Výzkumný úkol Václava Kavky o Painlevého vlastnosti diferenciálních rovnic

Vedoucí práce: Prof. RNDr. Ladislav Hlavatý, DrSc.

2000/2001

Obsah

1 Úvod

1.1 Formulace

Cílem práce je vysvětlit pojmy Painlevého vlastnost a Painlevého test diferenciálních rovnic a analyzovat soustavu

$$\begin{aligned}\varphi_1 \Box \varphi_1 &= A_1 \partial\varphi_1 \partial\varphi_1 + A_2 \partial\varphi_1 \partial\varphi_2 + A_3 \partial\varphi_2 \partial\varphi_2 \\ \varphi_1 \Box \varphi_2 &= B_1 \partial\varphi_1 \partial\varphi_1 + B_2 \partial\varphi_1 \partial\varphi_2 + B_3 \partial\varphi_2 \partial\varphi_2,\end{aligned} \tag{1}$$

kde $\Box$ značí d'Alambertův vlnový operátor ve dvou proměnných a symbol $\partial\varphi\partial\varphi$ je zkratkou pro $\partial_x\varphi\partial_x\varphi - \partial_t\varphi\partial_t\varphi$.

1.2 Použité označení

V celé práci je použito běžné označení číselných množin přirozených, nezáporných celých, záporných celých, celých, reálných a komplexních čísel po řadě

$$\aleph, \aleph_0, Z^-, Z, R, C \quad .$$

Dále je používáno symbolu ∂ pro označení obecného lineárního diferenciálního operátoru prvního řádu. Tento symbol je použit vždy jen samostatně jako $\partial\varphi$. Tím je zabráněno záměně se symbolem $\partial\varphi\partial\varphi$. Dále je z důvodu lepší přehlednosti použito označení derivací pomocí tečkování

$$\partial u = \dot{u} \qquad \partial u \partial v = \dot{u}\dot{v} \quad .$$

2 Painlevého vlastnost, integrabilita ODEs a singularity řešení

Řešení ODE v komplexním oboru

$$w^n = F(z, w, ...w^{n-1}) \tag{2}$$

může mít dva typy singularit. Pevnou singularitou rozumíme singularitu nezávislou na počátecních podmínkach, zatímco umístění pohyblivé singularity na počátečních podmínkach závisí. Pevná singularita je dána singularitou funkce $F(z, w, ...w^{n-1})$ v proměnné z, zatímco pohyblivá je singularitou v proměnných $w, ...w^{n-1}$.

Jiný způsob klasifikace singularit, ale tentokrát již jen izolovaných (v topologickém smyslu) je rozdělení na póly, podstatné singularity a větvící body. O bodu z_0 se říká, že je pólem funkce $f(z)$, pokud $lim_{z\to z_0} f(z) = \infty$. Znamená to, že Laurentův rozvoj v tomto bodě má tvar

$$f(z) = \sum_{n=m}^{\infty} a_n(z - z_0)^n \quad m \in Z^- \quad .$$

Podstatnou singularitou funkce $f(z)$ je takový bod z_0, ve kterém $lim_{z\to z_0} f(z)$ neexistuje. Laurentův rozvoj potom nemá nejnižší člen, tedy je ve tvaru

$$f(z) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} a_n(z - z_0)^n \quad .$$

Nakonec větvícím bodem je bod z_0, v jehož libovolném okolí H_{z_0} existují body s různým číslem značnosti $f(z)$. Tato podivná definice má svůj původ v patologické definici funkce komplexní proměnné jako libovolné relace a nejednoznačnosti např. odmocniny (plyne z Moivreovy vety).

Pokud řešení rovnice

$$w^n = F(z, w, ...w^{n-1})$$

nemá žádné pohyblivé singularity kromě pólů, potom v každém bodě, kde není pevná singularita, můžeme najít řešení ve tvaru

$$w(z) = \sum_{n=m}^{\infty} a_n(z - z_0)^n \quad ,$$

$w(z)$ je řešením na nějakém okolí z_0. A to je základ pro další studium rovnic.

Definice: Rovnice $w^n = F(z, w, ...w^{n-1})$ má Painlevého vlastnost (P-vlastnost, je P-typu), pokud jediné pohyblivé singularity jejího řešení jsou póly.

Analogicky zní tato definice pro systémy

$$\vec{w}^n = F(z, \vec{w}, ...\vec{w}^{n-1}) \quad .$$

Existuje algoritmus, tzv. Painlevého test (P-test), který vyloučí některé, ale zpravidla skoro všechny, rovnice, které nejsou P-typu.

Algoritmus Painlevého testu se skládá ze tří kroků:

1. **Dominantní analýza.** Dominantní analýzou rovnice rozumíme analýzu chování $w(z)$ v okolí pohyblivého pólu nebo i nesingulárního bodu z_0. V okolí takového bodu platí

$$w(z) \approx a_m(z - z_0)^m \quad ,$$

kde m je nejnižší koeficient v Laurentově rozvoji. Po dosazení do rovnice je vidět, že některé členy se v okolí pólu stávají irelevantní a lze je zanedbat. Ostatní členy se nazývají dominantní částí rovnice

$$w^n = F(z, w, ...w^{n-1}) \quad .$$

Porovnáním dominantních členů dostaneme vztahy pro dominantní mocninu m a vedoucí člen rozvoje a_m. Pokud některá dominantní mocnina $m \notin Z$, řešení má v z_0 větvící bod a rovnice nemá P-vlastnost. Vedoucí členy rozvoje a_m a dominantní mocniny se najdou jako řešení nelineárních algebraických rovnic. Další kroky P-testu se potom musí provést pro všechny možnosti dominantního chování, při analýze systému rovnic musíme otestovat všechny kombinace dominantních chování jednotlivých rovnic.

2. **Rezonanční analýza.** Obecné řešení rovnice n-tého řádu závisí na n integračních konstantách. Jednou z nich je poloha z_0. Zbývá tedy ještě $n-1$ volných parametrů v Laurentově rozvoji a není jiná možnost, než že to jsou členy a_n. Pro zjištění volných členů rozvoje je třeba dosadit řešení do (2). Ale protože podmínku na daný člen dávají jen nejnižší mocniny, v nichž se v rovnici vyskytuje, stačí dosadit ansatz

$$w = a_m(z - z_0)^m(1 + \gamma(z - z_0)^r)$$

do dominantni části (2). Při porovnání nejnižších mocnin obsahujících γ dostaneme rovnici

$$Q(r)\gamma = 0 \quad ,$$

kde $Q(r)$ je polynom v proměnné j stupně nejvýše n. Pokud r je kořenem $Q(r)$, potom koeficient a_r je volný a r se nazývá rezonancí. Je třeba (Není úplně pravda, že je to vždy třeba, ale v obvyklých případech to platí. Tento detail je trochu více osvětlen o několik řádků níže.), aby (2) měla $n-1$ různých kladných rezonancí $r \in \aleph$, poslední, určující z_0 odpovídá $r = -1$. Pro systémy analogicky volíme

$$w_i = a^i_{m_i}(z - z_0)^{m_i} + \gamma_i(z - z_0)^r$$

a obdržíme lineární soustavu

$$Q(r)\vec{\gamma} = 0 \quad .$$

Tomu, aby r bylo nyní rezonance, odpovídá podmínka

$$\det(Q(r)) = 0 \quad .$$

Mezi rezonancemi systému rovnic by se také měla vyskytovat

$$r = -1 \quad .$$

Celkový počet těchto rezonancí musí být nanejvýš roven počtu rovnic, ostatní rezonance musí být celé nezáporné. Celkový počet všech rezonancí musí být roven počtu integračních konstant, na kterých obecné řešení soustavy zavisí. Násobnost každé rezonance přitom musí být nanejvýš rovna počtu rovnic v soustavě. Nakonec je třeba zmínit možnost, že poloha bodu z_0 se promítne do ostatních integračních konstant, jak je tomu například u lineárních rovnic. V těchto případech je potom $r = -1$ nahrazena další nezápornou rezonancí.

3. **Konstanty integrace.** Nakonec je třeba rozvoj dosadit do (2) a ověřit splnění tzv. podmínek kompatibility pro rezonance. Dosadíme řešení ve tvaru

$$w(z) = (z - z_0)^m \sum_{n=0}^{\infty} a_n (z - z_0)^n$$

do (2). Porovnáním koeficientů u mocnin $(z - z_0)$ získáme vztah

$$(z - z_0)^{m+j-n} (Q(j) a_j - R_j(z_0, ...a_{j-1})) = 0$$

a pro rezonanci máme tedy podmínku kompatibility

$$R_r(z_0, a_0, ...a_{r-1}) = 0 \quad .$$

Protože členy řešení s vyšším indexem, než je nejvyšší rezonance neovlivní tento výpočet, postačí, pokud do (2) dosadíme ansatz

$$w(z) = (z - z_0)^m \sum_{n=0}^{R} a_n (z - z_0)^n \quad ,$$

resp. pro systémy rovnic

$$w_i(z) = (z - z_0)^{m_i} \sum_{n=0}^{R} a_n^i (z - z_0)^n \quad ,$$

kde R je nejvyšší rezonance. Analogicky pro systémy dostaneme

$$Q(j)\vec{a_j} - \vec{R_j}(z_0, \vec{a_0}, ...\vec{a_{j-1}}) = 0 \quad .$$

Hodnost této soustavy, včetně její pravé strany, musí být menší, než její řád, aby existovalo řešení. To plyne z toho, že j je rezonance. Gaussovou eliminací pak najdeme řešení, tedy podmínky kompatibility. Členy, pro které nám nevyjde žádná podmínka, budou volné. Pokud řešení neexistuje, systém rovnic neprochází P-testem.

3 Přechod k PDEs

Přechod k parciálním diferenciálním rovnicím se provádí tak, aby při libovolné redukci proměnných, např. typu $(x,t) \to (x-ct)$, vzniklá ODE měla P-vlastnost. Navíc je třeba vzít v úvahu, že funkce více proměnných nemají izolované singularity. Jejich singularity jsou nadroviny

$$\phi(z_1, ...z_n) = 0 \quad ,$$

kde ϕ je v okolí této variety analytická.
Postulát: K tomu postačí následující definice P-vlastnosti pro PDEs.
Definice: PDE má P-vlastnost, pokud její řešení je v okolí singularní variety jednoznačná funkce.
Dále se předpokládá platnost jakéhosi principu korespondence mezi ODEs a PDEs, že řešení PDE lze napsat ve tvaru

$$W(z_1, ...z_n) = \phi^\alpha \sum_{j=0}^{\infty} u_j(z_1, ...z_n)\phi^j \quad .$$

Algoritmus Painlevého testu je potom úplnou analogií postupu u ODEs.

4 Analýza soustavy

Při analýze soustavy (1) se bohužel ukázalo, že jde o příliš složitý problém. Při pokusech o aplikaci P-testu počet případů, které je nutno analyzovat, velmi rychle rostl. Proto nyní použijeme algoritmus P-testu alespoň na jednodušší soustavu

$$\begin{aligned} \varphi_1 \Box \varphi_1 &= A_1 \partial\varphi_1 \partial\varphi_1 \\ \varphi_1 \Box \varphi_2 &= B_2 \partial\varphi_1 \partial\varphi_2 \quad . \end{aligned} \tag{3}$$

4.1 Dominantní analýza

Pro dominantní analýzu dosadíme do (3) ansatz

$$\varphi_1 = u\phi^\alpha \quad \varphi_2 = v\phi^\beta \quad . \tag{4}$$

Soustava dostane tvar

$$\begin{aligned} u^2\alpha(\alpha-1)\phi^{2\alpha-2} &= A_1 u^2\alpha^2\phi^{2\alpha-2} \\ uv\beta(\beta-1)\phi^{\alpha+\beta-2} &= B_2 uv\alpha\beta\phi^{\alpha+\beta-2} \quad . \end{aligned} \tag{5}$$

Kvadratické rovnice pro α a β mají řešení

$$\alpha \in \left\{0, \frac{1}{1-A_1}\right\} \qquad \beta \in \{0, B_2\alpha+1\} \quad . \tag{6}$$

Máme tedy čtyři možnosti:

- $\alpha = \beta = 0$
- $\alpha = 0 \ \wedge \ \beta = B_2\alpha + 1 = 1$
- $\alpha = \frac{1}{1-A_1} \ \wedge \ \beta = 0$
- $\alpha = \frac{1}{1-A_1} \ \wedge \ \beta = B_2\alpha + 1$

Soustava s danými kombinacemi A_1, B_2 projde P-testem, pokud jím projde pro všechny dominantní mocniny. Musíme tedy pro dané, zatím neznámé A_1, B_2 prověřit všechny čtyři možnosti.

4.2 Případ $\alpha = \beta = 0$

Pro nalezení rezonancí soustavy dosadíme do (3) počáteční členy rozvojů φ_1, φ_2

$$\begin{aligned} \varphi_1 &= u + u_1\phi + u_2\phi^2 \\ \varphi_2 &= v + v_1\phi + v_2\phi^2 \quad . \end{aligned} \tag{7}$$

Proderivováním a vynecháním irelevantních členů dostaneme rovnosti

$$\partial\varphi_1 = (\dot{u} + u_1\dot{\phi}) + (\dot{u}_1 + 2u_2\dot{\phi})\phi + \dot{u}_2\phi^2 \tag{8}$$

$$\Box\varphi_1 = \ddot{u} + 2\dot{u}_1\dot{\phi} + u_1\ddot{\phi} + 2u_2\dot{\phi}^2 \tag{9}$$

$$\partial\varphi_1\partial\varphi_1 = (\dot{u} + u_1\dot{\phi})^2 + 2(\dot{u} + u_1\dot{\phi})(\dot{u}_1 + 2u_2\dot{\phi})\phi \quad , \tag{10}$$

z nejnižšího řádu rozvoje podle mocnin ϕ v rovnici

$$\varphi_1 \Box \varphi_1 = A_1 \partial\varphi_1 \partial\varphi_1 \tag{11}$$

můžeme tedy při znalosti u, u_1, ϕ určit u_2. Pokud totéž provedeme pro druhou rovnici soustavy (3), zjistíme, že volné parametry rozvojů jsou

$$u, u_1, v, v_1, \phi \quad . \tag{12}$$

Zdálo by se, že máme pět integračních konstant pro dvě rovnice druhého řádu, což by zpusobilo problémy. Avšak stejné chování mají lineární rovnice, které P-vlastnost (už přímo Painlevého vlastnost!) mají (v případě ODEs mají jen pevné singularity, v případě PDEs to lze brát jako tvrzení bez důkazu). Problém více integračních konstant vlastně signalizuje, že v rozvoji

$$\varphi = \phi^\alpha \sum_{j=0}^{\infty} u_j(z_1, ...z_n)\phi^j \tag{13}$$

změna ϕ ovlivní volné členy u, v, u_1, v_1. $r = -1$ tedy není rezonancí a zbývají nám čtyři volné parametry.

Tato dominantní větev projde P-testem pro libovolné koeficienty A_1, B_2.

4.3 Případ $\alpha = 0 \ \wedge \ \beta = B_2\alpha + 1 = 1$

Z analogie s předchozím případem plyne, že z první rovnice (3) vyjdou volné členy u, u_1. Pro analýzu druhé rovnice vyjdeme opět z ansatzu

$$\begin{aligned} \varphi_1 &= u + u_1\phi + u_2\phi^2 \\ \varphi_2 &= v\phi + v_1\phi^2 + v_2\phi^3 \quad . \end{aligned} \tag{14}$$

Proderivováním vyjdou vztahy

$$\partial\varphi_2 = v\dot{\phi} + \dot{v}\phi + 2v_1\dot{\phi}\phi \tag{15}$$

$$\Box\varphi_2 = 2\dot{v}\dot{\phi} + v\ddot{\phi} + 2v_1\dot{\phi}^2 \tag{16}$$

$$\partial\varphi_1\partial\varphi_2 = (\dot{u} + u_1\dot{\phi})v\dot{\phi} \quad . \tag{17}$$

V nejnižším řádu rozvoje podle ϕ v rovnici

$$\varphi_1 \Box \varphi_2 = B_2 \partial\varphi_1 \partial\varphi_2 \tag{18}$$

dostaneme podmínku pro v_1. Máme tedy volné neznámé

$$u, u_1, v, \phi, \tag{19}$$

tomu odpovídají rezonance

$$r \in \{-1, 0, 0, 1\} \quad . \tag{20}$$

Podmínky pro u_2, v_1 jsou už přímo podmínkami kompatibility.

V tomto případě tedy soustava také projde P-testem pro libovolné A_1, B_2.

4.4 Případ $\alpha = \frac{1}{1-A_1} \ \wedge \ \beta = 0$

Nyní trochu předběhneme. V dalším případě totiž bude ukázáno, že pokud platí

$$\alpha = \frac{1}{1 - A_1} \quad , \tag{21}$$

má první rovnice soustavy (3) rezonance

$$r \in \{0, -1\} \quad . \tag{22}$$

Použijeme už nyní tento zatím nedokázaný výsledek. Zároveň už z dřívějška víme, že pro $\beta = 0$ má druhá rovnice (3) rezonance

$$r \in \{0, 1\} \quad . \tag{23}$$

Díky tomu nemusíme zkoumat žádné podmínky kompatibility a pouze kombinací jiných výsledků dostaneme

$$r \in \{-1, 0, 0, 1\} \quad . \tag{24}$$

V tomto případě soustava projde P-testem, pokud

$$\alpha = \frac{1}{1 - A_1} \in Z \quad , \tag{25}$$

tedy

$$A_1 \in \left\{ \frac{1}{z} + 1 \mid z \in Z \right\} \quad , \tag{26}$$

B_2 může být libovolné.

4.5 Případ $\alpha = \frac{1}{1-A_1} \ \wedge\ \beta = B_2\alpha + 1$

Předešlé případy byly z hlediska Painlevého analýzy víceméně triviální. V tomto posledním případě však už musíme nalezení rezonancí i konstant integrace provést podle algoritmu P-testu.

4.5.1 Rezonanční analýza

Pro nalezení rezonancí použijeme ansatz

$$\begin{aligned} \varphi_1 &= u\phi^\alpha(1+\gamma_1\phi^r) \\ \varphi_2 &= v\phi^\beta(1+\gamma_2\phi^r) \quad . \end{aligned} \tag{27}$$

Po dosazení do (3) a ponechání pouze relevantních členu dostáváme linearní soustavu

$$\begin{pmatrix} (\alpha+r)(\alpha+r-1-2A_1\alpha)+\alpha(\alpha-1) & 0 \\ \beta((\beta-1)-B_2(\alpha+r)) & (\beta+r)(\beta+r-1-B_2\alpha) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \gamma_1 \\ \gamma_2 \end{pmatrix} = 0. \tag{28}$$

Dosazením

$$A_1 = \frac{\alpha-1}{\alpha} \tag{29}$$

vyjde, že první rovnice (3) má rezonance

$$r \in \{-1, 0\} \quad , \tag{30}$$

což je výsledek, který jsme už dříve použili. Dosazením za

$$B_2\alpha = \beta - 1 \tag{31}$$

zjistíme, že druhá rovnice (3) má rezonance

$$r \in \{0, -\beta\} \quad . \tag{32}$$

Celkově tedy

$$r \in \{-1, 0, 0, -\beta\} \quad . \tag{33}$$

Máme tedy podmínku

$$-\beta \in \aleph \qquad \alpha = \frac{1}{1-A_1} \in Z \quad . \tag{34}$$

4.5.2 Konstanty integrace

Máme tedy provedeny první dva kroky Painlevého testu soustavy (3) a zbývá provést poslední část. Možné rezonance jsou však všechna přirozená čísla. Přesněji řečeno, pro každé přirozené číslo existuje kombinace A_1, B_2 taková, že dané číslo bude rezonancí. Můžeme dokončit P-test pro nejnižší rezonance a pokusit se o zobecnění.

- $r = 1$

Díky (6) a (33) můžeme napsat vztahy

$$\beta = -1 \qquad B_2 = \frac{-2}{\alpha} \quad . \tag{35}$$

První členy rozvojů řešení můžeme napsat ve tvaru

$$\begin{aligned} \varphi_1 &= u\phi^{\alpha} + u_1\phi^{\alpha+1} \\ \varphi_2 &= v\phi^{-1} + v_1 \quad . \end{aligned} \tag{36}$$

Rozderivováním dostaneme vztahy

$$\partial\varphi_1 = \phi^{\alpha-1}u\alpha\dot{\phi} + \phi^{\alpha}\dot{u} + \phi^{\alpha}u_1(\alpha+1)\dot{\phi} \tag{37}$$

$$\Box\varphi_1 = \phi^{\alpha-2}u\alpha(\alpha-1)\dot{\phi}^2 + \phi^{\alpha-1}(u\alpha\ddot{\phi} + 2\alpha\dot{u}\dot{\phi} + u_1\alpha(\alpha+1)\dot{\phi}^2) \quad . \tag{38}$$

Dosazením do první rovnice (3) dosteneme v nejnižším řádu $\phi^{2\alpha-2}$ už splněnou podmínku dominantního chovaní. V řádu $\phi^{2\alpha-1}$ pak při použití (29) máme podmínku kompatibility

$$\dot{\phi}^2 u_1 = -\left(\frac{1}{2}\ddot{\phi}u\alpha + \dot{\phi}\dot{u}\right) \quad . \tag{39}$$

Stejným postupem v druhé rovnici vypočítáme

$$\partial\varphi_2 = -\phi^{-2}v\dot{\phi} + \phi^{-1}\dot{v} + \dot{v}_1 \tag{40}$$

$$\Box\varphi_2 = 2\phi^{-3}v\dot{\phi}^2 - \phi^{-2}(v\ddot{\phi} + 2\dot{v}\dot{\phi}) \quad . \tag{41}$$

Po dosazení a několika algebraických úpravách vyjde podmínka kompatibility stejná s (39). Nalezli jsme tedy podmínku kompatibility pro u_1, v_1 je volný člen rozvoje.

Soustava (3) projde v první rezonanci P-testem právě, když jsou splněny podmínky

$$A_1 \in \left\{ \frac{1}{z} + 1 \mid z \in Z \right\} \qquad B_2 = -2(1 - A_1) \quad . \tag{42}$$

- $r = 2$

Díky (6) a (33) můžeme použít vztahy

$$\beta = -2 \qquad B_2 = \frac{-3}{\alpha} \quad . \tag{43}$$

Pro dosazení do soustavy (3) stačí uvažovat část řešení ve tvaru

$$\begin{aligned} \varphi_1 &= u\phi^\alpha + u_1\phi^{\alpha+1} + u_2\phi^{\alpha+2} \\ \varphi_2 &= v\phi^{-2} + v_1\phi^{-1} + v_2 \quad . \end{aligned} \tag{44}$$

Najdeme opět nejdříve vše, co se týká první rovnice (3). Obvyklým způsobem spočítáme

$$\partial\varphi_1 = \phi^{\alpha-1}u\alpha\dot\phi + \phi^\alpha(\dot u + u_1(\alpha+1)\dot\phi) + \phi^{\alpha+1}(\dot u_1 + u_2(\alpha+2)\dot\phi) \tag{45}$$

$$\begin{aligned} \Box\varphi_1 &= \phi^{\alpha-2}u\alpha(\alpha-1)\dot\phi^2 + \phi^{\alpha-1}(u\alpha\ddot\phi + 2\alpha\dot u\dot\phi + u_1\alpha(\alpha+1)\dot\phi^2) + \\ &+ \phi^\alpha(\ddot u + 2(\alpha+1)\dot u_1\dot\phi + (\alpha+1)u_1\ddot\phi + (\alpha+1)(\alpha+2)u_2\dot\phi^2). \end{aligned} \tag{46}$$

Po dosazení do první rovnice (3) můžeme opět porovnávat členy stejného řádu vzhledem k ϕ. V nejnižším řádu $2\alpha - 2$ dostáváme díky předpokladům splněnou podmínku dominantního chování. V řádu $2\alpha - 1$ vyjde rovnost

$$\begin{aligned} &u\alpha(\ddot\phi u + \dot\phi\dot u) + u\alpha\dot\phi(\dot u + (\alpha+1)\dot\phi u_1) + u_1(\alpha-1)\dot\phi^2\alpha u = \\ &= 2A_1(u\alpha\dot\phi(\dot u + (\alpha+1)\dot\phi u_1)) \quad . \end{aligned} \tag{47}$$

Algebraickými úpravami a použitím (29) nakonec dostaneme podmínku kompatibility shodnou s (39).

Nyní v první rovnici soustavy (3) porovnáme členy řádu 2α. Výsledkem bude po několika algebraických úpravách a po použití podmínky (39) rovnice

$$6\dot\phi^2 u_2 u = \dot\phi^2 u_1^2 \left(\frac{2\ddot u + 3\alpha + 1}{\alpha} \right) - \dot\phi u\dot u_1(\ddot u + 2) \quad , \tag{48}$$

což je podmínka kompatibility pro u_2.

Nyní se zameříme na druhou rovnici soustavy (3). V nejnižším řádu opět vyjde podmínka známá z dominantní analýzy. V dalším řádu obvyklým způsobem spočítáme

$$
\begin{aligned}
\partial\varphi_2 &= \phi^{-3}(-2\dot{\phi}v) + \phi^{-2}(\dot{v} - \dot{\phi}v_1) + \phi^{-1}\dot{v}_1 &(49)\\
\Box\varphi_2 &= 6\phi^{-4}\dot{\phi}^2 v + \phi^{-3}(-4\dot{\phi}\dot{v} - 2\ddot{\phi}v + 2\dot{\phi}^2 v_1)\\
&+ \phi^{-2}(\ddot{v} - \ddot{\phi}v_1 - \dot{\phi}\dot{v}_1) \quad . &(50)
\end{aligned}
$$

Algebraickými úpravami a použitím (39) dostaneme podmínku kompatibility

$$
\phi^2 v_1 = \ddot{\phi}v - \dot{\phi}\dot{v} \quad . \tag{51}
$$

Nakonec v řádu $\alpha - 2$ po dlouhém počítání a používání podmínek (39) a (51) vyjde podmínka kompatibility

$$
\begin{aligned}
6\phi^2 v u_2\left(\frac{\alpha-1}{\alpha}\right) &= \dot{\phi}^2 u_1 v_1 \frac{\alpha+1}{\alpha} + \\
&+ \dot{\phi}\left(-2u\dot{v}_1 + \frac{3\alpha-1}{\alpha}u_1\dot{v} + \frac{6}{\alpha}\dot{u}_1 v + \frac{1}{\alpha}\dot{u}v_1\right) - u\ddot{v}. &(52)
\end{aligned}
$$

Ukázali jsme, že v_2 je volný člen. Zároveň je vidět, že podmínky (48) a (52) jsou neslučitelné, odtud plyne, že **soustava (3) ve druhé rezonanci neprojde P-testem pro žádné kombinace A_1, B_2.**

- Další rezonance

Ze struktury výrazů, které vycházely pro druhou rezonanci se zdá, že pokud soustava tvaru (3) má rezonanci vyšší, než 2, budou případy, pro které (3) projde P-testem, nanejvýš řídké. Argumentem pro tento předpoklad může být, stejně jako v druhé rezonanci, že při velkém množství členů v podmínkách kompatibility, zároveň s tím, že v každé rovnici jsou členy různé, lze očekávat komplikace při jejich eliminaci.

5 Závěr

Podařilo se částečně analyzovat soustavu (3). Tyto výsledky budou platné i pro soustavu (1), pokud soustava (3) bude její dominantní částí a ostatní členy budou dostatečně vyššího řádu. Zde už budou velmi důležité relace mezi vedoucími koeficienty α a β.

Prohlašuji, že jsem práci vykonal samostatně, s užitím jen uvedené literatury a konzultací s vedoucím výzkumného úkolu.

13.9.2001 Václav Kavka

Reference

[1] Freit, M.: Painlevého analýza parciálních diferenciálních rovnic. Diplomová práce, MFF UK, 1990

[2] Conte, R., editor: The Painlevé Property, Springer-Verlag New York, 1999

[3] Ablowitz, Ramani, Segur: J. Math. Phys. 21 (1980), p.715

[4] Weiss, Tabor, Carnevale: J. Math. Phys. 24 (1983), p.522

[5] Ramani, Gramaticos, Bountis: Phys.Rep. 180 (1989), p.159