Symetrie diferenciálních rovnic

Hynek Lavička

Červen 2000

1 Úvod

Cílem tohoto textu je ukázat rozdíly mezi klasickou (Lieovou) metodou, přímou metodou a podmíněnými symetriemi parciálních diferencálních rovnic. Přičemž se budu zajímat pouze o výpočty těchto typů symetrií, nikoliv o jejich teoretický základ. Dále zde uvedu příklady výpočtu všech uvedených typů symetrií.

2 Klasické Lieovy symetrie

Nechť tedy máme systém m diferenciálních rovnic řádu n

$$E^i(x,u,u^{(1)},...,u^{(n)})=0,\ x\in\mathcal{R}^p,\ u\in\mathcal{R}^q,\ i=1..m;\ m,n,p,q\in\mathcal{N}, \quad (1)$$

kde symbol $u^{(l)}$ označuje všechny parciální derivace řádu l všech složek vektoru u. $\mathcal{R}$ znamená reálná čísla a $\mathcal{N}$ označujeme přirozená čísla.

Budeme-li nyní předpokládat bodové transformace

$$x^*=\Phi(x,u),\ u^*=\Psi(x,u) \quad (2)$$

takové, že funkci $g=g(x)$, která řeší systém (1) transformují na funkci $g^*=g^*(x^*)$, která opět řeší systém (1). Tyto transformace nazveme bodové, protože nové souřadnice (x^*,u^*) závisí pouze na starých souřadnicích (x,u). Transformace (2) tvoří lokální lieovu grupu, takže tato transformace je definovaná a invertibilní pro malé okolí jednotkového prvku v grupě a pro malé okolí počátku v $\mathcal{R}^{p+q}$.

Teď bychom mohli použít rovnice (2) a spočítat derivace funkce $u^*(x^*)$ $u^{*(1)},u^{*(2)},...,u^{*(n)}$ a dosadit do rovnice (1), ale dostali bychom minimálně stejně těžkou úlohu pro funkce $\Phi(x,u)$ a $\Psi(x,u)$. Lie ukázal, že všechny podstatné informace mohou být získány z infinitesimálního přiblížení

$$x_i^*=x_i+\varepsilon\xi_i(x,u),\ u_j^*=u_j+\varepsilon\eta_j(x,u),\ i=1,...,p,\ j=1,...,q. \quad (3)$$

Funkce $\xi_i(x,u), i=1,...,p$ a $\eta_j(x,u), j=1,...,q$ jsou složky vektorového pole

$$\hat{X}=\sum_{i=1}^{p}\xi_i(x,u)\,\partial_{x_i}+\sum_{j=1}^{q}\eta_j(x,u)\,\partial_{u_j}, \quad (4)$$

tyto pole tvoří Lieovu algebru. Každé pole zvlášť generuje jednoparametrickou podgrupu grupy symetrií, kterou získáme integrováním vektorového pole.

$$\frac{dx_i^*(\varepsilon)}{d\varepsilon} = \xi_i(x^*, u^*), \quad x_i^*(0) = x_i,$$
$$\frac{du_i^*(\varepsilon)}{d\varepsilon} = \eta_j(x^*, u^*), \quad u_i^*(0) = u_i \tag{5}$$

Celou grupu symetrií bychom získali složitějším procesem.

Teď zde ukážu algoritmus pro počítání algebry symetrií tedy $\hat{X}$ tvaru (4), která generují grupu symetrií. Důkazy jsou uvedeny v [Ol1] .

2.1 Výpočet grupy symetrií pro algebraické rovnice

Nyní předpokládejme soustavu algebraických rovnic.

$$F^i(x,u) = 0,\ x \in \mathcal{R}^p,\ u \in \mathcal{R}^q,\ i = 1..m;\ m,p,q \in \mathcal{N} \tag{6}$$

Nechť máme grupu symetrií G rovnice (6) (akce grupy G transformuje řešení (6) do řešení (6)). Tato akce působí na prostoru závislých proměných a nezávislých proměných současně.

$$G : \{x,u\} \rightarrow \ \{x^*,u^*\}; \quad \{x,u\},\{x^*,u^*\} \in M \subset \mathcal{R}^{p+q}, \tag{7}$$

kde M je množina řešení rovnice (6) v prostoru $\mathcal{R}^{p+q}$. Takže máme-li funkci $g(x)$ takovou, že řeší (6), pak akce grupy splňuje

$$h.\{x, g(x)\} \in M, \quad h \in G \tag{8}$$

Lieovu algebru grupy symetrií systému algebraických rovnic (6) získáme řešením

$$\hat{X}.F^i(x,u)|_{F^i(x,u)=0} = 0, \quad i = 1,...,m \tag{9}$$

jako rovnice pro $\xi_i(x,u)$ a $\eta_j(x,u)$, $i = 1,...,p$ a $j = 1,...,q$, kde působení vektorového pole na funkci je míněno jako působení diferenciálního operároru (4).

Ze znalosti konkrétních vektorových polí $\hat{X}$, lze spočítat jednoparametrické podgrupy grupy symetrií rovnice (6) pomocí vztahu (5).

2.2 Výpočet grupy symetrií pro diferencialní rovnice

Zde se konečně dostanu k soustavě diferenciálních rovnic (1) a jejím symetriím. Vše lze nalézt v [Ol1].

Budeme nyní vyšetřovat grupu symetrií rovnice (1). Zapíšeme-li (1) jako rovnici

$$E^i(x, u, u^{(1)}, ..., u^{(n)}) = 0, \ x \in \mathcal{R}^p, \ u \in \mathcal{R}^q, \ i = 1..m; \ m, n, p, q \in \mathcal{N}, \quad (10)$$

kde $u, u^{(1)}, ..., u^{(n)}$ jsou funkce a její derivace, nelze teď spočítat grupu symetrií algebraické rovnice (10) pomocí metody popsané v předchozím odstavci, protože bychom nezohlenili to, jak se transformují proměné $u^{(1)}, ..., u^{(n)}$, protože tyto proměnné zastupují derivace a proto se musí transformovat jako derivace. Zohledníme-li to, potom bude grupa symetrií diferenciální rovnice (1) shodná s (7)

$$G : \{x, u\} \to \ \{x^*, u^*\}; \quad \{x, u\}, \{x^*, u^*\} \in M \subset \mathcal{R}^{p+q}, \quad (11)$$

ale její působení na rovnici (10) bude dáno prolongací G (v prolongaci bude zohledněno to, jak se derivace transformují)

$$pr^{(n)} \ G : \{x, u, u^{(1)}, ..., u^{(n)}\} \to \ \{x^*, u^*, u^{*\ (1)}, ..., u^{*\ (n)}\} \quad (12)$$

Potom Lieovy algebry grupy symetrií $pr \ G^{(n)}$ splňují rovnici

$$pr^{(n)} \ \hat{X} = \hat{X} + \sum_{i=1}^{q} \sum_{j=1}^{n} \sum_{J(j)} \Phi_i^{J(j)} \frac{\partial}{\partial u^i_{J(j)}}, \quad (13)$$

kde J je b-složkový multiindex $(J_1, ..., J_b), 1 \leq J_k \leq p, \ k = 1, ..., b;$
$j = J_1 + J_2 + ... + J_b$, přičemž

$$\Phi_i^{J_1} = D_{x_{J_1}} \phi_i - \sum_{j=1}^{p} (D_{x_{J_1}} \xi_j) u_{i;x_{J_1}} \quad (14)$$

$$\Phi_i^{(J_1,...,J_n,J_{n+1})} = D_{x_{J_{n+1}}} \Phi_i^{(J_1,...,J_n)} - \sum_{j=1}^{p} (D_{x_{J_{n+1}}} \xi_j) u_{i;x_{J_1},...,x_{J_n},x_j}, \quad (15)$$

kde

$$D_{x_i} = \frac{\partial}{\partial x_i} + \sum_{i=1}^{q} \frac{\partial u_i}{\partial x_i} \frac{\partial}{\partial u_i} + \sum_{i=1}^{q} \sum_{j=1}^{p} \frac{\partial u_{i;x_j}}{\partial x_i} \frac{\partial}{\partial u_{i,x_j}} + ... \quad (16)$$

$\Phi_i^{(J_1,...,J_n,J_{n+1})}$ byly zvoleny tak, aby zohledňovali transformaci proměných $u^{(1)},...,u^{(n)}$ jako transformaci derivací. Lieova algebry grupy symetrií $\hat{X}$ a $pr^{(n)}\ \hat{X}$, tvoří lieovu algebry, které jsou navzájem izomorfní, podle definice

$$pr^{(n)}\ (a\hat{X}_1 + b\hat{X}_2) = a\, pr^{(n)}\ \hat{X}_1 + b\, pr^{(n)}\ \hat{X}_2 \tag{17}$$

$$[pr^{(n)}\ \hat{X}_1, pr^{(n)}\ \hat{X}_2] = pr^{(n)}\ [X_1,\hat{\ } X_2] \tag{18}$$

Lieovy algebry grupy symetrií spočítáme jako

$$pr^{(n)}\ \hat{X}.E^i|_{E^i=0} = 0, \quad i = 1, ..., m\ , \tag{19}$$

s tím, že jde o systém rovnic pro neznámé $\xi_i(x,u)$ a $\eta_j(x,u)$; $i = 1,...,p$ $j = 1,...,q$ z (4).

Při výpočtu symetrií může dojít k těmto případům.

1. Při výpočtu (19) vyjdou souřadnice vektorového pole (4) triviální, tedy

$$\begin{aligned} \xi_i(x,u) &= 0, \quad i = 1,...,p \\ \phi_j(x,u) &= 0, \quad j = 1,...,q \end{aligned} \tag{20}$$

2. Obecná řešení (19) závisí na N integračních konstantách. Dimenze Lieovy algebry grupy symetrií je konečná a je rovna N.

3. Obecně řešení závisí na libovolných funkcích. Lieova algebra grupy symetrií je nekonečně-rozměrná. Tento případ vždy nastává u lineárních diferenciálních rovnic jako důsledek platnosti lineárního superpozičního pravidla u dané rovnice.

2.2.1 Příklad Korteweg-de Vries

Máme diferenciální rovnici

$$E(x,t,u,u_x,u_t,u_{xxx}) \equiv u_t + uu_x + u_{xxx} - f(x,t) = 0, \tag{21}$$

vektorová pole budeme hledat ve tvaru [CW1]

$$\hat{X} = \xi(x,t,u)\partial_x + \tau(x,t,u)\partial_t + \phi(x,t,u)\partial_u \tag{22}$$

Pro tuto rovnici bude (19) vypadat takto

$$pr^{(3)}\ \hat{X}.E(x,t,u,u_x,u_t,u_{xxx})|_{E(x,t,u,u_x,u_t,u_{xxx})=0}=0, \tag{23}$$

po dosazení z (21)

$$\phi^t+\phi u_x+u\phi^x+\phi^{xxx}-\xi\frac{\partial f}{\partial x}-\tau\frac{\partial f}{\partial t}|_{u_t+uu_x+u_{xxx}-f=0}=0, \tag{24}$$

kde

$$\begin{aligned}
\phi^t &= D_t\phi-(D_t\tau)u_t-(D_t\xi)u_x \\
&= \phi_t-\xi_t u_x+(\phi_u-\tau t)u_t-\xi_u u_x u_t-\tau_u u_t^2, && (25)\\
\phi^x &= \phi_x+(\phi_u-\xi_x)u_x-\tau_x u_t-\xi_u u_x^2-\tau_u u_x u_t, && (26)\\
\phi^{xx} &= D_x\phi^x-(D_x\xi)u_{xx}-(D_x\tau)u_{xt}, && (27)\\
\phi^{xxx} &= D_x\phi^{xx}-(D_x\xi)u_{xxx}-(D_x\tau)u_{xxt}\\
&= \phi_{xxx}+(3\phi_{xxu}-\xi_{xxx})u_x-\tau_{xxx}u_t\\
&\quad +3(\phi_{xuu}-\xi_{xxu})u_x^2-3\tau_{xxu}u_x u_t\\
&\quad +(\phi_{uuu}-3\xi_{xuu})u_x^3-3\tau_{xuu}u_x^2u_t-\xi_{uuu}u_x^4\\
&\quad -\tau_{uuu}u_x^3u_t+3(\phi_{ux}-\xi_{xx})u_{xx}-3\tau_{xx}u_{tx}\\
&\quad +3(\phi_{uu}-3\xi_{xu})u_x u_{xx}-6\tau_{xu}u_x u_{xt}\\
&\quad -3\tau_{ux}u_t u_{xx}-6\xi_{uu}u_x^2u_{xx}\\
&\quad -3\tau_{uu}u_x u_t u_{xx}-3\tau_{uu}u_x^2u_{xt}-3\xi_u u_{xx}^2\\
&\quad -3\tau_u u_{xt}u_{xx}+(\phi_u-3\xi_x)u_{xxx}-3\tau_x u_{xxt}\\
&\quad -\tau_u u_t u_{xxx}-4\xi_u u_x u_{xxx}-3\tau_u u_x u_{xxt} && (28)
\end{aligned}$$

po dosazení (25),(24),(25) a(26) do (24) a sepsání koeficientů u všech členů se stejnými koeficienty $u_t^a u_x^b u_{xx}^c u_{xt}^d u_{xxt}^e$, kde a, b, c, d a e jsou celá čísla, protože například u_x teď neoznačuje derivaci, ale nezávislou proměnou.

Sepíšeme-li si koeficienty u $u_x u_{xxt}$, u_{xxt}, u_{xx}^2 a $u_x u_{xx}$ získáme

$$\tau_u=0,\quad \tau_x=0,\quad \xi_u=0\quad \phi_{uu}=0 \tag{29}$$

odtud tedy

$$\begin{aligned}
\xi &= \xi(x,t),\\
\tau &= \tau(t), && (30)\\
\phi &= A(x,t)u+B(x,t)
\end{aligned}$$

dosadíme-li tyto výsledky do ostatních koeficientů

$$A_x = 0, \quad \xi_{xx} = 0, \quad -\xi_t + B = 0, \quad A_t + B_x = 0,$$
$$A + 2\xi_x = 0, \quad -\tau_t + 3\xi_x = 0 \tag{31}$$

To vše platí pro jakoukoli funkci f(x,t). Koeficienty musí mít tvar

$$\begin{aligned} \tau &= C_1 + 3C_2 t, \\ \xi &= C_2 x + \gamma(t), \\ \phi &= -2C_2 u + \frac{d\gamma}{dt} \end{aligned} \tag{32}$$

kde C_1, C_2 jsou konstanty a $\gamma(t)$ nějaká funkce splňující

$$-\frac{d^2\gamma}{dt^2} + 5C_2 f + (C_2 x + \gamma) f_x + (C_1 + 3C_2 t) f_t = 0 \tag{33}$$

nyní můžeme postupovat dvěma způsoby

1. Určíme funkci $f(x,t)$ a vyřešíme (33) a získáme konkrétní vyjádření funkcí $\xi(x,t,u)$, $\tau(x,t,u)$ a $\phi(x,t,u)$.

2. Budeme předpokládat, že existuje netriviální algebra a budeme se ptát jak musíme f(x,t) volit, aby byla netriviální.

My si určíme konkrétně funkci $f(x,t)$.

$$f(x,t) = 0, \tag{34}$$

potom se (33) zredukuje na

$$\frac{d^2\gamma(t)}{dt^2} = 0 \tag{35}$$

vyřešíme

$$\gamma(t) = C_3 t + C_4 \tag{36}$$

hledané funkce tedy jsou

$$\begin{aligned} \xi(x,t,u) &= C_2 x + C_3 t + C_4, \\ \tau(x,t,u) &= C_1 + 3C_2 t \\ \phi(x,t,u) &= -2C_2 u + C_3 \end{aligned} \tag{37}$$

vybereme si nějakou bázi v prostoru vektorových polí tvořící Lieovu algebru grupy symetrií. Nejjednodušší je zvolit $C_i = 1$, $i \in \{1,2,3,4\}$ a $C_j = 0$, $j \in \{1,2,3,4\} - \{i\}$, pak získáme

$$\begin{aligned} P_0 &= \partial_t, \\ P_1 &= \partial_x, \\ B &= t\partial_x + \partial_u \\ D &= x\partial_x + 3t\partial_t - 2u\partial_u \end{aligned} \tag{38}$$

Když si pro jednotlivá pole vyrobíme jednoparametrické grupy (5), vidíme, že jsme získali postupně translaci v čase, translaci v prostoru, Galileovu transformaci a škálovací transformaci.

U tohoto případu lze získat i celou grupu symetrií rovnice (21) s (34), která vypadá takto

$$\begin{aligned} x^* &= e^{\lambda}(x - x_0 + v(t + t_0)), \\ t^* &= e^{3\lambda}(t + t_0), \\ u^* &= e^{-2\lambda}(u + v), \end{aligned} \tag{39}$$

kde t_0, x_0, v a λ jsou libovolné konstanty. Máme-li funkci $u(x,t)$ takovou, že řeší (21) s (34),

$$\begin{aligned} u^*(x^*, t^*) &= e^{-2\lambda}(u(x,t) + v), \\ x &= e^{-\lambda}x^* - x_0 - ve^{-3\lambda}t^*, \\ t &= e^{-3\lambda}t^* - t_0 \end{aligned} \tag{40}$$

pak funkce $u^*(x^*, t^*)$ řeší naší diferenciální rovnici.

2.2.2 Příklad Boussinesqova rovnice

Budeme diskutovat symetrie diferenciální rovnice

$$E(x, t, u, u_x, u_{xx}, u_{tt}, u_{xxxx}) \equiv u_{tt} + uu_{xx} + u_x^2 + u_{xxxx} = 0 \tag{41}$$

Rovnice (19) v našem případě dostává tvar

$$pr^{(4)}\ \hat{X}.E(x, t, u, , u_x, u_{xx}, u_{tt}, u_{xxxx})|)_{E(x,t,u,u_x,u_{xx},u_{tt},u_{xxxx})=0} = 0. \tag{42}$$

Použijeme metodu popsanou výše a dostaneme rovnice

$$
\begin{aligned}
\xi_t = 0, \quad \xi_u = 0, \quad \tau_x = 0, \quad \tau_u = 0,\\
\phi_{uu} = 0, \quad 2\xi_x - \tau_t = 0, \quad \phi_u + 2\xi_x = 0,\\
2\phi_{xu} - 3\xi_{xx} = 0, \quad 2\phi_{tu} - \tau_{tt} = 0,\\
\phi_{tt} + \phi_{xxxx} + u\phi xx = 0,\\
\phi + 2u\xi_x - 4\xi_{xxx} + 6\phi_{xxu} = 0,\\
2\phi_x - u\xi_{xx} - \xi_{xxxx} + 2u\phi_{xu} + 4\phi_{xxxu} = 0,
\end{aligned}
\tag{43}
$$

které nám dají

$$
\begin{aligned}
\xi(x,t,u) &= C_1 x + C_2,\\
\tau(x,t,u) &= 2C_1 t + C_3,\\
\phi(x,t,u) &= -2C_1 u,
\end{aligned}
\tag{44}
$$

kde C_1, C_2 a C_3 jsou libovolné konstanty. Vybereme-li bázi vektorových polí tvořící Lieovu algebru grupy symetrií dostaneme

$$
\begin{aligned}
P_0 &= \partial_x,\\
P_1 &= \partial_t,\\
D &= x\partial_x + 2t\partial_t - 2u\partial_u,
\end{aligned}
\tag{45}
$$

získáme posunutí v prostoru a čase a škálovací transformaci.

3 Přímá metoda

Metoda vychází ze snahy o zobecnění Lieovy metody. Přímá metoda popsaná P. A. Clarksonem a M. D. Kruskalem v [CK1] vychází z myšlenky užití symetrií diferenciálních rovnic k získání tzv. soběpodobných řešení diferenciálních rovnic (viz. blíže [CW1]).

Nechť tedy máme jednu diferenciální rovnici v $\mathcal{R}^2$ n-tého řádu

$$
E(x,t,u,u^{(1)},...,u^{(n)}) = 0; \quad x,t \in \mathcal{R},
\tag{46}
$$

kde $u^{(i)}$ myslíme derivace řádu $i, i \in \{1,...,n\}$ v proměných x a t. Budeme se snažit hledat řešení ve formě

$$
u(x,t) = F(x,t,w(z(x,t)))
\tag{47}
$$

kde funkce $F(x,t,w)$ a $z(x,t)$ chceme určit tak, aby se rovnice (46) zredukovala na obyčejnou diferenciální rovnici k tomu nám dále poslouží úmluvy, které ukážu na příkladě Boussinesqovy rovnice.

Budeme-li nyní znát funkce $F(x,t,w)$ a $z(x,t)$ lze v určitých případech určit pole $\hat{X}$ ve formě (4) tak, že požadované pole generuje jednoparametrickou grupu G vzorcem (5) a pak pro všechny prvky g této grupy platí

$$g.(x,t,u) = (x,t,u), \quad g \in G, \tag{48}$$

kde $u = u(x,t)$ a operace . znamená akci grupy na prostoru $\mathcal{R}^3$. Tedy toto zobrazení zobrazuje námi nalezené prvky na sebe samé.

3.1 Příklad Boussinesqova rovnice

Nyní budeme studovat symetrie Boussinesqovy rovnice (41), viz [CK1]. Při užití přímé metody bychom měli použít ansatz (47) a dosadit ho do (41) tím získáme

$$\begin{aligned}
(F_{tt} + 2F_{tw}w^{'}z_t + F_{ww}(w^{'})^2z_t^2 + F_w(w^{''}z_t + w^{'}z_{tt})) \\
+F(F_{xx} + 2f_{xw}w^{'}z_x + F_{ww}(w^{''})^2z_x^2 + F_w(w^{''}z_x + w^{'}z_{xx})) \\
+F_x^2 + 2F_xf_ww^{'}z_x + F_w^2(w^{'})^2z_x^2 + F_{xxxx} + 4F_{xxxw}w^{'}z_x \\
+6F_{xxww}(w^{'})^2z_x^2 + 4F_{xwww}(w^{'})^3z_x^3 + F_{wwww}(w^{'})^4z_x^4 \\
+6F_{xxw}(w^{'}z_{xx} + w^{''}z_x^2) + 12F_{xww}(w^{'}w^{''}z_x^3 + (w^{'})^2z_xz_{xx}) \\
+6F_{www}((w^{'})^2w^{''}z_x^4 + (w^{'})^3z_x^2z_{xx}) + 4F_{xw}(w^{'''}z_x^3 + 3w^{''}z_xz_{xx} + w^{'}z_{xxx}) \\
+F_{ww}((4w^{'}w^{'''} + 3(w^{''})^2)z_x^4 + 18w^{'}w^{''}z_x^2z_{xx} + (w^{'})^2(4z_xz_{xxx} + 3z_{xx}^2)))) \\
+F_w(w^{''''}z_x^4 + 6w^{'''}z_x^2z_{xx} + w^{''}(4z_xz_{xxx} + 3z_{xx}^2) + w^{'}z_{xxxx})) = 0.
\end{aligned} \tag{49}$$

Nyní potřebujeme určit $F(x,t,w)$ a $z(x,t)$ tak, aby (49) byla obyčejná diferenciální rovnice pro $w(z)$, potom koeficienty u jednotlivých derivací $w(z)$ musí být funkce pouze z a w. Použijeme-li koeficient u $w^{''''}$ jako normovací koeficient (tzn. že koeficienty u ostatních členů budou tvaru $\beta\Gamma(w,z)$, kde β je koeficient stojící u $u^{''''}$). Potom koeficienty u $w'w''$ a $(w')^2$ dávají tutéž podmínku

$$F_wz_x^4\Gamma(w,z) = F_{ww}z_x^4 \tag{50}$$

s tím, že funkci $\Gamma(w,z)$ určujeme. Z předchozí rovnice jednoduchou úpravou dostaneme

$$\Gamma(w,z) = \frac{F_{ww}}{F_w} \tag{51}$$

a po dvou integracích a dvou přeznačeních $ln(\Gamma)$ na Γ a $\int \Gamma \, dw$ na Γ

$$F(x,t,w) = \Theta(x,t)\Gamma(w,z) + \Psi(x,t) \tag{52}$$

s libovolnými funkcemi $\Theta(x,t)$ a $\Psi(x,t)$, proto můžeme hledat redukce Boussinesqovy rovnice (41) ve tvaru (viz. pravidlo 2,III dále v textu)

$$u(x,t) = \alpha(x,t) + \beta(x,t)w(z). \tag{53}$$

Dosadíme-li ansatz (53) do (41) získáme

$$\begin{aligned} & \beta z_x^4 w'''' + (6\beta z_x^2 z_{xx} + 4\beta_x z_x^3) w''' \\ & +(\beta(3z_x^2 + 4z_{xx}^2 + 4z_x z_{xxx}) + 12\beta_x z_x z_{xx} + 6\beta_{xx} z_x^2 + \alpha\beta z_x^2 + \beta z_t^2) w'' \\ & (\beta z_{xxxx} + 4\beta_x z_{xxx} + 6\beta_{xx} z_{xx} + 4\beta_{xxx} z_x + 2\alpha_x \beta z_x + 2\alpha\beta_x z_x + \\ & \alpha\beta_x z_x + 2\beta_t z_t + \beta z_{tt}) w' \\ & +(\beta_{xxxx} + 2\alpha_x\beta_x + \alpha\beta_{xx} + \alpha_{xx}\beta + \beta_{tt}) w + \beta^2 z_x^2 w w'' \\ & +\beta(4\beta_x z_x + \beta z_{xx}) w w' + \beta^2 z_x^2 (w')^2 + (\beta_x^2 + \beta\beta_{xx}) w^2 \\ & +(\alpha_{tt} + \alpha\alpha_{xx} + \alpha_x^2 + \alpha_{xxxx}) = 0 \end{aligned} \tag{54}$$

Požadujeme-li nyní opět, aby (54) byla obyčejná diferenciální rovnice pro $w(z)$. Použijeme-li opět koeficient u w'''' jako normovací koeficient (viz. výše), dostaneme pro tuto obyčejnou diferenciální rovnici, že všechny koeficienty u členů s derivací $w(z)$ jsou tvaru $\beta z_x^4 \Gamma_i(z)$, kde právě funkce $\Gamma_i(z)$, $i = 1, ..., 8$ chceme určit. Sepíšeme-li tyto koeficienty získáme

$$\beta z_x^4 \Gamma_1(z) = \beta^2 z_x^2 \tag{55}$$

$$\beta z_x^4 \Gamma_2(z) = \beta(4\beta_x z_x + 6\beta z_{xx}) \tag{56}$$

$$\beta z_x^4 \Gamma_3(z) = \beta_x^2 + \beta\beta_{xx} \tag{57}$$

$$\beta z_x^4 \Gamma_4(z) = 6\beta z_x^2 z_{xx} + 4\beta_x z_x^3 \tag{58}$$

$$\beta z_x^4 \Gamma_5(z) = \alpha\beta z_x^2 + \beta z_t^2 + \beta(3z_{xx}^2 + 4z_x z_{xxx}) + 12\beta_x z_x z_{xx} + 6\beta_{xx} z_x^2 \tag{59}$$

$$\begin{aligned} \beta z_x^4 \Gamma_6(z) = {} & \beta z_{xxxx} + 4\beta_x z_{xxx} + 6\beta_{xx} z_{xx} + 4\beta_{xxx} z_x + \\ & 2\alpha_x \beta z_x + 2\alpha\beta_x z_x + \alpha\beta z_{xx} + 2\beta_t z_t + \beta z_{tt} \end{aligned} \tag{60}$$

$$z_x^4 \Gamma_7(z) = \beta_{xxxx} + 2\alpha_x\beta_x + \alpha\beta_{xx} + \alpha_{xx}\beta + \beta_{tt} \tag{61}$$

$$\beta z_x^4 \Gamma_8(z) = \alpha_{tt} + \alpha\alpha_{xx} + \alpha_x^2 + \alpha_{xxxx}. \tag{62}$$

Budeme se držet následujících pravidel při řešení (55) - (62)

1. Budeme užívat velká řecká písmena pro zatím neurčené funkce proměné z, takové, že po operacích derivování, integrování, exponování a přeškálování výsledek označíme stejným písmenem.(Příklad: derivace $\Gamma(z)$ označíme opět $\Gamma(z)$.

2. Bez újmy na obecnosti lze lze předpokládat

(I) $\alpha(x,t) = \alpha_0(x,t) + \beta(x,t)\Omega(z)$, z důvodu substituce $w(z) \to w(z) - \Omega(z)$.

(II) $\beta(x,t) = \beta_0(x,t)\Omega(z)$, pak lze vzít $\Omega \equiv 1$, po substituci $w(z) \to (z)/\Omega(z)$

(III) bude-li $z(x,t)$ určeno nějakou rovnicí tvaru $\Omega(z) = z_0(x,t)$, kde $\Omega(z)$ je invertibilní funkce, pak lze vzít $\Omega(z) = z$ z důvodu substituce $z \to \Omega^{-1}(z)$.

3.1.1 Případ $z_x \neq 0$

Potom z rovnice (55) získáme s užitím pravidla 2,II

$$\beta = z_x^2 \tag{63}$$

Dosazením (63) do (58) a přeškálování získáme

$$z_x\Gamma(z) + \frac{z_{xx}}{z_x} = 0 \tag{64}$$

a po integraci (64)

$$\Gamma(t) + \ln(z_x) = \Theta(t), \tag{65}$$

kde $\Theta(t)$ je libovolná funkce získaná při integraci. Exponujeme-li tento výsledek a požijeme-li pravidlo 1

$$z_x\Gamma(z) = \Theta(t) \tag{66}$$

a opětovnou integrací dostaneme

$$\Gamma(z) = x\Theta(t) + \Sigma(t), \tag{67}$$

kde je opět $\Sigma(t)$ integrační funkce. A podle pravidla 2,III máme

$$z = x\theta(t) + \sigma(t), \tag{68}$$

kde funkce $\theta(t)$ a $\sigma(t)$ chceme určit. Z výsledků (63) a (68) získáváme

$$\beta = \theta^2(t). \tag{69}$$

z (59) použitím (68) a (69)

$$\theta^4\Gamma_5 = \alpha\theta^2 + (x\frac{d\theta}{dt} + \frac{d\sigma}{dt})^2 \tag{70}$$

a podle pravidla 2,I

$$\alpha = -\frac{1}{\theta^2(t)}(x\frac{d\theta}{dt} + \frac{d\sigma}{dt})^2. \tag{71}$$

Takhle bude vypadat (54) po použití (68) - (70)

$$\begin{aligned}\theta^6(w'''' + ww'' + (w')^2) + \theta^2(x\frac{d^2\theta}{dt^2} + \frac{d^2\sigma}{dt^2})w' + 2\theta\frac{d^2\theta}{dt^2}w \\ -\frac{d^2}{dt^2}((\frac{1}{\theta}(x\frac{d\theta}{dt} + \frac{d\sigma}{dt}))^2) + \frac{6}{\theta^6}(\frac{d\theta}{dt}(x\frac{d\theta}{dt} + \frac{d\sigma}{dt}))^2 = 0.\end{aligned} \tag{72}$$

Opět si přeoznačíme koeficienty, protože se nám (54) podstatně zjednodušila

$$\theta^6\gamma_1(z) = \theta^2(x\frac{d^2\theta}{dt^2} + \frac{d^2\sigma}{dt^2}), \tag{73}$$

$$\theta^6\gamma_2(z) = 2\theta\frac{d^2\theta}{dt^2}, \tag{74}$$

$$\theta^6\gamma_3(z) = -\frac{d^2}{dt^2}((\frac{1}{\theta}(x\frac{d\theta}{dt} + \frac{d\sigma}{dt}))^2) + \frac{6}{\theta^6}(\frac{d\theta}{dt}(x\frac{d\theta}{dt} + \frac{d\sigma}{dt}))^2, \tag{75}$$

kde funkce $\gamma_1(z)$, $\gamma_2(z)$ a $\gamma_3(z)$ potřebujeme určit. Z rovnice (68) a pravé strany rovnice (73), která je lineární v x, vyplývá, že

$$\gamma_1(z) = Az + B, \tag{76}$$

kde A a B jsou konstanty, a proto

$$\theta^4(A(x\theta + \sigma) + B) = x\frac{d^2\theta}{dt^2} + \frac{d^2\sigma}{dt^2} \tag{77}$$

odtud získáme rovnice

$$\frac{d^2\theta}{dt^2} = A\theta^5, \tag{78}$$

$$\frac{d^2\sigma}{dt^2} = \theta^4(A\sigma + B). \tag{79}$$

pak zjistíme dosazením (78) a (79) do (74) a (75)

$$\gamma_2(z) = 2A, \tag{80}$$

$$\gamma_3(z) = -2(Az+B)^2. \tag{81}$$

Boussinesqova diferenciální rovnice je zajímavá tím, že splníme-li rovnici (73), pak jsou splněny rovnice (74) a (75) automaticky.

Výsledná redukce diferenciální rovnice (41) získaná přímou metodou je potom

$$u(x,t) = \theta^2(t)w(z) - \frac{1}{\theta^2(t)}(x\frac{d\theta}{dt} + \frac{d\sigma}{dt})^2, \tag{82}$$

$$z(x,t) = x\theta(t) + \sigma(t), \tag{83}$$

kde $\theta(t)$ a $\sigma(t)$ splňují rovnice (78) a (79) a $w(t)$ splňuje

$$w^{''''} + ww^{''} + (w^{'})^2 + (Az+B)w^{'} + 2Aw = 2(Az+B)^2 \tag{84}$$

Při řešení (78) a (79) podle hodnot konstant A, B dostáváme šest základních typů redukcí, [CW1] .

$$u(x,t) = w_1(z), \quad z = x + \mu_1 t, \tag{85}$$

$$u(x,t) = t^2 w_2(z) - \frac{x^2}{t^2}, \quad z = xt, \tag{86}$$

$$u(x,t) = w_3(z) - 4\mu_3^2 t^2, \quad z = x + \mu_3 t^2, \tag{87}$$

$$u(x,t) = t^2 w_4(z) - \frac{(x + 6\mu_4 t^5)^2}{t^2}, \quad z = xt + \mu_4 t^6, \tag{88}$$

$$u(x,t) = \frac{w_5(z)}{t} - \frac{(x - 3\mu_5 t^2)^2}{4t^2}, \quad z = \frac{x}{\sqrt{t}} + \mu_5 t^{\frac{3}{2}}, \tag{89}$$

$$u(x,t) = \frac{1}{\wp(t)}(w_6 - (\frac{z}{2}\frac{d\wp}{dt} + \mu_6 \wp^{\frac{3}{2}}(t))), \quad z = \frac{x + \mu_6\zeta(t)}{\sqrt{\wp(t)}}, \tag{90}$$

kde μ_i, $i \in \{1, ..., 6\}$ jsou libovolné konstanty a $\wp(t) = \wp(t - t_0, 0, g_3)$ je Weierstrassova eliptická funkce a $\zeta(t) = \zeta(t - t_0, 0, g_3)$ je Weierstrassova ζ funkce.

3.1.2 Případ $z_x = 0$

Tento případ zkoumali Clarkson [Cl1] a Lou [Lo1]. Užitím podmínky

$$z_x = 0 \tag{91}$$

a dosazením (91) do (54) dostáváme po dalších úpravách dva základní typy redukce [CW1].

Případ I V tomto případě dostáváme

$$u(x,t) = x^2 w_1(t) - \frac{12}{x^2}, \tag{92}$$

kde $w_1(t)$ splňuje Weierstrassovu eliptickou rovnici

$$\frac{d^2 w_1}{dt^2} + 6w_1^2 = 0, \tag{93}$$

která má obecné řešení

$$w_1(t) = -\wp(t + t_0, 0, g_3), \tag{94}$$

kde t_0 a g_3 jsou libovolné konstanty [CW1]

Případ II Zde získáme [CW1]

$$u(x,t) = w_2(t) + x\psi(t) + x^2\phi(t), \tag{95}$$

kde funkce $\phi(t)$ splňuje (93), takže má řešení (94) s t_0 a g_3 libovolnými konstantami. A $\psi(t)$ splňuje

$$\frac{d^2\psi}{dt^2} - 6\wp(t + t_0, 0, g_3)\psi = 0, \tag{96}$$

kde $-\wp(t, s, v)$ splňuje (93)

3.1.3 Burgersova rovnice

Zde bych rád použil přímou metodu na Burgersovu rovnici

$$u_t + uu_x + u_{xx} = 0 \tag{97}$$

Obdobně jako u Boussinesqovy rovnice postačuje hledat redukce ve tvaru [CW1]

$$u(x,t) = \alpha(x,t) + \beta(x,t)w(z(x,t)). \tag{98}$$

Dosazením (98) do (97) získáme

$$\begin{aligned} &\beta z_x^2 w^{''} + (2\beta_x z_x + \beta z_{xx} + \beta z_t + \alpha\beta z_x)w^{'} \\ &+(\beta_{xx} + \beta_t + \alpha\beta_x + \alpha_x\beta)w + \beta^2 z_x w w^{'} \\ &+\beta\beta_x w^2 + \alpha_{xx} + \alpha_t + \alpha\alpha_x = 0, \end{aligned} \tag{99}$$

a použijeme-li koeficient u $w^{''}$ jako normovací koeficient (viz. předchozí příklad) , pak z koeficientu u $ww^{'}$ dostaneme

$$\beta z_x^2 \Gamma_1(z) = \beta^2 z_x, \tag{100}$$

kde $\Gamma_1(z)$ chceme určit a použitím pravidla 3,I z předchozího příkladu dostaneme

$$\beta = z_x. \tag{101}$$

Z koeficientu u w^2 dostaneme

$$\beta z_x^2 \Gamma_2(z) = \beta\beta_x, \tag{102}$$

kde $\Gamma_2(z)$ potřebujeme určit. Dosazením a dvojnásobným integrováním a požitím pravidla 1 a 2,III dostaneme

$$z = x\theta(t) + \sigma(t), \quad \beta = \theta(t), \tag{103}$$

kde $\theta(t)$ a $\sigma(t)$ budeme určovat. Tento výsledek zjednoduší (99) na

$$\begin{aligned} &\theta^3(w^{''} + ww^{'}) + \theta((x\frac{d\theta}{dt} + \frac{d\sigma}{dt}) + \alpha\theta)w^{'} \\ &(\frac{d\theta}{dt} + \alpha_x\theta)w + \alpha_{xx} + \alpha_t + \alpha\alpha_x = 0 \end{aligned} \tag{104}$$

Toto je obyčejná diferenciální rovnice, proto

$$\alpha = -\frac{1}{\theta}(x\frac{d\theta}{dt} + \frac{d\sigma}{dt}), \tag{105}$$

$$\theta\frac{d^2\theta}{dt^2} - 2(\frac{d\theta}{dt})^2 = A^2\theta^6 \tag{106}$$

$$\theta\frac{d^2\sigma}{dt^2} - 2\frac{d\theta}{dt}\frac{d\sigma}{dt} = \theta^5(A^2\sigma + 2B), \tag{107}$$

kde A a B jsou libovolné konstanty. Násobením rovnice (106) $2\frac{1}{\theta^2}\frac{d\theta}{dt}$ a integrováním

$$(\frac{d\theta}{dt})^2 = A^2\theta^6 + C^2\theta^4, \tag{108}$$

kde C je libovolná funkce. Proto redukce Burgersovy rovnice (97) je

$$u(x,t) = \theta(t)w(z) - \frac{1}{\theta}(x\frac{d\theta}{dt} + \frac{d\sigma}{dt}), \quad z = x\theta(t) + \sigma(t), \tag{109}$$

kde $\theta(t)$ a $\sigma(t)$ splňují (107) a (108). Ukážu zde čtyři základní případy

Případ $A = 0$ **,** $B = 0$

$$\theta(t) = \theta_0, \quad \sigma(t) = Bt^2 + c_1 t + c_2 \tag{110}$$

Položíme-li $\theta_0 = 1$ dostaneme

$$u(x,t) = w(z) - 2Bt - c_1, \quad z = x + Bt^2 + c_1 + c_2 \tag{111}$$

Případ $A \neq 0$ **,** $C = 0$ Můžeme položit $A = -\frac{1}{2}$ a $B = 0$, potom

$$\theta(t) = \frac{1}{\sqrt{(t-t_0)}}, \quad \sigma(t) = c_3\sqrt{t-t_0} + c_4\frac{1}{\sqrt{t-t_0}} \tag{112}$$

Položíme-li $t_0 = 0$ a $c_4 = 0$

$$u(x,t) = \frac{1}{\sqrt{t}}w(z) + \frac{x}{2t} - \frac{c_3}{2} \tag{113}$$

Případ $A = 0$ **,** $C \neq 0$ Potom položíme $C = -1$

$$\theta(t) = \frac{1}{t-t_0}, \quad \sigma(t) = \frac{B}{(t-t_0)^2} + \frac{c_5}{t-t_0} + c_6 \tag{114}$$

položíme-li $t_0 = 1$, $c_5 = 0$ a $c_6 = 0$ dostáváme

$$u(x,t) = \frac{w(z)}{t} + \frac{x}{t} + \frac{2B}{t2}, \quad z = \frac{x}{t} + \frac{B}{t^2}, \tag{115}$$

Případ $A \neq 0$, $C \neq 0$ Položíme $A^2 = -1$, $B = 0$ a $C^2 = 1$. Potom

$$\theta(t) = (t^2 \pm 1)^{-\frac{1}{2}}, \quad \sigma(t) = c_7 t + \frac{c_8}{\sqrt{t^2 \pm 1}} \tag{116}$$

Po položení $c_8 = 0$

$$u(x,t) = \frac{w(z)}{\sqrt{t^2 \pm 1}} + \frac{xt - c_7}{t^2 \pm 1}, \quad z = \frac{x + c_7 t}{t^2 \pm 1} \tag{117}$$

4 Podmíněné symetrie

Jestliže přímá metoda vycházela z dalšího použití symetrií k hledání soběpodobných řešení, potom podmíněně symetrie jsou přímým vylepšením Lieovy metody. U Lieovy metody jsme brali jako množinu, která se má zobrazovat sama do sebe množinu řešení soustavy diferencialních rovnic (1). V této metodě bude množinou, která se zobrazí sama do sebe určitá vhodě vybraná podmnožina množiny řešení.

Předpokládejme rovnici (46), stejně jako u přímé metody. Neboť u výpočtu podmíněných symetií ve více než 2 dimenzích je výpočet problematický z důvodu náročnosti řešení nelineárních parciálních diferenciálních rovnic v $m + 1$ dimenzích, kde m je počet nezávislých promených [ZP1].

Hledáme vektorová pole $\hat{X}$ tvaru

$$\hat{X} = \xi(x,t,u)\ \partial_x + \tau(x,t,u)\ \partial_t - \phi(x,t,u)\ \partial_u \tag{118}$$

Definujeme si výraz

$$\psi(x,t,u) \equiv \xi(x,t,u)\ u_x + \tau(x,t,u)\ u_t + \phi(x,t,u)\ u \tag{119}$$

a množinu $S_{E,\psi}$

$$S_{E,\psi} = \{u(x,t) : E(x,t,u,u^{(1)},...,u^{(n)}) = 0, \psi(x,t,u) = 0\}. \tag{120}$$

Nyní budeme požadovat, aby vektorová pole $\hat{X}$ generovala grupu symetrií rovnice (46), která zobrazuje $S_{E,\psi}$ do $S_{E,\psi}$.

Nyní zjišťujeme symetrie soustavy

$$E(x,t,u,u^{(1)},...,u^{(n)}) = 0,$$
$$\psi(x,t,u) = 0;\ x,t \in \mathcal{R}$$

pomocí metody popsaně v kapitole 2. musíme vyřešit soustavu diferenciálních rovnic, které vzejdou z

$$
\begin{aligned}
pr^{(n)}\ \hat{X}.E(x,t,u)|_{S_{E,\psi}} &= 0,\\
pr^{(1)}\ \hat{X}.\psi(x,t,u)|_{S_{E,\psi}} &= 0,
\end{aligned}
\tag{121}
$$

Narozdíl od kapitoly 2 se neznámé funkce $\xi(x,t,u)$, $\tau(x,t,u)$ a $\phi(x,t,u)$ vyskytují i v systému (121). Tím dostáváme obecně nelineární rovnice pro naše hledané funkce.

Rovnice (121) lze upravit, protože

$$
pr^{(1)}\ \hat{X}.\psi(x,t,u) = -(\xi_u u_x + \tau_u u_t - \phi_u)\psi. \tag{122}
$$

A tedy z (122) plyne, že je identicky rovno 0. Náš systém (121) se zjednoduší na

$$
pr^{(n)}\ \hat{X}.E(x,t,u)|_{S_{E,\psi}} = 0, \tag{123}
$$

To, že rovnice $pr^{(1)}\ \hat{X}.\psi(x,t,u) = 0$ je splněna identicky je důsledek toho jak bylo $\psi(x,t,u)$ definováno, protože

$$
\xi(x,t,u)u_x + \tau(x,t,u)u_t - \phi(x,t,u) = 0 \tag{124}
$$

je invariantní plocha, při působení pole $\hat{X}$ tvaru (118).

4.1 Boussinesqova rovnice

Budeme studivat podmíněné symetrie Boussinesqovy rovnice (41). Použijeme-li metodu popsanou výše, tak se náš problém se rozdělí na dva případy podle vlastností funkce $\tau(x,t,u)$, viz [CW1].

4.1.1 Případ $\tau(x,t,u) \neq 0$

V tomto případě položíme, bez újmy na obecnosti, $\tau(x,t,u) = 1$ a derivováním (124) dostaneme

$$
\begin{aligned}
u_t &= \phi - \xi u_x,\\
u_{xt} &= \phi_x + \phi_u u_x - (\xi_x u_x + \xi_u u_x^2 + \xi u_{xx}),\\
u_{tt} &= \phi_t + \phi_u u_t - (\xi_t u_x + \xi_u u_x u_t - \xi x_{xt}),\\
&= \phi_t + \phi_u(\phi - \xi u_x) - \xi_t u_x - \xi_u u_x(\phi - \xi u_x),\\
&\quad -\xi(\phi_x + \phi_u u_x - (\xi_x u_x + \xi_u u_x^2 + \xi u_{xx})).
\end{aligned}
$$

Dosazením předchozích výrazů do (41) dostaneme

$$\begin{aligned}\phi_t + \phi_u(\phi - \xi u_x) - \xi_t u_x - \xi_u u_x(\phi - \xi u_x) - \\ \xi(\phi_x + \phi_u u_x - (\xi_x u_x + \xi_u u_x^2 + \xi u_{xx})) + u u_{xx} + u_x^2 + u_{xxxx} = 0))\end{aligned} \tag{125}$$

Což je parametrická diferenciální rovnice pro $u(x)$ s parametrem t. A nyní použijeme obdobu klasické metody na tuto rovnici s vektorovým polem (118). Tím získáme tento systém rovnic

$$\begin{aligned}\xi_u = 0, \quad \phi_{uu} = 0, \\ 2\phi_{xu} - 3\xi_{xx} = 0, \quad \phi_u + 2\xi_x = 0, \\ 6\phi_{xxu} + \phi + 2\xi\xi_t - 4\xi_{xxx} + 4\xi^2\xi_x + 2u\xi_x = 0, \\ \phi_{tt} + k4\xi_x\phi_t + \phi_{xxxx} + u\phi_{xx} - 2\xi_t\phi_x - 4\xi\xi_x\phi_x + 2\phi_{xu}\phi + 4\xi_x\phi\phi_u = 0, \\ 2u\phi_{xu} - u\xi_{xx} + 2\phi_x + 4\phi_{xxxu} - 8\xi\xi_x\phi_u - 2\xi_t\phi_u = 0 \\ -2\xi\phi_{tu} - \xi_{xxxx} + 4\xi\xi_x^2 - 2\xi_t\xi_x - \xi_{tt} = 0.\end{aligned}$$

Získáme, (viz [CW1])

$$\begin{aligned}\xi(x,t,u) = xf(t) + g(t), \\ \phi(x,t,u) = -(2f(t)u + 2x^2 f(t)(\frac{df}{dt} + 2f^2(t)) \\ +2x(\frac{df}{dt}g(t) + f(t)\frac{dg}{dt} + 4f^2(t)g(t)) + 2g(t)(\frac{dg}{dt} + 2f(t)g(t))),\end{aligned} \tag{126}$$

kde

$$f(t) = \frac{1}{2p(t)}\frac{dp}{dt}, \tag{127}$$

$$g(t) = \frac{\kappa_1}{2p(t)}\frac{dp}{dt} + \kappa_0 \int_{-\infty}^{t} \frac{p(s)}{(p'(s))^2}\, ds \tag{128}$$

a funkce $p(t)$ splňuje

$$(\frac{dp}{dt})^2 = \kappa_3 p^3 + \kappa_2, \tag{129}$$

kde κ_i, $i \in 0,1,2,3$ jsou libovolné konstanty. Rovnice (129) je řešitelná ve Weistrassových eliptických funkcích $\wp(x,0,g_3)$ z podmínky $\kappa_2\kappa_3 \neq 0$ jinak je řešitelná v elementárních funkcích.

Řešením (129) dostaneme šest základních typů symetrií (85) - (90), které odvodili Clarkson a Kruskal [CK1] užitím přímé metody.

4.1.2 Případ $\tau(x,t,u)=0$ a $\xi(x,t,u)\neq 0$

V tomto případě položíme, bez újmy na obecnosti, $\xi(x,t,u)=1$ a (119) se zjednoduší na

$$u_x=\phi(x,t,u) \tag{130}$$

a po dosazení do Boussinesqovy rovnice (41) získáme

$$\begin{aligned} u_{tt}+u(\phi_x+\phi\phi_u)+\phi^2+\phi_{xxx}+\phi_u\phi_{xx}+3\phi_x\phi_{xu}+\phi_x\phi_u^2 \\ \phi^3\phi_{uuu}+3\phi^2\phi_{xuu}+4\phi^2\phi_u\phi_{uu}+3\phi\phi_{xxu}+5\phi\phi_u\phi_{xu}+\phi\phi_u^3=0 \end{aligned} \tag{131}$$

což je obyčejná diferenciální rovnice pro $u(t)$ s parametrem x. Použijeme-li opět obdobu klasické metody dostaneme

$$\begin{aligned} \phi_{uu}=0,\quad \phi_{tu}=0, \\ \phi_{tt}+\phi_{xxxx}+4\phi_{xx}\phi_{xu}+u\phi_{xx}+6\phi_{xxu}\phi_x+4\phi_x\phi_u\phi_{xu}+3\phi\phi_x \\ +4\phi\phi_{xxxu}+6\phi\phi_u\phi_{xxu}+8\phi\phi_{xu}^2+4\phi\phi_u^2\phi_{uu}+2u\phi\phi_{xu}+2\phi^2\phi_u=0. \end{aligned} \tag{132}$$

Tento systém má dvě řešení [CW1]

$$\begin{aligned} \phi_1 &= \frac{2u}{x+x_0}+\frac{48}{(x+x_0)^3}, \\ \phi_2 &= 2x\psi_2(t)+\psi_1(t), \end{aligned} \tag{133}$$

kde x_0 je libovolná konstanta a funkce $\psi_1(t)$ a $\psi_2(t)$ splňují

$$\frac{d^2\psi_2}{dt^2}+6\psi_2^2=0,\quad \frac{d^2\psi_1}{dt^2}+6\psi_2\psi_1=0 \tag{134}$$

příslušná vektorová pole jsou

$$\begin{aligned} \hat{X}_1=\partial_x+(\frac{2u}{x+x_0}+\frac{48}{(x+x_0)^3})\partial_u, \\ \hat{X}_2=\partial_x+(2x\psi_2(t)+\psi_1(t))\partial_u. \end{aligned} \tag{135}$$

Poli $\hat{X}_1$ přísluší redukce (92) a poli $\hat{X}_2$ přísluší redukce (95). Dostáváme tedy všechny redukce, které jsme už dostaly při použití přímé metody.

5 Porovnání klasických, přímých a podmíněných symetrií

5.1 Klasická metoda

Klasická metoda popsaná v kapitole 2, nám dává rovnice, které jsou lineární jako rovnice pro složky vektorového pole (4) $\xi_i(x,u), \eta_j(x,u)$; $i = 1, ..., p$, $j = 1, ..., q$, $x \in \mathcal{R}^p$, $u \in \mathcal{R}^q$ a vektorová pole tvoří Lieovu algebru, která má pak další důležité aplikace. Ke každě Lieově algebře existuje Lieova grupa tak, že grupa symetrií je opravdu grupa. Tato metoda, ale není schopna nalézt některé redukce. Ale dosud neznáme, které třídy diferenciálních rovnic (1) dávají při použití Lieovy metody méně redukcí než přímá metoda a podmíněné symetrie.

5.2 Přímá metoda

Tato metoda je obecnější než klasická metoda, ale vektorová pole netvoří Lieovu algebru, tudíž zobrazení netvoří Lieovu grupu a dále si lze vybírat dimenzi diferenciální rovnice po redukci (počet nezávislých proměmých redukované rovnice).

5.3 Podmíněné symetrie

Rovnice pro výpočet $\xi(x,t,u)$, $\tau(x,t,u)$ a $\eta(x,t,u)$ jsou obecně nelineární. Vektorová pole netvoří, stejně jako u přímé metody, Lieovu algebru a tedy také netvoří zobrazení Lieovu grupu.

5.4 Porovnání přímé metody a podmíněných symetrií

Na příkladech, které jsem uvedl výše jsme získali přímou metodou a podmíněnými symetriemi stejné výsledky.

Obdobné výsledky dostaneme pro diferenciální rovnici Kadomtsev - Petviashivili, viz [CW2] a [LW1]

$$(u_t + uu_x + u_{xxx})_x + \sigma^2 u_{yy} = 0, \quad \sigma^2 = \pm 1 \tag{136}$$

Z výsledků uvedených v [CW2] a [LW1] bychom mohli nabýt dojmu, že přímá metoda a podmíněné symetrie jsou si navzájem ekvivalentní ve smyslu získání stejných redukcí. Tuto otázku vznesli už Clarkson a Kruskal v [CK1].

Nucci a Clarkson zkoumali diferenciální rovnici Fitzhugh-Nagumo, viz [NC1]

$$u_t = u_{xx} + u(1-u)(u-a) \tag{137}$$

5.4.1 Příklad Fitzhugh-Nagumo

Při použití klasické metody získáme řešení pohybující se vlny

$$u(x,t) = w(z), \quad z(x,t) = \mu x - \lambda t, \tag{138}$$

kde μ a λ jsou konstanty.

Užijeme-li přímou metodu získáme řešení, které jsme získali klasickou metodou (138) a dále řešení vyjádřené v Jacobiho eliptických funkcích pro konstantu a nabývající hodnoty $a=-1$, $a=\frac{1}{2}$ a $a=2$. Uvedu řešení pro $a=-1$

$$\begin{aligned} u(x,t) &= z_x ds(z, \frac{1}{2}\sqrt{2}), \\ z(x,t) = C_1 \exp(\frac{1}{2}(\sqrt{2}x+3t)) &+ C_2 \exp(\frac{1}{2}(-\sqrt{2}x+3t)) + C_3, \end{aligned} \tag{139}$$

kde C_1, C_2 a $C[3]$ jsou konstanty a $ds(z,k)$ je Jacobiho funkce splňující, viz [CW1]

$$(\eta')^2 = \eta^4 + (2k^2-1) + k^2(k^2+1). \tag{140}$$

Při použití podmíněných symetrií dostáváme všechny řešení, které získáme při použití přímé metody, ale ještě získáme dalši řešení diferenciální rovnice Fitzhugh-Nagumo, pro $a \neq 0$ a $a \neq 1$

$$u(x,t) = \frac{aC_1 \exp(\frac{1}{2}(\pm\sqrt{2}\,ax + a^2t)) + C_2 \exp(\frac{1}{2}(\pm\sqrt{2}\,x + t))}{C_1 \exp(\frac{1}{2}(\pm\sqrt{2}\,ax + a^2t)) + C_2 \exp(\frac{1}{2}(\pm\sqrt{2}\,x + t)) + C_3 \exp(at)} \tag{141}$$

viz. Kawahara a Tanaka [KT1]. Právě tyto získaně výsledky ukazují, že podmíněné symerie jsou obecnější než přímá metoda.

Estévez [Es1] ukázal, že řešení (141) je možno dostat při použití Ansatzu

$$u(x,t) = \beta(x,t)w(z) + \alpha(x,t), \tag{142}$$

kde funkce $\beta(x,t)$, $\alpha(x,t)$ a $z(x,t)$ chceme určit. Po dosazení Ansatzu (142) do (137).

$$\beta z_x^2 \frac{d^2 w}{dz^2} + (2\beta_x z_x + \beta z_{xx} - \beta z_t)\frac{dw}{dz} - \beta^3 w^3 + \beta^2(a+1-3\alpha)w^2 \\ +(2(a+1)\alpha\beta - 3\beta\alpha^2 - \alpha\beta + \beta_{xx} - \beta_t)w + \\ \alpha_{xx} + \alpha_t - \alpha(\alpha - a)(\alpha - 1)) = 0. \tag{143}$$

Substitucí

$$\beta = z_x \tag{144}$$

a při požadování, aby $z(x,t)$ a $\alpha(x,t)$ splňovali

$$3z_{xx} - z_t = \pm\sqrt{2}(a+1-3\alpha)z_x, \tag{145}$$

$$z_{xxx} - z_{xt} = (3\alpha^2 - 2(a+1)\alpha + a)z_x, \tag{146}$$

$$\alpha_{xx} - \alpha_t + \alpha(\alpha-1)(a-\alpha 0) = 0, \tag{147}$$

získáme z (143),

$$z_x(\frac{d^2 w}{dz^2} - w^3) + (a+1-3\alpha)(\pm\sqrt{2}\,\frac{dw}{dz} + w^2) = 0 \tag{148}$$

To znamená, že $w(z)$ splňuje soustavu diferenciálních rovnic

$$\frac{d^2 w}{dz^2} - w^3 = 0, \\ \pm\sqrt{2}\,\frac{dw}{dz} + w^2 = 0, \tag{149}$$

která má obecné řešení

$$w(z) = \pm\frac{\sqrt{2}}{z - z_0}, \tag{150}$$

kde z_0 je libovolná konstanta. Z tohoto výsledku jsme pak schopni získat řešení diferenciální rovnice (137). Rovnice (147) má tři konstantní řešení $\alpha(x,t) = 1$, $\alpha(x,t) = 0$ a $\alpha(x,t) = a$, dosazením tohoto výsledku jednotlivě pro všechna konstantní α do rovnic (145) a (146) dostaneme soustavu pro hledanou funkci $z(x,t)$. Substitucí posledního výsledku do (150) získáme řešení (141), viz. [CW1]. Teď se můžeme ptát, pro které diferenciální rovnice získáme více řešení metodou podmíněných symerií než přímou metodou.

Olver v [Ol2] dokázal vztah mezi přímou metodou a podmíněnými symetriemi. Předpokládejme diferenciální rovnici druhého řádu v dimenzi 2

$$E(x, t, u, u_x, u_t, u_{xx}, u_{xt}, u_{tt}) = 0 \tag{151}$$

(výsledek je rozšířitelný i na dimenzi vetšínež 2 [CW1]). Rovnice (151 se redukuje pomocí ansatzu

$$u(x,t) = U(x, t, w(z)), \quad z = z(x,t) \tag{152}$$

na obyčejnou diferenciální rovnici pro $w(z)$. (Funkce $U(x, t, z)$ nemusí být jednoznačně určena [CW1].) Olver [Ol2] dokázal následující dvě věty.

Věta 1 Máme-li diferenciální rovnici (151). Potom existuje prosté a na zobrazení mezi výsledky získanými pomocí přímé metody s ansatzem (152) s podmínkou $U_w \neq 0$ a řešeními získanými metodou podmíných symetrií s kvazilineárním diferenciálním vyrazem místo (119)

$$\psi(x, t, u) \equiv \xi(x,t)u_x + \tau(x,t)u_t - \phi(x,t,u) = 0 \tag{153}$$

Věta 2 Nechť (151) je naše diferenciální rovnice. Ansatz (152) bude redukovat diferenciální rovnici (151) na obyčejnou diferenciální rovnici v $w(z)$ právě tehdy, když složky pole (118) tvořící podmíněné symetrie rovnice (151) splňují (153).

U přímé metody použité na diferenciální rovnici (46) s ansatzem (47) požadujeme, aby se (46) redukovala na obyčejnou diferenciální rovnici. U podmíněných symetrií požadujeme, aby se podmnožina množiny řešení (46) splňující pro vektorové pole (118) vztah (119), zobrazovala do sebe při působení jednoparametrické grupy generované vektorovým polem (118).

Můžeme se pokusit zobecnit Clarksonův a Kruskalův ansatz (47) na

$$u(x,t) = U(x, t, w(z)), \quad z = z(x,t,u). \tag{154}$$

Při použití ansatzu (154) nemusíme vždy nalézt všechny redukce, které jsou získatelné klasickou metodou [CW1]. Příklad viz. [Lu1]

5.4.2 Příklad

Předpokládejme diferenciální rovnici

$$u_x u_{xx} - (\alpha u u_x - \beta u_t)(1 - t u_x)^3 = 0, \tag{155}$$

kde α a β jsou libovolné konstanty. Klasickou metodou získáme

$$\begin{aligned} \xi(x,t,u) &= \frac{1}{3}(\kappa_1 + \kappa_3)(x + 2tu) + \kappa_4 u - \kappa_2 t + \kappa_5 \\ \tau(x,t,u) &= \kappa_3 t + \kappa_4 \\ \phi(x,t,u) &= \kappa_1 u + \kappa_2 \frac{\beta}{\alpha}, \end{aligned} \tag{156}$$

kde $(\alpha + \beta)(\kappa_1 + \kappa_3) = 0$ a $\kappa_1, ..., \kappa_5$ jsou libovolné konstanty. Ve speciálním případě $\kappa_4 = 1$ a $\kappa_i = 0$; $i \in \{1, 2, 3, 5\}$ získáme invariantní plochu

$$u u_x + U_t = 0, \tag{157}$$

která má řešení

$$u(x,t) = w(z) \quad z = x - ut. \tag{158}$$

Po substituci (158) do (155) dostaneme

$$\frac{dw}{dz}\left(\frac{d^2 w}{dz^2} - (\alpha + \beta) w\right) = 0) \tag{159}$$

pro jednoduchost položím $\alpha = \beta = \frac{1}{2}$, potom získáme implicitní řešení

$$u(x,t) = A \exp(x - u(x,t)t) + B \exp(-x + u(x,t)t), \tag{160}$$

kde A a B jsou libovolné konstanty. Při použití přímé metody s ansatzem (154) řešení (160) nedostaneme [CW1].

6 Závěr

Tedy z těchto úvah vyplývá, že podmíněné symetrie jsou obecnější než klasická metoda a přímá metoda s ansatzem (47). Zatím, ale nevíme pro kterou třídu diferenciálních rovnic získáme rozdílné výsledky použitím všech popsaných metod nebo libovolné dvojice metod. Známe zatím speciální případ (151). V tomto případě dostaneme použitím přímé metody a metodou podmíněných symetrií stejné výsledky.

References

[Ol1] P. J. Olver: *Aplication of Lie group to differential equations*, ruský překlad, (Springer-Verlag, New York, 1993), 2nd edition, Graduate texts Math., vol. 107.

[CW1] P. A. Clarkson, P. Winternitz: *Symmetry reduction and exact solutions of nonlinear partial differential equations*, soukromé sdělení.

[Cl1] P. A. Clarkson: *New exact solutions for Boussinesq equation* , Europ. J. Appl. Math. 1 (1990), 279 - 300.

[CK1] P. A. Clarkson, M. D. Kruskal: *New similarity solutions of the Boussinesq euation*, J. Math. Phys. 30 (1989), 2201 - 2213.

[CW2] P. A. Clarkson, P. Winternitz: *Nonclassical symetry reductions for Kadomtsev-Petviashvili equation*, Physica 49D (1991), 257 - 272.

[Es1] P. G. Estévez: *Nonclassical symetries and the singular manifold method for the Fitzhugh-Nagumo equation*, Phys. Lett. 171A (1992), 259 - 261.

[KT1] T. Kavahara, M. Tanaka: *Interactions of traveling fronts-an exact solution of a nonlinear diffusion equation*, Phys. Lett. 97A (1993), 311 - 314.

[LW1] D. Levi, P. Winternitz: *Nonclassical symetry reduction: example of the Bussinesq equation*, J. Phys. A: Math. Gen 22 (1989), 2915 - 2924.

[Lo1] S. Y. Lou: *Note on the new similarity reductions of the Boussinesq equation*, Phys. Lett. 151A (1990), 133 - 135.

[Lu1] D. K. Ludlow: *Nonclassical similarity reductions of the Navier-Stokes equation*, Ph. D. thesis (Department of Mathematics, University of Exeter, UK), (1994)

[NC1] M. C. Nucci, P. A. Clarkson: *The nonclassical method is more general than the direct method for symmetry reductions: an* *example of the Fitzhugh-Nagumo equation*, Phys. Lett. 164A (1992), 49 - 56.

[Ol2] P. J. Olver: *Direct reduction and differential constraints*, Proc. R. Soc. Lond. A 444 (1994), 509 - 523.

[ZP1] R. Zdanov, O. Panchak *New conditional symetries and exact solutions of the nonlinear wave equation*, J. Phys. A:Math. Gen. 31 (1998) 8727 - 8734.