# rešeršní práce

Ivo Hradecký

8. října 2001

# Obsah


**1 $\delta-$interakce v $\mathbb{R}$** **3**

1.1 Definice a základní vlastnosti . . . . . 3

1.2 Approximation by means of local scaled short-range interactions . 5

1.3 Konvergence vlastních hodnot . . . . . 8

1.4 Teorie rozptylu pro $\delta$-interakci . . . . . 8

**2 Nekonečně mnoho $\delta$- interakcí v $\mathbb{R}$** **11**

2.1 Definice a základní vlastnosti . . . . . 11

2.2 Approximations by means of local scaled short-range interactions 14

2.3 Periodická $\delta$-interakce . . . . . 15

2.4 Polokrystaly . . . . . 18

**3 Konečně mnoho $\delta$-interakcí v $\mathbb{R}^3$** **20**

3.1 Definice a základní vlastnosti . . . . . 20

3.2 Approximation by a family of local scaled short-range hamiltonians 22

# Úvod

Tato rešeršní práce se zabývá popisem bodových (nebo také tzv. $\delta$) interakcí, tj. modelů daných hamiltoniánem s potenciálem působícím na určité diskrétní množině bodů.

První dvě kapitoly, které popisují $\delta$-interakci v $\mathbb{R}$, jsem převzal z knihy [1], poslední kapitolu o $\delta$-interakci na konečné množině bodů v $\mathbb{R}^3$jsem převzal z článku [3].

# Kapitola 1

# $\delta-$interakce v $\mathbb{R}$

## 1.1 Definice a základní vlastnosti

V této kapitole podáme přesnou matematickou definici a popíšeme $\delta$-interakci v jednorozměrném prostoru formálně popsanou kvantovým hamiltoniánem $H = -\Delta + \alpha\delta(x-y)$ .

Mějme Hilbertův prostor $L_2(\mathbb{R})$ a v něm definujme uzavřený pozitivní operátor

$$\dot{H}_y = -\frac{d^2}{dx^2},\ D(\dot{H}_y) = \{g \in H^{2,2}(\mathbb{R})/g(y) = 0\},\ y \in \mathbb{R}.$$

Jeho sdružený operátor je

$$\dot{H}_y^* = -\frac{d^2}{dx^2},\ D(\dot{H}_y^*) = \{g \in H^{2,2}(\mathbb{R} - \{y\}) \cap H^{2,1}(\mathbb{R}),\ y \in \mathbb{R}.$$

kde $H^{m,n}(\mathbb{R})$ představuje Sobolevův prostor.

Rovnice

$$\dot{H}_y^*\psi(k) = k^2\psi(k),\ \psi(k) \in D(\dot{H}_y^*),\ k^2 \in \mathbb{C} - \mathbb{R},\ Im k > 0$$

má řešení

$$\psi(k,x) = \exp(ik\,|x-y|),\ Im k > 0.$$

$\dot{H}_y$ má tedy indexy defektu (1,1) a všechna samosdružená rozšíření $H_{\theta,y}$ operátoru $\dot{H}_y$ jsou

$$H_{\theta,y} = -\frac{d^2}{dx^2},\ D(H_{\theta,y}) = \{g + c\psi_+ + ce^{i\theta}\psi_-/g \in D(\dot{H}_y),\ c \in \mathbb{C}\},$$

$$H_{\theta,y}(g + c\psi_+ + ce^{i\theta}\psi_-) = \dot{H}_y g + ic\psi_+ - ic\psi_-,\ \theta \in [0, 2\pi),\ y \in \mathbb{R},$$

$$\psi_\pm(x) = \frac{i}{2\sqrt{\pm i}}\exp(i\sqrt{\pm i}\,|x-y|\,,\ Im\sqrt{\pm i} > 0.$$

Tedy $D(H_{\theta,y}) \subseteq H^{2,1}(\mathbb{R})$. Navíc platí

$$(g + c\psi_+ + ce^{i\theta}\psi_-)'(y+) - (g + c\psi_+ + ce^{i\theta}\psi_-)'(y-) = -c(1 + e^{i\theta}) =$$

$$= \alpha(g(y) + c\psi_+(y) + ce^{i\theta}\psi_-(y)),$$

kde $\alpha = -2\cos(\frac{\theta}{2})/\cos(\frac{\theta}{2} - \frac{\pi}{4})$.

Jestliže $\theta$ probíhá množinu $(0, 2\pi)$, $\alpha$ probíhá celé $\mathbb{R}\,(\theta \uparrow 2\pi \Leftrightarrow \alpha \uparrow +\infty)$ . Od teď budeme všechna samosdružená rozšíření operátoru $\dot{H}_y$ parametrizovat pomocí parametru $\alpha$. Všechna samosdružená rozšíření operátoru $\dot{H}_y$ můžeme tedy zapsat jako

$$-\Delta_{\alpha,y} = -\frac{d^2}{dx^2},$$

$$D(-\Delta_{\alpha,y}) = \{g \in H^{2,2}(\mathbb{R} - \{y\}) \cap H^{2,1}(\mathbb{R})/g'(y+) - g'(y-) = \alpha g(y)\},$$

$$\alpha \in (-\infty, +\infty].$$

(Protože operátor $-\Delta_{\alpha,y}$ je symetrický a dále platí $H_{\theta,y} \subseteq -\Delta_{\alpha,y}$).Případ $\alpha = 0$ dává jednoduchý Hamiltonián $-\Delta = -\frac{d^2}{dx^2}, D(-\Delta) = H^{2,2}(\mathbb{R})$. Jestliže $\alpha = +\infty$ , potom

$$D(-\Delta_{\infty,y}) = \{g \in H^{2,2}(\mathbb{R} - \{y\}) \cap H^{2,1}(\mathbb{R})/g(y) = 0\} =$$

$$= H_0^{2,2}(-\infty, y) \oplus H_0^{2,2}(y, \infty),$$

$$-\Delta_{\infty,y} = (-\Delta_{D-}) \oplus (-\Delta_{D+}),$$

kde $-\Delta_{D\pm}$ představuje dirichletův laplacián na $(y, \pm\infty)$,

$$D(-\Delta_{D\pm}) = H_0^{2,2}(y, \pm\infty)$$

Operátor $-\Delta_{\alpha,y}$ popisuje $\delta$-interakci v bodě $y \in \mathbb{R}$.

**Věta 1:** Rezolventní funkce operátoru $-\Delta_{\alpha,y}$ je

$$(-\Delta_{\alpha,y} - k^2)^{-1} = G_k - 2\alpha k(i\alpha + 2k)^{-1}(\overline{G_k(\cdot - y)}, \cdot)G_k(\cdot - y),$$

$$k^2 \in \rho(-\Delta_{\alpha,y}),\ Imk > 0,\ -\infty < \alpha \leq \infty,\ y \in \mathbb{R}$$

s integrálním jádrem

$$(-\Delta_{\alpha,y} - k^2)^{-1}(x, x') = \frac{i}{2k}\exp(ik\,|x - x'| + \alpha(2k)^{-1}(i\alpha + 2k)^{-1}\exp(ik(|x - y| + |y - x'|)),$$

$$k^2 \in \rho(-\Delta_{\alpha,y}),\ Imk > 0,\ -\infty < \alpha \leq \infty,\ x, x' \in \mathbb{R}$$

kde

$$G_k(x - x') = \frac{i}{2k} e^{ik|x-x'|},\ Imk > 0$$

je integrální jádro $(-\Delta - k^2)^{-1}$ v $L_2(\mathbb{R})$.

**Věta 2:** Pro definiční obor operátoru $-\Delta_{\alpha,y}$, $-\infty < \alpha \leq \infty$ platí

$$D(-\Delta_{\alpha,y}) = \{\psi/\psi(x) = \phi_k(x) - 2\alpha k(i\alpha + 2k)^{-1}\phi_k(y)G_k(x-y)\},$$

kde

$$\phi_k \in D(-\Delta) = H^{2,2}(\mathbb{R}),\ k^2 \in \rho(-\Delta_{\alpha,y}),\ Imk > 0.$$

Rozklad $\psi$ je jednoznačný a pro $\psi \in D(-\Delta_{\alpha,y})$ platí
$(-\Delta_{\alpha,y} - k^2)\psi = (-\Delta - k^2)\phi_k$.

Jestliže navíc $\psi = 0$ v nějaké otevřené množině $U \subseteq \mathbb{R}$, potom $-\Delta_{\alpha,y} = 0$ v $U$.

Pro spektrum operátoru $-\Delta_{\alpha,y}$ platí následující věta:

**Věta 3:** Nechť $-\infty < \alpha \leq \infty$, $y \in \mathbb{R}$. Potom pro essenciální spektrum $-\Delta_{\alpha,y}$ platí:

$$\sigma_{ess}(-\Delta_{\alpha,y}) = \sigma_{ac}(-\Delta_{\alpha,y}) = [0, +\infty), \sigma_{sc}(-\Delta_{\alpha,y}) = \emptyset.$$

Jestliže $\alpha \in (-\infty, 0)$, potom $-\Delta_{\alpha,y}$ má právě jednu zápornou jednoduchou vlastní hodnotu, tj.:

$$\sigma_p(-\Delta_{\alpha,y}) = \{\frac{\alpha^2}{4}\},\ -\infty < \alpha < 0$$

Příslušná vlastní funkce je

$$\sqrt{-\frac{\alpha}{2}} e^{\alpha|x-y|/2}.$$

Pro $\alpha \geq 0$ nebo $\alpha = +\infty$ platí $\sigma_p(-\Delta_{\alpha,y}) = \emptyset$ .

## 1.2 Approximation by means of local scaled short-range interactions

Nejprve definujme funkci

$$G_k = (-\Delta - k^2)^{-1},\; Imk > 0,$$

a její integrální jádro

$$G_k(x, x') = \frac{i}{2k} e^{ik|x-x'|},\; Imk > 0,\; x, x' \in \mathbb{R}.$$

Dále pro $V \in L_1(\mathbb{R})$ definujme

$$v(x) = |V(x)|^{1/2},\; u(x) = |V(x)|^{1/2}\, sgn[V(x)],$$

platí tedy $uv = V$.

Dále definujme

$$\tilde{v}(x) = v(x - \varepsilon^{-1}y), \tilde{u}(x) = u(x - \varepsilon^{-1}y), \varepsilon > 0, y \in \mathbb{R}$$

$$\tilde{B}(\varepsilon, k) = \lambda(\varepsilon)\tilde{u}G_k\tilde{v}, Imk > 0,$$

kde $\lambda$ je reálná analytická v okolí 0 a $\lambda(0) = 0$.

$$H_y(\varepsilon) = -\Delta + \lambda(\varepsilon)V(\cdot - \varepsilon^{-1}y),\; \varepsilon > 0,\; y \in \mathbb{R}.$$

Platí ([1], věta B.1(b))

$$(H_y(\varepsilon) - k^2)^{-1} = G_k - \lambda(\varepsilon)G_k[1 + \tilde{B}(\varepsilon, k)]\tilde{u}G_k,\; k^2 \in \rho(H_y(\varepsilon)),\; Imk > 0.$$

Mějme dále unitární grupu $(U_\varepsilon g)(x) = \varepsilon^{-1/2}g(\frac{x}{\varepsilon})$, $\varepsilon > 0, g \in L_2(\mathbb{R})$ a množinu samosdružených operátorů $H_{\varepsilon,y}$

$$H_{\varepsilon,y} = \varepsilon^{-2}U_\varepsilon H_y(\varepsilon)U_\varepsilon^{-1} = -\Delta + \lambda(\varepsilon)\varepsilon^{-2}V((\cdot - y)/\varepsilon),\; \varepsilon > 0,\; y \in \mathbb{R}.$$

Nechť $A_\varepsilon(k), B_\varepsilon(k), C_\varepsilon(k), \varepsilon > 0$ jsou Hilbert-Schmidtovy operátory s integrálními jádry

$$A_\varepsilon(k, x, x') = G_k(x - y - \varepsilon x')v(x'), Imk > 0,$$

$$B_\varepsilon(k, x, x') = \varepsilon^{-1}\lambda(\varepsilon)u(x)G_k(\varepsilon(x - x'))v(x'), Imk \geq 0, k \neq 0,$$

$$C_\varepsilon(k, x, x') = u(x)G_k(\varepsilon x + y - x'), Imk > 0.$$

Potom transformace $x \to (\frac{y}{\varepsilon}), \varepsilon > 0,\; \varepsilon^2 U_\varepsilon G_k U_\varepsilon^{-1} = G_{k/\varepsilon}$ dává

$$(H_{\varepsilon,y} - k^2)^{-1} = \varepsilon^2 U_\varepsilon[H_y(\varepsilon) - (\varepsilon k)^2]^{-1}U_\varepsilon^{-1} = G_k - \varepsilon^{-1}\lambda(\varepsilon)A_\varepsilon(k)[1 + B_\varepsilon(k)]^{-1}C_\varepsilon(k),$$

$$\varepsilon > 0, k^2 \in \rho(H_{\varepsilon,y}), Imk > 0, y \in \mathbb{R}$$

Protože platí

$$w - \lim_{\varepsilon\to 0} A_\varepsilon(k) = A(k),\ w - \lim_{\varepsilon\to 0} B_\varepsilon(k) = B(k),\ w - \lim_{\varepsilon\to 0} C_\varepsilon(k) = C(k)$$

a také

$$\lim_{\varepsilon\to 0}\|A_\varepsilon(k)\|_2 = \|A(k)\|_2\,,\ \lim_{\varepsilon\to 0}\|B_\varepsilon(k)\|_2 = \|B(k)\|_2\,,\ \lim_{\varepsilon\to 0}\|C_\varepsilon(k)\|_2 = \|C(k)\|_2\,,$$

platí následující:

**Věta 4:** Nechť operátory $A(k), B(k), C(k)$ jsou definovány pomocí svých integrálních jader

$A(k,x,x') = G_k(x-y)v(x')$, $Imk > 0, B(k,x,x') = \lambda'(0)G_k(0)u(x)v(x'), Imk \geq 0, k \neq 0,$

$$C(k,x,x') = u(x)G_k(y-x'), Imk > 0.$$

Potom pro pevné k, Im k>0, $A_\varepsilon(k), B_\varepsilon(k), C_\varepsilon(k)$ konvergují v Hilbert-Schmidtově normě k $A(k), B(k), C(k)$, když $\varepsilon \to 0$ .

**Věta 5:** Nechť $V \in L_1(\mathbb{R})$ je reálná funkce a nechť $y \in \mathbb{R}$. Potom pro $k^2 \in \rho(-\Delta_{\alpha,y})$ platí $k^2 \in \rho(H_{\varepsilon,y})$ pro $\varepsilon > 0$ dost malé a dále

$$n - \lim_{\varepsilon\to 0}(H_{\varepsilon,y} - k^2)^{-1} = (-\Delta_{\alpha,y} - k^2)^{-1}, y \in \mathbb{R},$$

kde

$$\alpha = \lambda'(0)\int_R dx V(x).$$

Speciálně platí $n - \lim_{\varepsilon\to 0} H_{\varepsilon,y} = -\Delta$ právě tehdy, když $\lambda'(0)\int_R dx V(x) = 0$.

**Důkaz:** $(H_{\varepsilon,y} - k^2)^{-1} = \varepsilon^2 U_\varepsilon[H_y(\varepsilon) - (\varepsilon k)^2]^{-1}U_\varepsilon^{-1} = G_k - \varepsilon^{-1}\lambda(\varepsilon)A_\varepsilon(k)[1 + B_\varepsilon(k)]^{-1}C_\varepsilon(k),$

$$\varepsilon > 0, k^2 \in \rho(H_{\varepsilon,y}), Imk > 0, y \in \mathbb{R}.$$

Tedy platí

$n - \lim_{\varepsilon\to 0}(H_{\varepsilon,y} - k^2)^{-1} = G_k - \lambda'(0)A(k)[1 + B(k)]^{-1}C(k), k^2 \in \mathbb{C} - \mathbb{R}, Imk > 0$. Když do této rovnosti dosadíme

$$B(k) = \lambda'(0)G_k(0)(v,\cdot)u,\ [1+B(k)]^{-1} = 1 - \lambda'(0)G_k(0)[1 + \lambda'(0)(v,u)G_k(0)]^{-1}(v,\cdot)u,$$

dostaneme na pravé straně

$$G_k - 2\alpha k(i\alpha + 2k)^{-1}(\overline{G_k(\cdot - y)},\cdot)G_k(\cdot - y),$$

kde $\alpha = \lambda'(0)\int_R dx V(x)$, což je shodné s rezolventní funkcí $(-\Delta_{\alpha,y} - k^2)^{-1}$ podle věty 1.

**Pozn.:** Tato aproximace dává interakci s $|\alpha| < \infty$. Případ, kdy $\alpha = \infty$ je vyloučen.

## 1.3 Konvergence vlastních hodnot

V této kapitole se budeme zabývat spektrem operátoru $-\Delta_{\alpha,y}$ v souvislosti se spektrem $H_{\varepsilon,y}$.

Platí ([1], věta B.1(b)) $\sigma_{ess}(H_{\varepsilon,y}) = \sigma_{ess}(H_y(\varepsilon) = \sigma_{ess}(-\Delta) = [0,\infty), \varepsilon > 0, y \in \mathbb{R}$. To platí (podle věty 3) i v limitě $\varepsilon \to 0$. Tedy

$$\sigma_{ess}(-\Delta_{\alpha,y}) = \sigma_{ess}(-\Delta) = [0,\infty), -\infty < \alpha \leq \infty, y \in \mathbb{R}.$$

O vlastních hodnotách operátoru $-\Delta_{\alpha,y}$ platí následující věta:

**Věta 7:** Nechť existuje $a > 0$ tak, že $e^{2a|\cdot|} \in L_1(\mathbb{R})$ je reálná funkce a nechť $y \in \mathbb{R}$. Potom

(a) Jestliže $n - \lim_{\varepsilon\to 0}(H_{\varepsilon,y} - k^2)^{-1} = (-\Delta_{\alpha,y} - k^2)^{-1}, k^2 \in \rho(-\Delta_{\alpha,y}), \alpha < 0$, pak $-\Delta_{\alpha,y}$ má jednoduchou vlastní hodnotu $E_0 = k_0^2 < 0, k_0 = -i\frac{\alpha}{2}$ a pro $\varepsilon > 0$ dost malé $\sigma(H_{\varepsilon,y}) \cap (-\infty, 0)$ obsahuje právě jednu jednoduchou vlastní hodnotu $E_\varepsilon = k_\varepsilon^2 < 0$, která je analytická v $\varepsilon$ blízko 0,

$$k_\varepsilon = i\sqrt{-E_\varepsilon} = k_0 - \frac{i}{4}\lambda''(0)\varepsilon \int_R dx V(x) - \frac{i}{4}\lambda'(0)^2\varepsilon \int_{R^2} dx dx' V(x) \left|x - x'\right| V(x') + O(\varepsilon^2).$$

(b) Jestliže $n - \lim_{\varepsilon\to 0}(H_{\varepsilon,y} - k^2)^{-1} = (-\Delta_{\alpha,y} - k^2)^{-1}, k^2 \in \rho(-\Delta_{\alpha,y}), \alpha > 0$, pak $-\Delta_{\alpha,y}$ nemá vlastní hodnoty a pro $\varepsilon > 0$ dost malé $H_{\varepsilon,y}$ nemá záporné vlastní hodnoty.

(c) Jestliže $n - \lim_{\varepsilon\to 0}(H_{\varepsilon,y} - k^2)^{-1} = G_k$, $k^2 \in \rho(-\Delta_{\alpha,y})$ nebo ekvivalentně $\alpha = 0$, pak $H_{\varepsilon,y}$ má nejvýše jednu zápornou vlastní hodnotu $E_\varepsilon = k_\varepsilon^2 < 0$, která je analytická v $\varepsilon$ blízko 0 a je vnořená v $\sigma_{ess}$ ,

$k_\varepsilon = i\sqrt{-E_\varepsilon} = -\frac{i}{4}\lambda''(0)\varepsilon \int_R dx V(x) - \frac{i}{4}\lambda'(0)^2\varepsilon \int_{R^2} dx dx' V(x) \left|x - x'\right| V(x') + O(\varepsilon^2)$.

## 1.4 Teorie rozptylu pro $\delta$-interakci

Nakonec probereme Teorii rozptylu pro $\delta$-interakci .

Definujme funkce

$$\Psi_{\alpha,y}(k,\sigma,x) = e^{ik\sigma x} - i\alpha(2k + i\alpha)^{-1} e^{ik\sigma y} e^{ik|x-y|},$$

$$k \geq 0, \sigma = \pm 1, \alpha \in (-\infty, \infty],\ x, y \in \mathbb{R}.$$

Potom $\Psi_{\alpha,y}(k,\sigma,y+) = \Psi_{\alpha,y}(k,\sigma,y-)$,

$$\Psi'_{\alpha,y}(k,\sigma,y+) - \Psi'_{\alpha,y}(k,\sigma,y-) = \alpha\Psi_{\alpha,y}(k,\sigma,y),$$

$$-\Psi''_{\alpha,y}(k,\sigma,x) = k^2\Psi_{\alpha,y}(k,\sigma,x),\ x \in \mathbb{R} - \{y\},$$

$$\lim_{\varepsilon\to 0}\lim_{x'\to\mp\infty}(2k/i)e^{\pm i(k+i\varepsilon)x'}[-\Delta_{\alpha,y}-(k+i\varepsilon)^2]^{-1}(x,x') = \Psi_{\alpha,y}(k,\sigma,x), k\geq 0, x\in\mathbb{R}.$$

Tedy $\Psi_{\alpha,y}(k,\sigma)$ jsou zobecněné vlastní funkce $-\Delta_{\alpha,y}$ .Příslušné koeficienty prostupu a odrazu jsou definovány jako

$$T^l_{\alpha,y}(k) = \lim_{x\to\infty} e^{-ikx}\Psi_{\alpha,y}(k,+1,x),\ T^r_{\alpha,y}(k) = \lim_{x\to-\infty} e^{ikx}\Psi_{\alpha,y}(k,-1,x),$$

$$R^l_{\alpha,y}(k) = \lim_{x\to-\infty} e^{ikx}[\Psi_{\alpha,y}(k,+1,x)-e^{ikx}], R^r_{\alpha,y}(k) = \lim_{x\to\infty} e^{-ikx}[\Psi_{\alpha,y}(k,-1,x)-e^{-ikx}],$$

kde $T^l_{\alpha,y}(k) = T^r_{\alpha,y}(k)$ kvůli invarianci vůči obrácení chodu času.

Explicitně dostaneme $T^l_{\alpha,y}(k) = (2k+i\alpha)^{-1}2k = T^r_{\alpha,y}(k)$,

$$R^l_{\alpha,y}(k) = -(2k+i\alpha)^{-1}i\alpha e^{2iky}, R^r_{\alpha,y}(k) = -(2k+i\alpha)^{-1}i\alpha e^{-2iky}, k\geq 0, \alpha\in(-\infty,\infty], y\in\mathbb{R}.$$

Unitární matice rozptylu $\tilde{S}_{\alpha,y}(k)\in C^2$ je definovaná následovně:

$$\tilde{S}_{\alpha,y}(k) = \begin{bmatrix} T^l_{\alpha,y}(k) & R^r_{\alpha,y}(k) \\ R^l_{\alpha,y}(k) & T^r_{\alpha,y}(k) \end{bmatrix}, k\geq 0, \alpha\in(-\infty,\infty], y\in\mathbb{R}$$

Tedy

$$\tilde{S}_{\alpha,y}(k) = (2k+i\alpha)^{-1}\begin{bmatrix} 2k & -i\alpha e^{-2iky} \\ -i\alpha e^{2iky} & 2k \end{bmatrix}, k\geq 0, \alpha\in(-\infty,\infty], y\in\mathbb{R}$$

$$\lim_{k\to 0}\tilde{S}_{\alpha,y}(k) = \begin{bmatrix} 0 & -1 \\ -1 & 0 \end{bmatrix}, k\geq 0, \alpha\in(-\infty,\infty], \alpha\neq 0, y\in\mathbb{R}$$

$$\lim_{k\to\infty}\tilde{S}_{\alpha,y}(k) = 1, k\geq 0, \alpha, y\in\mathbb{R}$$

Dále se budeme zabývat teorií rozptylu operátoru $H_{\varepsilon,y}$.

Nechť u,v jsou funkce popsané v kapitole **1.2** a nechť v $L_2(\mathbb{R})$

$$\phi^-_{\varepsilon,y}(k,\sigma,x) = u_\varepsilon(x)e^{ik\sigma x},$$

$$\phi^+_{\varepsilon,y}(k,\sigma,x) = v_\varepsilon(x)e^{ik\sigma x}, \varepsilon>0, k\geq 0,$$

kde

$$u_\varepsilon(x) = u((x-y)/\varepsilon),\ v_\varepsilon(x) = v((x-y)/\varepsilon), \varepsilon>0, y\in\mathbb{R}.$$

Definujme operátor

$$t_\varepsilon(k) = \varepsilon^{-2}\lambda(\varepsilon)[1+\varepsilon^{-2}\lambda(\varepsilon)u_\varepsilon G_k v_\varepsilon]^{-1}, \varepsilon>0, Imk\geq 0, k\neq 0, k^2\notin\Xi_\varepsilon,$$

kde $\lambda(\varepsilon)$ bylo definováno v kapitole **1.2** a

$$\Xi_\varepsilon = \{k^2 \in C - \{0\} / \exists \phi_\varepsilon \neq 0 \in L_2(\mathbb{R}) : \lambda(\varepsilon) u G_{\varepsilon k} v \phi_\varepsilon = -\phi_\varepsilon, \, Im k \geq 0\}, \, \varepsilon > 0$$

a funkci (amplituda rozptylu)

$$f_{\varepsilon,y,\sigma,\sigma'}(k) = (2ik)^{-1} (\phi^+_{\varepsilon,y}(k,\sigma), t_\varepsilon(k) \phi^-_{\varepsilon,y}(k,\sigma'),$$

$$\varepsilon, k > 0, \, \sigma, \sigma' = \pm 1, \, y \in \mathbb{R}.$$

Matice rozptylu $S_{\varepsilon,y}(k) = [S_{\varepsilon,y,\sigma,\sigma'}(k)]_{\sigma,\sigma'=\pm 1}$ pro operátor $H_{\varepsilon,y}$ je pak definována jako

$$S_{\varepsilon,y,\sigma,\sigma'}(k) = \delta_{\sigma,\sigma'} + f_{\varepsilon,y,\sigma,\sigma'}(k), \, \varepsilon, k > 0, \, \sigma, \sigma' = \pm 1, \, y \in \mathbb{R}$$

Koeficienty prostupu a odrazu pro $H_{\varepsilon,y}$ jsou

$$T^l_{\varepsilon,y}(k) = S_{\varepsilon,y,+,+}(k) = S_{\varepsilon,y,-,-}(k) = T^r_{\varepsilon,y}(k),$$

$$R^l_{\varepsilon,y}(k) = S_{\varepsilon,y,-,+}(k), R^r_{\varepsilon,y}(k) = S_{\varepsilon,y,+,-}(k), \, \varepsilon, k > 0, y \in \mathbb{R}.$$

**Věta 7:** Nechť $V \in L_1(\mathbb{R})$ je reálná funkce a nechť $\alpha = \lambda'(0) \int_R dx V(x), y \in \mathbb{R}$. Potom $S_{\varepsilon,y}(k), k > 0$ konverguje k $\tilde{S}_{\alpha,y}(k)$, když $\varepsilon \to 0$ .

Jestliže navíc $e^{2a|\cdot|} V \in L_1(\mathbb{R})$ pro nějaké $a > 0$ , pak $S_{\varepsilon,y}$ je analytická v $\varepsilon$ v okolí 0 a platí

$$\lim_{\varepsilon \to 0} S_{\varepsilon,y}(k) = \tilde{S}_{\alpha,y} + \varepsilon S^{(1)}_{\varepsilon,y}(k) + O(\varepsilon^2), \, \alpha = \lambda'(0) \int_R dx V(x), k > 0,$$

kde

$$S^{(1)}_{\varepsilon,y,+,+}(k) = S^{(1)}_{\varepsilon,y,-,-}(k) = (2k + i\alpha)^{-1} \{(2k + i\alpha)^{-1} 2ik\lambda'(0)(v, Nu) -$$

$$-(2k + i\alpha)^{-1} (\alpha/2) \lambda''(0)(v,u) - (i/2)\lambda''(0)(v,u) + k\lambda'(0)[(v, ux') - (vx, u)]\},$$

$$S^{(1)}_{\varepsilon,y,\mp,\pm}(k) = (2k+i\alpha)^{-1} e^{\pm 2iky} \{(2k+i\alpha)^{-1} 2ik\lambda'(0)(v, Nu) - (2k+i\alpha)^{-1}(\alpha/2)\lambda''(0)(v,u) -$$

$$-(i/2)\lambda''(0)(v,u) \pm k\lambda'(0)[(v, ux') + (vx, u)]\}.$$

Zde jádro Hilbert-Schmidtova operátoru N je definováno následovně

$$N(x, x') = -1/2 \lambda'(0) u(x) \left| x - x' \right| v(x').$$

# Kapitola 2

# Nekonečně mnoho $\delta$- interakcí v $\mathbb{R}$

## 2.1 Definice a základní vlastnosti

V této kapitole se budeme zabývat jednorozměrným případem, kdy $\delta$-bariér je nekonečně mnoho soustředěných v bodech $y_j$, $j \in J$ .

Nechť $J \subset \mathbb{Z}$ je nekonečná indexová množina a nechť $Y = \{y_j \in \mathbb{R}/j \in J\}$ je podmnožina $\mathbb{R}$ taková, že pro nějaké d>0 platí

$$\inf_{j,j' \in J, j \neq j'} |y_j - y_{j'}| = d > 0,\ y_j, y_{j'} \in Y,\ j, j' \in J.$$

Předpokládejme dále, že $j \in J \Rightarrow j+1 \in J$ a $y_j < y_{j+1}$.Definujme

$$I_j = [y_{j-1}, y_j],\ j-1, j \in J,\ I_{j_{inf}} = (-\infty, y_{j_{inf}}],$$

kde $j_{inf} = \inf J$ , když $\inf Y = y_{j_{inf}} > -\infty$. Tedy $\bigcup_{j \in J} I_j = \mathbb{R}$.

V Hilbertově prostoru $L_2(\mathbb{R})$ definujme uzavřený pozitivní operátor

$$\dot{H}_y = -\frac{d^2}{dx^2},\ \ D(\dot{H}_y) = \{g \in H^{2,2}(\mathbb{R})/g(y_j) = 0, y_j \in Y, j \in J\}.$$

K němu operátor sdružený je

$$\dot{H}_y^* = -\frac{d^2}{dx^2},\ \ D(\dot{H}_y^*) = H^{2,2}(\mathbb{R} - Y) \cap H^{2,1}(\mathbb{R}).$$

Rovnice

$$\dot{H}_y^* \psi(k) = k^2 \psi(k),\ \psi(k) \in D(\dot{H}_y^*),\ k^2 \in \mathbb{C} - \mathbb{R},\ Imk > 0$$

má řešení

$$\psi_j(k,x) = \exp(ik\,|x-y_j|),\ Imk > 0, y_j \in Y, j \in J.$$

$\dot{H}_y$ má tedy indexy defektu $(\infty,\infty)$ . Určitá třída samozdružených rozíření operátoru $\dot{H}_y$ je ([1], Appendix C)

$$-\Delta_{\alpha,Y} = -\frac{d^2}{dx^2},$$

$$D(-\Delta_{\alpha,Y}) = \{g \in H^{2,2}(\mathbb{R}-Y) \cap H^{2,1}(\mathbb{R}) / g'(y_j+) - g'(y_j-) = \alpha_j g(y_j), j \in J\},$$

$$\alpha = \{\alpha_j / j \in J\}, -\infty < \alpha_j \leq +\infty, j \in J$$

Operátor $-\Delta_{\alpha,Y}$ popisuje $\delta$-interakci v bodech $y_j \in Y$.

**Věta 8:** Nechť $\alpha_j \in \mathbb{R} - \{0\}, j \in J$. Potom

$$(-\Delta_{\alpha,Y} - k^2)^{-1} = G_k + \sum_{j,j' \in J}^{-1} [\Gamma_{\alpha,Y}(k)]^{-1}_{j,j'} (\overline{G_k(\cdot - y_{j'})}, \cdot) G_k(\cdot - y), k^2 \in \rho(-\Delta_{\alpha,Y}),\ Imk \geq 0$$

kde $\Gamma_{\alpha,Y}(k) = [-\alpha_j^{-1}\delta_{j,j'} - G_k(y_j - y_{j'}),\ Imk > 0$ je uzavřený operátor v $l_2(Y)$ a $[\Gamma_{\alpha,Y}(k)]^{-1} \in B(l_2(Y)), k^2 \in \rho(-\Delta_{\alpha,Y}), Imk > 0$ dost velké.

**Věta 9:** Nechť $\alpha_j \in \mathbb{R} - \{0\}, j \in J$ . Potom definiční obor

$$D(-\Delta_{\alpha,Y}) = \{\psi / \psi(x) = \phi_k(x) + \sum_{j,j'} [\Gamma_{\alpha,Y}(k)]^{-1}_{j,j'} \phi_k(y_{j'}) G_k(x - y_j)\},$$

kde $\phi_k \in D(-\Delta) = H^{2,2}(\mathbb{R})$ a $k^2 \in \rho(-\Delta_{\alpha,Y}), Imk \geq 0$. Rozklad funkce $\psi(x)$ je jednoznačný a dále platí $(-\Delta_{\alpha,Y} - k^2)\psi = (-\Delta - k^2)\phi_k$.

Dále jestliže $\psi \in D(-\Delta_{\alpha,Y})$, $(\forall \in U, U \subseteq \mathbb{R}, U = U^0)(\psi(x) = 0)$ potom $-\Delta_{\alpha,Y}\psi = 0$ v $U$ .

Nakonec ukážeme jednoznačnou korespondenci mezi operátorem $-\Delta_{\alpha,Y}$ v $L_2(\mathbb{R})$ a jistým opreátorem v $l_2(\mathbb{Z})$. Nechť $J = \mathbb{Z}$ a předpokládejme bez újmy na obecnosti, že body $\pm\infty$ jsou hromadnými body Y. Tedy $\cup_{j \in \mathbb{Z}} I_j = \mathbb{R}$. Potom řešení rovnice $(-\Delta_{\alpha,Y} - k^2)\psi(k,x) = 0, Imk \geq 0, x \in I^0_{j+1} = (y_j, y_{j+1})$ je

$$\psi(k,x) = \psi(k,y_j)\cos[k(x-y_j)] + \psi'(k,y_j+)k^{-1}\sin[k(x-y_j)],$$

$$\psi'(k,x) = -\psi(k,y_j)k\sin[k(x-y_j)] + \psi'(k,y_j+)\cos[k(x-y_j)], Imk \geq 0, x \in I^0_{j+1},$$

$$\psi(k,y_j+) = \psi(k,y_j-,), \psi'(k,y_j+) - \psi'(k,y_j-) = \alpha_j\psi(k,y_j), j \in \mathbb{Z}.$$

Nechť $\Psi_j(k) = \begin{bmatrix} \psi(k,y_j) \\ \psi'(k,y_j-) \end{bmatrix}$ ,

$$T_j(k) = \begin{bmatrix} \cos[k(y_{j+1}-y_j)] + \alpha_j k^{-1}\sin[k(y_{j+1}-y_j)] & k^{-1}\sin[k(y_{j+1}-y_j)] \\ -k\sin[k(y_{j+1}-y_j)] + \alpha_j\cos[k(y_{j+1}-y_j)] & \cos[k(y_{j+1}-y_j)] \end{bmatrix},$$

$$Imk \geq 0, j \in \mathbb{Z}.$$

Platí $T_j(k)\Psi_j(k) = \Psi_{j+1}(k), Imk \geq 0, j \in \mathbb{Z}$.

Dále nechť $W_j(k) = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ \cos[k(y_{j+1}-y_j)] & -k^{-1}\sin[k(y_{j+1}-y_j)] \end{bmatrix},$

$$\Phi_j(k) = \begin{bmatrix} \psi(k,y_j) \\ \psi(k,y_{j-1}) \end{bmatrix}, Imk \geq 0, j \in \mathbb{Z},$$

Platí $W_{j-1}(k)\Psi_j(k) = \Phi_j(k), Imk \geq 0, j \in \mathbb{Z}$,

$$W_{j-1}(k) = -k/\sin[k(y_j-y_{j-1})]\begin{bmatrix} k^{-1}\sin[k(y_j-y_{j-1})] & 0 \\ -\cos[k(y_j-y_{j-1})] & 1 \end{bmatrix},$$

$$Imk \geq 0, k \neq \pi m(y_j-y_{j-1})^{-1},\ j,m \in \mathbb{Z}.$$

Definujeme-li $M_j(k) = W_j(k)T_j(k)[W_{j-1}(k)]^{-1} =$

$$= \begin{bmatrix} \alpha_j k^{-1}\sin[k(y_{j+1}-y_j)] + \frac{\sin[k(y_{j+1}-y_{j-1})]}{\sin[k(y_j-y_{j-1})]} & -\frac{\sin[k(y_{j+1}-y_j)]}{\sin[k(y_j-y_{j-1})]} \\ 1 & 0 \end{bmatrix}, Imk \geq 0, k \neq \pi m(y_j-y_{j-1})^{-1},$$

dostaneme

$$M_j(k)\Phi_j(k) = \Phi_{j+1}(k), Imk \geq 0, k \neq \pi m(y_j-y_{j-1})^{-1},\ j,m \in \mathbb{Z}$$

nebo ekvivalentně

$$\begin{gathered} \sin[k(y_j-y_{j-1})]\psi_{j+1}(k) + \sin[k(y_{j+1}-y_j)]\psi_{j-1}(k) = \\ = \{\alpha_j k^{-1}\sin[k(y_{j+1}-y_j)]\sin[k(y_j-y_{j-1})] + \sin[k(y_{j+1}-y_{j-1})]\}\psi_j(k), \\ Imk \geq 0, k \neq \pi m(y_j-y_{j-1})^{-1},\ j,m \in \mathbb{Z} \end{gathered} \tag{2.1}$$

Tyto výsledky můžeme shrnout v následující větě.

**Věta 10:** Nechť $\alpha_j \in \mathbb{R}, j \in J$ . Potom každé řešení $\psi(k,x), k^2 \in \mathbb{R}$, $Imk \geq 0, k \neq \pi m(y_j-y_{j-1})^{-1},\ j,m \in \mathbb{Z}$ rovnice $(-\Delta_{\alpha,Y} - k^2)\psi(k,x) = 0, Imk \geq 0$, $x \in I^0_{j+1}$ splňuje 2.1. Naopak: každé řešení rovnice 2.1 definuje vztahem

$$\psi(k,x) = \psi_j(k)\cos[x-y_j] + \{\psi_{j+1}(k) - \psi_j(k)\cos[k(y_{j+1}-y_j)]\}\frac{\sin[k(x-y_j)]}{\sin[k(y_{j+1}-y_j)]},$$

$$k^2 \in R, Imk \geq 0, k \neq \pi m(y_j-y_{j-1})^{-1},\ j,m \in \mathbb{Z}, x \in I^0_{j+1}$$

řešení rovnice $(-\Delta_{\alpha,Y}-k^2)\psi(k,x)=0, Imk\geq 0, x\in I^0_{j+1}$.

Navíc jestliže $\psi(k)\in L_p(\mathbb{R})$, tak $\{\psi_j(k)=\psi(k,y_j)\}_{j\in\mathbb{Z}}\in l_p(\mathbb{Z})$ pro $p=\infty$ nebo p=2. Jestliže $\exists K_1,K_2: K_1e^{\pm\delta|x|}\leq|\psi(k,x)|\leq K_2e^{\pm\delta|x|}$ , tak

$$\exists K_1',K_2': K_1'e^{\pm\delta|y_j|}\leq|\psi_j(k)|\leq K_2'e^{\pm\delta|y_j|}.$$

Ve speciálním případě, kdy $y_{j+1}-y_j=a>0, j\in\mathbb{Z}$ , lze poslední dvě tvrzení obrátit, tj.: $\{\psi_j(k)\}_{j\in\mathbb{Z}}\in l_p(\mathbb{Z})\Rightarrow\psi(k)\in L_p(\mathbb{R})$ pro $p=\infty$ nebo p=2 a podobně pro exponenciální růst.

Pro pozdější potřeby je vhodné přepsat rovnici 2.1 pro případ periodické interakce, kdy $y_{j+1}-y_j=a>0, y_j\in Y, j\in\mathbb{Z}$.

Potom

$$M_j(k)=\begin{bmatrix}\alpha_jk^{-1}\sin(ka)+2\cos(ka) & -1\\ 1 & 0\end{bmatrix}, Imk\geq 0, j\in\mathbb{Z},$$

rovnice 2.1:

$$\psi_{j+1}(k)+\psi_{j-1}(k)=\{\alpha_jk^{-1}\sin(ka)+2\cos(ka)\}\psi_j(k), Imk\geq 0, k\neq\pi m(y_j-y_{j-1})^{-1}, j,m\in\mathbb{Z}.$$

## 2.2 Approximations by means of local scaled short-range interactions

Nechť J a Y jsou množiny stejné jako v předchozí kapitole. Nechť dále $V_j\in L_1(\mathbb{R}), j\in J$ a $W\in L_1(\mathbb{R})$ jsou reálné potenciály takové, že s.v. $|V_j|\leq W, j\in J$ .

Definujme v $L_2(\mathbb{R})$ kvadratické formy

$$q_{\varepsilon,y_j}(f,g)=\lambda_j(\varepsilon)\int_R dx\varepsilon^{-2}V_j(\frac{x-y_j}{\varepsilon})\overline{f(x)}g(x), D(q_{\varepsilon,y_j})=H^{2,1}(\mathbb{R}), 0<\varepsilon<\varepsilon_0, j\in J$$

a $q_{\alpha_j,y_j}(f,g)=\alpha_j\overline{f(y_j)}g(y_j), D(q_{\alpha_j,y_j})=H^{2,1}(\mathbb{R}), y_j\in Y, j\in J$, kde $\alpha_j\in\mathbb{R}$,

$|\alpha_j|\leq C_0\leq\infty, j\in J$ a $\lambda_j\in C^0((0,\varepsilon_0))$ je reálná funkce pro nějaké $\varepsilon_0>0$, $\lim_{\varepsilon\to 0}\lambda_j(\varepsilon)=\varepsilon\alpha_j+o(\varepsilon), j\in J$.

Podle ([1], věta C.5) jsou

$$Q_{\varepsilon,Y}(f,g)=(f',g')+\sum_{j\in J}q_{\varepsilon,y_j}(f,g), D(Q_{\varepsilon,Y})=H^{2,1}(\mathbb{R}), 0<\varepsilon<\varepsilon_0,$$

$$Q_{\alpha,Y}(f,g)=(f',g')+\sum_{j\in J}q_{\alpha_j,y_j}(f,g), D(Q_{\varepsilon,Y})=H^{2,1}(\mathbb{R}), \alpha=\{\alpha_1,\alpha_2,\ldots\}$$

uzavřené formy v $L_2(\mathbb{R})$, omezené zdola. Podle ([1], Appendix C) samosdružený operátor příslušný k $Q_{\varepsilon,Y}(f,g)$ je $H_{\varepsilon,Y}$ a operátor příslušný k $Q_{\alpha,Y}(f,g)$ je $-\Delta_{\alpha,Y}$ .

**Věta 11:** Nechť J,Y jsou množiny a $W, V_j$ potenciály definované výše, $0<\varepsilon<\varepsilon_0$, $\lim_{\varepsilon\to 0}\lambda_j(\varepsilon)=\varepsilon\lambda_j'(0)+o(\varepsilon), j\in J$ a nechť $H_{\varepsilon,Y}$ je operátor definovaný výše. Potom Jestliže $k^2\in\rho(-\Delta_{\alpha,Y})$, pak $k^2\in\rho(H_{\varepsilon,Y})$ pro $\varepsilon>0$ dost malé a platí $n-\lim_{\varepsilon\to 0}(H_{\varepsilon,Y}-k^2)^{-1}=(-\Delta_{\alpha,Y}-k^2)^{-1}$, kde
$\alpha_j=\lambda_j'(0)\int_R dxV_j(x), j\in J$ .

## 2.3 Periodická $\delta$-interakce

V této kapitole se budeme zabývat periodickou $\delta$-interakcí v jednorozměrném prostoru.

Mějme v $L_2(\mathbb{R})$ hamiltonián $-\Delta_{\alpha,\Lambda}$ definovaný následovně

$$-\Delta_{\alpha,\Lambda}=-\frac{d^2}{dx^2},$$

$$D(-\Delta_{\alpha,\Lambda})=\{g\in H^{2,2}(\mathbb{R}-\Lambda)\cap H^{2,1}(\mathbb{R})/g'(na+)-g'(na-)=\alpha g(na), n\in\mathbb{Z}\},$$

$$-\infty<\alpha<\infty.$$

Dále definujme množinu samosdružených operátorů v $L_2((-a/2,a/2))$

$$-\Delta_{\alpha,\Lambda}(\theta)=-\frac{d^2}{dx^2},$$

$$D(-\Delta_{\alpha,\Lambda}(\theta))=\{g(\theta)\in H^{2,2}((-a/2,a/2)-\{0\})\cap H^{2,1}((-a/2,a/2)/$$

$$g(\theta,-a/2+)=e^{i\theta a}g(\theta,a/2-), g'(\theta,-a/2+)=e^{i\theta a}g\prime(\theta,a/2-),$$

$$g'(\theta,0+)-g'(\theta,0-)=\alpha g(\theta,0)\}, -\infty<\alpha\le\infty, \theta\in[-b/2,b/2), b=\frac{2\pi}{a}.$$

Spektrum operátoru $-\Delta_{\alpha,\Lambda}(\theta)$ je popsáno v následující větě

**Věta 12:** Nechť $-\infty<\alpha\le\infty, \theta\in[-b/2,b/2)$. Potom essenciální spektrum operátoru $-\Delta_{\alpha,\Lambda}(\theta)$ je prázdné. Tedy spektrum $-\Delta_{\alpha,\Lambda}(\theta)$ je čistě diskrétní. Vlastní hodnoty $-\Delta_{\alpha,\Lambda}(\theta)$ jsou $E_m^{\alpha,\Lambda}(\theta)=[k_m^{\alpha,\Lambda}(\theta)]^2, m\in\mathbb{N}$, kde $k_m^{\alpha,\Lambda}(\theta)$ jsou řešení rovnice $\cos(\theta a)=\cos(ka)+(\alpha/2k)\sin(ka), Imk\ge 0$. Pro $\alpha\in\mathbb{R}-\{0\}$ jsou odpovídající vlastní hodnoty

$$g_m^{\alpha,\Lambda}(\theta,y)=Ce^{ik_m^{\alpha,\Lambda}(\theta)y}+e^{i\theta a}e^{-ik_m^{\alpha,\Lambda}(\theta)a}\frac{e^{-i\theta a}e^{-ik_m^{\alpha,\Lambda}(\theta)a}-1}{e^{i\theta a}e^{-ik_m^{\alpha,\Lambda}(\theta)a}-1}e^{-ik_m^{\alpha,\Lambda}(\theta)y}, -a/2<y\le 0,$$

$$g_m^{\alpha,\Lambda}(\theta,y)=Ce^{-i\theta a}e^{-ik_m^{\alpha,\Lambda}(\theta)y}+\frac{e^{-i\theta a}e^{-ik_m^{\alpha,\Lambda}(\theta)a}-1}{e^{i\theta a}e^{-ik_m^{\alpha,\Lambda}(\theta)a}-1}e^{-ik_m^{\alpha,\Lambda}(\theta)y}, 0\le y<a/2, m\in\mathbb{N},$$

$$\theta \in [-b/2, b/2).$$

Navíc $E_m^{\alpha,\Lambda}(\theta), \alpha \in \mathbb{R} - \{0\}, \theta \in [-b/2, b/2)$ jsou nedegenerované a

$$0 < E_1^{\alpha,\Lambda}(0) < E_1^{\alpha,\Lambda}(-b/2) = \frac{\pi^2}{a^2} < E_2^{\alpha,\Lambda}(-b/2) < E_2^{\alpha,\Lambda}(0) = 4\frac{\pi^2}{a^2} <$$

$$< E_3^{\alpha,\Lambda}(0) < E_3^{\alpha,\Lambda}(-b/2) = 9\frac{\pi^2}{a^2} < E_4^{\alpha,\Lambda}(-b/2) < E_4^{\alpha,\Lambda}(0) = 16\frac{\pi^2}{a^2} < \ldots, \alpha > 0,$$

$$E_1^{\alpha,\Lambda}(0) < E_1^{\alpha,\Lambda}(-b/2) < E_2^{\alpha,\Lambda}(-b/2) = \frac{\pi^2}{a^2} < E_2^{\alpha,\Lambda}(0) < E_3^{\alpha,\Lambda}(0) = 4\frac{\pi^2}{a^2} <$$

$$< E_3^{\alpha,\Lambda}(-b/2) < E_4^{\alpha,\Lambda}(-b/2) = 9\frac{\pi^2}{a^2} < E_4^{\alpha,\Lambda}(0) < E_5^{\alpha,\Lambda}(0) = 16\frac{\pi^2}{a^2} < \ldots,$$

$$E_1^{\alpha,\Lambda}(0) < 0, E_1^{\alpha,\Lambda}(-b/2) \begin{cases} < 0, \ -\alpha > 4/a, \\ = 0, \ -\alpha = 4/a, \\ > 0, \ -\alpha < 4/a, \end{cases} , \alpha < 0.$$

Všechny nekonstantní vlastní hodnoty $E_m^{\alpha,\Lambda}(\theta), \theta \in [-b/2, b/2), m \in \mathbb{N}$ jsou ryze rostoucí v $\alpha \in \mathbb{R}$.

Pro $\alpha = 0$ jsou vlastní funkce a vlastní hodnoty $-\Delta_{0,\Lambda}(\theta)$

$$E_{m\pm}^{0,\Lambda}(\theta) = \{\pm\theta + [2(m-1)\pi/a]\}^2, \theta \in [-b/2, 0), m \in \mathbb{N}$$

$$E_m^{0,\Lambda}(0) = [2(m-1)\pi/a]^2, E_m^{0,\Lambda}(-b/2) = [(2m-1)\pi/a]^2, m \in \mathbb{N}$$

$$g_{m\pm}^{0,\Lambda}(\theta, y) = Ce^{i\{\pm\theta + [(2m-1)\pi/a]\}y}, \theta \in [-b/2, 0), m \in \mathbb{N}$$

$$g_m^{0,\Lambda}(0, y) = C \begin{cases} \cos[2(m-1)\pi y/a], m \in \mathbb{N} \\ \sin[2(m-1)\pi y/a], m = 2, 3, \ldots \end{cases}$$

$$g_m^{0,\Lambda}(-b/2, y) = C \begin{cases} \cos[(2m-1)\pi y/a], \\ \sin[(2m-1)\pi y/a], m \in \mathbb{N} \end{cases}$$

Pro $\alpha = \infty$ je jednoduchá vlastní hodnota nezávislá na $\theta$

$$E_m^{\infty,\Lambda} = m^2\pi^2/a^2,$$

$$g_m^{\infty,\Lambda}(\theta, y) = \sin(m\pi y/a), -a/2 < y < 0,$$

$$g_m^{\infty,\Lambda}(\theta, y) = \sin(m\pi y/a)(-1)^m e^{-i\theta a}, 0 \le y < a/2, m \in \mathbb{N}.$$

Spektrum operátoru $-\Delta_{\alpha,\Lambda}$ je popsáno následující větou.

**Věta 13:** Nechť $\alpha \in \mathbb{R}$ a nechť $\Lambda = a\mathbb{Z}, a > 0$. Pak spektrum operátoru $-\Delta_{\alpha,\Lambda}$ je čistě absolutně spojité :

$$\sigma(-\Delta_{\alpha,\Lambda}) = \sigma_{ac}(-\Delta_{\alpha,\Lambda}) = \bigcup_{m=1}^{\infty} [a_m^{\alpha,\Lambda}, b_m^{\alpha,\Lambda}], a_m^{\alpha,\Lambda} < b_m^{\alpha,\Lambda} \le a_{m+1}^{\alpha,\Lambda}, m \in N,$$

$$\sigma_{sc}(-\Delta_{\alpha,\Lambda}) = \sigma_p(-\Delta_{\alpha,\Lambda}) = \emptyset,$$

kde pro $\alpha > 0$ platí

$$a_1^{\alpha,\Lambda} > 0, a_m^{\alpha,\Lambda} = \begin{cases} E_m^{\alpha,\Lambda}(0), m = 2n+1 \\ E_m^{\alpha,\Lambda}(-b/2), m = 2n \end{cases}, n \in \mathbb{N}, a_m^{\alpha,\Lambda} > (m-1)^2\pi^2/a^2,$$

$$b_m^{\alpha,\Lambda} = \begin{cases} E_m^{\alpha,\Lambda}(-b/2) = m^2\pi^2/a^2, m = 2n+1 \\ E_m^{\alpha,\Lambda}(0) = m^2\pi^2/a^2, m = 2n \end{cases}, n \in \mathbb{N}.$$

Pro $\alpha < 0$ platí

$$a_1^{\alpha,\Lambda} = E_1^{\alpha,\Lambda} < 0, a_m^{\alpha,\Lambda} = \begin{cases} E_m^{\alpha,\Lambda}(0) = (m-1)^2/a^2, m = 2n+1 \\ E_m^{\alpha,\Lambda}(-b/2) = (m-1)^2/a^2, m = 2n \end{cases}, n \in \mathbb{N},$$

$$b_1^{\alpha,\Lambda} = E_1^{\alpha,\Lambda}(-b/2) \begin{cases} < 0, |\alpha| > 4/a, \\ = 0, |\alpha| = 4/a, \\ > 0, |\alpha| < 4/a, \end{cases}$$

$$b_m^{\alpha,\Lambda} = \begin{cases} E_m^{\alpha,\Lambda}(-b/2), m = 2n+1 \\ E_m^{\alpha,\Lambda}(0), m = 2n \end{cases} \quad m = 2, 3, \ldots, n \in \mathbb{N}, .b_m^{\alpha,\Lambda} < m^2\pi^2/a^2, m \in \mathbb{N},$$

kde $E_m^{\alpha,\Lambda}$ jsou vlastní hodnoty $-\Delta_{\alpha,\Lambda}$ popsané ve větě 12. Dále platí

$$\lim_{m\to\infty} (a_{m+1}^{\alpha,\Lambda} - b_m^{\alpha,\Lambda}) = 2\,|\alpha|\,a^{-1} + O(m^{-1}),$$

$$\lim_{m\to\infty} (b_m^{\alpha,\Lambda} - a_m^{\alpha,\Lambda}) = 2m\pi^2/a^2 - [2\,|\alpha|\,a + \pi^2]/a^2 + O(m^{-1}), \alpha \in \mathbb{R}.$$

Pro $\alpha \in \mathbb{R} - \{0\}$ má operátor $-\Delta_{\alpha,\Lambda}$ ve svém spektru nekonečně mnoho děr. Pro $\alpha = \infty$ má $-\Delta_{\alpha,\Lambda}$ čistě bodové spektrum a každá vlastní hodnota má nekonečnou násobnost: $\sigma_c(-\Delta_{\alpha,\Lambda}) = \emptyset, \sigma_{ess}(-\Delta_{\alpha,\Lambda}) = \sigma_p(-\Delta_{\alpha,\Lambda}) = \{m^2\pi^2/a^2\}$.

Pro $\alpha = 0$ platí

$$\sigma_{ess}(-\Delta_{0,\Lambda}) = \sigma_{ac}(-\Delta_{0,\Lambda}) = [0, \infty).$$

Navíc $\sigma(-\Delta_{\alpha,\Lambda})$ je ryze monotonní v $\alpha$ (to plyne z monotonnosti $E_m^{\alpha,\Lambda}(-b/2), E_m^{\alpha,\Lambda}(0)$ v $\alpha$)

$$\sigma(-\Delta_{\alpha,\Lambda}) \subset \sigma(-\Delta_{\beta,\Lambda}), 0 \le \beta < \alpha,$$

$$\{\sigma(-\Delta_{\alpha,\Lambda}) \cap [0,\infty)\} \subset \{\sigma(-\Delta_{\beta,\Lambda}) \cap [0,\infty)\}, \alpha < \beta \le 0.$$

Dále $b_m^{\alpha,\Lambda}, a_m^{\alpha,\Lambda}$ jsou spojité vyhledem k $\alpha$.

## 2.4 Polokrystaly

V této kapitole probereme vlastnosti polokrystalů, tj. modelů popsaných hamiltoniánem $-\Delta_{\alpha^+,\Lambda^+}$, kde $\Lambda^+ = \{ja/j \in \mathbb{N}_o\}, \alpha^+ = \{\alpha_j\}_{j\in N_o}, \alpha_j = \alpha \in \mathbb{R}$. Ve skutečnosti budeme uvažovat obecnější případ, kdy máme různé polokrystaly na levé a pravé straně.

Mějme tedy operátor $-\Delta_{\alpha^{-+},\Lambda}$, kde

$$\Lambda = a\mathbb{Z}, a > 0, \alpha^{-+} = \{\alpha_j\}_{j\in\mathbb{Z}}, \alpha_j = \begin{cases} \alpha^+, j = 0, 1, 2, \dots \\ \alpha^-, j = -1, -2, \dots \end{cases}, \alpha^\pm \in \mathbb{R}.$$

Samotný polokrystal dostaneme, položíme-li $\alpha^- = 0$.

**Věta 14:** Spektrum operátoru $-\Delta_{\alpha^{-+},\Lambda}$ je čistě absolutně spojité a platí

$$\sigma(-\Delta_{\alpha^{-+},\Lambda}) = \sigma(-\Delta_{\alpha^+,\Lambda}) \cup \sigma(-\Delta_{\alpha^-,\Lambda}), \sigma_{sc}(-\Delta_{\alpha^{-+},\Lambda}) = \emptyset, \sigma_p(-\Delta_{\alpha^{-+},\Lambda}) = \emptyset$$

kde $-\Delta_{\alpha^\pm,\Lambda}$ představuje nekonečný krystal a $\Lambda = a\mathbb{Z}$ . Na vnitřku množiny $\sigma(-\Delta_{\alpha^+,\Lambda}) \cap \sigma(-\Delta_{\alpha^-,\Lambda})$ je spektrální násobnost operátoru $-\Delta_{\alpha^{-+},\Lambda}$ 2, zatímco na $\sigma(-\Delta_{\alpha^{-+},\Lambda}) - \{\sigma(-\Delta_{\alpha^+,\Lambda}) \cap \sigma(-\Delta_{\alpha^-,\Lambda})\}$ je násobnost 1.

**Pozn.:** Ve speciálním případě, když $\alpha^- = 0$, pro spektrum polokrystalu platí (věty 13 a 14)

$$\sigma(-\Delta_{\alpha^+,\Lambda}) = [a_1^{\alpha^+,\Lambda}, b_1^{\alpha^+,\Lambda}] \cup [0, \infty).$$

Tvrzení o násobnosti spektra v předchozí větě souvisí s tím, že částice pohybující se v levém polokrystalu může přejít do pravého jenom, když její energie má hodnotu dovolenou pro oba polokrystaly. V tomto případě částice prochází s násobností 2. V opačném případě (jestliže částice pohybující se v levém polokrystalu má energii, která neleží ve spektru pravého polokrystalu) očekáváme, že se částice odrazí (tedy,že koeficient odrazu je 1). To je obsahem následující věty.

**Věta 15:** Nechť $k^2 \in \{\sigma(-\Delta_{\alpha^-,\Lambda}) \cap \sigma(-\Delta_{\alpha^+,\Lambda})\}^0, Imk \geq 0$ . Potom pro koeficienty odrazu a prostupu pro operátor $-\Delta_{\alpha^{-+},\Lambda}$ platí

$$T^l_{\alpha_{-+},\Lambda}(k) = \frac{2i \sin^{1/2}[\theta_-(k)a] \sin^{1/2}[\theta_+(k)a]}{e^{i\theta_-(k)a} - e^{-i\theta_+(k)a}} = T^r_{\alpha_{-+},\Lambda}(k),$$

$$R^l_{\alpha_{-+},\Lambda}(k) = \frac{e^{-i\theta_+(k)a} - e^{-i\theta_-(k)a}}{e^{i\theta_-(k)a} - e^{-i\theta_+(k)a}}, R^r_{\alpha_{-+},\Lambda}(k) = \frac{e^{i\theta_+(k)a} - e^{i\theta_-(k)a}}{e^{i\theta_-(k)a} - e^{-i\theta_+(k)a}},$$

kde $\cos[\theta_\pm(k)a] = \cos(ka) + (\alpha^\pm/2k)\sin(ka), \theta_\pm(k) \in (0, \pi/a)$.

Matice Rozptylu $S_{\alpha^{-+},\Lambda}(k) = \begin{bmatrix} T^l_{\alpha_{-+},\Lambda}(k) & R^r_{\alpha_{-+},\Lambda}(k) \\ R^l_{\alpha_{-+},\Lambda}(k) & T^r_{\alpha_{-+},\Lambda}(k) \end{bmatrix}$ je v tomto případě unitární.

Jestliže $k^2 \in \{\sigma(-\Delta_{\alpha^{-+},\Lambda}) - \sigma(-\Delta_{\alpha^{+},\Lambda})\}^0, Imk \geq 0$, potom

$$T^l_{\alpha_{-+},\Lambda}(k) = 0, R^l_{\alpha_{-+},\Lambda}(k) = \frac{e^{\kappa_+(k)a} - e^{-i\theta_-(k)a}}{e^{\kappa_+(k)a} - e^{i\theta_-(k)a}},$$

kde

$$\cos[\theta_-(k)a] = \cos(ka) + (\alpha^-/2k)\sin(ka), \theta_-(k) \in (0, \pi/a),$$

$$\cosh[\kappa_+(k)a] = \cos(ka) + (\alpha^+/2k)\sin(ka), \kappa_+(k) = -i\theta_+(k) > 0.$$

Podobně pro $k^2 \in \{\sigma(-\Delta_{\alpha^{-+},\Lambda}) - \sigma(-\Delta_{\alpha^{-},\Lambda})\}^0, Imk \geq 0$ :

$$T^r_{\alpha_{-+},\Lambda}(k) = 0, R^r_{\alpha_{-+},\Lambda}(k) = \frac{e^{-\kappa_-(k)a} - e^{i\theta_+(k)a}}{e^{-\kappa_-(k)a} - e^{-i\theta_+(k)a}},$$

kde

$$\cos[\theta_+(k)a] = \cos(ka) + (\alpha^+/2k)\sin(ka), \theta_+(k) \in (0, \pi/a),$$

$$\cosh[\kappa_-(k)a] = \cos(ka) + (\alpha^-/2k)\sin(ka), \kappa_-(k) = -i\theta_-(k) > 0.$$

# Kapitola 3

# Konečně mnoho $\delta$-interakcí v $\mathbb{R}^3$

V této kapitole se budeme zabývat popisem $\delta$-interakce v $\mathbb{R}^3$ na koncentrických koulích o poloměrech $0 < R_1 < R_2 < \ldots < R_N$ formálně popsané hamiltoniánem $H = -\Delta + \sum_{j=1}^{N} \alpha_j \delta(|x| - R_j)$.

## 3.1 Definice a základní vlastnosti

Mějme v $\mathbb{R}^3$ uzavřený symetrický pozitivní operátor

$$\dot{H} = -\Delta,\ D(\dot{H}) = \{f \in H^{2,2}(\mathbb{R}^3)/f(\partial\overline{K(O,R_j)}) = 0, j \in \{1,2,\ldots,N\}\},$$

kde $K(O,R_j)$ je uzavřená koule se středem v počátku a poloměru $R_j$.

Dále rozložíme $L_2(\mathbb{R}^3)$

$$L_2(\mathbb{R}^3) = L_2((0,\infty), r^2 dr) \otimes L_2(S^2),$$

kde $S^2$ je jednotková koule v $\mathbb{R}^3$ .

Nechť dále $\tilde{U}$ je unitární transformace

$$\tilde{U} : L_2((0,\infty), r^2 dr) \to L_2((0,\infty)) : f \to (\tilde{U}f)(r) = rf(r),$$

Tedy máme

$$L_2(\mathbb{R}^3) = \bigoplus_{j=0}^{\infty} \tilde{U}^{-1} L_2((0,\infty), dr) \otimes [Y_l^{-l}, \ldots, Y_l^{l}],$$

kde sférické harmoniky $Y_l^m$, $l \in \mathbb{N}_0$, $-l \le m \le l$ představují bázi $L_2(S^2)$.

Použitím této unitární transformace dostaneme

$$\dot{H} = \bigoplus_{j=0}^{\infty} \tilde{U}^{-1} \dot{h}_{l,\{R\}} \tilde{U} \otimes 1,$$

kde

$$\dot{h}_{l,\{R\}} = -\frac{d^2}{dr^2} + \frac{l(l+1)}{r^2},$$

$$D(\dot{h}_{l,\{R\}}) = \{f \in L_2((0,\infty))/f, f' \in AC_{loc}((0,\infty)), f(0+) = 0 \text{ pro } l = 0, f(R_{j\pm}) = 0,$$
$$-f'' + l(l+1)r^{-2}f \in L_2((0,\infty))\},$$
$$l \in \mathbb{N}_0,\ j \in \{1,2,\ldots,N\},\ \{R\} = \{R_1,\ldots,R_N\}.$$

Je dokázáno, že $\dot{h}_{l,\{R\}}$ má indexy defektu (N,N) a tedy defektní podprostor $N_{-\bar{k}}$ je generován N lineárně nezávislými funkcemi

$$\phi_{l,j}(k,r) = \begin{cases} i\pi/2\, R_j^{1/2} H^{(1)}_{l+1/2}(kR_j) r^{1/2} J_{l+1/2}(kr), r \leq R_j \\ i\pi/2\, R_j^{1/2} J_{l+1/2}(kR_j) r^{1/2} H^{(1)}_{l+1/2}(kr), r \geq R_j \end{cases}, Imk > 0, j \in \{1,2,\ldots,N\},$$

kde $J_p$, resp. $H_p$ je Besselova resp. Hankelova funkce řádu p.

Tedy všechna samosdružená rozšíření operátoru $\dot{h}_{l,\{R\}}$ jsou dána $N^2$-parametrickou množinou samosdružených operátorů. Uvažujme následující samosdružená rozšíření

$$h_{l,\{\alpha_j\},\{R\}} = -\frac{d^2}{dr^2} + \frac{l(l+1)}{r^2},$$

$$D(h_{l,\{\alpha_j\},\{R\}}) = \{f \in L_2((0,\infty))/f, f' \in AC_{loc}((0,\infty) - \{R\}), f(0+) = 0 \text{ pro } l = 0,$$
$$f(R_{j-}) = f(R_{j+}) = f(R_j),\ f'(R_{j+}) - f'(R_{j-}) = \alpha_{jl} f(R_{j\pm}),\ -f'' + l(l+1)r^{-2}f \in L_2((0,\infty))\},$$
$$\{\alpha\} = \{\alpha_{1l},\ldots,\alpha_{Nl}\}, \alpha_{jl} \in (-\infty,\infty].$$

Případ $\alpha_{jl} = 0$ pro všechna $j$ představuje volný kinetický hamiltonián s pevným $l$ .

Operátor $H_{\{\alpha_j\},\{R\}}$ v $L_2(\mathbb{R}^3)$

$$H_{\{\alpha_j\},\{R\}} = \bigoplus_{j=0}^{\infty} \tilde{U}^{-1} h_{l,\{\alpha_j\},\{R\}} \tilde{U} \otimes 1$$

představuje přesnou definici formálního hamiltoniánu $H = -\Delta + \sum_{j=1}^{N} \alpha_j \delta(|x| - R_j)$. Je-li $\{\alpha_j\} = \infty$, potom představuje laplacián s Dirichletovou hraniční podmínkou na $\partial K(O, R_j)$. Je-li $\{\alpha_j\} = 0$, potom $H_{0,\{R\}} = -\Delta, D(H_{0,\{R\}}) = H^{2,2}(\mathbb{R}^3)$.

Rezolventní funkce operátorů $H_{\{\alpha_l\},\{R\}}$ a $h_{l,\{\alpha_j\},\{R\}}$ jsou dány následující větou.

**Věta 16:** Jestliže $\alpha_{jl} \neq 0, \forall \in \{1,\ldots,N\}$ , potom platí

(i)Rezolventní funkce operátoru $h_{l,\{\alpha_j\},\{R\}}$ je

$$(h_{l,\{\alpha_j\},\{R\}} - k^2)^{-1} = (h_{l,0} - k^2)^{-1} + \sum_{j,j'=1}^{N} \mu_{jj'}(k)(\Phi_{l,j'}(-\bar{k}), \cdot)\Phi_{l,j}(k),$$

$$k^2 \in \rho(h_{l,\{\alpha_j\},\{R\}}), Imk > 0, l \in \mathbb{N}_0,$$

kde

$$[\mu(k)]^{-1}_{jj'} = -[\alpha_{jl}^{-1}\delta_{jj'} + g_{l,k}(R_j, R_{j'})]_{j,j'=1}^{N}$$
$$\text{a } g_{l,k} = (h_{l,0} - k^2)^{-1}, Imk > 0$$

je volná rezolventní funkce s integrálním jádrem

$$g_{l,k}(r,r') = \begin{cases} i\pi/2\, r^{1/2} H^{(1)}_{l+1/2}(kr)(r')^{1/2} J_{l+1/2}(kr'), r' \le r \\ i\pi/2\, (r')^{1/2} H^{(1)}_{l+1/2}(kr') r^{1/2} J_{l+1/2}(kr), r' \ge r \end{cases}, Imk > 0.$$

(ii) Rezolventní funkce operátoru $H_{\{\alpha_l\},\{R\}}$ je

$$(H_{\{\alpha_l\},\{R\}} - k^2)^{-1} = (H_0 - k^2)^{-1} + \bigoplus_{l=0}^{\infty} \bigoplus_{m=-l}^{l} \sum_{j,j'=1}^{N} \mu_{jj'}(k)(|\cdot|^{-1}\,\Phi_{l,j'}(-\bar{k})Y_l^m, \cdot)\,|\cdot|^{-1}\,\Phi_{l,j}(k)Y_l^m,$$

$$k^2 \in \rho(H_{\{\alpha_l\},\{R\}}), Imk > 0.$$

## 3.2 Approximation by a family of local scaled short-range hamiltonians

Nechť $\lambda_{jl} : [0,\infty) \to \mathbb{R}, l \in \mathbb{N}_0$ je analytická v okolí počátku a nechť $\lambda_{jl}(0+) = 0$.

Dále v $L_2((0,\infty))$ definujme

$$h_{l,\varepsilon} = h_{l,0} + \varepsilon^{-2} \sum_{j=1}^{N} \lambda_{jl}(\varepsilon) V_j(\frac{r - R_j}{\varepsilon})$$

a v $L_2(\mathbb{R}^3)$ mějme operátor

$$H_\varepsilon = \bigoplus_{l=0}^{\infty} \tilde{U}^{-1} h_{l,\varepsilon} \tilde{U} \otimes 1.$$

**Věta 17:** Jestliže $\forall j = 1, \ldots, N$ je funkce $V_j : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ měřitelná, $V_j(r) = 0$ pro $r < 0$ a $V_j \in L_1((R_j,\infty))$, potom platí

(i) Je-li $k^2 \in \rho(h_{l,\{\alpha_l\},\{R\}})$, potom $k^2 \in \rho(h_{l,\varepsilon})$ pro $\varepsilon$ dost malé a

$$n - \lim_{\varepsilon \to 0}(h_{l,\varepsilon} - k^2)^{-1} = (h_{l,\{\alpha_l\},\{R\}} - k^2)^{-1},$$

kde $\alpha_{jl} = \lambda'(0) \int_{R_j}^{\infty} dr V_j(r), l \in \mathbb{N}_0$.

(ii) Je-li $k^2 \in \rho(H_{\{\alpha_l\},\{R\}})$ potom $k^2 \in \rho(H_\varepsilon)$ pro $\varepsilon$ dost malé a

$$n - \lim_{\varepsilon \to 0}(H_\varepsilon - k^2)^{-1} = (H_{\{\alpha_l\},\{R\}} - k^2)^{-1}.$$

# Literatura

[1] S. Albeverio, F. gesztesy, R. Hoegh-Krohn, H. Holden, *Solvable Models in Quantum Mechanics,* Springer-Verlag New York Inc., 1988

[2] M. N. Hounkonnou, M. Hounkpe, J. Shabani, *Scattering theory for finitely many sphere interactions supported by concetric spheres,* J. Math. Phys. Vol. 38, 1997

[3] J. Blank, P.Exner, M Havlíček, *Lineární operátory v kvantové fyzice,* Univerzita Karlova, Praha 1993