ČESKÉ VYSOKÉ UČENÍ TECHNICKÉ
Fakulta jaderná a fyziklně inženýrská

VÝZKUMNÝ ÚKOL

APLIKACE ADIABATICKÝCH METOD NA DVOUROZMĚRNÉ KVANTOVÉ MODELY

Ivo Hradecký

Školitel: Prof. Ing. Pavel Šťovíček, DrSc.

Meziměstí

5.7.2002

Obsah

1. Úvod

Jedním z hlavních problémů kvantové fyziky je určit časový vývoj systému, tj. vyřešit Schrödingerovu rovnici $\frac{\partial}{\partial s}\psi(s) = H(s)\psi(s)$ s počáteční podmínkou $\psi(0) = \varphi(0)$, kde $\varphi(0)$ je vlastní funkce $H(0) : H(0)\varphi(0) = \lambda(0)\varphi(0)$.

Známe-li pro daný systém unitární propagátor $U(s)$, potom pro $\psi(s)$ platí: $\psi(s) = U(s)\psi(0) = U(s)\varphi(0)$. Vyřešit Schrödingerovu rovnici ale není vždy jednoduché; toto řešení navíc ne vždy existuje. Za určitých podmínek nám pomůže adiabatická věta, která tvrdí, že řešení $\psi(s)$ můžeme s jistou nepřesností nahradit vlastním stavem hamiltoniánu v čase t, tedy řešením $\varphi(t)$ rovnice $H(s)\varphi(s) = \lambda(s)\varphi(s)$. Existuje několik podob adiabatických vět, všechny však mají následující strukturu:

Nechť $P(s)$ je množina spektrálních projektorů pro $H(s)$, Nechť $\psi_T(0) \in RanP(0)$. Pak $\exists\gamma \geq 0$: $\mathrm{dist}(\psi_T(s), RanP(s)) \leq O(T^{-\gamma})$.

Prvními, kdo dokázali adiabatickou větu, byli M. Born a V. Fock (viz. [1]), kteří ji dokázali pro hamiltoniány s izolovanou vlastní hodnotou. Jejich výsledky jsem shrnul v kapitole 2. Adiabatická věta však platí i pro neizolované hodnoty spektra, jak ukázali Joseph E. Avron a Alexander Elgart (viz. [2]). Rozdíl oproti izolovanému případu je v tom, že pro nizolovanou vlastní hodnotu adiabatická věta nedává hodnotu γ v odhadu. V tomto případě je $\mathrm{dist}(\psi_T(s), RanP(s)) \leq o(1)$. Adiabatická věta pro neizolované hodnoty spektra je dokázaná v kapitole 3. Ve čtvrté kapitole je potom jádro tohoto výzkumného úkolu, tj. aplikace adiabatické věty na Ahoronovův-Bohmův jev.

Nechť je dán interval $[0, S]$, kde $S > 0$. Dále nechť $H^0(s)$, $\forall s \in [0, S]$ jsou samosdružené operátory na $\mathcal{H}$, jejichž spektrum je čistě diskrétní. Nechť $\varphi_n(s)$ je ON báze $\mathcal{H}$ z vlastních vektorů $H^0(s)$, tedy

$$H^0(s)\varphi_n(s) = \lambda_n(s)\varphi_n(s)$$

taková, že platí:

$$\varphi_n(s) \in C^1, \langle \varphi_n(s), \frac{\partial}{\partial s}\varphi_n(s)\rangle = 0, \ \forall n, \ \forall s$$

Položme $H(t) = H^0(t/T)$, $t \in [0, ST]$, kde $T >> 0$ a řešme rovnici

$$i\frac{\partial}{\partial t}\psi_n(t) = H(t)\psi_n(t) \tag{1}$$

s počáteční podmínkou $\psi_n(0) = \varphi_n(0)$ v adiabatické limitě $T \to \infty$.

Nechť $\psi_n(t)$ je řešení rovnice (1) a $U(t) \equiv U(t, 0)$ je propagátor splňující rovnici

$$i\frac{\partial}{\partial t}U(t) = H(t)U(t)s, \ U(0) = 1.$$

Pak

$$\psi_n(t) = U(t)\psi_n(0) = U(t)\varphi_n(0).$$

Definujme dále následující operátory:

$V(s)$ operátor přechodu mezi bázemi $\varphi_n(0)$ a $\varphi_n(s)$: $V(s)\varphi_n(0) = \varphi_n(s), \forall n,$

$$Q(s) := -i\dot{V}(s)^*V(s) = iV(s)^*\dot{V}(s) \ \Rightarrow Q(s)^* = Q(s), \text{ kde } \dot{V}(s) = \frac{\partial}{\partial s}V(s)$$

$$\Lambda(s) := V(s)^*H^0(s)V(s) \ \Rightarrow \Lambda(s)\varphi_n(0) = \lambda_n(s)\varphi_n(0)$$

$$Y(s) := V(s)^*U(Ts) \ \Rightarrow \langle \varphi_m(0), Y(s)\varphi_n(0)\rangle = \langle \varphi_m(s), \psi_n(Ts)\rangle$$

$$\Omega(s) := \int_0^s \Lambda(s')ds',$$
$$\omega_n(s) := \int_0^s \lambda_n(s')ds'$$

$$\Rightarrow \Omega(s)\Lambda(s') = \Lambda(s')\Omega(s) \ , \ \Omega(s)\varphi_n(0) = \omega_n(s)\varphi_n(0) \ , \ \forall n, s, s',$$
$$\frac{\partial}{\partial s}\Omega(s) = \Lambda(s),$$

$$C(T, s) := \exp(iT\Omega(s))Y(s)$$
$$\Rightarrow \langle \varphi_m(0), C(T, s)\varphi_n(0)\rangle = \exp(iT\omega_n(s))\langle \varphi_m(s), \psi_n(Ts)\rangle$$
$$P(T, s) := \exp(iT\Omega(s))Q(s)\exp(-iT\Omega(s)) \Rightarrow P(T, s)^* = P(T, s)$$

Pro operátory $Y(s)$ a $P(T,s)$ platí následujíc í diferenciální rovnice:

$$\frac{\partial}{\partial s}Y(s)=TV(s)^*\frac{\partial}{\partial t}U(T,s)+\dot V(s)^*U(T,s)=$$
$$=-iTV(s)^*H(Ts)U(Ts)+\dot V(s)^*V(s)V(s)^*U(T,s)=-iT\Lambda(s)Y(s)+iQ(s)Y(s),$$

$$\frac{\partial}{\partial s}C(T,s)=iT\Lambda(s)\exp(iT\Omega(s))Y(s)+\exp(iT\Omega(s))\frac{\partial}{\partial s}Y(s)=$$
$$=iT\Lambda(s)C(T,s)+\exp(iT\Omega(s))(-iT\Lambda(s)Y(s)+iQ(s)Y(s))=$$
$$=iT\Lambda(s)C(T,s)-iT\Lambda(s)C(T,s)+i\exp(iT\Omega(s))Q(s)\exp(-iT\Omega(s))C(T,s),$$

tedy

$$\frac{\partial}{\partial s}Y(s)=-iT\Lambda(s)Y(s)+iQ(s)Y(s),\ Y(0)=1,$$
$$\frac{\partial}{\partial s}C(T,s)=iP(T,s)C(T,s),\ C(T,0)=1. \tag{2}$$

Rovnice (2) má řešení

$$C(T,s)=1+\sum_{k=1}^{\infty}i^k\int_0^s ds_k\int_0^{s_k}ds_{k-1}\dots\int_0^{s_2}ds_1P(T,s_k)P(T,s_{k-1})\dots P(T,s_1)$$

Ke konvergenci této řady stačí , aby $\exists M:\|P(T,s)\|\le M,\forall s$.

Pozn.:

V bázi $\{\varphi_n(0)\}$ plat pro operátory $Q(s)$ a $P(T,s)$:

$$\langle\varphi_m(0),Q(s)\varphi_n(0)\rangle=i\langle V(s)\varphi_m(0),\dot V(s)\varphi_n(0)\rangle=i\langle\varphi_m(s),\frac{\partial}{\partial s}\varphi_n(s)\rangle,$$
$$\langle\varphi_n(0),Q(s)\varphi_n(0)\rangle=0,\ \forall m,n\in\mathbb{Z},\ m\neq n,$$
$$\frac{\partial}{\partial s}\Lambda(s)=\dot V(s)^*H^0(s)V(s)+V(s)\dot H^0(s)V(s)+V(s)H^0(s)\dot V(s)=$$
$$=i(Q(s)\Lambda(s)-\Lambda(s)Q(s))+V(s)\dot H^0(s)V(s),$$
pro $m\neq n$ dále $0=\frac{\partial}{\partial s}(\lambda_n(s)\langle\varphi_m(0),\varphi_n(0)\rangle)=\langle\varphi_m(0),\frac{\partial}{\partial s}\Lambda(s)\varphi_n(0)\rangle=$
$$i(\lambda_n(s)-\lambda_m(s))\langle\varphi_m(0),Q(s)\varphi_n(0)\rangle+\langle\varphi_m(0),V(s)^*\dot H^0(s)V(s)\varphi_n(0)\rangle$$

Z toho plyne

$$\begin{aligned}\langle\varphi_m(0),Q(s)\varphi_n(0)\rangle\quad &=-i\frac{\langle\varphi_m(s),\dot H^0(s)\varphi_n(s)\rangle}{\lambda_m(s)-\lambda_n(s)},\ m\neq n,\\ &=0,\ m=n,\\ \langle\varphi_m(0),P(T,s)\varphi_n(0)\rangle\quad &=\exp(iT(\omega_m(s)-\omega_n(s)))\langle\varphi_m(0),Q(s)\varphi_n(0)\rangle.\end{aligned}$$

K odhadu norem operátorů se hodí následujíc í věta.

Věta (Schur-Holmgren):

Nechť $A=A^*\in\mathcal{B}(\mathcal{H})$, $\{\varphi_n\}$ je ON báze v $\mathcal{H}$. $A_{m,n}:=\langle\varphi_m,A\varphi_n\rangle$.Potom

$$\|A\|\le\sup_m\sum_n|A_{m,n}|.$$

Pozn. (přeformulování Schur-Holmgrenovy věty):

Nechť A je symetrický operátor v $\mathcal{H}$, $\{\varphi_n\}$ je ON báze v $\mathcal{H}$, $\{\varphi_n\} \subset Dom(A)$, $A_{m,n} := \langle \varphi_m, A\varphi_n \rangle$. Potom platí

$$\left(\alpha := \sup_m \sum_n |A_{m,n}| < \infty \right) \Rightarrow \left(\bar{A} \text{ je hermitovský operátor a } \| \bar{A} \| \leq \alpha \right).$$

Důkaz: Nechť x= $\sum_n \xi_n \varphi_n \in \mathcal{H}$ je konečná lineární kombinace $\Rightarrow$ $x \in Dom(A)$, $\langle \varphi_m, Ax \rangle = \sum_n A_{m,n} \xi_n$,

$$|\langle \varphi_m, Ax \rangle|^2 \leq \left(\sum_n |A_{m,n}||\xi_n| \right)^2 = \left(\sum_k |A_{m,k}| \right)^2 \left(\sum_n \frac{|A_{m,n}|}{\sum_k |A_{m,k}|} |\xi_n| \right)^2 \leq$$

$$\leq \left(\sum_k |A_{m,k}| \right)^2 \sum_n \frac{|A_{m,n}|}{\sum_k |A_{m,k}|} |\xi_n|^2 \leq \alpha \sum_n |A_{m,n}||\xi_n|^2.$$

Tedy

$$\|Ax\|^2 = |\langle \varphi_m, Ax \rangle|^2 \leq \alpha \sum_m \sum_n |A_{m,n}||\xi_n|^2 \leq \alpha^2 \sum_n |\xi_n|^2 = \alpha^2 \|x\|.$$

Máme tak $\forall x \in \text{span}\{\varphi_n\} \subset Dom(A)$, $\|Ax\| \leq \alpha \|x\|$. Definujme $B = A|_{\text{span}\{\varphi_n\}} \Rightarrow \|B\| \leq \alpha$, $Dom(\bar{B}) = \mathcal{H} \Rightarrow \bar{A} = \bar{B}$, $\|\bar{A}\| \leq \alpha$. ∎

Použijeme-li odhad na normu $P(T,s)$, dostaneme:

$$\| P(T,s) \| \leq \sup_m \sum_n |\langle \varphi_m(0), P(T,s)\varphi_n(0) \rangle| = \sup_m \sum_{n, n \neq m} \frac{|\langle \varphi_m(0), \dot{H}^0(s)\varphi_n(0) \rangle|}{|\lambda_m(s) - \lambda_n(s)|} \leq$$

$$\leq \left(\sup_m \sum_n |\langle \varphi_m(0), \dot{H}^0(s)\varphi_n(0)|^2 \sum_{n, n \neq m} (\lambda_m(s) - \lambda_n(s))^{-2} \right)^{1/2} =$$

$$= \sup_m \| \dot{H}^0(s)\varphi_m(s) \| \left(\sum_{n, n \neq m} (\lambda_m(s) - \lambda_n(s))^{-2} \right)^{1/2} \leq$$

$$\leq \| \dot{H}^0(s) \| \left(\sum_{n, n \neq m} (\lambda_m(s) - \lambda_n(s))^{-2} \right)^{1/2}.$$

Lemma:

Nechť $f \in C([\alpha,\beta])$, $g \in C^1([\alpha,\beta])$ a $g'(s)$ má konečně mnoho kořenů v intervalu $[\alpha,\beta]$ a nechť $\exists r \geq 0 : \forall s_0 \in [\alpha,\beta]$ platí $\liminf_{s \to s_0} \left(\frac{|g'(s)|}{|s-s_0|^r} \right) > 0$ a nechť funkce $\frac{f(s)}{g'(s)}$ je po částech monotonní na $[\alpha,\beta]$. Potom $\exists c > 0 :$ $\forall T > 0$, $\forall \alpha', \beta', \alpha \leq \alpha' \leq \beta' \leq \beta$ platí

$$|\int_{\alpha'}^{\beta'} f(s) \exp(iTg(s)) ds| \leq cT^{-\frac{1}{r+1}}.$$

Důkaz: viz([1])

Pozn.:

Položme $f(s) = \langle \varphi_m(0), Q(s)\varphi_n(0)\rangle$, $g(s) = \omega_m(s) - \omega_n(s)$, tj. $g^{'}(s) = \lambda_m(s) - \lambda_n(s)$ a předpokládejme stejnoměrnost následující ch veličin vzhledem k indexům m,n:

1) Počet kořenůN_1 funkce $g^{'}(s)$,

2) počet intervalů monotonie N_2 funkce $f(s)/g^{'}(s)$

3) $\exists a > 0$ tak,že platí: $\forall s_0$ kořen funkce $g^{'}(s)$, $\forall s \in [\alpha, \beta]$ platí $|g^{'}(s)| \geq a|s - s_0|^r$.

Nyní můžeme Lemma použít na odhad veličin $\left|\langle \varphi_m(0), \left(\int_0^{s^{'}} P(T,s)ds\right)\varphi_n(0)\rangle\right|$, protože platí $\left|\langle \varphi_m(0), \left(\int_0^{s^{'}} P(T,s)ds\right)\varphi_n(0)\rangle\right| = \left|\int_0^{s^{'}} \langle \varphi_m(0), Q(s)\varphi_n(0)\rangle \exp(iT(\omega_m(s) - \omega_n(s)))ds\right|$.

A ted už můžeme uvést nejdůležitější větu této kapitoly:

Věta (Adiabatická):

Nechť $\exists M \geq 0$ takové, že $\forall s \in [0, S]$ platí $\| Q(s) \| \leq 0$. Dále nechť

$$\exists n \in \mathbb{N},\ c \geq 0,\ \gamma \geq 0:\ \forall T > 0,\ s^{'} \in [0, S]$$

$$\left\| \int_0^{s^{'}} P(T,s)\varphi_n(0)ds \right\| = \left\| \int_0^{s^{'}} \exp(-iT\omega_n(s))\exp(iT\Omega(s))Q(s)\varphi_n(0)ds \right\| \leq cT^{-\gamma}.$$

Potom $\forall T > 0,\ s \in [0, S]$ platí:

$$\| \psi_n(Ts) - \exp(-iT\omega_n(s))\varphi_n(s) \| \leq ce^{MS}T^{-\gamma}, \text{tj.}$$

$$\| \psi_n(t) - \exp(-iT\omega_n(\frac{t}{T}))\varphi_n(\frac{t}{T}) \| \leq c^{'}T^{-\gamma}.$$

Důkaz:

$$\| P(T,s) \| = \| Q(s) \| \leq M,$$

$$\begin{aligned}
&\| C(T,s)\varphi_n(0) - \varphi_n(0) \| = \\
\| \quad & \sum_{k=1}^{\infty} \int_0^s ds_k \int_0^{s_k} ds_{k-1} \ldots \int_0^{s_2} ds_1 P(T,s_k)P(T,s_{k-1})\ldots P(T,s_1)\varphi_n(0) \| \leq \\
&\leq \sum_{k=1}^{\infty} M^{k-1} \int_0^s ds_k \int_0^{s_k} ds_{k-1} \ldots \int_0^{s_3} ds_2 \| \int_0^{s_1} ds_1 P(T,s_1)\varphi_n(0) \| \leq \\
&\leq \sum_{k=1}^{\infty} M^{k-1} \frac{s^{k-1}}{(k-1)!} cT^{-\gamma} \leq ce^{MS}T^{-\gamma}.
\end{aligned}$$

Na druhou stranu platí:

$$\begin{aligned}
&\| C(T,s)\varphi_n(0) - \varphi_n(0) \| = \| \exp(iT\Omega(s))V(s)^* U(Ts)\varphi_n(0) - \varphi_n(0) \| = \\
&= \| U(Ts)\varphi_n(0) - V(s)\exp(-iT\Omega(s))\varphi_n(0) \| = \| \psi_n(Ts) - \exp(-iT\omega_n(s))\varphi_n(s) \| .
\end{aligned}$$

∎

3. Adiabatická věta pro neizolované hodnoty spektra

V tto kapitole dokeme, e adiabatick vta plat i pro neizolovan hodnoty spektra samosdruenho opertoru.

3.1. Omezené hamiltoniány.

Nechť $H(s)$ je množina omezených hamiltoniánů, hladkých v s. Předpokládejme, že $H(s)$ má vlastn í hodnotu 0 konečné násobnosti a $\dot{H}(s)$ má kompaktní support. Pak můžeme vzít bez újmy na obecnosti $s \in [0,1]$. Nechť $P(s)$ je množina hladkých konečnědimenzionálních spektrálních projektorů pro $H(s)$. Nechť dále $U_T(s)$ je unitární vývoj pro $H(s)$:

$$i\dot{U}_T(s) = TH(s)U_T(s),\ U_T(0) = 1,\ s \in [0,1]$$

a $U_A(s)$ je adiabatický vývoj:

$$i\dot{U}_A(s) = T\left(H(s) + \frac{i}{T}[\dot{P}(s), P(s)]\right)U_A(s),\ U_A(0) = 1,\ s \in [0,1].$$

Platí $U_A(s)P(0) = P(s)U_A(s)$, neboli pro $\psi(s)$:

$$i\dot{\psi}(s) = T\left(H(s) + \frac{i}{T}[\dot{P}(s), P(s)]\right)\psi(s),\ \psi(0) \in Ran P(0)$$

platí $\psi(s) \in Ran P(s)$. Ukážeme, že $U_A(s)$ je blízké $U_T(s)$.

Lemma:

Buď $P(s)$, $s \in [0,1]$ množina diferencovatelných spektrálních projektorů pro hermitovský $H(s)$: $\|P(s)\| < \infty$. Nechť rovnice

$$[\dot{P}(s), P(s)] = [H(s), X(s)] + Y(s) \tag{3}$$

má řešení $X(s), Y(s)$: $X(s), Y(s), \dot{X}(s) \in$ B, kde B jsou omezené operátory. Potom platí:

$$\begin{aligned} &\|(U_T(s) - U_A(s))P(0)\| \leq \\ &\leq \max_{s\in[0,1]}\left(\frac{1}{T}\left(2\|X(s)P(s)\| + \|\dot{(X(s)P(s))}P(s)\|\right) + \|Y(s)P(s)\|\right). \end{aligned} \tag{4}$$

Důkaz: Označme $W(s) = U_T^*(s)U_A(s)$.

$$\|U_T(s) - U_A(s)\| = \|U_T(s)(1 - W(s)\| = \|1 - W(s)\|,$$

$$\begin{aligned}
\dot{W}(s) &= U_T^*(s)([\dot{P}(s), P(s)])U_A(s) = U_T^*(s)([\dot{P}(s), P(s)])U_T(s)W(s) = \\
&= U_T^*(s)([H(s), X(s)] + Y(s))U_T(s)W(s) = \\
&= \frac{-i}{T}\left(\dot{U}_T^*(s)X(s)U_T(s) + U_T^*(s)X(s)\dot{U}_T(s)\right)W(s) + U_T^*(s)Y(s)U_A(s) = \\
&= \frac{-i}{T}\left(\dot{(U_T^*(s)X(s)U_T(s))} - U_T^*(s)\dot{X}(s)U_T(s)\right)W(s) + U_T^*(s)Y(s)U_A(s) = \\
&= \frac{-i}{T}\left\{\dot{(U_T^*(s)X(s)U_T(s)W(s))} - U_T^*(s)X(s)U_T(s)\dot{W}(s) - U_T^*(s)\dot{X}(s)U_T(s)W(s)\right\} + \\
&\quad + U_T^*(s)Y(s)U_A(s) = \\
&= \frac{-i}{T}\left\{\dot{(U_T^*(s)X(s)U_A(s))} - U_T^*(s)X(s)[\dot{P}(s), P(s)]U_A(s) - U_T(s)\dot{X}(s)U_A(s)\right\} + \\
&\quad + U_T^*(s)Y(s)U_A(s)
\end{aligned}$$

Nyní stačí výraz zintegrovat od 0 do s' a použít $W(0)=1$, $P(s)\dot{P}(s)P(s)=0$. Poslední rovnost plyne z

$$P(s)P(s)=P(s)\Rightarrow \dot{P}(s)P(s)+P(s)\dot{P}(s)=\dot{P}(s)\Rightarrow P(s)\dot{P}(s)P(s)+P(s)\dot{P}(s)=P(s)\dot{P}(s)$$

$\blacksquare$

Definujme:

$$g(x)=e^{-\pi x^2},\ e(x)=\int_{-\infty}^{x} ds g(s),\ \phi(x)=\vartheta(x)-e(x),$$
$$g_\triangle(x)=g(\triangle x),\ (xg)(x)=xg(x).$$

kde $\vartheta(x)$ je Heavysideova funkce. Platí:

$$\|\phi\|_1=\frac{1}{\pi}, \|x\phi\|_1=\frac{1}{4\pi},$$
$$\|\phi_\triangle\|_1=\frac{1}{\pi\triangle}, \|x\phi_\triangle\|_1=\frac{1}{4\pi\triangle^2}.$$

Dále bez újmy na obecnosti předpokládejme, že $P(s)$ je spektrální projekce pro vlastní hodnotu 0.

Lemma: Rovnice (3) má řešení:

$$X_\triangle(s)=A+A^*,\ A=P(s)\dot{P}(s)\hat{R}(0,s)\left(1-g\left(\frac{H(s)}{\triangle}\right)\right),$$
$$Y_\triangle(s)=g\left(\frac{H(s)}{\triangle}\right)\dot{P}(s)P(s)-P(s)\dot{P}(s)g\left(\frac{H(s)}{\triangle}\right),$$

s normami:

$$\|X_\triangle(s)P(s)\|\leq\frac{2\|\dot{P}(s)P(s)\|}{\triangle},$$
$$\|(X_\triangle(\dot{s})P(s))\|\leq\frac{2(\|\ddot{P}(s)\|+\|\dot{P}^2(s)\|)}{\triangle}+\frac{\pi\|\dot{P}(s)\|\|\dot{H}(s)\|}{\triangle^2}.$$

Důkaz:
Nechť Γ je infinitezimální křivka okolo počátku v $\mathbb{C}$. Definujme:

$$F_\triangle(s)=g\left(\frac{H(s)}{\triangle}\right)-P(s),$$
$$X_\triangle(s)=-\frac{1}{2\pi}\int_\Gamma dz(1-F_\triangle(s))R(z,s)\dot{P}(s)R(z,s)(1-F_\triangle(s)).$$

$\dot{P}(s)P(s) + P(s)\dot{P}(s) = \dot{P}(s) \Rightarrow X_\triangle(s)$ můžeme napsat jako součet dvou sdružených operátorů. Jeden z nich je:

$$
\begin{aligned}
&-\frac{1}{2\pi i}\int_\Gamma dz(1-F_\triangle(s))R(z,s)P(s)\dot{P}(s)R(z,s)(1-F_\triangle(s)) = \\
&= \frac{1}{2\pi i}(1-F_\triangle(s))P(s)\dot{P}(s)\left(\int_\Gamma dz\frac{R(z,s)}{z}\right)(1-F_\triangle(s)) = \\
&= P(s)\dot{P}(s)\hat{R}(0,s)(1-P(s))(1-F_\triangle(s)) = P(s)\dot{P}(s)\hat{R}(0,s)(1-P(s)-F_\triangle(s)) = \\
&= P(s)\dot{P}(s)\hat{R}(0,s)\left(1-g\left(\frac{H(s)}{\triangle}\right)\right) = A,
\end{aligned}
$$

kde bylo použito

$$\hat{R}(0,s): \; H(s) = \lambda(s)P(s), \; R(z,s) = \frac{1}{\lambda - z}P(s) + (1-P(s))R(z,s) = \frac{1}{\lambda - z}P(s) + \hat{R}(z,s)$$

$$\Rightarrow R(z,s)P(s) = \frac{1}{\lambda - z}P(s) + 0 \overset{\lambda=0}{\Rightarrow} \frac{R(z,s)}{z} = \frac{-P(s)}{z^2} + \frac{\hat{R}(z,s)(1-P(s))}{z}$$

první člen dá v integrálu 0, druhý $\hat{R}(0,s)(1-P(s))$,
a $P(s)F_\triangle(s) = F_\triangle(s)P(s) = (g(0)-1)\,P(s) = 0$.

Dále najdeme $Y_\triangle(s)$, platí $[F_\triangle(s), H(s)] = 0$. Tedy

$$
\begin{aligned}
&[X_\triangle(s), H(s)] = \\
&= -\frac{1}{2\pi i}\int_\Gamma \left[(1-F_\triangle(s))R(z,s)\dot{P}(s)R(z,s)(1-F_\triangle(s)), H(s)-z\right] dz = \\
&= -\frac{1}{2\pi i}\int_\Gamma dz(1-F_\triangle(s))\left[R(z,s),\dot{P}(s)\right](1-F_\triangle(s)) = \\
&= (1-F_\triangle(s))\left[P(s),\dot{P}(s)\right](1-F_\triangle(s)) = \\
&= [P(s),\dot{P}(s)] - \left(F_\triangle(s)[P(s),\dot{P}(s)]\right) + F_\triangle(s)[P(s),\dot{P}(s)]F_\triangle(s) = \\
&= [P(s),\dot{P}(s)] + F_\triangle(s)\dot{P}(s)P(s) - P(s)\dot{P}(s)F_\triangle(s)
\end{aligned}
$$

Tedy

$$Y_\triangle(s) = -g\left(\frac{H(s)}{\triangle}\right)\dot{P}(s)P(s) + P(s)\dot{P}(s)g\left(\frac{H(s)}{\triangle}\right).$$

Zbývá určit normy $X(s)$ a $\dot{X}(s)$. Protože $g\left(\frac{H(s)}{\triangle}\right) = \triangle\int_\mathbb{R} g(\triangle t)\exp(2\pi i t H(s))dt$, tak platí

$$-\hat{R}(0,s)\left(1-g\left(\frac{H(s)}{\triangle}\right)\right) = 2\pi i\int_\mathbb{R}\phi(\triangle t)\exp(2\pi i t H(s))dt$$

$$\Rightarrow \left\|\hat{R}(0,s)\left(1-g\left(\frac{H(s)}{\triangle}\right)\right)\right\| \le 2\pi\|\phi_\triangle\|_1 = 2/\triangle.$$

Tedy $X(s)$ je omezený. Dále

$$X_\triangle(s)P(s) = A^*P(s) = \hat{R}(0,s)\left(1 - g\left(\frac{H(s)}{\triangle}\right)\right)\dot{P}(s)P(s)$$

$$\Rightarrow (X_\triangle(\dot{s})P(s)) =$$

$$= \frac{\partial}{\partial s}\left(\hat{R}(0,s)\left(1 - g\left(\frac{H(s)}{\triangle}\right)\right)\right)\dot{P}(s)P(s) + \hat{R}(0,s)\left(1 - g\left(\frac{H(s)}{\triangle}\right)\right)(\ddot{P}(s)P(s) + \dot{P}(s)^2)$$

Omezenost $X_\triangle(s)P(s)$ se nyní snadno dostane použitím Duhammelovy formule

$$\frac{\partial}{\partial s}(\exp(2\pi i t H(s)) = 2\pi i t\int_0^1 dz \exp(2\pi i z t H(s))\dot{H}(s)\exp(2\pi i(1-z)tH(s))$$

na

$$\frac{\partial}{\partial s}\left(\hat{R}(0,s)\left(1 - g\left(\frac{H(s)}{\triangle}\right)\right)\right) =$$

$$2\pi i\int_{\mathbb{R}}\phi(t\triangle)\left(\int_0^1 dz \exp(2\pi i z t H(s))\dot{H}(s)\exp(2\pi i(1-z)tH(s))\right)ds$$

∎

Pozn.:

Podle předchozího lemma norma $X(s)$ a norma $\dot{X}(s)$ rostou s $\triangle \to 0$. Tento růst můžeme ale kompenzovat volbou vysokého T. Naopak norma $Y(s)$ s klesajícím $\triangle$ klesá. To znamená, že vždy můžeme udělat pravou stranu rovnice (4) libovolně malou:

Lemma:

$$\lim_{\triangle\to 0}\|Y_\triangle(s)P(s)\| = \lim_{\triangle\to 0}\|g\left(\frac{H(s}{\triangle}\right)\dot{P}(s)P(s)\| = 0.$$

Důkaz:

Pro jednoduchost nechť P(s) je jednodimenzionální projektor: $P(s)\psi(s) = \psi(s)$, $\|\psi\| = 1$. Položme $\varphi := \dot{P}(s)\psi$. Pak

$$\|g\left(\frac{H(s}{\triangle}\right)\dot{P}(s)P(s)\|^2 = \|g\left(\frac{H(s}{\triangle}\right)\dot{P}(s)\psi(s)\|^2 =$$

$$\|g\left(\frac{H(s)}{\triangle}\right)\varphi(s)\|^2 = \left\langle\varphi|g^2\left(\frac{H(s)}{\triangle}\right)|\varphi\right\rangle =$$

$$\int_{\sigma(H(s))} g^2(x/\triangle)d\mu_\varphi(x).$$

Protože $g(x/\triangle) \leq 1, g(x/\triangle) \to 0, g(0) = 1$, tak platí:

$$\lim_{\triangle\to 0}\int_{\sigma(H(s))} g^2(x/\triangle)d\mu_\varphi(x) = \mu_\varphi(0) = 0$$

∎

Tímto jsme dokázali následující větu:

Věta (adiabatická):

Nechť $P(s)$ je hladký konečnědimenzionální spektrální projektor pro omezený hladký hamiltonián $H(s)$, $\forall s \in [0,1]$. Potom pro počáteční stav $\psi_T(0) \in Ran P(0)$ platí:

$$\operatorname{dist}(\psi_T(s), Ran P(s)) \le o(1),\ \forall s \in [0,1]. \tag{5}$$

3.2. Rozšíření adiabatické věty na neomezené hamiltoniány.

V této části uvedeme dvě věty pro neomezené hamiltoniány.Nebudeme už požadovat hladkost $P(s)$ ani $H(s)$. Důkaz těchto vět lze najít v ([2]).

Věta:

Nechť $P(s)$ je konečnědimenzionální spektráln í projektor, alespoň dvakrát diferencovatelný, pro $H(s)$:

1)$\forall s \in [0,1]$ $H(s)$ mají společný def. obor,

2)$H(s)$ jsou omezené zdola,

3)$R(i,s)$ je omezený a diferencovatelný a $H(s)\dot{R}(i,s)$ je omezený.

Potom $\forall s \in [0,1]$

$$\operatorname{dist}(\psi_T(s), Ran P(s)) \le o(1).$$

Pozn.:

Podmínky 1) - 3) zaručují existenci unitárního vývoje pro $H(s)$. Podmínku 3) můžeme ekvivalentně nahradit podmínkou omezenosti $\dot{H}(s)R(i,s)$, protože

$$\begin{aligned}
&H(s)R(i,s) = (H(s)-i)R(i,s) + iR(i,s) = 1 + R(i,s)\\
&\Rightarrow \dot{H}(s)R(i,s) + H(s)\dot{R}(i,s) = -iR(i,s)\dot{H}(s)R(i,s)\\
&\Rightarrow H(s)\dot{R}(i,s) = -H(s)R(i,s)\dot{H}(s)R(i,s).
\end{aligned}$$

V čase s_0, ve kterém se kříží vlastní hodnoty, je $P(s)$ nespojitý, protože jeho dimenze má v s_0 skok. Adiabatická věta však platí i v tomto případě.

Věta:

Nechť $P(s)$, $s \neq s_0$ je konečnědimenzionální spektrální projektor, počástach dvakrát diferencovatelný a všude spojitý na $[0,1]$. Potom $\operatorname{dist}(\psi_T(s), Ran P(s)) \le o(1)$.

V tto kapitole ověříme, zda jde adiabatická věta aplikovat na Aharonovův-Bohmův jev. První část, věnovaná definici Aharonovova-Bohmova jevu, je celá př evzatá z [3]. V další části potom uvádíme své vlastní výsledky.

4.1. Definice a spektrum Aharonovova-Bohmova hamiltoniánu.

Aharonovův-Bohmův hamiltonián je dán nsledujícím samosdruženým operátorem:

$$H = -(\nabla - A(\nabla))^2,$$

$$Dom(H) = \{\psi \in L^2(\mathbb{R}^2, d^2x) \cap H^{2,2}_{loc}(\mathbb{R}^2 - \{0\}), -(\nabla - A(\nabla))^2\psi \in L^2(\mathbb{R}^2, d^2x)\},$$

kde $A = A_{hmf} + A_{AB}$, A_{hmf} představuje homogenní magnetické pole,

$$A_{hmf} = -\frac{iB}{2}(-x_2dx_1 + x_1dx_2)$$

a A_{AB} popisuje idealizovaný Aharonovův-Bohmův jev,

$$A_{AB} = \frac{i\Phi}{2\pi r^2}(-x_2dx_1 + x_1dx_2), r^2 = x_1^2 + x_2^2.$$

Dále bez újmy na obecnosti předpokládejme, že $B > 0$ a položme $\alpha = -\frac{\Phi}{2\pi}$.

Přejdeme-li do polárních souřadnic, dostaneme

$$L^2(\mathbb{R}^2, d^2x) = \sum_{m\in\mathbb{Z}}{}^{\otimes} L^2(\mathbb{R}_+, rdr) \otimes \mathbb{C}e^{im\theta}, H = -\frac{1}{r}\partial_r r\partial_r + \frac{1}{r^2}(-i\partial_\theta + \alpha + \frac{Br^2}{2})^2.$$

Protože operátor H^* komutuje na $Dom(H^*)$ s projektory P_m na vlastní podprostory momentu hybnosti $P_m(r,\theta) = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}\psi(r,\theta')e^{im(\theta-\theta')}d\theta'$ a tedy $H^* = \sum^{\otimes}_{m\in\mathbb{Z}}(H^*)_m$, můž eme pracovat na podprostorech $RanP_m, m \in \mathbb{Z}$ a místo rovnice $H^*\psi = \lambda\psi$ s okrajovou podmínkou $\lim_{r\to 0_+}\psi(r,\theta) = 0$ řešíme rovnice $(H^*)_m\varphi = \lambda\varphi, m \in \mathbb{Z}$, tedy rovnice

$$(-\frac{1}{r}\partial_r r\partial_r + \frac{1}{r^2}(m + \alpha + \frac{Br^2}{2})^2)\varphi(r) = \lambda\varphi(r).$$

Řešením je spočetná množina vlastních čísel

$$\lambda_{m,n} = B(m + \alpha + |m + \alpha| + 2n + 1), m \in \mathbb{Z}, n \in \mathbb{Z}_+$$

s odpovídajícími vlastními funkcemi

$$\varphi_{m,n}(r,\theta) = C_{m,n}r^{|m+\alpha|}L_n^{|m+\alpha|}\left(\frac{Br^2}{2}\right)exp\left(-\frac{Br^2}{4}\right)exp(im\theta),$$

kde $L_n^{|m+\alpha|}\left(\frac{Br^2}{2}\right)$ jsou Laguerrovy polynomy

$$L_n^{|m+\alpha|}(r) = \frac{e^r}{n!}r^{-|m+\alpha|}\frac{d^n}{dr^n}\left(e^{-r}r^{n+|m+\alpha|}\right),$$

a $C_{m,n}$ jsou normalizační konstanty

$$C_{m,n} = \left(\frac{B}{2}\right)^{\frac{1}{2}(|m+\alpha|+1)}\left(\frac{n!}{\pi\Gamma(n + |m+\alpha| + 1)}\right)^{\frac{1}{2}}.$$

Pro pevné $m \in \mathbb{Z}$ tedy máme ortonormální bázi $\{\varphi_{m,n}\}_{n=0}^{\infty}$ v $L^2(\mathbb{R}_+, rdr) \otimes \mathbb{C}e^{im\theta}$ a tedy množina $\{\varphi_{m,n}\}_{m\in\mathbb{Z},n\in\mathbb{Z}_+}$ je ortonormální báze $L^2(\mathbb{R}_+, rdr) \otimes L^2([0, 2\pi], d\theta)$. Protoe dle $\lambda_{m,n} \in \mathbb{R}, \forall m \in \mathbb{Z}, n \in \mathbb{Z}_+$, operátor H je samosdružený s čistě bodovým spektrem.

4.2. **Blabla.**
Nyní vyšetříme, zda lze postup z kapitoly (2.) a tedy i adiabatickou větu z této kapitoly aplikovat na Ahoronovův-Bohmův hamiltonián. Nechť tedy

$$H^0(t) = -\frac{1}{r}\partial_r r \partial_r + \frac{1}{r^2}(-i\partial_\theta + et + \frac{Br^2}{2})^2, \; e = \frac{1}{T},$$

$$H(s) = -\frac{1}{r}\partial_r r \partial_r + \frac{1}{r^2}(-i\partial_\theta + s + \frac{Br^2}{2})^2.$$

Platí $H^0(t) = H(t/T)$.

Z předchozího plyne, že při vyšetřování Hamiltoniánu H se můžeme omezit na pevný vlastní podprostor momentu hybnosti. Buď tedy $m \in \mathbb{Z}$ libovolné, ale pevné. Dále budeme předpokládat, že $m + \alpha \geq 0$ a označíme $s := m + \alpha$. Máme tedy vyšetřit hamiltonián

$$H(s) = -\frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial r} r \frac{\partial}{\partial r} + \frac{1}{r^2}(s + \frac{Br^2}{2})^2$$

Nechť $V(s)$, $Q(s)$, $\Lambda(s)$, $Y(s)$, $\Omega(s)$, $\omega_n(s)$, $C(T,s)$ *a* $P(T,s)$ jsou definovány jako v kapitole 1. Označme $\varphi_n(s) := \varphi_{m,n}(s)$ a podobně i pro $C_{m,n}(s)$ a $\lambda_{m,n}(s)$:

$$\lambda_n = B(2s + 2n + 1), n \in \mathbb{Z}_+$$

$$\varphi_n(s) = C_n r^s L_n^s\left(\frac{Br^2}{2}\right) exp\left(-\frac{Br^2}{4}\right)\exp(im\theta),$$

$$C_n = \left(\frac{B}{2}\right)^{\frac{1}{2}(s+1)}\left(\frac{n!}{\pi\Gamma(n+s+1)}\right)^{\frac{1}{2}}.$$

Závislost $\varphi_n(s)$ na θ nebudeme v dalším uvažovat. Platí $H(s)\varphi_n(s) = \lambda_n(s)\varphi_n(s)$. Zderivujeme-li tuto rovnici podle s, dostaneme:

$$H(s)\frac{\partial}{\partial s}\varphi_n(s) + \frac{\partial}{\partial s}H(s)\varphi_n(s) = \frac{\partial}{\partial s}\lambda_n(s)\varphi_n(s) + \lambda_n(s)\frac{\partial}{\partial s}\varphi_n(s).$$

Z toho plyne

$$\langle\varphi_m(s), H(s)\frac{\partial}{\partial s}\varphi_n(s)\rangle + \langle\varphi_m(s), \frac{\partial}{\partial s}H(s)\varphi_n(s)\rangle = 0 + \langle\varphi_m(s), \lambda_n(s)\frac{\partial}{\partial s}\varphi_n(s)\rangle$$

První člen můžeme napsat jako

$$\lim_{\varepsilon\to 0}\int_\varepsilon^\infty \varphi_m(r,s)\left(-\frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial r}r\frac{\partial}{\partial r}+\frac{1}{r^2}(s+\frac{Br^2}{2})^2\right)\frac{\partial}{\partial s}\varphi_n(r,s)rdr =$$
$$=\lim_{\varepsilon\to 0}\left(-\int_\varepsilon^\infty \varphi_m(r,s)\left(\frac{\partial}{\partial r}r\frac{\partial}{\partial r}\frac{\partial}{\partial s}\varphi_n(r,s)\right)dr+\int_\varepsilon^\infty\left(\frac{1}{r^2}(s+\frac{Br^2}{2})^2\right)\varphi_m(r,s)\frac{\partial}{\partial s}\varphi_n(r,s)rdr\right)=$$
$$=\lim_{\varepsilon\to 0}\left(-\varepsilon\varphi_m(r=\varepsilon,s)\frac{\partial}{\partial r}\frac{\partial}{\partial s}\varphi_n(r=\varepsilon,s)+\int_\varepsilon^\infty r\frac{\partial}{\partial r}\varphi_m(r,s)\frac{\partial}{\partial r}\frac{\partial}{\partial s}\varphi_n(r,s)+\right.$$
$$\left.+\int_\varepsilon^\infty\left(\frac{1}{r^2}(s+\frac{Br^2}{2})^2\right)\varphi_m(r,s)\frac{\partial}{\partial s}\varphi_n(r,s)rdr\right)=$$
$$=\lim_{\varepsilon\to 0}\varepsilon\left(-\varphi_m(r=\varepsilon,s)\frac{\partial}{\partial r}\frac{\partial}{\partial s}\varphi_n(r=\varepsilon,s)+\frac{\partial}{\partial r}\varphi_m(r=\varepsilon,s)\frac{\partial}{\partial s}\varphi_n(r=\varepsilon,s)\right)+$$
$$+\lim_{\varepsilon\to 0}\left(-\int_\varepsilon^\infty\left(-\frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial r}r\frac{\partial}{\partial r}\varphi_m(r,s)\right)\frac{\partial}{\partial s}\varphi_n(r,s)rdr+\int_\varepsilon^\infty\left(\frac{1}{r^2}(s+\frac{Br^2}{2})^2\right)\varphi_m(r,s)\frac{\partial}{\partial s}\varphi_n(r,s)rdr\right)=$$
$$=\lim_{\varepsilon\to 0}\varepsilon\left(-\varphi_m(r=\varepsilon,s)\frac{\partial}{\partial r}\frac{\partial}{\partial s}\varphi_n(r=\varepsilon,s)+\frac{\partial}{\partial r}\varphi_m(r=\varepsilon,s)\frac{\partial}{\partial s}\varphi_n(r=\varepsilon,s)\right)$$
$$+\lambda_m(s)\langle\varphi_m(r,s),\frac{\partial}{\partial s}\varphi_n(r,s)\rangle.$$

Označme

$$K(\varepsilon)=\lim_{\varepsilon\to 0}\varepsilon\left(-\varphi_m(r=\varepsilon,s)\frac{\partial}{\partial r}\frac{\partial}{\partial s}\varphi_n(r=\varepsilon,s)+\frac{\partial}{\partial r}\varphi_m(r=\varepsilon,s)\frac{\partial}{\partial s}\varphi_n(r=\varepsilon,s)\right).$$

Tedy platí:

$$\langle\varphi_m(r,s),\frac{\partial}{\partial s}\varphi_n(r,s)\rangle=\frac{1}{\lambda_n-\lambda_m}\left(K(\varepsilon)+\int_\varepsilon^\infty\varphi_m(s)\frac{\partial}{\partial s}H(s)\varphi_n(s)rdr\right).$$

Nechť nyní je $s>0$. Přímým výpočtem lze zjistit, že

$$K(r)=-\frac{1}{2}C_m(s)C_n(s)\frac{B}{2}^{s+1}r^{2s-1}\exp(-\frac{Br^2}{2})\times$$
$$\times\left\{2L_m^s(\frac{Br^2}{2})L_n^s(\frac{Br^2}{2})+Br^2\left([L_m^s(\frac{Br^2}{2})L_{n-1}^{s+1}(\frac{Br^2}{2})-L_{m-1}^{s+1}(\frac{Br^2}{2})L_n^s(\frac{Br^2}{2})]\times\right.\right.$$
$$\left.\left.\times[\ln 2-\ln B-2\ln r-\frac{\Gamma'(n+s+1)}{\Gamma(n+s+1)}]+2L_{m-1}^{s+1}(\frac{Br^2}{2})L_n^{s\,(0,1,0)}(\frac{Br^2}{2})+2L_m^s(\frac{Br^2}{2})L_n^{s\,(0,1,1)}(\frac{Br^2}{2})\right)\right\}.$$

Proto

$$\langle\varphi_m(r,s),\frac{\partial}{\partial s}\varphi_n(r,s)\rangle=\frac{1}{\lambda_n-\lambda_m}\langle\varphi_m(s)\frac{\partial}{\partial s}H(s)\varphi_n(s)\rangle,\ s>0$$

$$\langle\varphi_m(s)\frac{\partial}{\partial s}H(s)\varphi_n(s)\rangle = 2sC_m(s)C_n(s)\int_0^\infty r^{2s-1}\exp(-\frac{Br^2}{2})L_m^s(\frac{Br^2}{2})L_n^s(\frac{Br^2}{2})dr =$$

$$= sC_m(s)C_n(s)\left(\frac{2}{B}\right)^s\int_0^\infty r^{s-1}\exp(-r)L_m^s(r)L_n^s(r)dr =$$

$$= sC_m(s)C_n(s)\left(\frac{2}{B}\right)^s\sum_{k=0}^{m}\sum_{l=0}^{n}(-1)^{k+l}\frac{\Gamma(m+s+1)\Gamma(n+s+1)}{\Gamma(k+s+1)\Gamma(l+s+1)}\frac{1}{k!l!(m-k)!(n-l)!}\times$$

$$\times\int_0^\infty r^{k+l+s-1}\exp(-r)dr = sC_m(s)C_n(s)\left(\frac{2}{B}\right)^s\times$$

$$\times\sum_{k=0}^{m}\sum_{l=0}^{n}(-1)^{k+l}\frac{\Gamma(m+s+1)\Gamma(n+s+1)}{\Gamma(k+s+1)\Gamma(l+s+1)}\frac{1}{k!l!(m-k)!(n-l)!}\Gamma(k+l+s). \tag{6}$$

Lemma:

Pro $n, m \in \mathbb{Z}_+,\ m < n$ platí:

$$\langle\varphi_m(0), Q(s)\varphi_n(0)\rangle = i\left(\frac{2}{B}\right)^s\frac{C_m(s)C_n(s)}{2B(n-m)}\frac{\Gamma(m+s+1)}{\Gamma(m+1)}, \tag{7}$$

je-li $n, m \in \mathbb{Z}_+,\ m > n$, potom:

$$\langle\varphi_m(0), Q(s)\varphi_n(0)\rangle = i\left(\frac{2}{B}\right)^s\frac{C_m(s)C_n(s)}{2B(n-m)}\frac{\Gamma(n+s+1)}{\Gamma(n+1)},\ \forall s \geq 0. \tag{8}$$

Důkaz:

Platí

$$\langle\varphi_m(0), Q(s)\varphi_n(0)\rangle = i\langle V(s)\varphi_m(0), \dot{V}(s)\varphi_n(0)\rangle = i\langle\varphi_m(s), \frac{\partial}{\partial s}\varphi_n(s)\rangle.$$

1)Nechť $s > 0$. Z (6) plyne, že

$$\langle\varphi_m(s), \frac{\partial}{\partial s}\varphi_n(s)\rangle = \left(\frac{2}{B}\right)^s\frac{sC_m(s)C_n(s)}{2B(n-m)}S_{m,n},\ \text{kde}$$

$$S_{m,n} = \sum_{k=0}^{m}\sum_{l=0}^{n}(-1)^{k+k}\frac{\Gamma(m+s+1)}{\Gamma(k+s+1)\Gamma(m+1)}\binom{m}{k}\sum_{l=0}^{n}\frac{\Gamma(n+s+1)}{\Gamma(l+s+1)\Gamma(n+1)}\binom{n}{l}\Gamma(k+l+s).$$

Pro m=0 máme

$$S_{0,n} = \sum_{l=0}^{n}(-1)^l\frac{\Gamma(n+s+1)}{\Gamma(l+s+1)\Gamma(n+1)}\binom{n}{l}\Gamma(l+s) =$$

$$= \frac{\Gamma(n+s+1)}{\Gamma(n+1)}\sum_{l=0}^{n}\frac{(-1)^l}{l+s}\binom{n}{l}$$

Označme $F(x) = \sum_{l=0}^n \frac{(-1)^l}{l+s}\binom{n}{l}x^{l+s}$. Potom $F'(x) = \sum_{l=0}^n(-1)^l\binom{n}{l}x^{l+s-1} = x^{s-1}(1-x)^n$ a platí

$$S_{0,n} = \frac{\Gamma(n+s+1)}{\Gamma(n+1)}F(1) = \frac{\Gamma(n+s+1)}{\Gamma(n+1)}\int_0^1 y^{s-1}(1-y)^n dy = \frac{\Gamma(n+s+1)}{\Gamma(n+1)}\mathrm{B}(s,n+1) = \Gamma(s),$$

kde $\mathrm{B}(a,b)$ je beta funkce proměnných a a b.

Buď nyní $m = 1$. Potom

$$S_{1,n} = \frac{\Gamma(s+2)}{s+1} S_{0,n} + \sum_{l=0}^{n} (-1)^{l+1} \frac{\Gamma(n+s+1)}{\Gamma(n+1)} \binom{n}{l} = (s+1)\Gamma(s) = \frac{\Gamma(s+2)}{s}.$$

Nechť konečně $m \geq 2,\ n \in \mathbb{Z}_+,\ m \neq n$. Potom platí:

$$S_{m,n} = \sum_{k=0}^{m} (-1)^k \frac{\Gamma(m+s+1)}{\Gamma(k+s+1)\Gamma(m+1)} \binom{m}{k} \sum_{l=0}^{n} (-1)^l \frac{\Gamma(n+s+1)}{\Gamma(l+s+1)\Gamma(n+1)} \binom{n}{l} \Gamma(k+l+s) =$$

$$\sum_{k=0,1} \ldots + \sum_{k=2}^{m} (-1)^k \frac{\Gamma(m+s+1)}{\Gamma(k+s+1)\Gamma(m+1)} \binom{m}{k} \times$$

$$\times \sum_{l=0}^{n} (-1)^l \frac{\Gamma(n+s+1)}{\Gamma(n+1)} \binom{n}{l} (l+s+1)(l+s+2)\ldots(l+s+k-1)$$

První suma je rovna

$$\frac{\Gamma(m+s+1)}{\Gamma(m+1)} \left[\frac{\Gamma(s)}{\Gamma(s+1)} - \sum_{l=0}^{n} (-1)^l \frac{\Gamma(n+s+1)}{\Gamma(s+2)\Gamma(n+1)} \binom{n}{l} \right] = \frac{\Gamma(m+s+1)}{s\Gamma(m+1)}.$$

Pro výpočet druhé sumy označme $F_n = \sum_{k=2}^{m} (-1)^k \frac{\Gamma(m+s+1)}{\Gamma(k+s+1)\Gamma(m+1)} \binom{m}{k} \times$
$\times \sum_{l=0}^{n} (-1)^l \frac{\Gamma(n+s+1)}{\Gamma(n+1)} \binom{n}{l} (l+s+1)(l+s+2)\ldots(l+s+k-1)$

$$F_n(x) = \sum_{l=0}^{n} (-1)^l \binom{n}{l} x^{k+l+s-1} = x^{k+s-1}(1-x)^n.$$ Je-li $n > m$, plat í

$$F_n = \sum_{k=2}^{m} (-1)^k \frac{\Gamma(m+s+1)}{\Gamma(k+s+1)\Gamma(m+1)} \binom{m}{k} F_n^{(k-1)}(x=1) =$$

$$= \sum_{k=2}^{m} (-1)^k \frac{\Gamma(m+s+1)}{\Gamma(k+s+1)\Gamma(m+1)} \binom{m}{k} \left(\sum_{i=0}^{k-1} (x^{k+s-1})^{(i)} (1-x)^{(k-1-i)} \right)_{x=1} \stackrel{n \geq m}{=} 0.$$

Tím je důkaz hotov pro $n > m$.

Je-li nyní $m > n$, tvrzení plyne ze symetrie $S_{m,n}$ v m, n.

2)$s = 0$. Tvrzení lze jednoduše dostat limitním přechodem, protože jak $\langle \varphi_m(s), \varphi_n(s) \rangle$, tak i $S_{m,n}$ jsou spojité v $s = 0$ a mají v 0 konečnou limitu, platí:

$$|\langle \varphi_m(0), \frac{\partial}{\partial s} \varphi_n(0) \rangle| = \lim_{s \to 0} |\langle \varphi_m(s), \varphi_n(s) \rangle| = \lim_{s \to 0} |\frac{\Gamma(m+s+1)}{2B(n-m)\Gamma(m+1)} C_m(s) C_n(s)| = \frac{1}{4\pi|n-m|}.$$

∎

Pozn.: Pro odhad $\|Q(s)\|$ nemůžeme použít Schur-Holmgrenovu větu, protože $\sup_m \sum_n |\langle \varphi_m(0), Q(s)\varphi_n(0) \rangle| = \infty$. Musíme tedy postupovat jinak.

Nejprve nechť $s = 0$. Ukážeme, že $\|Q(0)\|$ je konečná. Nejprve přejdeme z $\mathcal{H}$ do $l^2(\mathbb{Z}_+)$. Operátor $Q(0)$ v bázi $\varphi_n(0)$ je matice se složkami.

$$Q_{m,n} = \frac{1}{4\pi(n-m)} = q(n-m), \text{ kde}$$

$$\begin{aligned} q(n) := & \quad \frac{1}{4\pi n}, \qquad n \neq 0 \\ = & \quad 0, \qquad n = 0 \end{aligned}$$

Nechť P je OG projektor $l^2(\mathbb{Z})$ na $l^2(\mathbb{Z}_+)$. Pak plat í

$$Q = P\tilde{Q}P, \qquad \tilde{Q}x = \sum_{m\in\mathbb{Z}} q(n-m)x_m, \qquad \forall x = (x_1, \ldots, x_m, \ldots) \in l^2(\mathbb{Z}).$$

Platí $\|Q\| \leq \|\tilde{Q}\|$. Nechť

$$F : l^2(\mathbb{Z}) \to L^2([-\pi,\pi], d\varphi) : x = (x_m) \to f(\varphi) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \sum_{n\in\mathbb{Z}} x_n e^{in\varphi},$$

$$F^{-1} : L^2([-\pi,\pi], d\varphi) \to l^2(\mathbb{Z}) : f(\varphi) \to x = (x_n) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\pi}^{\pi} f(\varphi) e^{-in\varphi} d\varphi,$$

jsou Fourierova a inverzní Fourierova transformace vektoru x.

Dokažme nyní, že $(F\tilde{Q}F^{-1})f(\varphi) = \tilde{q}(\varphi)f(\varphi)$, kde $\tilde{q}(\varphi) = \sum_{m\in\mathbb{Z}} q(m)e^{im\varphi}$:

$$(F^{-1}f)_m = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\pi}^{\pi} f(\varphi)e^{-in\varphi} d\varphi,$$

$$(\tilde{Q}F^{-1}f)_m = \sum_{m\in\mathbb{Z}} \frac{q(n-m)}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\pi}^{\pi} f(\varphi)e^{-in\varphi} d\varphi,$$

$$(F\tilde{Q}F^{-1})f = \frac{1}{2\pi} \sum_{m,n} q(n-m)e^{in\varphi} \int_{-\pi}^{\pi} f(\psi)e^{-im\psi} d\psi = \frac{1}{2\pi} \sum_{m,n} q(n)e^{i(n+m)\varphi} \int_{-\pi}^{\pi} f(\psi)e^{-im\psi} d\psi =$$

$$= \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \sum_{n} q(n)e^{in\varphi} \sum_{m} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{im\varphi} \int_{-\pi}^{\pi} f(\psi)e^{-im\psi} d\psi = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \sum_{n} q(n)e^{in\varphi} f(\varphi)$$

Teď už je snadné dokázat, že $\|Q(0)\| < \infty$:

$$\sum_n \frac{e^{in\varphi}}{n} = 2i \sum_n \frac{\sin n\varphi}{n} = 2i\varphi.$$

$$\Rightarrow \|Q\| \leq \|\tilde{Q}\| \leq \|F\tilde{Q}F^{-1}\| = \frac{1}{2\sqrt{2\pi}}$$

==

Nyní zbývá určit $\left\|\left(\int_0^{s'} P(T,s)ds\varphi_n(0)\right)\right\|$. Buď $S > 0$, $s' \in [0, s']$. Platí:

$$\left\|\left(\int_0^{s'} P(T,s)ds\varphi_n(0)\right)\right\|^2 = \sum_{m=0}^{\infty} \left| \langle \varphi_m(0), \left(\int_0^{s'} P(T,s)ds\right) \varphi_n(0)\rangle \right|^2 =$$

$$= \sum_{m=0}^{\infty} \left| \int_0^{s'} \langle \varphi_m(0), Q(s)\varphi_n(0)\rangle \exp(iT(\omega_m(s) - \omega_n(s)))ds \right|^2 . \tag{9}$$

Označme $f(s) = \langle \varphi_m(0), Q(s)\varphi_n(0)\rangle$ a $g(s) = \omega_m(s) - \omega_n(s)$.

Protože $g(s) \in C([\alpha,\beta])$ i $\frac{f(s)}{g^{'}(s)} \in C([\alpha,\beta])$ jsou na $[0,s^{'}]$ monotonní a

$$\int_0^\delta \cos(Tg(s))g^{'}(s)ds = \frac{1}{T}\int_{T(g(0))}^{T(g(\delta))} \cos(x)dx \leq \frac{2}{T},$$

$$\int_0^\delta \sin(Tg(s))g^{'}(s)ds = \frac{1}{T}\int_{T(g(0))}^{T(g(\delta))} \sin(x)dx \leq \frac{2}{T},$$

můžeme na (9) použít větu o střední hodnotě a dostaneme:

$$\left|\int_0^{s^{'}} f(s)\cos(Tg(s))ds\right| = \left|\int_0^{s^{'}} \frac{f(s)}{g^{'}(s)}\cos(Tg(s))g^{'}(s)ds\right| =$$

$$= \left|\frac{f(0)}{g^{'}(0)}\int_0^\delta \cos(Tg(s))g^{'}(s)ds + \frac{f(s')}{g^{'}(s')}\int_\delta^{s^{'}} \cos(Tg(s))g^{'}(s)ds\right| \leq$$

$$\leq \frac{1}{2B^2T(n-m)^2}\left(\left(\frac{2}{B}\right)^{s^{'}}\sqrt{\frac{\Gamma(\max(m,n)+1)\Gamma(\min(m,n)+s'+1)}{\Gamma(\max(m,n)+s'+1)\Gamma(\min(m,n)+1)}}+1\right),$$

$$\Rightarrow \frac{1}{2}\left\|\left(\int_0^{s^{'}} P(T,s)ds\varphi_n(0)\right)\right\|^2 \leq$$

$$\leq \sum_{m=0}^{\infty}\frac{1}{4B^4T^2(n-m)^4}\left[\left(\frac{2}{B}\right)^{2s^{'}}\frac{\Gamma(\max(m,n)+1)\Gamma(\min(m,n)+s'+1)}{\Gamma(\max(m,n)+s'+1)\Gamma(\min(m,n)+1)}+\right.$$

$$\left.+1+2\left(\frac{2}{B}\right)^{s^{'}}\sqrt{\frac{\Gamma(\max(m,n)+1)\Gamma(\min(m,n)+s'+1)}{\Gamma(\max(m,n)+s'+1)\Gamma(\min(m,n)+1)}}\right] \leq$$

$$\leq \frac{1}{B^4T^2}\left[\sum_{m=0}^{\infty}\frac{1}{(m-n)^4}+\max\left(1,\left(\frac{2}{B}\right)^{2S}\right)\sum_{m=0}^{n-1}\frac{1}{(m-n)^4}\frac{\Gamma(m+S+1)}{\Gamma(m+1)}+\right.$$

$$+2\max\left(1,\left(\frac{2}{B}\right)^{S}\right)\sum_{m=0}^{n-1}\sqrt{\frac{1}{(m-n)^4}\frac{\Gamma(m+S+1)}{\Gamma(m+1)}}+$$

$$+\max\left(1,\left(\frac{2}{B}\right)^{2S}\right)\frac{\Gamma(n+S+1)}{\Gamma(n+1)}\sum_{m=0}^{\infty}\frac{1}{m^4}+$$

$$\left.+\,2\max\left(1,\left(\frac{2}{B}\right)^{S}\right)\sqrt{\frac{\Gamma(n+S+1)}{\Gamma(n+1)}}\sum_{m=0}^{\infty}\frac{1}{m^4}\right] = C^2T^{-2}. \qquad (10)$$

Máme tedy: $\exists C \geq 0 :\ \forall s^{'} \in [0,S],\ \forall T > 0$ platí

$$\left\|\left(\int_0^{s^{'}} P(T,s)ds\varphi_n(0)\right)\right\| \leq \sqrt{2}CT^{-1},\ \forall n \in \mathbb{N},$$

kde konstanta C je určena výrazem v hranatých závorkách v (10).Z adiabatické věty tedy plyne:

$$\forall s \in [0,S],\ \forall T > 0 :$$
$$\parallel \psi_n(Ts) - \exp(-iTs(1+2n+s))\varphi_n(s) \parallel \leq Ce^{MS}T^{-1}. \tag{11}$$

Reference

[1] M. Born, V. Fock: *Beweis des Adiabatensatzes*, Zsch. Physik **51**, 165-180 (1928).

[2] Joseph E. Avron, Alexander Elgart: *Adiabatic theorem without a gap condition*, Communications in mathematical physics **203**, 445-463 (1999).

[3] P. Exner, P. Šťov/'/i/v cek, P. Vyt/v ras: *Generalised boundary conditions for the Aharonov-Bohm effect combined with a homogenous magnetic field.*