počet stupňů volnosti je roven $\mathcal{N}$. Potom Hilbertův prostor daného systému má tvar

$$\mathcal{H}_{\mathcal{N}} = L^2(\mathbb{R}) \otimes L^2(\mathbb{R}) \otimes \, ... \, \otimes L^2(\mathbb{R}) = L^2(\mathbb{R}^{\mathcal{N}}). \tag{5.2}$$

Druhý výraz obsahuje pochopitelně celkem $\mathcal{N}$ součinitelů. Jak je rozebráno v kapitole 2, ortonormální bází v L^2 jsou například vlastní stavy hamiltoniánu volného harmonického oscilátoru, značeno $|n\rangle$; $n \in \mathbb{N}_0 = \mathbb{N} \cup \{0\}$. Z teorie tenzorového součinu Hilbertových prostorů je známo, že ortonolmální báze v $\mathcal{H}_{\mathcal{N}}$ může mít například tvar

$$\{|n_1\rangle|n_2\rangle...|n_{\mathcal{N}}\rangle \mid (n_1, n_2, \, ... \, , n_{\mathcal{N}}) \in \mathbb{N}_0^{\mathcal{N}}\}. \tag{5.3}$$

Na prostoru $\mathcal{H}_{\mathcal{N}}$ můžeme definovat sady operátorů polohy a hybnosti:

(5.4)
$$\widehat{\mathbf{Q}}_j := \widehat{\mathbf{I}} \otimes \widehat{\mathbf{I}} \otimes \,...\, \otimes \widehat{\mathbf{Q}} \otimes \,...\, \otimes \widehat{\mathbf{I}}; \quad \widehat{\mathbf{P}}_k := \widehat{\mathbf{I}} \otimes \widehat{\mathbf{I}} \otimes \,...\, \otimes \widehat{\mathbf{P}} \otimes \,...\, \otimes \widehat{\mathbf{I}}, \quad j, k \in \widehat{\mathcal{N}}.$$

Operátory $\widehat{\mathbf{I}}$, $\widehat{\mathbf{Q}}$ a $\widehat{\mathbf{P}}$ jsou známé operátory na L^2. Ve várayu (5.4) stojí operátory polohy (resp. hybnosti) na j-tém (resp, k-tém) místě. Pomocí těchto sad operátorů polohy a hybnosti na $\mathcal{H}_{\mathcal{N}}$ se definují analogicky podle kapitoly 2.1 sady operátorů anihilačních a kreačních:

$$\mathbf{a}_j := \frac{\widehat{\mathbf{Q}}_j - i\widehat{\mathbf{P}}_j}{\sqrt{2\hbar}}; \quad \mathbf{a}^+{}_k := \frac{\widehat{\mathbf{Q}}_k + i\widehat{\mathbf{P}}_k}{\sqrt{2\hbar}}; \quad j, k \in \widehat{\mathcal{N}}. \tag{5.5}$$

Pro anihilační a kreační operátory platí vztahy analogické (2.2), neboť jsou také jejich přímým důsledkem:

$$[\mathbf{a}_j, \mathbf{a}_k^+] = \delta_{j,k}\widehat{\mathbf{I}}; \quad [\mathbf{a}_j, \widehat{\mathbf{I}}] = [\mathbf{a}_j^+, \widehat{\mathbf{I}}] = 0. \tag{5.6}$$

Pro operátory polohy a hybnosti platí komutační relace vyplývající z (2.1):

$$[\widehat{\mathbf{Q}}_j, \widehat{\mathbf{P}}_k] = i\hbar\delta_{j,k}\widehat{\mathbf{I}}; \quad [\widehat{\mathbf{Q}}_j, \widehat{\mathbf{I}}] = [\widehat{\mathbf{P}}_j, \widehat{\mathbf{I}}] = 0. \tag{5.7}$$

Tyto komutační relace definují $2\mathcal{N} + 1$ dimenzionální lieovskou Heisenberg - Weylovu algebru označovanou $\mathcal{W}_{\mathcal{N}}$. Příslušná $2\mathcal{N}+1$ parametrická lieovská Heisenberg - Weylova grupa má definváno grupové násobení takto:

$$(\xi_1, \zeta_1; \xi_2, \zeta_2; \,...\,; \xi_{\mathcal{N}}, \zeta_{\mathcal{N}}; s) \cdot (\mu_1, \nu_1; \mu_1, \nu_2; \,...\,; \mu_{\mathcal{N}}, \nu_{\mathcal{N}}; t) =$$

$$= (\mu_1 + \xi_1, \nu_1 + \zeta_1; \,...\,; \mu_{\mathcal{N}} + \xi_{\mathcal{N}}, \nu_{\mathcal{N}} + \zeta_{\mathcal{N}}; s + t + \frac{1}{2}\sum_{j=1}^{\mathcal{N}}(\zeta_j\mu_j - \xi_j\nu_j)). \tag{5.8}$$

Centrum této grupy, která se značí $W_{\mathcal{N}}$ tvoří, stejně jako v předchozím případě, jedoparametrická sféra S^1. Unitární ireducibilní reprezentace grupy $W_{\mathcal{N}}$ na $\mathcal{H}_{\mathcal{N}}$ má tvar

$$\rho_{\mathcal{N}}((\xi_1, \zeta_1; \xi_2, \zeta_2; \,...\,; \xi_{\mathcal{N}}, \zeta_{\mathcal{N}}; s)) = \exp(is\widehat{\mathbf{I}}) \exp(\frac{i}{\sqrt{\hbar}}\sum_{j=1}^{\mathcal{N}}(\xi_j\widehat{\mathbf{Q}}_j + \zeta_j\widehat{\mathbf{P}}_j)). \tag{5.9}$$

Pomocí vztahu (2.11) a komutačních relací (5.7) dostaneme

$$\rho_{\mathcal{N}}((\xi_1, \zeta_1; \xi_2, \zeta_2; \,...\,; \xi_{\mathcal{N}}, \zeta_{\mathcal{N}}; s)) =$$

$$= \exp(i(s + \frac{1}{2}\sum_{j=1}^{\mathcal{N}}(\xi_j\zeta_j))) \prod_{k=1}^{\mathcal{N}} \exp(\xi_k\frac{i}{\sqrt{\hbar}}\widehat{\mathbf{Q}}_k) \prod_{l=1}^{\mathcal{N}} \exp(\zeta_l\frac{i}{\sqrt{\hbar}}\widehat{\mathbf{P}}_l). \tag{5.10}$$

pro konstrukci koherentních stavů zde tedy uvažujeme grupu $W_{\mathcal{N}}$ a její unitární ireducibilní reprezentaci $\rho_{\mathcal{N}}$. Pokud budeme faktorizovat grupu $W_{\mathcal{N}}$ podle jejího centra S^1, pak dostaneme :

$$\mathcal{G}/H = W_{\mathcal{N}}/S^1 \cong \mathbb{C}^{\mathcal{N}}. \tag{5.11}$$

Koherentní stavy na prostoru $L^2(\mathbb{R}^{\mathcal{N}})$ pro grupu $W_{\mathcal{N}}$ a reprzentaci $\rho_{\mathcal{N}}$ tedy budeme parametrizovat $\mathcal{N}$-ticí komplexních čísel.

Zvolme nyní jako základní stav pro standardní koherentní stavy na $L^2(\mathbb{R}^{\mathcal{N}})$ stav

$$|(0, 0, \,...\,, 0)\rangle := |0\rangle|0\rangle \,...\, |0\rangle. \tag{5.12}$$

Definujme nyní, analogicky k (2.13), operátor $\mathbf{D}_{\mathcal{N}}((\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_{\mathcal{N}}))$:

(5.13) $$\mathbf{D}_{\mathcal{N}}((\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_{\mathcal{N}})) := \exp(\sum_{j=1}^{\mathcal{N}}(\alpha_j \mathbf{a}_j^+ - \bar{\alpha})_j \mathbf{a}_j),$$

což lze ekvivalentně zapsat

(5.14)
$$\mathbf{D}_{\mathcal{N}}((\alpha_1, \dots, \alpha_{\mathcal{N}})) = \exp(i(s + \frac{1}{2}\sum_{j=1}^{\mathcal{N}}(\xi_j \zeta_j))) \prod_{k=1}^{\mathcal{N}} \exp(\xi_k \frac{i}{\sqrt{\hbar}} \widehat{\mathbf{Q}}_k) \prod_{l=1}^{\mathcal{N}} \exp(\zeta_l \frac{i}{\sqrt{\hbar}} \widehat{\mathbf{P}}_l),$$

kde jsme definovali

(5.15) $$\alpha_j := \frac{-\zeta_j + i\xi_j}{\sqrt{2}}; \quad j \in \widehat{\mathcal{N}}.$$

Standardní koherentní stavy na $L^2(\mathbb{R}^{\mathcal{N}})$ pak mají tvar

(5.16) $$|(\alpha_1, \alpha_2, \dots \alpha_{\mathcal{N}})\rangle = \mathbf{D}_{\mathcal{N}}(\alpha_1 \alpha_2, \dots, \alpha_{\mathcal{N}})|(0, 0, \dots, 0)\rangle.$$

Pro vektory ortonormální báze prostoru $L^2(\mathbb{R}^{\mathcal{N}})$ platí evidentně vztah obdobný k (2.31) :

(5.17) $$|(n_1, n_2, \dots, n_{\mathcal{N}})\rangle = \frac{1}{\sqrt{\prod_{j=1}^{\mathcal{N}} n_j!}} \prod_{j=1}^{\mathcal{N}} (\mathbf{a}^+{}_j)^{n_j} |(0, 0, \dots, 0)\rangle,$$

pro vztahy (2.30) máme analogické vztahy

(5.18) $$\mathbf{a}_j|(n_1, \dots, n_j, \dots, n_{\mathcal{N}})\rangle = \sqrt{n_j}|(n_1, \dots, n_j - 1, \dots, n_N)\rangle;$$

(5.19) $$\mathbf{a}^+{}_j|(n_1, \dots, n_j, \dots, n_{\mathcal{N}})\rangle = \sqrt{n_j + 1}|(n_1, \dots, n_j + 1, \dots, n_N)\rangle.$$

Pro skalární součin dvou koherentních stavů platí díky (2.35)

(5.20)
$$\langle(\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_{\mathcal{N}})|(\beta_1, \beta_2, \dots, \beta_{\mathcal{N}})\rangle = \exp(-\frac{1}{2}(\sum_{j=1}^{\mathcal{N}}(|\alpha_j|^2 - |\beta_j|^2)) + \sum_{k=1}^{\mathcal{N}} \bar{\beta}_k \alpha_k).$$

Koherentní stavy na $L^2(\mathbb{R}^{\mathcal{N}})$ lze také zapisovat jako tenzorový součin koherentních stavů na $L^2(\mathbb{R})$:

(5.21) $$|(\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_{\mathcal{N}})\rangle = |\alpha_1\rangle|\alpha_2\rangle \dots |\alpha_{\mathcal{N}}\rangle.$$

Ze vztahu (2.34) ještě můžeme snadno odvodit

(5.22)
$$|(\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_{\mathcal{N}})\rangle = \exp(-\frac{1}{2}\sum_{j=1}^{\mathcal{N}}|\alpha_j|^2) \cdot \sum_{(n_1, \dots, n_{\mathcal{N}})} \frac{\alpha_1^{n_1} \dots \alpha_{\mathcal{N}}^{n_{\mathcal{N}}}}{\sqrt{\prod_{k=1}^{\mathcal{N}} n_k!}} |(n_1, n_2, \dots, n_{\mathcal{N}})\rangle.$$

Rozklad jednotky, tedy vztah

(5.23) $$\widehat{\mathbf{I}} = \int_{\mathbb{C}^{\mathcal{N}}} |(\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_{\mathcal{N}})\rangle\langle(\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_{\mathcal{N}})| d^{2\mathcal{N}}\mu(\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_{\mathcal{N}}),$$

zřejmě také platí, pokud použijeme míru

$$d^{2\mathcal{N}}\mu(\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_{\mathcal{N}}) := \frac{1}{\pi^{\mathcal{N}}} \prod_{j=1}^{\mathcal{N}} d^2\alpha_j. \tag{5.24}$$

5.3. **Koherentní stavy na konečnědimenzionálním Hilbertově prostoru nad konečnou grupou $\mathbf{Z}_M \times \mathbf{Z}_M$.** V této kapitole se budu zabývat koherentními stavy na libovolném komplexním Hilbertově prostoru konečné dimenze M. Tento prostor budu značit $\mathcal{H}_M$. Jako grupu budu uvažovat $\mathbf{Z}_M \times \mathbf{Z}_M$.

Nejdříve zvolím libovolnou ortonormílní bázi na $\mathcal{H}_M$, kterou si označím

$$\mathcal{J} = \{|j\rangle \mid j = 1, 2, \dots, M-1\}. \tag{5.25}$$

Dále definuji operátor polohy na $\mathcal{H}_M$

$$\widehat{\mathbf{Q}} := \sum_{j=0}^{M-1} j|j\rangle\langle j|. \tag{5.26}$$

Vektory báze $\mathcal{J}$ jsou tedy vlastními vektory operátoru $\widehat{\mathbf{Q}}$, k vlastnímu vektoru $|j\rangle$ příslušní vlastní číslo j. Operátor $\widehat{\mathbf{Q}}$ je evidentně samosdružený.

Definice operátoru impulzu $\widehat{\mathbf{P}}$ již ovšem není tak snadná jako u operátoru polohy. Nejdříve je třeba definovat unitární operátor posunutí

$$\widehat{\mathbf{U}} : |j\rangle \mapsto |j +_M 1\rangle, \quad |j\rangle \in \mathcal{J}. \tag{5.27}$$

Operátor $\widehat{\mathbf{U}}$ je vztahem (5.27) jednoznačně definován, operace $+_M$ je sčítání modulo M, tedy grupové sčítání v grupě $\mathbf{Z}_M$. Pro operátor $\widehat{\mathbf{U}}$ zřejmě platí relace

$$\widehat{\mathbf{U}}^k|j\rangle = |j +_M k\rangle;\ \widehat{\mathbf{U}}^M = \widehat{\mathbf{I}}. \tag{5.28}$$

Pokud si označíme $\widehat{\mathbf{U}}(k) := \widehat{\mathbf{U}}^k$, pak množina operátorů

$$\widehat{\mathbf{U}}(k);\ k = 0, 1, \dots, M-1 \tag{5.29}$$

tvoří unitární reprezentaci grupy $\mathbf{Z}_M$. Podle [10] existuje samosdružený operátor $\widehat{\mathbf{P}}$ takový, že platí

$$\widehat{\mathbf{U}}(k) = \exp\left(\frac{-2\pi i k}{M}\widehat{\mathbf{P}}\right). \tag{5.30}$$

Takto tedy definujeme operátor $\widehat{\mathbf{P}}$. Operátor $\mathbf{P}$ má shodné spektrum jako operátor $\widehat{\mathbf{Q}}$, tedy množinu $\{0, 1, \dots, M-1\}$. Vlastní vektor operátoru $\widehat{\mathbf{P}}$ má podle [10] v bázi $\mathcal{J}$ tvar

$$|k\rangle = \frac{1}{\sqrt{M}} \sum_{j=0}^{M-1} \exp\left(\frac{2\pi i}{M} kj\right)|j\rangle. \tag{5.31}$$

Přechod od operátoru $\widehat{\mathbf{Q}}$ k operátoru $\widehat{\mathbf{P}}$ (respektive od vlastních vektorů prvního operátoru k vlastním vektorům druhého operátoru) je zajištěn diskrétní Fourierovou transformací, což je analogické přechodu od operátoru polohy k operátoru hybnosti na prostoru $L^2(\mathbb{R})$.

Maticový element operátoru $\widehat{\mathbf{P}}$ v bázi $\mathcal{J}$ má tvar

(5.32)
$$\langle m|\widehat{\mathbf{P}}|n\rangle = \frac{1}{M}\sum_{k=0}^{M-1} k\,\exp(\frac{2\pi i}{M}k(m-n)) = \frac{1}{\exp(\frac{2\pi i}{M}(m-n))-1} \quad pro\, m \neq n,$$

diagonální prvky matice operátoru $\widehat{\mathbf{P}}$ v bázi $\mathcal{J}$ pak mají tvar

(5.33)
$$\langle m|\widehat{\mathbf{P}}|m\rangle = \frac{M-1}{2} \quad \forall m = 0, 1, \dots, M-1.$$

Jelikož operátor $\widehat{\mathbf{Q}}$ má v bázi $\mathcal{J}$ diagonální tvar, je snadné odvodit vztah pro maticový element komutátoru operátorů polohy a hybnosti :

(5.34)
$$\langle m|[\widehat{\mathbf{Q}}, \widehat{\mathbf{P}}]|n\rangle = (m-n)\langle m|\widehat{\mathbf{P}}|n\rangle.$$

Tato komutační relace se ovšem liší od relace (2.1) platné na $L^2(\mathbb{R})$, přesto ale podle [10] platí relace

(5.35)
$$\exp(\frac{2\pi i}{M}t\widehat{\mathbf{Q}})\exp(\frac{2\pi i}{M}s\widehat{\mathbf{P}}) = \exp(-\frac{2\pi i}{M}ts)\exp(\frac{2\pi i}{M}s\widehat{\mathbf{P}})\exp(\frac{2\pi i}{M}t\widehat{\mathbf{Q}}).$$

Uvažujme nyní grupu $\mathbf{Z}_M \times \mathbf{Z}_M$ a definujme zobrazení

(5.36)
$$\tilde{W} : \mathbf{Z}_M \times \mathbf{Z}_M \to \mathcal{B}(\mathcal{H}_M) : (m, a) \mapsto \exp(-\frac{2\pi i}{M}m\widehat{\mathbf{P}})\exp(\frac{2\pi i}{M}a\widehat{\mathbf{Q}}).$$

Pokud zde použijeme vztah (5.35), pak obdržíme následující relaci pro součin :

(5.37)
$$\tilde{W}(m, a) \cdot \tilde{W}(n, b) = \exp(\frac{2\pi i}{M}an)\tilde{W}(m+n, a+b).$$

Nejedná se tedy o reprezentaci grupy $\mathbf{Z}_M \times \mathbf{Z}_M$, ale o její projektivní reprezentaci. Grupu $\mathbf{Z}_M \times \mathbf{Z}_M$ je tedy třeba centrálně rozšířit. Jak centrum rozšířené grupy můžeme použít opět grupu S^1. Vzledem k tomu, že čísla a a n jsou celá, stačí jako centrum použít grupu $\sqrt[M]{1}$, která je podgrupou S^1 a je definována takto:

(5.38)
$$\sqrt[M]{1} := \{e^{\frac{2\pi i}{M}k} \mid k = 0, 1, \dots, M-1\}; \quad e^{\frac{2\pi i}{M}j} \cdot e^{\frac{2\pi i}{M}k} := e^{\frac{2\pi i}{M}(j+k)}.$$

Máme tedy grupu $\mathcal{G} = \sqrt[M]{1} \times \mathbf{Z}_M \times \mathbf{Z}_M$ s grupovým násobením definovaným

(5.39)
$$(j; m, a) \cdot (k; n, b) := (j + k + an; m + n, a + b).$$

Reprezentace grupy $\mathcal{G}$ na prostoru $\mathcal{H}_M$ je pak definovaná takto :

(5.40)
$$\rho(j; m, a) := \exp(\frac{2\pi i}{M}j)\exp(-\frac{2\pi i}{M}m\widehat{\mathbf{P}})\exp(\frac{2\pi i}{M}a\widehat{\mathbf{Q}}).$$

Reprezentace ρ je unitární a irreducibilní. Centrum grupy $\mathcal{G}$ je, jak již bylo zmíněno, grupa $\sqrt[M]{1}$. Po faktorizaci obdržíme zpátky grupu $\mathbf{Z}_M \times \mathbf{Z}_M$:

(5.41)
$$\mathcal{G}/\sqrt[M]{1} \cong \mathbf{Z}_M \times \mathbf{Z}_M.$$

Máme tedy definovanou grupu $\mathbf{Z}_M \times \mathbf{Z}_M$ a její unitární irreducibilní projektivní reprezentaci na $\mathcal{H}_M$. Nyní zbývá pro kompletní definici koherentních stavů už jen určit počáteční stav $|0, 0\rangle$. V [10] je provedena volba počátečního stavu následovně:

(5.42)
$$|0, 0\rangle = A_M \sum_{j=0}^{M-1} f_j|j\rangle,\; kde\, f_j := \exp(-\frac{\pi}{M}j^2).$$

Koeficient A_M má význam normalizační konstanty, platí pro něj tedy

$$\frac{1}{A_M} = \sqrt{\sum_{j=0}^{M-1} f_j^2}. \tag{5.43}$$

Koherentní stavy na $\mathcal{H}_M$ pak mají tavar

$$|m, a\rangle := \tilde{W}(m, n)|0, 0\rangle = A_M \sum_{j=0}^{M-1} \exp(-\frac{\pi}{M} j^2) \exp(\frac{2\pi i}{M} aj)|j + m\rangle. \tag{5.44}$$

Přímo z (5.44) a z ortonormality báze $\mathcal{J}$ dostaneme vztah pro skalární součin dvou koherentních stavů :

$$\langle n, b|m, a\rangle = A_M^2 \exp(\frac{2\pi i}{M}(an - bm)) \sum_{j=0}^{M-1} f_{j+n} f_{j+m} \exp(\frac{2\pi i}{M} j(a - b)). \tag{5.45}$$

Pomocí tohoto vztahu pak dále održíme

$$\sum_{n=0}^{M-1} \sum_{b=0}^{M-1} |n, b\rangle\langle n, b|m, a\rangle = M|m, a\rangle, \tag{5.46}$$

odkud pomocí irreducibility reprezentace ρ již vyplývá

$$\frac{1}{M} \sum_{b=0}^{M-1} \sum_{n=0}^{M-1} |n, b\rangle\langle n, b| = \widehat{\mathbf{I}}. \tag{5.47}$$

Systém tedy je úplný a vyhovuje rozkladu jednotky (4.16), kde uvažujeme diskrétní míru na $\mathbf{Z}_M \times \mathbf{Z}_M$ násobenou faktorem $\frac{1}{M}$.

Tento systém tedy zřejmě vyhovuje Perelomově definici koherentních stavů tak, jak je zavedena v kapitole 4. Pokud bychom chtěli, aby systém vyhovoval také Klauderově definici, pak bychom museli na grupě $\mathbf{Z}_M \times \mathbf{Z}_M$ definovat topologii, ve které by byla parametrizace koherentních stavů silně spojitá. To ovšem lze snadno vyřešit zavedením diskrétní topologie, tedy stanovit, že každá podmnožina $\mathbf{Z}_M \times \mathbf{Z}_M$ je otevřená. Máme-li potom zobrazení definované na prostoru s diskrétní topologií, pak je evidentně každé zobrazení spojité.

5.4. **Koherentní stavy na $L^2(S^1)$.** Na závěr této kapitoly bych chtěl uvést příklad množiny koherentních stavů, jejíž konstrukce se nezakládá na definicích popsané v kapitole 4. Jedná se o množinu koherentních stavů na kružnici, která je popsaná v [3]. Koherentní stavy jsou zde konstruovány na základě konkrétního izomorfizmu dvou separabilních Hilbertových prostorů, v tomto případě prostorů $L^2(\mathbb{R})$ a $L^2(S^1 \times (S^1)^*)$, kde definujeme

$$S^1 := \langle 0, a); \quad (S^1)^* := \langle 0, \frac{2\pi}{a}); \quad a > 0. \tag{5.48}$$

Koherentní stavy definujeme tak, že nejdříve přeneseme standardní koherentní stavy z $L^2(\mathbb{R})$ do prostoru $L^2(S^1 \times (S^1)^*)$ pomocí Weylovy - Zakovy - Berezinovy transformace, která je unitárním zobrazením z prvního prostoru na druhý. Tato transformace je definovaná následovně :

(5.49)

$$T : L^2(\mathbb{R}) \to L^2(S^1 \times (S^1)^*) : \psi(x) \mapsto (T\psi)(y, k) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} \exp(iank)\psi(y - na),$$

kde $\psi \in L^2(\mathbb{R})$, $y \in S^1$ a $k \in (S^1)^*$. Funkce $(T\psi)(y,k)$ je podle [3] periodická v argumentu k a kvaziperiodická v argumentu q, tj. platí

$$(T\psi)(y+na, k+m\frac{2\pi}{a}) = \exp(inak)\,(T\psi)(y,k). \tag{5.50}$$

Pokud zapíšeme prostor $L^2(S^1 \times (S^1)^*)$ ve tvaru

$$L^2(S^1 \times (S^1)^*) = L^2(S^1) \otimes L^2((S^1)^*), \tag{5.51}$$

pak pomocí fixace proměnné k obdržíme funkci z $L^2(S^1)$:

$$\psi^{(k)}(y) = (T^{(k)}\psi)(y) := (T\psi)(\cdot,k). \tag{5.52}$$

Nyní vezměme standardní koherenrní stavy na $L^2(\mathbb{R})$, které mají explicitní tvar

$$\varphi_{q,p}(x) = \frac{1}{\sqrt[4]{\pi\hbar}}\exp(\frac{i}{\hbar}p(x-\frac{q}{2}))\exp(-\frac{x^2}{2\hbar}). \tag{5.53}$$

Aplikací (5.49) pak obdržíme

$$|q,p;k\rangle := \eta^{(k)}_{q,p}(y) = T^{(k)}\varphi_{q,p}. \tag{5.54}$$

Podle [3] má funkce $\eta^{(k)}_{q,p}(y)$ tvar

$$\eta^{(k)}_{q,p}(y) = \frac{1}{\sqrt[4]{\pi\hbar}}\exp(\frac{i}{2\hbar}p\alpha)\exp(-\frac{1}{2\hbar}(\alpha-y)^2)\cdot\theta(i\frac{a}{2\hbar}(\alpha-y-ik\hbar);\rho), \tag{5.55}$$

kde definujeme

$$\alpha := q+ip; \quad \rho := \exp(-\frac{a^2}{2\hbar}) \quad a\ \theta(z,\rho) = \sum_{n=-\infty}^{\infty}\rho^{n^2}e^{2inz};\ |\rho|<1. \tag{5.56}$$

Ke dvoum reálným parametrům q a p (respektive jednomu komplexnímu α) nám zde ještě přibývá třetí parametr k.

References

1. S. Twarique Ali, J.-P. Antoine, J.-P. Gazeau, U. A. Mueller: Coherent States and their Generalizations, Rewiews in Mathematical Physics, Vol. 7, No. 7 (1995)
2. J. Blank,P. Exner, M. Havlíček: Lineární Operátory v Kvantové Fyzice, Karolinum, Praha 1993
3. M. A. Del Olmo, José Gonzáles: Coherent States on the Circle and Quantization, ???
4. J. R. Klauder, Bo-Sture Skagerstam: Coherent States, World Scientific, ??? 1985
5. J. Mareš: Algebra, ČVUT, Praha 1999
6. A. M. Perelomov: Generalized Coherent States and Their Applications, Springer-Verlag, ???
7. A. M. Perelomov: On the Completness of a System of Coherent states, ???
8. I. I. Privalov: Analytické funkce, český překlad, Nakladatelství ČSAV, Praha 1955
9. M. Tinkham: Group Theory and Quantum Mechanics, McGraw-Hill Book Company, ???
10. J. Tolar, G. Chadzitaskos: Quantization on $\mathbf{Z}_M$ and Coherent States Over $\mathbf{Z}_M \times \mathbf{Z}_M$, ??? 1997