VÝZKUMNÝ ÚKOL: KOHERENTNÍ STAVY NA $S^1 \times \mathbb{Z}$ A NA $S^2 \times \mathbb{Z}^2$.

PETR LUFT

Contents

1. Úvod

Cílem této práce je zkonstruovat systém koherentních stavů nad grupami $S \times \mathbb{Z}$ a $S^2 \times \mathbb{Z}^2$. Jako fázové prostory zde budu uvažovat variety S^1, respektive S^2. Při konstrukci příslušných Hilbertových prostorů pak budu postupovat, stejně jako při konstrukci ireducibilních reprezentací daných grup symetrie, podle postupu Mackeyho kvantování, které je popsané např. v [3] nebo v [4]. Budu tedy využívat ireducibilních systémů imprimitivity, které jsou jak pro varietu $\mathbf{S}^1$, tak pro $\mathbf{S}^2$, zkonstruované v [4]. Než ale přistoupím k sestavování daných systémů koherentních stavů, tak nejprve stručně připomenu co je to Mackeyho kvantování a jak se při něm postupuje. Zopakuji také základní definici koherentních stavů.

2. Mackeyho kvantování a systémy imprimitivity.

V této kapitole bych chtěl pro začátek shrnout Mackeyho metodu kvantování a její formalizmus, neboť jí budu využívat při sestavování příslušných Hilbertových prostrů a na nich definovaných operátorů polohy a hybnosti.

2.1. **Konfigurační varieta a grupa symetrie.** Uvažujme hladkou konfigurační varietu $\mathbf{M}$ a její Lieovu konečnědimenzionální grupu symetrie $\mathbf{G}$, která na varietě $\mathbf{M}$ působí tranzitivně. Zvolme pevně libovolný bod m z variety $\mathbf{M}$ a označme $\mathbf{H}$ grupu stability prvku m. $\mathbf{H}$ je podle definice podgrupa grupy $\mathbf{G}$, která svou akcí na varietě $\mathbf{M}$ ponechává bod m beze změny. Grupa H je také Lieova a nezávisí na volbě bodu m, neboť lze snadno ukázat, že díky tranzitivitě grupy $\mathbf{G}$ jsou si podgrupy stability všech prvků z varity $\mathbf{M}$ vzájemně izomorfní. Faktorprostor $\mathbf{G}/\mathbf{H}$ je difeomorfní s konfigurační varietou M. Projektivní ireducibilní reprezentace podgrupy stability jsou pak rozhodující pro klasifikaci všech ireducibilních systému imprimitivity na $\mathbf{M}$, respektive pro klasifikaci všech kvantových mechanik.

2.2. **Projekční míra a systémy imprimitivity.** Pod pojmem projekční míra ne varietě $\mathbf{M}$ rozumíme zobrazení ze systému všech Borelovských množin $\mathcal{B}(\mathbf{M})$ na varietě $\mathbf{M}$ do množiny omezených operátorů na nějakém Hilbertově prostoru $\mathcal{H}$, které každé Borelovské množině na $\mathbf{M}$ přiřadí projektor na $\mathcal{H}$.

$$\mathbf{E}: \mathcal{B}(\mathbf{M}) \to \mathcal{B}(\mathbf{H}) \tag{2.1}$$

Přitom ale musí být splněny následující tři podmínky:

$$\mathbf{E}(\mathbf{M}) = \widehat{\mathbf{I}}, \tag{2.2}$$

$$\mathbf{E}(S_1 \cap S_2) = \mathbf{E}(S_1)\mathbf{E}(S_2) \tag{2.3}$$

pro všechna $S_1,\ S_2 \in \mathcal{B}(\mathbf{M})$,

$$\mathbf{E}(S_1 \cup S_2) = \mathbf{E}(S_1) + \mathbf{E}(S_2) - \mathbf{E}(S_1 \cap S_2) \tag{2.4}$$

opět pro všechna $S_1,\ S_2 \in \mathcal{B}(\mathbf{M})$.

Mějme nyní Hilbertův prostor $\mathcal{H}$, konfigurační varietu $\mathbf{M}$ s projekční mírou na $\mathcal{H}$, dále mějme grupu $\mathbf{G}$, což je grupa symetrie variety $\mathbf{M}$, která působí tranzitivně. Uvažujme dále projektivní unitární reprezentaci $\mathbf{V}$ grupy $\mathbf{G}$ na Hilbertově prostoru $\mathcal{H}$. Dvojice $(\mathbf{E}, \mathbf{V})$ se nazývá projektivní systém imprimitivity grupy $\mathbf{G}$, pokud je navíc splněna tzv. podmínka imprimitivity, která propojuje projekční míru $\mathbf{E}$ s projektivní reprezentací $\mathbf{V}$ grupy $\mathbf{G}$:

$$\mathbf{E}(g \cdot S) = \mathbf{V}(g)\mathbf{E}(S)\mathbf{V}(g)^{-1}, \tag{2.5}$$

což musí platit pro všechna $g \in \mathbf{G}$ a $S \in \mathcal{B}(\mathbf{M})$.

Projektivní systém imprimitivity se nazývá ireducibilní, pokud okruh $\mathcal{C}(\mathbf{V}, \mathbf{E})$ je tvořen pouze násobky jednotkového operátoru. Okruh $\mathcal{C}(\mathbf{V}, \mathbf{E})$ je podle definice tvořen všemi omezenými operátory prostoru $\mathcal{H}$ komutujícími se všemi operátory unitární reprezentace $\mathbf{V}$ i projektivní míry $\mathbf{E}$.

2.3. **Kanonická konstrukce ireducibilních systémů imprimitivity.** Jak ukázal G.W. Mackey, systémy imprimitivity lze kanonickým způsobem konstruovat čistě na základě znalosti konfigurační variety, její grupy stability a příslušné tranzitivní akce. Jak jsem již dříve zmínil, nejen pro konstrukci ireducibilních systémů imprimitivity, ale také pro jejich klasifikaci, je rozhodující znalost podgrupy stability $\mathbf{H}$ grupy $\mathbf{G}$. Platí totiž Mackeyho věta, která říká, že ke kadé projektivní ireducibilní reprezentaci podgrupy stability náleží právě jeden projektivní ireducibilní systém imprimitivity. Platí ale také opačné tvrzení, každému projektivnímu ireducibilnímu systému imprimitivity náleží projektivní ireducibilní reprezentace podgrupy stability $\mathbf{H}$, na jejímž základě lze daný systém imprimitivity zpětně zkonstruovat kanonickým způsobem. Pro přesnost je nezbytné dodat, že klasifikaci systémů imprimitivity není třeba uvažovat všechny projektivní reprezentace (resp. jejich multiplikátory), ale pouze třídy ekvivalence multiplikátorů, ktré tvoří tzv. grupu multiplikátorů. Zmíněná relace ekvivalence na množině všech multiplikátorů je zavedena např. v [4].

Buď tedy $\mathbf{G}$ lokálně kompaktní Lieova grupa symetrie konfigurační variety $\mathbf{M}$, $\mathbf{H}$ její uzavřená podgrupa stability. Na faktorprostoru $\mathbf{G}/\mathbf{H}$ uvažujme Borelovskou strukturu indukovanou faktortopologií. Na faktorprostoru $\mathbf{G}/\mathbf{H}$ existuje kvaziinvariantní míra μ. Je-li míra μ σ-konečná, pak všechny další takové míry jsou s ní absolutně spojité. Volme tedy pevně takovou míru μ. Dále zvolme jednu projektivní ireducibilní reprezentaci $\mathbf{L}$ podgrupy stability $\mathbf{H}$ s multiplikátorem m. Nosič této reprezentace označme $\mathcal{H}^L$. Projektivní reprezentaci grupy $\mathbf{G}$ a projekční míru na varietě $\mathbf{M}$ zkonstruujeme následujícím způsobem: Nejdříve zkonstruujeme nosič dané reprezentace a projekční míry, tj. Hilbertův prostor $\mathcal{H}$. Prostor $\mathcal{H}$ tvoří vektorové funkce z $\mathbf{G}$ do $\mathcal{H}^L$, které splňují následující tři podmínky:

$$a \mapsto \langle \psi(a), f \rangle \tag{2.6}$$

je Brelovské zobrazení pro $\forall f \in \mathcal{H}^L$

$$\psi(ah) = m(a,h)L^{-1}(h)\psi(a), \ \forall h \in \mathbf{H}, \tag{2.7}$$

$$\|\psi\| < \infty, \tag{2.8}$$

kde norma $\|\cdot\|$ je indukována skalárním součinem na $\mathcal{H}^L$:

$$(\psi, \varphi) := \int_{\mathbf{G}/\mathbf{H}} < \psi(a), \varphi(a) > d\mu(a). \tag{2.9}$$

Integrál je dobře definován, neboť lze snadno ukázat, že integrand je konstantní na všech levých třídách rozkladu.

Projekční míra se definuje pomocí charakteristických funkcí daných Borelovských množin:

$$[\mathbf{E}^L(S)\psi](a) := \tilde{\chi}_S(a)\psi(a), \tag{2.10}$$

kde $\tilde{\chi}_S(a)$ je charakteristická funkce množiny S. Je třeba připomenout, že varieta $\mathbf{M}$ je difeomorfní s faktorprostorem $\mathbf{G}/\mathbf{H}$, funkce $\tilde{\chi}_S(a)$ je tedy rovna jedné, právě když $a\mathbf{H} \in S$. Jinak je funkce $\tilde{\chi}_S(a)$ nulová.

Projektivní unitární reprezentace grupy $\mathbf{G}$ je pak definována takto:

$$[\mathbf{V}^L(g)\psi](a) := \sqrt{\frac{d\mu}{d\mu \circ g}(g^{-1}a\mathbf{H})} \cdot m(a^{-1}, g) \cdot \psi(g^{-1}a), \tag{2.11}$$

kde $\frac{d\mu}{d\mu \circ g}$ značí Radon - Nikodymovu derivaci. Dvojice $(\mathbf{V}^L, \mathbf{E}^L)$ splňuje všechny podmínky kladené na systém imprimitivity, jedná se tedy o projektivní ireducibilní systém imprimitivity kanonicky zkonstruovaný na základě projektivní reprezentace $\mathbf{L}$ podgrupy stability.

2.4. **Zavedení operátorů polohy a hybnosti.** Operátor polohy se zavádí pomocí projekční míry $\mathbf{E}$. Máme-li nějakou klasickou pozorovatelnou f, f je tedy zobrazení $\mathbf{TM} \to \mathbb{R}$, pak f je pozorovatelná polohy, pokud je konstantní na všech vláknech $\mathbf{T}_m\mathbf{M}$ $\forall m \in \mathbf{M}$. Zobrazení f pak lze psát ve tvaru $f = \tilde{f} \circ \pi$, kde π je projekce daného tečného fibrovaného prostoru a $\tilde{f}$ je zobrazení $\tilde{f} : \mathbf{M} \to \mathbb{R}$. Funkce $\tilde{f}$ plně nahrazuje funkci f. Příslušný operátor polohy je pak určen spektrální funkcí $\mathbf{E}^f$:

$$\mathbf{E}^f(S) := \mathbf{E}(f^{-1}(s)), \tag{2.12}$$

kde $\mathbf{E}$ je projektivní míra daného systému imprimitivity. Samosdružený operátor polohy $\widehat{Q}^f$ ze zavádí takto:

$$\widehat{Q}^f \psi := \int_{\mathbb{R}} \lambda d\mathbf{E}^f_\lambda \psi \tag{2.13}$$

Definiční obor operátoru $\widehat{Q}^f$ jsou takové vektory ψ, které vyhovují podmínce

$$\|\widehat{Q}^f \psi\| = \int_{\mathbb{R}} \lambda^2 d(\psi, \mathbf{E}^f_\lambda \psi) < \infty. \tag{2.14}$$

Operátory hybnosti se definují na základě unitární ireducibilní reprezentace $\mathbf{V}$. Z Lieovy algebry $\underline{\mathbf{G}}$ vybereme pevně prvek $X \in \underline{\mathbf{G}}$. K tomuto prvku pak jednoznačně přísluší jednoparametrická podgrupa $\gamma_X(t)$ grupy $\mathbf{G}$ $(t \in \mathbb{R})$. Tedy lze psát

$$\gamma_X(t) = exp(tX). \tag{2.15}$$

Podle Stoneovy věty pak ale existuje samosdružený operátor $\widehat{P}(X)$ na Hilbertově prostoru $\mathcal{H}$, ktrý splňuje

$$\mathbf{V}(\gamma_X(t)) = exp(-it\widehat{P}(X)). \tag{2.16}$$

Tím je zaveden samosdružený operátor polohy $\widehat{P}(X)$.

Komutační relace obou operátorů lze odvodit na základě podmínky imprimitivity 2.5. Označíme-li $\dot{q}_X$ vektorové pole na $\mathbf{M}$, které je pomocí akce grupy $\mathbf{G}$ indukováno prvkem X Lieovy algebry $\underline{\mathbf{G}}$, pok komutační relace mají tvar

$$[\widehat{P}(X), \widehat{Q}^f] = -i\widehat{Q}^{\dot{q}_X f}. \tag{2.17}$$

Je třeba předpokládat, že oba operátory mají společný definičbí obor, který je v $\mathcal{H}$ hustý.

2.5. **Hilbertův prostor jako prostor ekvivariantních funkcí.** Hilbertův prostor pro daný systém imprimitivity jsme v předchozím konstruovali jako prostor vektorových funkcí na grupě symetrie. Ukazuje se, že často je výhodnější na tento Hilbertův prostor pohlížet jako na prostor řezů v přidruženém fibrovaném prostoru.

Uvažujme tedy hlavní fibrovaný prostor $(\mathbf{G}, \pi, \mathbf{M}; \mathbf{H})$, kde $\mathbf{G}$ je grupa symetrie konfiguračního prostoru $\mathbf{M}$, $\mathbf{H}$ je podgrupa stability a π je projekce definovaná

$$\pi : \mathbf{G} \to \mathbf{H} : g \mapsto g\mathbf{H};\ g \in \mathbf{G}. \tag{2.18}$$

Tento zápis je moňý díky platnosti vztahu $\mathbf{G}/\mathbf{H} \cong \mathbf{M}$, který jsem již dříve odvodil na základě tranzitivity akce grupy $\mathbf{G}$. Na základě hlavního fibrovaného prostoru zkonstruujeme k němu přidružený fibrovaný prostor následujícím způsobem. Nejdříve zvolíme reprezentaci podgrupy stability $\mathbf{H}$. Tuto reprezentaci označme L. Bázi přidruženého fibrovaného prostoru tvoří konfigurační varieta $\mathbf{M}$, stejně jako u hlavního fibrovaného prostoru. Vlákno u přidruženého fibrvaného prostoru je tvořeno nosičem reprezentace L, tedy vektorovým prostorem $\mathbf{V}^L$, na nějž podgrupa stability působí levou akcí. Totální prostor přidruženého fibrovaného prostoru se definuje pomocí pravé akce podgrupy stability na $\mathbf{G} \times \mathbf{V}^L$:

(2.19)
$$(\mathbf{G} \times \mathbf{V}^L) \times \mathbf{H} \to (\mathbf{G} \times \mathbf{V}^L) : ((g, v), h) \mapsto (gh, L^{-1}(h)v),\ h \in \mathbf{H},\ g \in \mathbf{G},\ v \in \mathbf{V}^L.$$

Po zavedení této akce zavedeme na $\mathbf{G} \times \mathbf{V}^L$ relaci ekvivalence $\sim_L$ tak, že dva prvky z $\mathbf{G} \times \mathbf{V}^L$ si jsou ekvivalntní právě tehdy, když existuje prvek z grupy stability $\mathbf{H}$, který svou akcí převede jeden prvek z $\mathbf{G} \times \mathbf{V}^L$ na druhý. Relace ekvivalence má tedy následující tvar:

$$(g, v) \sim_L (gh, L^{-1}(h)v), \text{ nebo též } (gh, v) \sim_L (g, L(h)v). \tag{2.20}$$

Totální prostor $\mathbf{E}^L$ pak definujeme jako faktorprostor

$$\mathbf{E}^L := \mathbf{G} \times \mathbf{V}^L / \sim_L . \tag{2.21}$$

Z druhého zápisu této ekvivalence je zřejmé, že podmínka 2.7 přejde v požadavek, aby Hilbertův prostor byl tvořen vektorovými finkcemi na konfigurační varietě, přičemž tyto funkce musí být Borelovské řezy na přidruženém fibrovaném prostoru $(\mathbf{E}^L, \tilde{\pi}, \mathbf{M}; \mathbf{V}^L)$, kde projekce přidruženého fibrovaného prostoru je definovaná takto:

$$\tilde{\pi} : \mathbf{E}^L \to \mathbf{M} : (g, v) \mapsto x = \pi(g) = g\mathbf{H}. \tag{2.22}$$

Zobrazení π je projekce z původního hlavního fibrovaného prostoru $(\mathbf{G}, \pi, \mathbf{M}; \mathbf{H})$.

3. Koherentní stavy

V této kapitole zopakuji definici koherentních stavů. Zmíním zde dvě definice, jednak Klauderovu, jednak Perelomovu. Obě definice se od sbe liší jen velmi málo.

Nejdříve uveďme definici koherentních stavů podle Klaudera, kterou lze najít např. v [1]. Mějme separabilní Hilbertův prostor $\mathcal{H}$. K tomu, aby nějaká množina stavů z $\mathcal{H}$ mohla být označena za koherentní stavy, je třeba splnění následujících dvou podmínek

1) Množina koherentních stavů musí být parametrizována nějakým parametrem x, kde $x \in \mathcal{X}$, $\mathcal{X}$ je libovolný topologický prostor. Množina koherentních stavů pak musí být silně spojitá v této parametrizaci.

Ekvivalentně lze tuto vlastnost zapsat následovně:

$$\lim_{n\to\infty} x_n = x \text{ v } \mathcal{X} \quad \Rightarrow \| |x_n\rangle - |x\rangle \| \to 0 \, v \, \mathcal{H}. \tag{3.1}$$

Zde je $|x\rangle$ vektor z $\mathcal{H}$ parametrizovaný prvkem x z $\mathcal{X}$. Pokud se v této vlastnosti omezíme na topologické prostory $\mathcal{X}$, které by byly vektorové prostory s Euklidovskou topologií, pak nám již tato vlastost vylučuje ortogonální systémy stavů z $\mathcal{H}$, jako například vlastní vektory Hermitovských operátorů na $\mathcal{H}$. Systémy, které by splňovaly vlastnost

$$\langle x|x'\rangle = \delta_{x,x'} \quad \forall x, x' \in \mathcal{X} \tag{3.2}$$

by totiž zřejmě nemohly být spojitě parametrizované. Druhou požadovanou vlastností je rozklad jednotky:

2) Na prostoru $\mathcal{X}$ existuje pozitivní míra $d\mu(x)$ taková, že platí

$$\widehat{I} = \int_{\mathcal{X}} |x\rangle\langle x| d\mu(x). \tag{3.3}$$

Důležitý pojem jsou tzv. koherentní stavy parametrizované grupou. V knize [1] je tento pojem defiován takto:

Buď $\mathcal{G}$ souvislá (Lieova) grupa a $U(g)$, $g \in \mathcal{G}$, její silně spojitá unitární ireducibilní reprezentace na Hilbertově prostoru $\mathcal{H}$. Nechť $|\psi_0\rangle$ označuje libovolný normalizovaný vektor z $\mathcal{H}$. Potom množinou koherentních stavů nazveme množinu vektorů $|\psi_g\rangle$, pro které platí

$$|\psi_g\rangle = U(g)|\psi_0\rangle; \; g \in \mathcal{G}. \tag{3.4}$$

Další možný způsob, jak definovat koherentní stavy, nám nabízí Perelomov, jehož definice tak, jak je uvedená v [2], vypadá takto:

Buď $\mathcal{H}$ Hilbertův prostor, $\mathcal{G}$ grupa, $T(g)$ libovolná reprezentace grupy $\mathcal{G}$ na $\mathcal{H}$ a $|\psi_0\rangle$ libovolný normalizovaný vektor z $\mathcal{H}$. Potom množinu stavů, definovanou

$$|\psi_g\rangle = T(g)|\psi_0\rangle, \; kde \; g \in \mathcal{G} \quad ; \tag{3.5}$$

nazveme systémem koherentních stavů náležejícím k reprezentaci T a počátečnímu stavu $|\psi_0\rangle$.

Tuto definici lze ještě pozměnit tak, že na reprezentaci T položíme podmínku unitarity a irreducibility, na grupu $\mathcal{G}$ pak můžeme klást požadavek, aby byla Lieova, či alespoň topologická.

Dále se budu vždy řídit Perelomovou definicí koherentních stavů. Při konstrukci Hilbertova prostoru, stejně jako při konstrukci operátorů polohy a hybnosti, budu vycházet z Mackeyho metody kvantování, která je stručně popsaná v předchozí kapitole. Jako grupu budu vždy uvažovat součin grupy symetrie s diskrétní grupou. Ke konstrukci reprezentace dané grupy budu využívat znalosti reprezentace grupy symetrie, která se též konstruuje při konstrukci systému imprimitivity. U této reprezentace budu vždy předpokládat unitaritu a ireducibilitu.

Jako klasický příklad koherentních stavů slouží kanonické koherentní stavy na $L^2(\mathbb{R})$. Jako konfigurační varieta je zde uvažována reálná osa $\mathbb{R}$, jako grupa symetrie slouží aditivní grupa reálných čísel. Až na ekvivalence zde existuje pouze jediný systém imprimitivity. Mackeyho věta zde tedy přechází ve známou Von Neumannovu větu o jednoznačnosti kvantové mechaniky na přímce. Systém kanonických koherentních stavů jsem podrobně rozebral již ve své rešeršní práci. Jako grupu zde uvažujeme množinu komplexních čísel (grupová operace je sčítání). Systém koherentních stavů zde mimo jiné splňuje následující vlastnosti.

Rozklad jednotky

$$\widehat{I} = \frac{1}{\pi} \int_{\mathbb{C}} |\alpha\rangle\langle\alpha| d^2\alpha. \tag{3.6}$$

Skalární součin dvou stavů je nenulový:

$$\langle\alpha|\beta\rangle \neq 0, \quad \forall \alpha, \beta \in \mathbb{C}. \tag{3.7}$$

Koherentní stavy také minimalizují Heisenbergovy relace neurčitosti:

$$|\Delta_{|\alpha\rangle} \widehat{Q} \cdot \Delta_{|\alpha\rangle} \widehat{P}| = \frac{1}{2}. \tag{3.8}$$

Při konstrukci koherentních stavů na kružnici i na sféře se pokusím zjistit, jestli tyto stavy vyhovují také výše uvedeným vlastnostem.

4. Koherentní stavy na $S^1 \times \mathbb{Z}$

4.1. **Systém imprimitivity na S^1.** Ukážeme nyní konstrukci systému imprimitivity na kružnici, jak je popsána v [4]. Tedy $\mathbf{M} = \mathbf{S^1}$. Grupa symetrie kružnice je grupa všech unitárních operátorů na komplexní rovině, tedy $\mathbf{G} = U(1)$. V tomto případě je grupa symetrie $U(1)$ topologicky shodná s konfigurační varietou $\mathbf{S}$. Podgrupa stbility grupy $U(1)$ při (tranzitivní) akci na $\mathbf{S}^1$ je zřejmě triviální ($\mathbf{H} = \{e\}$), neboť pouze rotace o nulový úhel ponechá libovolný bod kružnice v klidu. Klasifikace systémů imprimitivity je tedy jednoduchá, protože ireducibilní reprezentace jednoprvkové grupy je jen jedna, a to ta, která jednotce přiřadí jednotkový operátor na $\mathbb{C}$. Tato reprezentace je tedy jednorozměrná. Grupa multiplikátorů je v případě S^1 také triviální, jak je uvedeno v [4], takže případné projektivní reprezentace nic nového nepřinesou. Pokud tedy uvažujeme jako grupu symetrie grupu $U(1)$, pak pomocí Mackeyho kvantování obdržíme pouze jednu kvantovou mechaniku. Níže je však rozebrán případ, kdy uvažujeme jinou grupu symetrie. Výše popsaným způsobem pak zkonstruujeme Hilbertův prostor $\mathcal{H}$ jako prostor všech kvadraticky integrabilních funkcí na $\mathbf{S}$, tedy $\mathcal{H} = L^2(\mathbf{S}^1, d\varphi)$.

Unitární ireducibilní reprezentace grupy $U(1)$ na prostoru $L^2(\mathbf{S}^1, d\varphi)$ má podle 2.11 následující tvar:

$$[V(\alpha)\psi](\beta) = \psi(\beta - \alpha),\ \psi \in L^2(\mathbf{S}^1, d\varphi),\ \alpha \in U(1),\ \beta \in \mathbf{S}^1. \tag{4.1}$$

Operátory reprezentace $\mathbf{V}$ tedy posouvají argument funkcí z Hilbertova prostoru. Operátor polohy má pak klasický tvar derivace:

$$\widehat{P} = -i\hbar\frac{d}{d\varphi}. \tag{4.2}$$

Obdobně získáme operátor polohy jako operátor násobení nezávislou proměnnou.

4.2. **Zavedení koherentních stavů.** K tomu, abychom mohli zavést koherentní stavy na $L^2(\mathbf{S}^1, d\varphi)$, je třeba znát unitární ireducibilní reprezentaci námi zvolené grupy $\widetilde{\mathbf{G}} = \mathbf{S}^1 \times \mathbb{Z}$ (přesněji $U(1) \times \mathbb{Z}$), dále je také třeba určit počáteční "vakuový" stav $|0\rangle$. Reprezentaci grupy $U(1) \times \mathbb{Z}$ získáme snadno na základě znalosti reprezentace $\mathbf{V}$ grupy $U(1)$:

$$\widehat{W}(m, \alpha) := exp(im\widehat{Q})exp(-i\alpha\widehat{P}) = exp(im\widehat{Q})\mathbf{V}(\alpha),\ \alpha \in U(1),\ m \in \mathbb{Z}. \tag{4.3}$$

Unitarita reprezentace $\widehat{W}$ vyplývá ze samosdruěnosti operátorů $\widehat{Q}$ a $\widehat{P}$, její ireducibilita pak vyplývá z ireducibility reprezentace $\mathbf{V}$ grupy $U(1)$. Pro úplnost je třeba ještě dodat, že díky nekomutativitě operátorů $\widehat{Q}$ a $\widehat{P}$ není $\widehat{W}$ reprezentací, ale pouze projektivní reprezentací grupy $\widetilde{\mathbf{G}}$. Tento problém ale lze snadno odstranit, jak jsem zmínil již ve své rešeršní práci, pomocí centrálního rozšíření grupy $\widetilde{\mathbf{G}}$.

Volbu vakuového stavu $|0, 0\rangle$ pro vedem analogicky s volbou vakuového stavu kanonických koherentních stavů na $L^2(\mathbb{R})$. Vyjdeme z požadavku, aby vakuový stav byl vlastním vektorem anihilačního operátoru s vlastní hodnotou nula, tedy aby platilo

$$exp(\widehat{Q} + i\widehat{P})|0, 0\rangle = |0, 0\rangle. \tag{4.4}$$

Takovému požadevku ale evidentně vyhovuje, stejně jako v případě $L^2(\mathbb{R})$, Gaussova funkce. Volíme tedy

$$|0,0\rangle := \mathcal{A}exp(-\frac{\varphi^2}{2}),\ \varphi \in < -\pi, \pi > . \tag{4.5}$$

Zřejmě je $|0,0\rangle \in L^2(\mathbf{S}^1, d\varphi)$. Konstantu $\mathcal{A}$ před funkci klademe proto, že samotná exponenciela není normovaná. Konstantu $\mathcal{A}$ určíme přímým výpočtem:

$$1 = \||0,0\rangle\| = \mathcal{A}\sqrt{\int_{-\pi}^{\pi} exp(-\varphi^2)d\varphi}. \tag{4.6}$$

Numerická hodnota konstanty $\mathcal{A}$ činí s přesností na šest desetinných míst $\mathcal{A} = 0,751128$, což se od hodnoty čísla $\frac{1}{\sqrt[4]{\pi}}$ liší až na šestém desetinném místě.

Systém koherentních stavů na $L^2(\mathbf{S}^1, d\varphi)$ získáme působením operátoru $\widehat{W}(m,\alpha)$ na vakuový stav $|0,0\rangle$:

$$|m,\alpha\rangle := \widehat{W}(m,\alpha)|0,0\rangle. \tag{4.7}$$

Abychom znali explicitní funkční předpis pro stavy $|m,\alpha\rangle$, musíme znát působení operátorů $exp(im\widehat{Q})$ a $exp(-i\alpha\widehat{P})$. Působení druhého z nich bylo již rozebráno výše, jedná se o posouvání funkce v argumentu. Operátor $exp(im\widehat{Q})$ pak, jak snadno nahlédneme, působí následovně:

$$exp(im\widehat{Q})\psi(\varphi) = exp(im\varphi)\psi(\varphi). \tag{4.8}$$

Určit explicitní tvar koherentních stavů je nyní již snadné:

$$|m,\alpha\rangle = exp(im\varphi)exp(-\frac{(\varphi-\alpha)^2}{2}),\ \varphi \in < -\pi, \pi > . \tag{4.9}$$

4.3. **Vlastosti koherentních stavů na $L^2(\mathbf{S}^1, d\varphi)$.** Nyní ověříme pltnost některých základních vlastností, které by kohorentní stavy měly mít. Jedná se především o rozklad jednotky, tedy o ověření vztahu

$$\sum_{k\in\mathbb{Z}} \int_{\mathbf{S}^1} |k,\alpha\rangle\langle k,\alpha| d\alpha = c\widehat{I}, \tag{4.10}$$

kde c je libovolná nenulová konstanta. Dále je také třeba prověřit nenulovost skalárního součinu dvou libovolných koherentních stavů.

Ověřme tedy nejdříve platnost rozkladu jednotky. Zvolme libovlně ale pevně stav $|\eta\rangle \in L^2(\mathbf{S}^1, d\varphi)$. Skalární součin stavu $|\eta\rangle$ s koherentním stavem $|k,\alpha\rangle$ má tvar

$$\langle k,\alpha|\eta\rangle = \int_{\mathbf{S}^1} exp(-ik\varphi)exp(-\frac{(\varphi-\alpha)^2}{2})\eta(\varphi)d\varphi. \tag{4.11}$$

Označíme-li operátor ve vztahu 4.10 symbolem $\widehat{A}$, pak zřejmě platí

(4.12)

$$\widehat{A}\eta(\omega) = \sum_{k\in\mathbb{Z}} \int_{\mathbf{S}^1} exp(ik\omega)exp(-\frac{(\omega-\alpha)^2}{2})[\int_{\mathbf{S}^1} exp(-ik\varphi)exp(-\frac{(\varphi-\alpha)^2}{2})\eta(\varphi)d\varphi]d\alpha.$$

jelikož fuknce $\frac{1}{\sqrt{2\pi}} exp(ik\varphi)$, $\varphi \in \mathbf{S}^1$, $k \in \mathbb{Z}$ tvoří ortonormální bázi prostoru $L^2(\mathbf{S}^1, d\varphi)$, pak výraz 4.11 tvoří (až na faktor $\sqrt{2\pi}$) k-tý člen Fourierova rozvoje funkce $exp(-\frac{(\varphi-\alpha)^2}{2})\eta(\varphi)$ ve výše zmíněné ortonormální bázi. Označme tento k-tý koeficient výrazem a_k. Platí tedy

$$\widehat{A}\eta(\omega) = \int_{\mathbf{S}^1} exp(-\frac{(\omega-\alpha)^2}{2}) \sum_{k\in\mathbb{Z}} \sqrt{2\pi} exp(ik\omega) a_k d\alpha. \tag{4.13}$$

Pokud ve výrazu 4.13 vysčítáme sumu, pak zrekonstruujeme funkci $exp(-\frac{(\varphi-\alpha)^2}{2})\eta(\varphi)$. Dostáváme tak

$$\widehat{A}\eta(\omega) = (2\pi) \int_{\mathbf{S}^1} exp(-(\omega-\alpha)^2)\eta(\omega) d\alpha = \frac{2\pi}{\mathcal{A}^2}\eta(\omega). \tag{4.14}$$

Tím jsme tedy ověřili platnost rozladu jednotky:

$$\sum_{k\in\mathbb{Z}} \int_{\mathbf{S}^1} |k,\alpha\rangle\langle k,\alpha| d\alpha = \frac{2\pi}{\mathcal{A}^2}\widehat{I}. \tag{4.15}$$

Zde bych se chtěl pozastavit nad tím, proč jsem operátory $exp(im\widehat{Q})$ parametrizoval diskrétním parametrem m a nikoliv spojitým parametrem (například reálným). Z odvození rozkladu jednotky je totiž zřejmé, že kdybych volil tuto parametrizaci jakkoliv jinak, než pomocí diskrétní grupy $\mathbb{Z}$, nejednalo by se již o inverzní Fourierovu transformaci funkce na konečném intervalu. Celý výpočet by se tím značně zkomplikoval.

V dalším budu již pro jednoduchost vynechávat u stavů $|m,\alpha\rangle$ jejich normovací konstantu $\mathcal{A}$.

Další vlastností kanonických koherentních stavů na $L^2(\mathbb{R})$ je nenulovost skalárního součinu dvou různých stavů. Prověrřme tuto vlastnost i pro $L^2(\mathbf{S}^1, d\varphi)$. Zde je důležité si uvědomit, jak přesně působí operátor $exp(-i\alpha\widehat{P})$ na prostoru $L^2(\mathbf{S}^1, d\varphi)$. Pokud ztotožníme kružnici $\mathbf{S}^1$ s intervalem $< -\pi, \pi >$, pak působení operátoru $exp(-i\alpha\widehat{P})$ na libovolnou funkci $\psi(\varphi) \in L^2(\mathbf{S}^1, d\varphi)$ vypadá následovně:

$$exp(-i\alpha\widehat{P})\psi(\varphi) = \begin{cases} \psi(\varphi-\alpha) & \varphi \in < -\pi+\alpha, \pi >, \\ \psi(\varphi-\alpha+2\pi) & \varphi \in < -\pi, -\pi+\alpha > . \end{cases} \tag{4.16}$$

Zde jsme předpokládali, že $\alpha \in < 0, \pi >$. Proto by bylo nesprávné psát skalární součin ve tvaru

$$\langle m,\alpha|n,\beta\rangle \neq \int_{-\pi}^{\pi} exp(-i\varphi(n-m)) exp(-\frac{(\varphi-\alpha)^2}{2}) exp(-\frac{(\varphi-\beta)^2}{2}) d\varphi. \tag{4.17}$$

S ohledem na 4.16 je tedy třeba rozdělit skalární součin dvou koherentních stavů do dvou integrálů:

$$\langle m,\alpha|n,\beta\rangle = I_1(\alpha,\beta,n-m) + I_2(\alpha,\beta,m-n), \tag{4.18}$$

kde

(4.19)

$$I_1(\alpha,\beta,n-m) := \int_{\alpha-\pi}^{\beta-\pi} exp(i\varphi(n-m)) exp(-\frac{(\varphi-\alpha)^2}{2}) exp(-\frac{(\varphi-\beta+2\pi)^2}{2}) d\varphi,$$

(4.20)
$$I_2(\alpha,\beta,n-m) := \int_{\beta-\pi}^{\pi+\alpha} exp(i\varphi(n-m))exp(-\frac{(\varphi-\alpha)^2}{2}exp(-\frac{(\varphi-\beta)^2}{2}))d\varphi.$$

Bez újmy na obecnosti předpokládáme, že $0 \leq \alpha \leq \beta \leq \pi$. Použijeme-li v integrálu I_1 substituci $\omega = \varphi + \pi - \frac{\alpha+\beta}{2}$, pak se tento integrál převede na tvar

$$I_1(\alpha,\beta,n-m) := exp(-(\tfrac{\beta-\alpha}{2})^2 - \pi)exp(i(\tfrac{\alpha+\beta}{2} - \pi)(m-n))\cdot$$
$$\cdot \int_{\frac{\alpha-\beta}{2}}^{\frac{\beta-\alpha}{2}} exp(i\omega(n-m))exp(-\omega^2)d\omega, \tag{4.21}$$

obdobně se při substituci $\omega = \varphi - \frac{\alpha+\beta}{2}$ zjednodoší integrál I_2:

$$I_2(\alpha,\beta,n-m) := exp(-(\tfrac{\beta-\alpha}{2})^2)exp(i(\tfrac{\alpha+\beta}{2})(m-n))\cdot$$
$$\cdot \int_{-\pi-\frac{\alpha-\beta}{2}}^{\pi-\frac{\beta-\alpha}{2}} exp(i\omega(n-m))exp(-\omega^2)d\omega. \tag{4.22}$$

Výpočet integrálu I_1 nám dá výsledek

$$I_1(\alpha,\beta,n-m) := (-\tfrac{\sqrt{\pi}}{2})exp(-(\tfrac{\beta-\alpha}{2})^2-\pi)exp(i(\tfrac{\alpha+\beta}{2}-\pi)(m-n))exp(-\tfrac{(n-m)^2}{4})\cdot$$
$$\cdot[erf(\frac{\alpha-\beta}{2} + \frac{i(n-m)}{2}) + erf(\frac{\alpha-\beta}{2} - \frac{i(n-m)}{2})], \tag{4.23}$$

obdobně pro druhý integrál

$$I_2(\alpha,\beta,n-m) := (-\tfrac{\sqrt{\pi}}{2})exp(-(\tfrac{\beta-\alpha}{2})^2)exp(i(\tfrac{\alpha+\beta}{2})(m-n)))exp(-\tfrac{(n-m)^2}{4})\cdot$$
$$\cdot[erf(\frac{\alpha-\beta}{2} - \pi + \frac{i(n-m)}{2}) + erf(\frac{\alpha-\beta}{2} - \pi - \frac{i(n-m)}{2})]. \tag{4.24}$$

Funkce $erf(z)$ je funkce komplexní proměnné definovaná vztahem

$$erf(z) := \frac{2}{\sqrt{\pi}} \int_{\Gamma(z)} exp(-\eta^2)d\eta, \tag{4.25}$$

kde $\Gamma(z)$ je libovolná křivka spojující nulu s bodem z v komplexní rovině.

Velmi důležitou vlastností kanonických koherentních stavů na $L^2(\mathbb{R})$ je to, že minimalizují Heisenbergovy relace neurčitosti. V případě koherentních stavů na $L^2(\mathbf{S}^1, d\varphi)$ ovšem nastává problém. Operátor polohy je sice omezený, je tedy definovaný na celém prostoru. Nikoliv však operátor hybnosti. Definiční obor operátoru hybnosti je tvořen absolutně spojitými funkcemi, které vyhovují podmínce $\psi(-\pi) = \psi(\pi)$. Aby pro nějaký stav mělo smysl počítat relace neurčitosti, musí tento stav být v definičním oboru operátorů polohy a hybnosti, ale také jejich kombinací. Koherentní stavy ovšem neleží v definičním oboru operátoru $\widehat{P}\widehat{Q}$. Tím pádem je diskutabilní, jestli vůbec má smysl relace neurčitosti počítat. Formálně ovšem můžeme operátor $\widehat{P}$ chápat jako operátor derivace a jeho definiční obor tak rozšířit na úkor samosdruženosti. Pokusme se tedy zjistit, čemu je v našem případě roven součin

$$\Delta_{|m,\alpha\rangle}\widehat{Q} \cdot \Delta_{|m,\alpha\rangle}\widehat{P}, \tag{4.26}$$

kde

$$\Delta_{|m,\alpha\rangle}\widehat{A} := \sqrt{\langle \widehat{A}^2\rangle_{|m,\alpha\rangle} - \langle \widehat{A}\rangle^2_{|m,\alpha\rangle}} = \sqrt{\langle m,\alpha|\widehat{A}^2|m,\alpha\rangle - \langle m,\alpha|\widehat{A}|m,\alpha\rangle^2}. \tag{4.27}$$

Určeme tedy nejdříve střední kvadratickou odchylku polohy ve stavu $|m,\alpha\rangle$. K tomu je potřeba určit střední hotnotu operátoru $\widehat{Q}$ a $\widehat{Q}^2$ ve stavu $|m,\alpha\rangle$. Při výpočtu je třeba mít na paměti působení operátoru $exp(-i\alpha\widehat{P})$ (viz. 4.16). Střední hodnotu polohy ve stavu $|m,\alpha\rangle$ můžeme vyjádřit takto:

(4.28)

$$\langle m,\alpha|\widehat{Q}|m,\alpha\rangle = \int_{-\pi}^{-\pi+\alpha} \varphi exp(-(\varphi-\alpha+2\pi)^2)d\varphi + \int_{-\pi+\alpha}^{\pi} \varphi exp(-(\varphi-\alpha)^2)d\varphi.$$

Výpočtem dostaneme výsledek

$$\langle m,\alpha|\widehat{Q}|m,\alpha\rangle = \frac{\alpha}{\mathcal{A}^2} - \sqrt{\pi^3}(erf(\pi) - erf(\pi-\alpha)) =: \frac{\alpha}{\mathcal{A}^2} + q_1(\alpha). \tag{4.29}$$

Opět bez újmy an obecnosti předpokládáme, že $\alpha \geq 0$. Střední kvadratická odchylka kvadrátu polohy ve stavu $|m,\alpha\rangle$ vypadá takto:

(4.30)

$$\langle m,\alpha|\widehat{Q}^2|m,\alpha\rangle = \int_{-\pi}^{-\pi+\alpha} \varphi^2 exp(-(\varphi-\alpha+2\pi)^2)d\varphi + \int_{-\pi+\alpha}^{\pi} \varphi^2 exp(-(\varphi-\alpha)^2)d\varphi.$$

Výpočtem zde dostaneme

$$\langle m,\alpha|\widehat{Q}^2|m,\alpha\rangle = \tfrac{\alpha^2+\frac{1}{2}}{\mathcal{A}^2} +$$

$$+\pi(e^{-\pi^2} - 2e^{-(\pi-\alpha)^2}) + 2\alpha\sqrt{\pi^3}(\pi-1)(erf(\pi) - erf(\pi-\alpha)). \tag{4.31}$$

Pokud si označíme

$$q_2(\alpha) := \pi(e^{-\pi^2} - 2e^{-(\pi-\alpha)^2}) + 2\alpha\sqrt{\pi^3}(\pi-1)(erf(\pi) - erf(\pi-\alpha)), \tag{4.32}$$

pak

$$\langle m,\alpha|\widehat{Q}^2|m,\alpha\rangle = \frac{\alpha^2+\frac{1}{2}}{\mathcal{A}^2} + q_2(\alpha). \tag{4.33}$$

Analogicky se postupuje při výpočtu střední hodnoty operátorů hybnosti a kvadrátu hybnosti:

$$\langle m,\alpha|\widehat{P}|m,\alpha\rangle = \textstyle\int_{-\pi}^{-\pi+\alpha}(m+i(\varphi-\alpha+2\pi))exp(-(\varphi-\alpha+2\pi)^2)d\varphi +$$

$$+\int_{-\pi+\alpha}^{\pi}(m+i(\varphi-\alpha))exp(-(\varphi-\alpha)^2)d\varphi. \tag{4.34}$$

Výpočtem obdržíme

$$\langle m,\alpha|\widehat{P}|m,\alpha\rangle = \frac{m}{\mathcal{A}^2}. \tag{4.35}$$

Střední hodnotu kvadrátu hybnosti určíme výpočtem následujícího integrálu:

$$\langle m,\alpha|\widehat{P}^2|m,\alpha\rangle = \int_{-\pi}^{-\pi+\alpha}(m+i(\varphi-\alpha+2\pi)^2)exp(-(\varphi-\alpha+2\pi)^2)d\varphi+$$

$$+\int_{-\pi+\alpha}^{\pi}(m+i(\varphi-\alpha))^2 exp(-(\varphi-\alpha)^2)d\varphi. \tag{4.36}$$

Provedeme následující substituci:

$$p_2 = \pi exp(-\pi^2). \tag{4.37}$$

Po této substituci je

$$\langle m,\alpha|\widehat{P}^2|m,\alpha\rangle = \frac{m^2-\frac{1}{2}}{\mathcal{A}^2}+p_2. \tag{4.38}$$

Heisenbergovy relace neurčitosti 4.26 tedy nabývají tvaru

(4.39)

$$\Delta_{|m,\alpha\rangle}\widehat{Q}\cdot\Delta_{|m,\alpha\rangle}\widehat{P} = \sqrt{(-\frac{1}{2}+\mathcal{A}^2 p_2)}\cdot\sqrt{(\frac{1}{2}+\mathcal{A}^2(q_2(\alpha)-2\alpha q_1(\alpha)-\mathcal{A}^2 q_1(\alpha)^2))}.$$

4.4. **Rozšíření grupy symetrie.** Až doposud jsme jako grupu symetrie kružnice uvažovali grupu $U(1)$. Grupa $U(1)$ ale není jednoduše souvislá, což by v obecném případě mohlo znamenet komplikace při určování grupy multiplikátorů. Proto nahradíme grupu $U(1)$ její univerzální nakrývací grupou, tedy aditivní grupou $\mathbb{R} = U(1)\times\mathbb{Z}$ (viz. [4]). Zvolíme-li $x\in\mathbb{R}$, pak prvek x způsobí na konfigurační varietě $\mathbf{S}^1$ pootočení o úhel x. Narozdíl od $U(1)$ může být úhel pootočení větší než 2π. Grupa stability je v tomto případě $\mathbf{H}=\mathbb{Z}$. Neekvivalentní ireducibilní reprezentace grupy $\mathbb{Z}$ jsou jednorozměrné a lze je parametrizovat prvky $\phi\in\mathbf{S}^1$. Tyto reprezentace pak mají následující tvar:

$$L^\phi : \mathbb{Z}\to\mathbb{C} : k\mapsto exp(ike\phi). \tag{4.40}$$

Hilbertovy prostory $\mathcal{H}^\phi$ daných systémů imprimitivity obsahují funkce z $\mathbb{R}$ do $\mathbb{C}$, které splňují podmínku kvaziperiodičnosti:

$$\psi(x+2\pi k) = exp(-ike\phi)\psi(x),\ \psi\in\mathcal{H}^\phi. \tag{4.41}$$

Skalární součin na $\mathcal{H}^\phi$ vypadá takto:

$$<\psi,\chi>:=\int_a^{a+2\pi}\psi(x)\overline{\chi}(x)dx,\ a\in\mathbb{R}. \tag{4.42}$$

Unitární ireducibilní reprezentece $\mathbb{R}$ na $\mathcal{H}^\phi$ pak mají tvar

$$\mathbf{V}^\phi(t) = exp(-it\widehat{P}^\phi),\ t\in\mathbb{R}. \tag{4.43}$$

Operátor $\widehat{P}^\phi$ je samosdružený a je definován typickým vztahem

$$\widehat{P}^\phi := -i\frac{d}{dx}. \tag{4.44}$$

Prostory $\mathcal{H}^\phi$ lze ale ztotožnit s prostorem $L^2(\mathbf{S}^1,d\varphi)$ pomocí unitárního zobrazení $\mathcal{U}^\phi$:

$$\mathcal{U}^\varphi : \mathcal{H}^\phi\to L^2(\mathbf{S}^1,d\varphi) : \psi(x)\mapsto exp(\frac{i\phi e\varphi}{2\pi})\psi(\varphi). \tag{4.45}$$

Operátory $\widehat{P}^\phi$ pak budou mít na prostoru $L^2(\mathbf{S}^1, d\varphi)$ tvar

$$\mathcal{U}^\phi \widehat{P}^\phi (\mathcal{U}^\phi)^{-1} = -i\frac{d}{d\varphi} - \frac{e\phi}{2\pi}. \tag{4.46}$$

Operátory polohy mají ve všech případech tvar násobení nezávislou proměnnou, výjimku ovšem tvoří operátor polohy na prostorech $\mathcal{H}^\phi$. Zde má operátor polohy tvar násobení pilovitou funkcí, která je na intervalu $< -\pi, \pi >$ rovna násobení nezávislou proměnnou, na zbytku reálné osy je však tato funkce periodická s periodou π.

Použití univerzální nakrývací grupy jako grupy symetrie tedy v tomto případě vede k bohatším výsledkům. Význam parametru ϕ se zde fyzikálně interpretuje jako tok magnetického pole, které je kolmé k rovině kružnice, po které se pohybuje nabitá kvantová částice s nábojem e. Viz. také [4].

Koherentní stavy pro systém imprimitivity, který je parametrizovaný tokem ϕ, zavedeme obdobně, jako na začátku čtvrté kapitoly. Nejdříve určíme vakuový stav, analogicky vztahu 4.4:

$$exp(\widehat{Q} + i\widehat{P}^\phi)|0, 0, \phi\rangle = |0, 0, \phi\rangle. \tag{4.47}$$

Této rovnosti vyhovuje funkce

$$|0, 0, \phi\rangle := \mathcal{A}_\phi exp(-\frac{(\varphi - \frac{ie\phi}{2\pi})^2}{2}). \tag{4.48}$$

Normovací konstanta $\mathcal{A}_\phi$ se snadno určí přímým výpočtem: $\mathcal{A}_\phi = \mathcal{A}exp(-\frac{e^2\phi^2}{2\pi^2})$. Konstanta $\mathcal{A}$ je určena již v 4.6.

Koherentní stavy definujeme opět působením unitárního operátoru

$$\widehat{W}^\phi(m, \alpha) := exp(im\widehat{Q})exp(-i\alpha\widehat{P}^\phi). \tag{4.49}$$

Koherentní stavy mají pak tvar

$$|m, \alpha, \phi\rangle = \widehat{W}^\phi(m, \alpha)|m, \alpha, \phi\rangle =$$

$$= exp(im\varphi)exp(-\frac{(\varphi - \alpha - \frac{ie\phi}{2\pi})^2}{2}),\ \varphi \in < -\pi, \pi > . \tag{4.50}$$

Vzhledem k tomu, že jsme grupu symetrie rozšířili na celé $\mathbb{R}$, parametr α probíhá od $-\infty$ do ∞. Reprezentace této grupy na $L^2(\mathbf{S}^1, d\varphi)$ ale není prostá, operátory této reprezentace se opakují s periodou 2π. Je proto možné se při konstrukci koherentních stavů omezit pouze na konečný interval $< -\pi, \pi >$, neboť zbytek reálné osy by do systému koherentních stavů nevnesl nic nového. Jak se záhy ukáže, toto omezemí je dokonce nutné, protože se tím vyhneme nepříjemnostem, jako je divergence integrálu, při vyšetřování vlastností koherentních stavů.

Analogicky s předchozím nyní můzeme analyzovat vlastnosti těchto koherentních stavů. Začněme rozkladem jednotky. Budeme vyšetřovat operátor anaogický operátoru 4.10:

$$\widehat{A}^\phi = \sum_{k \in \mathbb{Z}} \int_{\mathbf{S}^1} |k, \alpha, \phi\rangle\langle k, \alpha, \phi| d\alpha. \tag{4.51}$$

Zvolme nyní libovolný stav $\eta \in L^2(\mathbf{S}^1, d\varphi)$ a aplikujme operátor $\widehat{A}$ na tento stav:

$\widehat{A}\eta(\omega) = \sum_{k\in\mathbb{Z}} \int_{\mathbf{S}^1} exp(ik\omega)exp(-\frac{(\omega-\alpha-\frac{ie\phi}{2\pi})^2}{2})\cdot$

$$\cdot[\int_{\mathbf{S}^1} exp(-ik\varphi)exp(-\frac{(\varphi-\alpha+\frac{ie\phi}{2\pi})^2}{2})\eta(\varphi)d\varphi]d\alpha. \tag{4.52}$$

Výpočet je založen na stejné úvaze, jako výpočet rozkladu jednotky koherentních stavů bez parametru ϕ. Nejdříve se rozloží funkce $exp(-\frac{(\varphi-\alpha+\frac{ie\phi}{2\pi})^2}{2})\eta(\varphi)$ do ortonormální báze prostoru $L^2(\mathbf{S}^1, d\varphi)$ tvořené funkcemi $exp(ik\varphi)$, $k \in \mathbb{Z}$. Následně se tyto koeficienty, vynásobené bazickými vektory, vysčítají přes množinu celých čísel, čímž se (až na konstantu 2π) zrekonstruuje funkce $exp(-\frac{(\varphi-\alpha+\frac{ie\phi}{2\pi})^2}{2})\eta(\varphi)$. Vztah 4.51 se tedy zjednoduší na

$$\widehat{A}^{\phi}\eta(\omega) = (2\pi)exp(\frac{e^2\phi^2}{4\pi^2})\int_{\mathbf{S}^1} exp(-(\omega-\alpha)^2)\eta(\omega)d\alpha = \frac{2\pi}{\mathcal{A}_{\phi}^2}\eta(\omega). \tag{4.53}$$

Rozklad jednotky tedy platí v následující podobě:

$$\sum_{k\in\mathbb{Z}} \int_{\mathbf{S}^1} |k,\alpha\rangle\langle k,\alpha| d\alpha = \frac{2\pi}{\mathcal{A}_{\phi}^2}\widehat{I}. \tag{4.54}$$

Skalární součin dvou koherentních stavů má tvar analogický 4.18:

$$\langle m,\alpha,\phi|n,\beta,\phi\rangle = I_1(\alpha,\beta,n-m,\phi) + I_2(\alpha,\beta,m-n,\phi), \tag{4.55}$$

kde

$I_1(\alpha,\beta,n-m,\phi) :=$

$$:= \int_{\alpha-\pi}^{\beta-\pi} e^{i\varphi(n-m)}exp(-\frac{(\varphi-\alpha+\frac{ie\phi}{2\pi})^2}{2})exp(-\frac{(\varphi-\beta+2\pi-\frac{ie\phi}{2\pi})^2}{2})d\varphi, \tag{4.56}$$

$$I_2(\alpha,\beta,n-m,\phi) := \int_{\beta-\pi}^{\pi+\alpha} e^{i\varphi(n-m)}exp(-\frac{(\varphi-\alpha+\frac{ie\phi}{2\pi})^2}{2}exp(-\frac{(\varphi-\beta-\frac{ie\phi}{2\pi})^2}{2}))d\varphi. \tag{4.57}$$

Úpravou dostaneme

$I_1(\alpha,\beta,n-m,\phi) := e^{\frac{e^2\phi^2}{4\pi^2}} e^{-\frac{ie\phi}{2\pi}(\beta-\alpha+2\pi)}(-\frac{\sqrt{\pi}}{2})exp(-(\frac{\beta-\alpha}{2})^2-\pi)exp(i(\frac{\alpha+\beta}{2}-\pi)(m-n))exp(-\frac{(n-m)^2}{4})\cdot$

$$\cdot[erf(\frac{\alpha-\beta}{2}+\frac{i(n-m)}{2})+erf(\frac{\alpha-\beta}{2}-\frac{i(n-m)}{2})], \tag{4.58}$$

obdobně pro druhý integrál

$I_2(\alpha,\beta,n-m,\phi) := e^{\frac{e^2\phi^2}{4\pi^2}} e^{-\frac{ie\phi}{2\pi}(\beta-\alpha)}(-\frac{\sqrt{\pi}}{2})exp(-(\frac{\beta-\alpha}{2})^2)exp(i(\frac{\alpha+\beta}{2})(m-n)))exp(-\frac{(n-m)^2}{4})\cdot$

$$\cdot[erf(\frac{\alpha-\beta}{2}-\pi+\frac{i(n-m)}{2})+erf(\frac{\alpha-\beta}{2}-\pi-\frac{i(n-m)}{2})]. \tag{4.59}$$

Porovnáme-li tento výsledek s výsledkem dosaženým pro koherentní stavy nad $U(1) \times \mathbb{Z}$, pak zjistíme následující:

$$I_1(\alpha, \beta, n-m, \phi) := e^{\frac{e^2\phi^2}{4\pi^2}} e^{-\frac{ie\phi}{2\pi}(\beta-\alpha+2\pi)} I_1(\alpha, \beta, n-m). \tag{4.60}$$

Pro druhý integrál pak obdržíme

$$I_2(\alpha, \beta, n-m, \phi) := e^{\frac{e^2\phi^2}{4\pi^2}} e^{-\frac{ie\phi}{2\pi}(\beta-\alpha)} I_2(\alpha, \beta, n-m). \tag{4.61}$$

Skalární součin dvou koherentních stavů tedy lze psát ve formě

$$\langle m, \alpha, \phi | n, \beta, \phi \rangle = e^{\frac{e^2\phi^2}{4\pi^2}} e^{-\frac{ie\phi}{2\pi}(\beta-\alpha+2\pi)} I_1(\alpha, \beta, n-m) + e^{\frac{e^2\phi^2}{4\pi^2}} e^{-\frac{ie\phi}{2\pi}(\beta-\alpha)} I_2(\alpha, \beta, m-n). \tag{4.62}$$

Na konci této kapitoly ještě zmíním, jak se změní Heisenbergovy relace neurčitosti, budeme-li uvažovat také parametr ϕ. Střední hodnoty operátoru polohy a kvadrátu polohy se prakticky nezmění. Před integrály 4.28 a 4.31 se pouze objeví koeficient $e^{\frac{e^2\phi^2}{4\pi^2}}$, který způsobí pouze to, že normovací konstanta $\mathcal{A}$ přejde na konstantu $\mathcal{A}_\phi$. U střední hodnoty operátoru hybnosti a kvadrátu hybnosti také dojde pouze k záměně $\mathcal{A} \mapsto \mathcal{A}_\phi$. Zde ale musíme uvažovat operátory $\widehat{P}^\phi$, nikoliv $\widehat{P}$. Relace neurčitosti mají tedy tento tvar:

$$\Delta_{|m,\alpha,\phi\rangle}\widehat{Q} \cdot \Delta_{|m,\alpha,\phi\rangle}\widehat{P}^\phi = \sqrt{(-\frac{1}{2} + \mathcal{A}_\phi^2 p_2)} \cdot \sqrt{(\frac{1}{2} + \mathcal{A}_\phi^2(q_2(\alpha) - 2\alpha q_1(\alpha) - \mathcal{A}_\phi^2 q_1(\alpha)^2))}. \tag{4.63}$$

4.5. **Závěr.** Na základě znalosti systémů imprimitivity na kružnici $\mathbf{S}^1$ jsem zkonstruoval příslušné systémy koherentních stavů. Nejdříve jsem jako grupu symetrie kružnice uvažoval grupu $U(1)$. Ukázalo se, že v tomto případě existuje, až na ekvivalenci, právě jeden ireducibilní systém imprimitivity. Pomocí tohoto systému imprimitivity jsem pak zkonstruoval na základě Perelomovy definice systém koherentních stavů. Pro tento systém jsem ověřil platnost rozkladu jednotky. Nepodařilo se mi však ověřit nenulovost skalárního součinu dvou různých koherentních stavů (tzv. překryvu). Tento skalární součin se pouze podařilo převést do tvaru součtu dvou integrálů. Vyčíslení těchto integrálů jsem provedl pomocí holomorfní chybové funkce $erf(z)$. Překryv dvou koherentních stavů lze také vyjádřit například pomocí hyperegeometrických funkcí, nedovedlo mě to ale k žádnému žádoucímu výsledku. Nenulovost překryvu jsem ukázal pouze pro několik speciálních případů. Chybová funkce se též objevila při výpočtu Heisenbergových relací neurčitosti pro koherentní stavy. Ukázalo se, že na rozdíl od kanonických koherentních stavů nemá smysl uvažovat Heisenbergovy relace neurčitosti, protože koherentn4.26 stavy zde nejsou v definičním oboru operátoru $\widehat{P}\widehat{Q}$.

Když jsem ale změnil grupu symetrie $U(1)$ na její univerzální nakrývací grupu $\mathbb{R}$, obdržel jsem hned celou množinu systémů imprimitivity. Tato množina je parametrizovaná prvky $\mathbf{S}^1$. Parametr jsem označil ϕ. Ukázalo se, že tento parametr má fyzikální význam toku magnetického pole, které je rovnoběžné s osou kružnice, po které se pohybuje nabitá částice. Rozklad jednotky majá v tomto případě naprosto shodný tvar jako pro stvy sestavené na základě grupy $U(1)$. Došlo jen ke změně normovací konstanty. Při výpočtu překryvu jsem narazil na stejný problém jako v předchozím případě, tedy na chybovou funkci. Rozdíl mezi překryvem koherentních stavů parametrizovanými parametrem ϕ a překryvem stavů nad $U(1)$ je tvořen pouze nenulovou multiplikativní konstantou. Pokud zvolíme parametr ϕ roven nule, tedy zvolíme nulové magnetické pole, pak systém koherentních stavů je zcela identický se systémem nad $U(1)$.

Při výpočtu překryvu koherentních stavů a středních hodnot operátorů polohy a hybnosti jsem použil předpoklad $0 < \alpha < \beta < \pi$, respektive $0 < \alpha < \pi$. Tyto speciální případy se snadno zobecní na $\alpha \in < -\pi, \pi >$ takto: bude-li $\alpha > \beta$, pak zaměníme v mezích integrálů parametry α a β, nebudou-li tyto parametry v intervalu $< 0, \pi >$, pak v mezích integrálů uvažujeme sčítání modulo 2π.

5. Koherentní stavy na $\mathbf{S}^2$

Kohrenrní stavy na dvourozměrné sféře $\mathbf{S}^2$ budu konstruovat stejným způsobem jako koherentní stavy na kružnici, budu tedy vycházet ze znalosti systémů imprimitivity. Jako grupu symetrie sféry budu uvažovat grupu $SU(2)$, která je souvislá, jednoduše souvislá a poloprostá, její grupa multiplikátorů je tedy triviální. Jako Hilbertův prostor zde budu uvažovat prostor ekvivariantních funkcí na přidruženém fibrovaném prostoru.

5.1. **Systémy imprimitivity na $\mathbf{S}^2$.** Nyní uvedu, jak se konstruují systmy imprimiti na $\mathbf{S}^2$ tak, jak je uvedeno v **??**. Konfigurační varietu $\mathbf{S}^2$ chápeme jako podmnožinu $\mathbb{R}^3$, jedná se tedy o trojici reálných parametrů (x_1, x_2, x_3) svázaných podmínkou $\sum_{k=1}^{3} x_k^2 = 1$. Varietu $\mathbf{S}^2$ ztotožníme s množinou matic 2×2, psaných ve tvaru $\sum_{k=1}^{3} x_x \sigma_k$, kde σ_k je k-tá Pauliho matice. Akce grupy $SU(2)$ na $\mathbf{S}^2$ má potom tvar

$$(5.1)\qquad \begin{pmatrix} x_3 & x_1 - ix_2 \\ x_1 + ix_2 & -x_3 \end{pmatrix} \mapsto \mathbf{T} \begin{pmatrix} x_3 & x_1 - ix_2 \\ x_1 + ix_2 & -x_3 \end{pmatrix} \mathbf{T}^+,$$

$\mathbf{T} \in SU(2)$. Grupa $SU(2)$ je třírozměrná reálná Lieova grupa a má následující tvar:

$$(5.2)\qquad SU(2) = \{ \begin{pmatrix} \alpha & \beta \\ -\overline{\beta} & \overline{\alpha} \end{pmatrix}; \, |\alpha|^2 + |\beta|^2 = 1, \; \alpha, \beta \in \mathbb{C}\}.$$

Grupa $SU(2)$ působí na $\mathbf{S}^2$ tranzitivně, podgrupu stability v tomto případě tvoří grupa $U(1)$. Reprezentace grupy $U(1)$ jsou jednorozměrné a jsou parametrizovány celými čísly $\mathbb{Z}$. Tyto reprezentace mají tvar

$$(5.3)\qquad L^n : U(1) \to \mathbb{C} : exp(i\varphi) \mapsto exp(in\varphi), \quad n \in \mathbb{Z}; \; \varphi \in < -\pi, \pi > .$$

Systémy imprimitivity na $\mathbf{S}^2$ jsou tedy parametrizovány diskrétním parametrem n. Máme pak hlavní fibrovaný prostor $(SU(2), \pi, \mathbf{S}^2; U(1))$ (tzv. Hopfova fibrace). Tvar projekce π zde není podstatný, lze jej nalézt např v [4]. Kdybychom při konstrukci systému imprimitivity postupovali kanonickým způsobem, popsaným v druhé kapitole, pak bychom jako Hilberův prostor uvažovali prostor komplexních funkcí na $SU(2)$, které splňují podmínku

$$(5.4)\qquad \psi(\begin{pmatrix} e^{i\tau}\alpha & e^{-i\tau}\beta \\ -e^{i\tau}\overline{\beta} & e^{-i\tau}\overline{\alpha} \end{pmatrix}) = exp(-in\tau)\psi(\begin{pmatrix} \alpha & \beta \\ -\overline{\beta} & \overline{\alpha} \end{pmatrix}).$$

Prvky α a β popisují grupu $SU(2)$ (viz. 5.2), číslo $\tau \in < -\pi, \pi >$ a parametrizuje podgrupu stability $U(1)$.

Práce s Hilbertovým prostorem tvořeným takovýmito funkcemi by ale byla jistě obtížná. Proto je výhodnější přejít k přidruženému fibrovanému prostoru. Zvolíme-li pevně reprezentaci podgrupy stability $U(1)$, což provedeme volbou celého čísla n, pak Hilbertův prostor Borelovskývh řezů na přidruženém fibrovaném prostoru lze ztotožnit s prostorem dvojic komplexních funkcí (ψ_s, ψ_j), kde

$$(5.5)\qquad \psi_{s,j} \in L^2(U_{s,j}, sin\vartheta d\vartheta d\varphi).$$

Množiny $U_{s,j}$ tvoří otevřené pokrytí variety $\mathbf{S}^2$ a jsou definované takto:

$$U_s := \mathbf{S}^2 \setminus j;\ U_j := \mathbf{S}^2 \setminus s, \tag{5.6}$$

kde body s a j jsou severní, respektive jižní pól sféry:

$$s := (0,0,1); \qquad j := (0,0,-1). \tag{5.7}$$

Funkce ψ_s a ψ_j musí ještě na $U_j \cap U_s$ vyhovovat podmínce

$$\psi_j(u) = e^{-in\varphi}\psi_s(u),\ u \in U_j \cap U_s. \tag{5.8}$$

Operátory hybnosti jsou tvořeny dvojicemi operátorů na Hilbertových prostorech $L^2(U_{j,s}, sin\vartheta d\vartheta d\varphi)$. Jak jsem zmínil již v druhé kapitole, každý prvek Lieovy algebry příslušné ke grupě symetrie generuje operátor hybnosti. V našem případě máme Lieovu algebru $su(2)$. Její bázi tvoří matice $i\sigma_k,\ k = 1,2,3$. Každý prvek algebry $su(2)$ indukuje vektorové pole na konfigurační varietě. V případě algebry $su(2)$ můžeme volit tři nezávislé prvky této algebry, volíme tedy prvky $-\frac{i}{2}\sigma_k,\ k = 1,2,3$. Tyto prvky generují vektorová pole J_k na konfigurační varietě:

$$J_i := \varepsilon_{ijk} x_j \frac{\partial}{\partial x_k}.\ i = 1,2,3. \tag{5.9}$$

tato vektorová pole indukují reprezentaci grupy $SU(2)$:

$$U(exp(\frac{-it}{2}\sigma_k)) := exp(-it\widehat{P}(J_k)), \tag{5.10}$$

kde samosdružený operátor $\widehat{P}_k$ je operátor hybnosti indukovaný vektorovým polem J_k. Tento operátor hybnosti má pak tvar dvojice operátorů $\widehat{P}(J_k) = (\widehat{P}_s(J_k), \widehat{P}_j(J_k))$:

$$\widehat{P}_{s,j}(J_k)\psi(u) := (-iJ_k - e\alpha_{s,j}(J_k) - \frac{n}{2}u_k)\psi(u), \tag{5.11}$$

kde $u = (u_1, u_2, u_3) \in U_s \cap U_j$, dvojice (α_s, α_j) odpovídá lokalizaci formy konexe α, kde

$$\alpha_s = \frac{n}{2e}(1 - cos\vartheta)d\varphi,\ \alpha_j = -\frac{n}{2e}(1 + cos\vartheta)d\varphi. \tag{5.12}$$

Fyzikální interpretace tohoto výsledku je následující. Položíme-li na $U_s \cap U_j$

$$\beta = d\alpha_s = d\alpha_j = \frac{n}{2e} sin\vartheta d\vartheta \wedge d\varphi \tag{5.13}$$

a označíme-li $g = \int_{\mathbf{S}^2} \beta = \frac{2\pi n}{e}$, pak veličina $B(u) = \frac{g}{4\pi}u$ odpovídá magnetickému poli Diracova magnetického monopólu, který je umístěn ve středu koule. Toto magnetické pole je pak určeno v bodě u, tedy na sféře $\mathbf{S}^2$. Magnetické pole monopólu je zřejmě kvantováno pomocí celočíselného parametru n.

Tím je tedy známa reprezentace grupy $SU(2)$ a příslušné operátory hybnosti. Otázkou ale zůstává, jak určit operátory polohy, které je nezbytné znát ke konstrukci koherentních stavů. Konstrukce operátorů je založena na volbě klasických pozorovatelných polohy, tedy na volbě reálných funkcí na sféře $\mathbf{S}^2$ $f : \mathbf{S}^2 \to \mathbb{R}$. Tyto funkcce lze volit například takto:

$$f : (\vartheta, \varphi) \mapsto \vartheta, g : (\vartheta, \varphi) \mapsto \varphi. \tag{5.14}$$

Příslušné operátory polohy by pak měli jednoduchý tvar násobení nezávislou (sférickou) proměnnou, jejich komutační relace s operátory polohy by ale byly komplikované. Systémy koherentních stavů by se pak konstruovaly velmi obtížně. Pozorovatelné polohy lze volit také tak, aby komutační relace operátorů polohy a hybnosti byly jednoduché, například lze volit funkce

$$f_k(u_1, u_2, u_3) = u_k. \tag{5.15}$$

Komutační relace by se zde sice zjednodušili, zato by se ale značně zkomplikoval tvar operátorů polohy.

5.2. **Závěr.** Jako východisko ke konstrukci koherentních stavů na $\mathbf{S}^2$ tedy vidím konstrukci systémů imprimitivity na $\mathbf{S}^2$. Dále je třeba se pokusit najít vakuový stav a pomocí exponenciel z operátorů polohy a hybnosti zkonstruovat systém koherentních stavů a ověřit vlastnosti tohoto systému. Obdobně jako u $\mathbf{S}^1$ i zde existuje více systémů imprimitivity, které jsou parametrizovány diskrétním parametrem $n \in \mathbb{Z}$.

6. Dodatky

6.1. **Zobecnění systémů imprimitivity na $\mathbf{S}^n$.** Pokud budeme chtít zobecnit koherentní stavy i na konfigurační variety $\mathbf{S}^n$, $n \in \mathbb{N}$, pak bude třeba určit systémy imprimitivity na $\mathbf{S}^n$. K tomu ovšem bude třeba určit grupy symetrie $\mathbf{S}^n$ a příslušné podgrupy stability. Pokud budeme chtít zachovat obecný přístup, tj. postupovat pro obecné $n \in \mathbb{N}$, pak jako ideální východisko vidím využití grup $SO(n)$. Grupa $SO(n+1)$ je totiž grupou symetrie konfigurační variety $\mathbf{S}^n$. Jelikož platí vztah

$$SO(n+1)/SO(n) \cong \mathbf{S}^n, \tag{6.1}$$

pak grupa $SO(n)$ je obecně příslušnou podgrupou stability při akci $SO(n+1)$ na $\mathbf{S}^n$. Pro konstrukci systémů imprimitivity je pak klíčová znalost ireducibilních reprezentací $SO(n)$, dále také grup multiplikátorů pro $SO(n)$, neboť $SO(n)$ není obecně jednoduše souvislá. Grupy multiplikátorů nejsou tedy obecně triviální. Na základě systémů imprimitivity by pak mohlo být možné dále konstruovat systémy koherentních stavů.

6.2. **Překryv koherentních stavů na $\mathbf{S}^1$.** Jelikož se nepodařilo ve čtvrté kapitole rozhodnout o nenulovosti překryvu dvou koherentních stavů, pokusil jsem se alespoň pro několik případů zobrazit graficky absolutní hodnou překryvu dvou stavů. Vždy jsem uvažoval $\phi = 0$. Pokud jsem pevně fixoval parametr $n - m$, který je celočíselný, pak jsem mohl absolutní hodnotu překryvu chápat jako funkci dvou proměnných α a β, které leží v intervalu $< -\pi, \pi >$. Grafy jsou pak pouze pro hodnoty parametru $m - n = 0, 1, 2, 3$. Žádná z vyobrazených fukcí neprotíná nulu, překryv tedy v těchto případech bude zřejmě nenulový. Je zajímavé, že všechny grafy mají prakticky shodný tvar, zdá se, že se funkce liší pouze v multipikativní konstantě. Tato podobnost vede k hypotéze, že by mezi zmíněnými funkcemi mohl existovat určitý vztah, který by pak mohl vést k exaktnímu ověření nenulovosti překryvu.

References

1. J. R. Klauder, Bo-Sture Skagerstam: *Coherent states*, World Scientific, Singapore 1985
2. A. M. Perelomov: *Generalized coherent states and their applications*, Springer-Verlag, Berlin 1986
3. J. Tolar: *Quantization methods*, Lecture notes, Clausthal 1977
4. P.Šťovíček, J. Tolar: Topologie konfigurační variety, Acta Polytechnica (6(IV,1)),37-75,1984