ČESKÉ VYSOKÉ UČENÍ TECHNICKÉ
V PRAZE

Fakulta jaderná a fyzikálně inženýrská

DIPLOMOVÁ PRÁCE

Praha 2002

Václav Kavka

ČESKÉ VYSOKÉ UČENÍ TECHNICKÉ
V PRAZE

Fakulta jaderná a fyzikálně inženýrská

DIPLOMOVÁ PRÁCE

Painlevého analýza systémů diferenciálních rovnic

Václav Kavka

Vedoucí práce: Prof. RNDr. Ladislav Hlavatý, DrSc.

17. květen, 2002

Děkuji svému vedoucímu práce, Prof. Ladislavu Hlavatému, za výraznou pomoc a důležité konzultace.

Prohlašuji, že jsem práci vykonal samostatně, s užitím uvedené literatury.

1 Úvodní poznámky

Tématem této práce je Painlevého analýza a studium integrability obyčejných a parciálních diferenciálních rovnic a jejich systémů. Úvodní kapitola o Painlevého analýze vznikla převážně výběrem z literatury, vedeným snahou o podání uzavřené teorie a vyplněním některých mezer, které se v současné běžné literatuře o Painlevého analýze vyskytují. Důraz je kladen na teoretický základ Painlevého analýzy a poukázání na společné pozadí metod, které se k Painlevého analýze používají. Ostatní kapitoly jsou původní.

V celé práci je používáno běžné označení

$$C, R, Z, N_0, N$$

po řadě pro komplexní, reálná, celá, nezáporná celá a přirozená čísla.

2 Úvod do Painlevého analýzy

2.1 Úvod

Co znamená integrovat obyčejnou diferenciální rovnici (ODE) n-tého řádu

$$F(z, w(z), ...w^{n-1}(z), w^n(z)) = 0 \tag{1}$$

v komlexním oboru? Intuitivně lze říci, že je třeba v konečném počtu kroků, nejčastěji integrací, nalézt obecné řešení, tj. už dále neprodloužitelné řešení, parametricky závislé na n integračních konstantách

$$C_1, ...C_n \quad .$$

O rovnice se přitom mužeme zajímat ze dvou hlavních důvodů:

1. Nalezení nových funkcí definovaných jako obecná řešení diferenciálních rovnic.

2. Nalezení vyčerpávajícího seznamu rovnic, které lze vyřešit ve výše zmíněném smyslu.

V dalším výkladu se při upřesňování pojmu integrability ukáže, že rozhodující úlohu hraje přítomnost některých typů singularit v některých typech řešení. Provedeme tedy nejprve takovou klasifikaci singulárních bodů a řešení, která se pro naše účely ukáže být vhodnou.

2.2 Klasifikace singularit řešení ODEs

Singularity řešení ODE (1) můžeme pro naše účely dělit podle závislosti na počátečních podmínkách a chování řešení v jejich okolí.

Definice 1: Podle závislosti na počátečních podmínkách dělíme singularity řešení (1) na pevné a pohyblivé.

- **Pevné** singularity jsou ty, jejichž poloha na počátečních podmínkách nezávisí.
- Poloha **pohyblivých** singularit na počátečních podmínkách závisí.

Poznámka 1: Pro rovnice typu

$$w^n(z) = F(z, w(z), w'(z)...w^{n-1}(z)) \tag{2}$$

jsou pevnými singularitami řešení například singularity pravé strany v proměnné z. Pohyblivými singularitami řešení mohou být singularity v proměnných $w, w', ...w^{n-1}$.

Definice 2: Podle chování řešení na svém okolí dělíme singularity následovně:

- **Póly** jsou topologicky izolované body z_0, v nichž platí
$$\lim_{z\to z_0} w(z) = \infty \quad .$$
- **Podstatné singularity** jsou body, v nichž
$$\lim_{z\to z_0} w(z)$$
neexistuje.
- **Větvící body** funkce $w(z)$ jsou body z_0, na jejichž libovolném okolí se mění počet prvku množiny $\Lambda_z = \{w(z)\}$.

Definice pólu a podstatné singularity přitom předpokládá, že $w(z)$ je na nějakém prstencovém okolí z_0 holomorfní jednoznačná funkce. V definici větvícího bodu je $w(z)$ víceznačnou funkcí ve smyslu následující poznámky.

Poznámka 2: V teorii komplexní proměnné se funkcí nazývá libovolná relace. Funkce $f(z)$ v pravém slova smyslu potom označujeme jako **jednoznačné** (množina $\Lambda_z = \{f(z)\}$ je pro všechna z jednoprvková), ostatní funkce nazýváme **mnohoznačné**

$$(\exists z \in Def(f))(\Lambda_z = \{f(z)\} \textit{ má více než jeden prvek}) \quad .$$

Příklad 1: Podle Moivreovy věty má $f(z) = z^n$ pro n racionální,

$$n \notin Z$$

větvící bod v $z = 0$.

2.3 Klasifikace řešení ODEs

Definice 3: Obecným řešením $w(z)$ rovnice (1) rozumíme množinu maximálních (dále neprodloužitelných) řešení, která je spojitě netriviálně parametrizována n parametry, integračními konstantami

$$C_1, ...C_n \quad .$$

Přitom je nutné, aby při jakékoliv jiné volbě konstant

$$D_i = D_i(C_1, ...C_n)$$

platilo, že řešení je opět parametrizováno n parametry

$$D_1, ...D_n \quad .$$

Pokud mezi konstantami C_i v obecném řešení zavedeme vazební podmínky

$$\Phi_k(C_1, ...C_n) = 0 \quad ,$$

nazýváme potom řešení **partikulárním**.

Všechny rovnice nemají tak dobré vlastnosti, aby pro ně platily věty o existenci a jednoznačnosti řešení. Množina všech řešení pak může vypadat velmi složitě.

Příklad 1: Rovnice

$$(u''' - 2u'u'')^2 - 4(u'')^2(u'' - (u')^2 - 1) = 0 \tag{3}$$

má obecné řešení

$$u = \frac{e^{c_1 x + c_2}}{c_1} + \frac{c_1^2 - 4}{4c_1} x + c_3 \quad . \tag{4}$$

Kromě toho však existuje i řešení

$$u = d_1 - \log\cos(x - d_1) \quad , \tag{5}$$

které řeši již rovnici

$$u'' - (u')^2 - 1 = 0 \quad . \tag{6}$$

Tato dvě řešení spolu nemají vůbec nic společného. Existují tedy řešení, která jsou důsledkem algebraických vlastností rovnic a nejsou obecnými ani partikulárními. Vzniká zde tedy nutnost zavedení dalšího typu řešení.

Definice 4: Řešení (1) nazveme **singulárním**, pokud není možné jej zahrnout do obecného ani partikulárního řešení.

2.4 Základní věty

V tomto odstavci zformulujeme základní věty z teorie diferenciálních rovnic, které budou dále použity.

Věta 1 (Cauchy, Picard): Nechť systém ODEs je zapsán ve tvaru

$$\dot{\vec{w}}(z) = \vec{F}(z, \vec{w}(z)), \tag{7}$$

kde $\vec{w}(z) \in C^N$, $z \in C$. Nechť dále $(z_0, \vec{w_0}) \in C \times C^N$, D oblast, obsahující $(z_0, \vec{w_0})$, F_i holomorfní na D. Potom existuje právě jedno řešení splňující

$$\vec{w}(z_0) = \vec{w_0} \quad .$$

Toto řešení je holomorfní na okolí z_0.

Věta 2 (Poincaré): Nechť systém ODEs je zapsán ve tvaru

$$\dot{\vec{w}}(z) = \vec{F}(z, \vec{w}(z), \varepsilon), \tag{8}$$

kde $\vec{w}(z) \in C^N$, $z \in C$, $\varepsilon \in C$. Nechť dále $(z_0, \vec{w_0}, 0) \in C \times C^N \times C$, D oblast v $C \times C^N \times C$, obsahující $(z_0, \vec{w_0}, 0)$. Pokud F_i je holomorfní na D pro všechna i, pak existuje řešení ve smyslu **Věty 1**, které je holomorfní na okolí $(z_0, 0)$.

Pokud rozvineme $\vec{w}$ a $\vec{F}$ do Taylorovy řady, můžeme napsat

$$w_i(z) = \sum_{n=0}^{\infty} \varepsilon^n w_i^{(n)}(z) \quad F_i = \sum_{n=0}^{\infty} \varepsilon^n F_i^{(n)} \quad . \tag{9}$$

Soustavu (8) potom můžeme řešit člen po členu. Rozepsáním Taylorových rozvojů (9) dostaneme

$$\begin{aligned} \dot{w}_i^{(0)} + \varepsilon \dot{w}_i^{(1)} + \varepsilon^2 \dot{w}_i^{(2)} + ... &= F_i(z, \overrightarrow{w_0}, 0) + \varepsilon \left\{ \frac{\partial F_i}{\partial \varepsilon} + \sum_j \frac{\partial F_i}{\partial w_j} \frac{\partial w_j}{\partial \varepsilon} \right\} \Bigg|_{\varepsilon=0} \\ + \frac{\varepsilon^2}{2} \left\{ \frac{\partial^2 F_i}{\partial^2 \varepsilon} \right. &+ \left. \sum_j \frac{\partial}{\partial \varepsilon} \left(\frac{\partial F_i}{\partial w_j} \right) \frac{\partial w_j}{\partial \varepsilon} + \sum_j \frac{\partial F_i}{\partial w_j} \frac{\partial^2 w_j}{\partial \varepsilon^2} \right\} \Bigg|_{\varepsilon=0} + \\ &+ \frac{\varepsilon^3}{6} \left\{ \sum_j \frac{\partial F_i}{\partial w_j} \frac{\partial^3 w_j}{\partial \varepsilon^3} + ... \right\} \Bigg|_{\varepsilon=0} + ... \quad . \end{aligned} \tag{10}$$

Ještě doplníme

$$\frac{\partial^n w_i}{\partial \varepsilon^n} \Bigg|_{\varepsilon=0} = \frac{w_i^{(n)}}{n!} \tag{11}$$

a můžeme psát rovnice

$$\begin{array}{lr} n = 0 & \dot{w}_i^{(0)} = F_i(z, \overrightarrow{w_0}, 0) \\ n \geq 1 & \dot{w}_i^{(n)} = \sum_j \frac{\partial F_i}{\partial w_j} w_j^{(n)} + R_n(z, \overrightarrow{w_0}, ... \overrightarrow{w}_{n-1}) \quad . \end{array} \tag{12}$$

V nejnižším řádu je obecně nelineární rovnice, v ostatních řádech jsou linearní rovnice, lišící se pouze pravou stranou. Jejich řešení se tedy budou lišit jen díky variaci konstant.

Pokud požadujeme, aby řešení w_i byla jednoznačnými funkcemi, musí být každý člen w_i^n jednoznačnou funkcí. Kdyby tomu tak nebylo a napríklad k byl nejnižší index, pro nějž w_i^k je víceznačná fukce, jejíž alespoň dvě hodnoty v nějakém bodě z jsou $\widetilde{w}_i^k(z), \overline{w}_i^k(z)$, potom množina $\Lambda_i^- = \{w_i(z) - w_i(z)\}$ má alespoň jeden nenulový prvek, jehož rozvoj začíná

$$\varepsilon^k (\widetilde{w}_i(z) - \overline{w}_i(z)) \quad .$$

2.5 Painlevého vlastnost, integrabilita

Pokusíme se nyní upřesnit pojem **integrability** obyčejné diferenciální rovnice (1) v komplexním oboru. Jako první podmínku můžeme požadovat možnost nalezení maximálního obecného řešení v uzavřeném tvaru (tedy ne ve formě lokálního rozvoje). Pokud obecné řešení rovnice (1) je jednoznačná funkce, můžeme (1) vzít za její definiční vztah a rovnici můžeme považovat za integrabilní. Studování integrability rovnic je od počátku motivováno fyzikálními problémy. Pokud už najdeme obecné řešení rovnice (1) v uzavřeném tvaru, toto řešení může reprezentovat například trajektorii ve fázovém prostoru. Od takové trajektorie ale očekáváme (přesněji řečeno požadujeme), aby se nevětvila. Jinak nebude možné předvídat budoucí vývoj. Zdá se tedy, že obecné řešení (1) by nemělo obsahovat větvící body. Pokud však můžeme větvící body vyjmout z definičního oboru, trajektorie se už nebudou větvit a systém můžeme opět považovat za integrabilní. To však lze provést pouze tehdy, když jsou větvící body **pevné**.

Definice 5: Rovnice (1) má **Painlevého vlastnost** (P-vlastnost, je P-typu), pokud její obecné řešení neobsahuje pohyblivé větvící body.

Poznámka 3: V obecných řešeních lineárních rovnic se nacházejí jen pevné singularity a proto lineární rovnice mají P-vlastnost.

Úplné ověření P-vlastnosti se obvykle provádí ve dvou krocích:

1. **Painlevého test**, což je soubor podmínek, vycházejících z lokálního rozvoje řešení podle **Věty 2**, které vylučují přítomnost pohyblivých větvících bodů určitého typu.

2. Důkaz toho, že splnění P-testu je postačující podmínkou globální integrability.

Kvůli obtížnosti důkazu dostatečnosti se však druhý krok obvykle vynechává. Prvními úspěchy této metody bylo nalezení Painlevého rovnic a rozřešení integrability setrvacníků.

Vše, co bylo dosud napsáno o P-analýze rovnice (1) platí i pro systémy rovnic (7). V **definici 3** stačí zaměnit (1) za (7). V následujících odstavcích se budeme zabývat nalezením podmínek pro sestavení Painlevého testu rovnic a jejich systémů.

2.6 α-metoda

α-metoda je původní verzí Painlevého analýzy. Do rovnice (1) zavedeme parametr α pomocí substituce

$$z = z_0 + \alpha Z \quad , \tag{13}$$

kde z_0 je nesingulární bod řešení. Dále zvolíme ansatz

$$w\left(Z\right) = \alpha^p \sum_{n=0}^{\infty} \alpha^n w^{(n)}\left(Z\right) \quad . \tag{14}$$

Potom můžeme určit hodnoty parametru p, pro které lze použít **Větu 2**.

Příklad 3, (rovnice Painlevé 1): Rovnici

$$-\frac{d^2u}{dx^2} + 6u^2 + g(x) = 0 \quad , \tag{15}$$

kde $g(x)$ je analytická, převedeme pomocí (13) a (14) na tvar

$$-\frac{d^2(u_0 + ...)}{dX^2} + 6\alpha^{p+2}(u_0 + ...)^2 + \alpha^{2-p}(g(x_0) + ...) = 0 \quad . \tag{16}$$

Z podmínky holomorfnosti pravé strany dostáváme

$$-2 \leq p \leq 2 \qquad p \in Z \quad . \tag{17}$$

Dalším krokem je rozepsání podle (9). Pokud v nejnižším řádu není nelineární rovnice, jsou všechny rovnice lineární a podle **Poznámky 3** se žádné pohyblivé větvící body v obecném řešení nevyskytují. Pro další analýzu jsou tedy podstatné jen netriviální případy, kdy rovnice v nejnižším řádu je nelineární. Její řešení se objeví v následujících rovnicích a tam následně mohou vzniknout pohyblivé větvící body.

Nemusíme vždy hledat obecná řešení všech rovnic, částečná řešení nám však pomohou jen vyloučit některé případy.

Příklad 4 (P1): Podmínka nelinearity implikuje

$$p = -2 \quad . \tag{18}$$

V nejnižším řádu máme rovnici

$$-\frac{d^2u_0}{dX^2} + 6u_0^2 = 0 \quad . \tag{19}$$

Jejím obecným řešením je Weierstrassova funkce

$$u_0 = \wp(X - c_0, 0, g_3) \quad , \tag{20}$$

kde $\wp$ řeši rovnici

$$\dot{y}^2 = 4y^3 - g_2y - g_3 \quad . \tag{21}$$

V prvním řádu dostáváme rovnici

$$-\frac{d^2v}{dX^2} + 12\wp(X - c_0, 0, g_3)v = 0 \quad . \tag{22}$$

Částeňá řešení rovnic v dalších řádech mají tvar

$$
\begin{aligned}
u_1 &= u_2 = u_3 = 0, &(23)\\
u_4 &= \frac{g_0}{24}\left[2X\wp\wp' + 2\wp^2 - \zeta\wp'\right], &(24)\\
u_5 &= \frac{g_0}{24}\left[2X^2\wp\wp' + 2X\wp^2 + (X\wp' + 2\wp)\zeta\right], &(25)\\
u_6 &= \frac{g_0''}{48}\left[(X\wp' + 2\wp)(X^2 + 2X\zeta - 2\log\sigma)\right. &(26)\\
&+ \left.(X^3\wp + X^2\zeta - 2X\log\sigma + 2\int \log\sigma dX)\wp'\right] \quad , &(27)
\end{aligned}
$$

přičemž platí vztahy

$$\zeta' = -\wp, \qquad \sigma' = \zeta\sigma \qquad . \tag{28}$$

Podmínka pro eliminaci logaritmického větvícího bodu v u_6 je $g''(x_0) = 0$. Protože x_0 je libovolný, musí platit $g''(x) = 0$. Painlevé dokázal, že to je i postačující podmínka pro to, aby rovnice (15) definovala funkci, která se pak nazve **P1**.

2.6.1 α-metoda pro systémy ODEs

Podobně jako pro jednu ODE, zavedeme do soustavy (7) parametr α substitucí

$$z = z_0 + \alpha Z \quad , \tag{29}$$

kde z_0 je nesingulární bod řešení. Dale použijeme ansatz

$$w_i\left(Z\right) = \alpha^{p_i} \sum_{n=0}^{\infty} \alpha^n w_i^{(n)}\left(Z\right) \quad . \tag{30}$$

Dále se pokračuje stejně jako pro jedinou ODE. Protože **Věta 2** byla zformulována pro systém rovnic, není třeba dalšího výkladu.

V dalších odstavcích nalezneme způsob, jak v rozvoji podle parametru přejít od diferenciálních rovnic k algebraickým. To velmi zjednoduší nalezení nutných podmínek pro P-vlastnost.

2.7 Painlevé - Gambierův test

V tomto odstavci vyložíme algoritmus takzvaného Painlevé - Gambierova testu. Prozatím se nebudeme věnovat jeho vztahu k **Větě 2** a celkové Painlevého analýze. Painlevé - Gambierův test se skládá ze tří po sobě následujících kroků.

2.7.1 Dominantní analýza

Předpoklad: Předpokládáme, že jediné pohyblivé singularity obecného řešení (1) nebo (7) jsou póly v z_0. V okolí těchto singularit se potom řešení lokálně rozvinutá do Laurentovy řady

$$w(z) = (z-z_0)^p \sum_{n=0}^{\infty} w^{(n)}(z-z_0)^n, \tag{31}$$

$$w_i(z) = (z-z_0)^{p_i} \sum_{n=0}^{\infty} w_i^{(n)}(z-z_0)^n \quad , \tag{32}$$

chovají jako vedoucí členy svých rozvojů

$$w(z) \approx w^{(0)}(z-z_0)^p, \tag{33}$$

$$w_i(z) \approx w_i^{(0)}(z-z_0)^{p_i} \quad . \tag{34}$$

Dosazením ansatzu (33), (34) do (1), (7) tedy zjistíme chování řešení (1), (7) v okolí singularit, takzvané **dominantní chování**. Ve vzniklé algebraické rovnici (nebo jejich systému pro soustavu rovnic (7)) lze na okolí singularity zanedbat všechny členy kromě členů nejnižšího řádu a vyřešením získat možné typy dominantního chování

$$(p, w^{(0)}), \qquad (p_i, w_i^{(0)}) \quad . \tag{35}$$

Členy rovnice, ze kterých pocházejí členy nejnižšího řádu po dosazení ansatzu (33), (34) se nazývají **dominantní části** (1), (7).

Příklad 5, (Riccati): Rovnice

$$\dot{u} = a_2 u^2 + a_1 u + a_0, \qquad a_2 \neq 0 \tag{36}$$

připouští dominantní chování

$$\left(p, u^{(0)}\right) = \left(-1, \frac{-1}{a_2}\right) \tag{37}$$

při dominantní části

$$\dot{u} = a_2 u^2 \tag{38}$$

nebo

$$\left(p, u^{(0)}\right) = \left(0, u^{(0)} .. libovoln\acute{e}\right) \tag{39}$$

při dominantní části

$$\dot{u} = 0 \quad . \tag{40}$$

Pokud některá z vedoucích mocnin $p, p_i \notin Z$, potom řešení (1) nebo (7) nemůže vyhovět **Předpokladu**, protože v bodě z_0 je pohyblivý větvící bod. Poslední věta není úplně správná ve svém znění a bude ještě upřesněna v odstavci...

Našli jsme vedoucí členy (**větve** ve smyslu dalšího větvení algoritmu, ne větvících bodů) a mocniny Laurentových rozvojů možných řešení (1), (7). Dále budeme zkoumat jejich vlastnosti.

2.7.2 Rezonanční analýza

Obecné řešení rovnice n-tého řádu závisí na n konstantách. Pokud pro řešení použijeme ansatz (31), (32), může být jednou z nich poloha bodu z_0. Ostatních nejméně $n-1$ (nebo příslušný počet pro systémy) však musí být členy v Laurentově rozvoji $w^{(n)}, w_i^{(n)}$. Při dosazení (31), (32) do (1), (7) na ně tedy nesmíme dostat jednoznačné podmínky. Tyto členy budeme dále nazývat **volné**.

Definice 6: Pokud člen $w^{(n)}$ v (31) pro (1) nebo $w_i^{(n)}$ v (32) pro (7) je volný, index n nazveme **rezonancí**.

Poznámka 4: Při použití ansatzu (31), (32) jsou všechny rezonance celé nezáporné.

Pro určení, jestli daná větev reprezentuje obecné řešení je třeba nalézt všechny príslušné rezonance. To lze provést tak, že dosadíme (31), (32) do (1), (7). Protože předpokládáme, že Laurentovy rozvoje mají nejnižší člen, můžeme $w^{(n)}, w_i^{(n)}$ "odspoda" člen po členu dopočítávat. Dostáváme tedy podmínky

$$w^{(n)} = w^{(n)}\left(w^{(0)}, ...w^{(n-1)}\right), \qquad w_i^{(n)} = w_i^{(n)}\left(w_a^{(0)}, ...w_j^{(n-1)}\right) \quad . \tag{41}$$

Nyní tedy dosadíme Laurentovy rozvoje (30), (31) do (1), (7). Protože ale dopočítáváme členy od nejnižšího dále, podmínky pro koeficienty $w^{(n)}, w_i^{(n)}$ pocházejí z výrazů, kde se tyto koeficienty vyskytnou s nejnižší mocninou $(z - z_0)$. Členy vyššího řádu už dávají podmínky pro další koeficienty. Proto stačí Laurentovy rozvoje (31), (32) dosadit do dominantní části (1), (7). Protože nás nezajímá konkretní hodnota koeficientu $w^{(n)}, w_i^{(n)}$, ale pouze zda jsou určeny jednoznačně, pokusíme se nalézt jen rezonance.

Nejjednodušším způsobem pro zjištění volných členů rozvoje je dosazení ansatzu

$$w = w^{(0)}(z-z_0)^m(1+\gamma(z-z_0)^r), \tag{42}$$

$$w_i = w_i^{(0)}(z-z_0)^{m_i}(1+\gamma_i(z-z_0)^r) \tag{43}$$

do dominantní části (1), (7). Tím sice nezískáme přesný tvar podmínek pro $w^{(n)}, w_i^{(n)}$, jejich jednoznačnost se však nemění. V nejnižším řádu dostáváme lineární rovnici pro γ v případě (1) nebo soustavu lineárních rovnic pro (7). Pro jednu ODE bude mít rovnice tvar

$$Q(j)\gamma = 0 \quad , \tag{44}$$

kde $Q(j)$ je polynom v proměnné j stupně nejvýše n. Pokud r je kořenem $Q(j)$, potom koeficient $w^{(r)}$ je volný a r je rezonancí.

Pro systémy dostáváme lineární soustavu

$$Q(j)\vec{\gamma} = 0 \quad , \tag{45}$$

kde $Q(j)$ je matice. Tomu, aby r bylo nyní rezonance, odpovídá podmínka

$$\det(Q(r)) = 0 \quad .$$

Redefinice: Rezonancemi dále budeme rozumět kořeny determinantu $Q(j)$. To je korektní i pro případ jedné ODE.

Jak už bylo řečeno, rezonancemi jsou v tomto pojetí nezáporná čísla. Prítomnost necelých čísel mezi rezonancemi indikuje přítomnost větvících bodů v řešení. Důležitou, avšak typickou výjimkou mezi rezonancemi je

$$r = -1 \quad .$$

Lze dokázat, že její přítomnost signalizuje, že poloha bodu z_0 je libovolná a nezávislá na ostatních integračních konstantách (je jednou z nich).

Příklad 6, (Riccati): Analyzujeme větev (37). Pro řešení dostáváme ansatz

$$u = \frac{-1}{a_2}(z-z_0)^{-1}\left(1+\gamma(z-z_0)^r\right) \quad . \tag{46}$$

Po dosazení do (38) dostáváme podmínku

$$\frac{-1}{a_2}\left(-(z-z_0)^{-2}+\gamma(r-1)(z-z_0)^{r-2}\right)=\frac{1}{a_2}\left((z-z_0)^{-2}+2\gamma(z-z_0)^{r-2}+...\right),$$

tedy

$$\gamma(r+1)=0 \quad . \tag{47}$$

Jedinou rezonanci tedy je

$$r=-1 \quad . \tag{48}$$

Poznámka 5: V linearních rovnicích s konstantními koeficienty se rezonance $r=-1$ nevyskytuje.

Pro úspešné splnění této části testu je nutné, aby existovala dominantní větev, která má stejný počet rezonancí, počítaných s vahou svých násobností, jejichž násobnost je nanejvýš rovna počtu rovnic v (7), jako je počet integračních konstant v obecném řešení (1), (7). Kromě možné přítomnosti

$$r=-1$$

musí být ostatní rezonance nezáporné a celé. Jinak řečeno, každé integrační konstantě odpovídá právě jeden volný parametr v Laurentově rozvoji řešení nebo poloha z_0. Pro systémy (7) se může také stát, že rezonance

$$r=-1$$

má násobnost větší, než 1. To odpovídá tomu, že řešení nemusí být rozvíjena kolem stejného bodu z_0, ale například $z_{0_1}, z_{0_2}, ...$. Jednoduchým příkladem může být systém

$$\dot{w}_1=w_1^2 \qquad \dot{w}_2=w_2^2 \quad . \tag{49}$$

Pokud taková větev neexistuje, potom žádná z větví nepopisuje obecné řešení. Pokud všechny větve obsahují necelé nebo nevyhovující záporné rezonance, potom rovnice neprojde Painlevého testem.

2.7.3 Konstanty integrace a podmínky kompatibility

Předešlé kroky testu vyřadily některé pohyblivé algebraické větvící body z řešení (1), (7). Ne všechny pohyblivé větvící body však musí být algebraické.

Podle předpokladu můžeme počítat koeficienty Laurentových rozvojů (31), (32) od nižších k vyšším. Dosadíme tedy rozvoje (31), (32) do kompletních rovnic (1), (7). Pokud bude možné spočítat koeficienty až do nejvyšší rezonance r_{max}, následující koeficienty už z předešlých bude možno určit. Do rovnic (1), (7) proto stačí dosadit ansatz

$$w(z) = (z-z_0)^m \sum_{n=0}^{r_{max}} w^{(n)} (z-z_0)^n \tag{50}$$

$$w_i(z) = (z-z_0)^m \sum_{n=0}^{r_{max}} w_i^{(n)} (z-z_0)^n \quad , \tag{51}$$

a ověřit možnost splnění podmínek ve všech mocninách. Formálně to lze při porovnání výrazů podle mocnin $z - z_0$ zapsat pro jednu ODE

$$(z-z_0)^{m+j-n}(Q(j)w^{(j)} - R_j(z_0, ...w^{(j-1)})) = 0 \tag{52}$$

Podmínka pro to, aby r bylo volným indexem nyní vypadá

$$R_r(z_0, ...w^{(r-1)}) = 0 \quad . \tag{53}$$

Pro systémy (7) dostaneme analogickou sadu podmínek

$$Q(j)\vec{w}^{(j)} - \vec{R}_j(z_0, \vec{w}^{(0)}, ...\vec{w}^{(j-1)}) = 0 \quad . \tag{54}$$

Pro rezonance nyní musí platit, že hodnost této soustavy, včetně její pravé strany, musí být stejná jako hodnost soustavy bez pravé strany a menší, než počet rovnic, aby řešení existovalo a nebylo jednoznačné.

Podmínky (53) a (54) se nazývají **podmínkami kompatibility**. Nesplnění některé z podmínek kompatibility indikuje, že Laurentův rozvoj nepostihuje úplně řešení, to znamená, že v řešení (1), (7) se vyskytuje transcendentní pohyblivý větvící bod.

2.8 Zobecnění a komentáře Painlevé - Gambierova testu

Předpoklad můžeme snadno zobecnit touto modifikací: Předpokládáme, že Laurentův rozvoj řešení (1), (7) kolem libovolného z_0 má nejnižší člen. Test potom proběhne úplně stejně.

Zatím sice není vidět, jak algoritmus Painlevé - Gambierova testu souvisí s **Větou 2** nebo α - metodou, je však vidět, že tento test nalézá v řešení rovnic pohyblivé větvící body. Zároveň, oproti α - metodě, není zapotřebí řešit žádné další diferenciální rovnice. Počítání se během Painlevé - Gambierova testu redukuje na řešení algebraických rovnic a hledání kořenů polynomů. Pokud se nám podaří ukázat souvislost mezi P - G testem a **Větou 2**, budeme mít silný nástroj pro analýzu diferenciálních rovnic.

2.8.1 Perturbace

Přepokládejme, že bod z_0 je pohyblivým singulárním bodem řešení (1), (7). Protože z_0 je singularitou, nemůžeme použít **Větu 2**. Parametr lze však do (1) zavést substitucí

$$z = z_0 + \varepsilon Z, \qquad w\,(Z) = (\varepsilon Z)^p \sum_{n=0}^{\infty} (\varepsilon Z)^n w^{(n)}\,(Z) \quad , \tag{55}$$

analogicky pro (7)

$$z = z_0 + \varepsilon Z, \qquad w_i\,(Z) = (\varepsilon Z)^{p_i} \sum_{n=0}^{\infty} (\varepsilon Z)^n w_i^{(n)}\,(Z) \quad . \tag{56}$$

Na tento typ rozvoje opět můžeme použít Painlevé-Gambierův test z předešlého odstavce.

2.8.2 Perturbace podle Bureaua

V tomto odstavci provedeme syntézu **Věty 2** a Painlevé-Gambierova testu za pomoci perturbace z předešlého odstavce. Výklad provedeme jen pro případ jediné ODE. Z předcházejících odstavců je již zobecnění pro systémy zřejmé. Předpokládejme, že pomocí perturbace nebo dominantní analýzy z P-G testu (obojí vede ke stejným výsledkům) najdeme celé vedoucí (dominantní) mocniny $p < 0$. Abychom uvedli tento rozvoj do souladu s **Větou 2**, zavedeme nové proměnné x, W a nový systém rovnic následujícím způsobem:

$$w = s x^p, \qquad \frac{dx}{dz} = 1 + W x, \qquad s \neq 0 \quad . \tag{57}$$

Funkce $s = s(z)$ zde hraje roli parametru, který fixuje určitou volnost volby

x. Z (1) nyní můžeme eliminovat w pomocí

$$x^{-p} w = s \tag{58}$$

$$x^{-p+1} \frac{dw}{dz} = ps + \left(\frac{ds}{dz} + psW \right) x \tag{59}$$

$$x^{-p+2} \frac{d^2 w}{dz^2} = p(p-1)s + \left(2p \frac{ds}{dz} + p(2p-1)sW \right) x \tag{60}$$

$$+ \left(\frac{d^2 s}{dz^2} + 2p \frac{ds}{dz} W + p^2 s W^2 + ps \frac{dW}{dz} \right) x^2 \quad , \tag{61}$$

atd.

Rovnici (1) nyní můžeme zapsat ve tvaru

$$F\left(z, W, \frac{dW}{dz}, \frac{d^2 W}{dz^2}, \ldots \frac{d^{n-1} W}{dz^{n-1}}, s, \frac{s}{dz}, \ldots \frac{d^n s}{dz^n}, x \right) = 0 \tag{62}$$

Celý nový systém nyní přepíšeme do proměnných x, W. Bod $x = 0$ už není problematický, protože

$$\lim_{x \to 0} x^{-p} w \in (0, +\infty) \quad . \tag{63}$$

Proto můžeme provést perturbaci a poté už soustava (57), (62) bude odpovídat **Větě 2**.

Možností provedení perturbace je nyní více.

1. **První perturbaci** definujeme vzahy

$$z = z_0 + \varepsilon Z, \qquad x = \varepsilon X \quad . \tag{64}$$

2. **Druhou perturbaci** definujeme vztahy

$$x = \varepsilon X, \qquad W = \sum_{n=1}^{+\infty} (\varepsilon X)^{n-1} W^{(n)} \quad . \tag{65}$$

Zatímco první perturbace je obecnější, než perturbace z odstavce **1.8.1**, dokážeme, že mezi koeficienty $W^{(n)}$ ze druhé perturbace a koeficienty $w^{(n)}$ z odstavce **1.8.1** je vzájemně jednoznačná korespondence.

Vyjdeme ze vztahu

$$w = s x^p, \qquad \frac{dx}{dz} = 1 + W^{(1)} x + W^{(2)} x^2 + O(x^3) \quad . \tag{66}$$

Vztahy odstavce **1.8.1** pro perturbaci dávají

$$w = (\varepsilon Z)^p \left(w^{(0)} + w^{(1)}(\varepsilon Z) + w^{(2)}(\varepsilon Z)^2 + O((\varepsilon Z)^3) \right) \quad . \tag{67}$$

Nyní zvolíme $s(z)$ ve tvaru $s = w^{(0)}$ a dále

$$\begin{aligned} x &= (\varepsilon Z) \left(1 + \frac{w^{(1)}}{w^{(0)}}(\varepsilon Z) + \frac{w^{(2)}}{w^{(0)}}(\varepsilon Z)^2 + O((\varepsilon Z)^3) \right)^{\frac{1}{p}} \qquad (68) \\ &= (\varepsilon Z) \left(1 + \frac{w^{(1)}}{pw^{(0)}}(\varepsilon Z) + \frac{2pw^{(2)}w^{(0)} + (1-p){w^{(1)}}^2}{2p^2{w^{(0)}}^2}(\varepsilon Z)^2 + O((\varepsilon Z)^3) \right) \quad . \end{aligned}$$

Invertováním tohoto vztahu dostaneme

$$(\varepsilon Z) = x \left(1 - \frac{w^{(1)}}{pw^{(0)}}x + \frac{-2pw^{(2)}w^{(0)} + (3+p){w^{(1)}}^2}{2p^2{w^{(0)}}^2}x^2 + O(x^3) \right) \quad . \tag{69}$$

Ze vztahu $\frac{d(\varepsilon Z)}{dz} = 1$ plyne

$$\begin{aligned} 1 &= \left(1 - \frac{2w^{(1)}}{pw^{(0)}}x + 3\frac{-2pw^{(2)}w^{(0)} + (3+p){w^{(1)}}^2}{2p^2{w^{(0)}}^2}x^2 + O(x^3) \right) \left(1 + W^{(1)}x + W^{(2)}x^2 + O(x^3) \right) \\ &- \frac{1}{p}\frac{d}{dz}\left(\frac{w^{(1)}}{w^{(0)}} \right) x^2 + O(x^3) \quad . \qquad (7 \end{aligned}$$

Dostáváme tedy sadu vztahů

$$\begin{aligned} s &= w^{(0)} && (71) \\ W^{(1)} &= \frac{2w^{(1)}}{pw^{(0)}} && (72) \\ W^{(2)} &= \frac{3w^{(2)}}{pw^{(0)}} + \left(\frac{2w^{(1)}}{pw^{(0)}} \right)^2 - (3p+1)\frac{{w^{(1)}}^2}{2p^2{w^{(0)}}^2} + \frac{1}{p}\frac{d}{dz}\left(\frac{w^{(1)}}{w^{(0)}} \right) && (73) \end{aligned}$$

nebo sadu vztahů opačných

$$\begin{aligned} s &= w^{(0)} && (74) \\ w^{(1)} &= \frac{p}{2}sW^{(1)} && (75) \\ w^{(2)} &= \frac{p}{3}s^2W^{(2)} + p\frac{3p+1}{24}s^2{W^{(1)}}^2 - \frac{p}{6}s^2\frac{dW^{(1)}}{dz} \quad . && (76) \end{aligned}$$

Pro další členy by výpočet pokračoval analogicky. Ukázali jsme, že Painlevé-Gambierův test lze považovat díky perturbaci z odstavce **1.8.1** a perturbaci podle Bureaua za aplikaci **Věty 2**.

2.9 Dodatky k Painlevé - Gambierovu testu

Nejprve je nutné si uvědomit, že celý koncept P-analýzy se vztahuje k vlastnostem obecných řešení ODEs. Proto musíme na počátku zamezit možnosti, že námi získané výsledky ovlivní nechtěná analýza singulárního řešení. Tomu můžeme zabránit tím, že všechna singulární řešení najdeme a dominantní větve, které jim odpovídají vynecháme z analýzy. Lepší možností je převést, pokud je to možné, rovnici na tvar, který singulární řešení nepřipouští. To znamená vyřešit rovnici vzhledem k nejvyšší derivaci a ověřit splnění předpokladů **Věty 1**.

2.9.1 Dominantní analýza

Předpokládejme, že jsme našli všechny dominantní mocniny p, p_i obecného řešení (1), (7). Jaké závěry můžeme učinit z jejich hodnot?

1. Jestliže se mezi vedoucími mocninami nachází **necelé** císlo, potom některá větev vzniklá z obecného řešení má ve vedoucím členu pohyblivý větvící bod a (1), (7) nemůže mít P-vlastnost.

2. **Celé nezáporné** vedoucí mocniny nerozhodují o splnení P-testu. Nevíme totiž nic o poloměru konvergence Laurentových rozvojů řešení. Pokud je poloměr konvergence rozvojů nekonečný, můžeme Laurentův rozvoj se středem z_0, začínající celou kladnou mocninou p pomocí použití binomické věty převést na rozvoj se středem v počátku a vedoucí mocninou $q = 0$

$$\sum_{j=p}^{+\infty} a_j (z - z_0)^j = \sum_{k=0}^{+\infty} b_k z^k \quad . \tag{77}$$

3. Vzhledem k nejednoznačnosti členů rozvojů a samotných vedoucích mocnin nemá pro nezáporné dominance smysl provádět P-test jim příslušejících větví. Pokud se mezi dominantními mocninami p, p_i řešení (1), (7) nevyskutují necelá nebo záporná celá čísla, test skončí a nedává žádný výsledek.

4. Další analýza tedy probíhá pouze pokud všechny vedoucí mocniny jsou celé a nachází se mezi nimi singulární větev.

Příklad 7, (pasivní dominance): Při dominantní analýze rovnic se typicky stává, že jedna z mozností pro dominantní část rovnice je samotný člen obsahující nejvyšší derivaci. Dominantními mocninami jsou potom nezáporná celá čísla

$$p \in \{0, 1, ...n - 1\} \tag{78}$$

pro rovnice řádu n. Z předchozího plyne, že tyto takzvané **pasivní** dominance nemají pro Painlevého analýzu význam. Jako ilustrace může sloužit například Riccatiho rovnice (**Příklad 5**).

Příklad 8, (lineární rovnice): Lineární rovnice s konstantními koeficienty bez pravé strany mají jen pasivní dominance.

2.9.2 Rezonanční analýza

Pro objasnění způsobu hledání rezonancí nám pomohou výsledky teorie linearizace nelineárních systémů. Tento aparát použijeme pouze intuitivně a nebudeme jej dokazovat. Budeme se zabývat jen jednou ODE, zobecnění na systémy bude zřejmé.

Předpokládejme, že $u_0(x)$ řeší ODE n-tého řádu

$$E(x, u_0) = 0 \quad . \tag{79}$$

Nyní budeme hledat řešení jiné rovnice

$$E(x, u) \doteq E(x, u_0) + E'(x, u_0)\left(\varepsilon u_1 + \varepsilon^2 u_2 + ...\right) = 0 \tag{80}$$

ve tvaru

$$u(x) = u_0(x) + \varepsilon u_1(x) + \varepsilon^2 u_2(x)... \quad , \tag{81}$$

kde jsme zvolili označení

$$\lim_{t \to 0} \frac{E(x, u_0 + tv) - E(x, u_0)}{t} = E'(x, u_0)v \quad . \tag{82}$$

Vidíme, že členy u_i mohou být nenulové, jen pokud

$$E'(x, u_0)u_i = 0 \quad . \tag{83}$$

Tento výsledek nyní použijeme při Painlevé-Gambierově testu rovnice

$$F(x, w(x), w'(x)...w^n(x)) = 0 \quad . \tag{84}$$

Předpokládejme, že jsme našli některé dominantní chování

$$w(x) \approx w_0(x-x_0)^p \quad . \tag{85}$$

Rovnici (84) potom můžeme rozdělit na dominantní a recesivní část

$$E(x, w(x), w'(x)...w^n(x)) = R(x, w(x), w'(x)...w^n(x)) \quad , \tag{86}$$

kde levá strana je dominantní. Partikulárním řešením dominantní rovnice

$$E(x, w(x), w'(x)...w^n(x)) = 0 \tag{87}$$

je nyní

$$w(x) = w_0(x-x_0)^p \quad . \tag{88}$$

Nyní použijeme linearizaci v proměnných $w(x), w'(x)...w^n(x)$, přičemž předpokládáme řešení ve tvaru Laurentova rozvoje (31). Dostáváme podmínky

$$E'\left(x, w_0(x-x_0)^p\right)\left(w_1(x-x_0)^{p+1} + ...w_r(x-x_0)^{p+r}...\right) = 0 \quad . \tag{89}$$

Pokud platí

$$E'\left(x, w_0(x-x_0)^p\right) w_r(x-x_0)^{p+r} = 0 \quad , \tag{90}$$

bude člen w_r volný a r bude rezonancí. Pokud totiž dosadíme Taylorův rozvoj dominantní části

$$E(x,w) = E(x,w_0) + E'(x,w_0)(w-w_0) + \frac{1}{2}E''(x,w_0)(w-w_0)^2 + ... \tag{91}$$

do rovnice (87), podmínky nejnižšího řádu, obsahující w_r pocházejí právě ze členů $E'(x,w_0)(w-w_0)$. Podmínky vyšších řádů jsou už podmínkami pro členy $w_s, s > r$. Vidíme tedy, že pro hledání rezonancí opravdu můžeme použít ansatz (42).

Příklad 9: Rovnice

$$-\ddot{u} + 6u^2 = 0 \tag{92}$$

má dominantní chovaní

$$(u_0, p) = (1, -2) \quad . \tag{93}$$

Dominantní částí je celá rovnice. Provedeme linearizaci

$$\begin{aligned} & E\left(x, u_0(x-x_0)^p + u_r(x-x_0)^{p+r}\right) = E\left(x, u_0(x-x_0)^p\right) + \quad (94) \\ + \quad & E'\left(x, u_0(x-x_0)^p\right) u_r(x-x_0)^{p+r} = 0 \quad . \quad (95) \end{aligned}$$

Dostáváme

$$\begin{aligned} E'(x,u)v &= \lim_{t\to 0} \frac{E(x,u+tv) - E(x,u)}{t} = \quad (96) \\ &= \lim_{t\to 0} \frac{-\ddot{u} - t\ddot{v} + 6u^2 + 12utv + 6(tv)^2 + \ddot{u} - 6u^2}{t} = \quad (97) \\ &= \lim_{t\to 0} \frac{-t\ddot{v} + 12utv}{t} = -\ddot{v} + 12uv \quad . \quad (98) \end{aligned}$$

Nyní už jen dosadíme

$$u = (x-x_0)^{-2}, \qquad v = u_r(x-x_0)^{-2+r} \quad (99)$$

a dostáváme rovnici

$$u_r(r+1)(r-6) = 0 \quad . \quad (100)$$

Rezonance tedy jsou

$$r \in \{-1, 6\} \quad . \quad (101)$$

Poznámka 6: Záporným dominantním mocninám p vždy přísluší rezonance $r = -1$. Dominantní rovnřešení nejnižší člen

$$E(x, w_0(x-x_0)^p) = 0 \quad . \quad (102)$$

Proderivováním dostaneme

$$E'(x, w_0(x-x_0)^p) w_0(x-x_0)^{p-1} = 0 \quad . \quad (103)$$

2.10 Parciální diferenciální rovnice

Nyní zobecníme koncept P-vlastnosti pro parciální diferenciální rovnice (PDEs) a jejich systémy. Nejprve si musíme povšimnout některých odlišností od ODEs. Singularity řešení PDE n-tého řádu

$$F\left(x_1, ...x_n, \varphi(x_1, ...x_n), \partial_i\varphi(x_1, ...x_n) ..., \partial_i^n \varphi(x_1, ...x_n)\right) = 0 \quad (104)$$

nejsou izolované body, ale nadroviny

$$\phi(x_1, ...x_n) = 0 \quad . \tag{105}$$

Protože pro PDEs není specifikován pojem obecného řešení, budeme řešení, závisející na n funkcích nazývat **generické**. Nyní můžeme definovat P-vlastnost.

Označení: Rovnice (104) má P-vlastnost právě tehdy, když pro každou její necharakteristickou varietu $\phi(x_1, ...x_n)$ platí, že ODE vzniklá redukcí

$$\phi(x_1, ...x_n) \longrightarrow z - z_0 \tag{106}$$

má P-vlastnost.

Toto označení nelze považovat za definici, umožní nám však studovat vlastnosti PDEs pomocí ODEs.

Poznámka, Příklad (Calogero): Charakteristická varieta rovnice

$$u_{xxxy} - 2u_y u_{xx} - 4u_x u_{xy} + u_{xt} = 0 \tag{107}$$

je dána vztahy

$$\phi(x, y, t) = 0, \qquad \phi_x^3 \phi_y = 0 \quad . \tag{108}$$

Painlevého analýza PDE je tedy Painlevého analýzou všech možných ODEs, vzniklých redukcí proměnných (106). Pro účely zkoumání PDEs dále modifikujeme Painlevé-Gambierův test následujícím způsobem. Předpokládáme, že pro řešení (104) můžeme použít ansatz

$$\varphi(x_1, ...x_n) = \phi^\alpha(x_1, ...x_n) \sum_{j=0}^{\infty} u_j(x_1, ...x_n) \phi^j(x_1, ...x_n) \quad , \tag{109}$$

kde funkce u_j jsou holomorfní na okolí singulární variety. Algoritmus testu je potom úplně stejný jako pro ODEs. Stejným způsobem můžeme P-vlastnost a Painlevé - Gambierův test modifikovat pro systémy

$$F_a\left(x_i, ..., \varphi_j, ..., \partial_i \varphi_j ..., \partial_i^n \varphi_j\right) = 0, \qquad a, j \in \{1, ...n\}\,, \tag{110}$$

$$\varphi_i = \phi^{\alpha_i} \sum_{j=0}^{\infty} u_j^i \phi^j \quad . \tag{111}$$

Poznámka 7, (Calogero): Pokud bychom řešení (107) rozvíjeli kolem charakteristické variety (108), bude algebraická rovnice, vzniklá při dominantní analýze triviálně nulová a dominantní mocniny p zůstanou neurčeny.

$$(u\phi^p)_{xxxy} \approx p(p-1)(p-2)(p-3)u\phi^{p-4}\phi_x^3\phi_y = 0 \quad . \tag{112}$$

Ostatní členy nejnižšího řádu v mocninách ϕ budou také nulové. To je důvodem, proč se při redukcích proměnných omezujeme na necharakteristické variety PDEs.

Při hledání konkretních redukcí proměnných se často používají různé speciální volby ϕ. Asi nejpoužívanější z nich je

$$\phi(x_1, ...x_n) = x_1 + \psi(x_2, ...x_n) \quad . \tag{113}$$

Zároveň musíme vždy ověřit, že varieta (113) není charkteristická.

Příklad 10, (Burgers): Provedeme Painlevého analýzu Burgersovy rovnice

$$u_t + uu_x = \sigma u_{xx}, \qquad \sigma \in C, \quad \sigma \neq 0 \quad . \tag{114}$$

Předpokládáme, že

$$u = \phi^\alpha \sum_{j=0}^{+\infty} u_j \phi^j \quad , \tag{115}$$

kde

$$\phi = \phi(x,t), \qquad u_j = u_j(x,t) \tag{116}$$

jsou analytické v okolí variety

$$\phi(x,t) = 0 \quad . \tag{117}$$

Dominantní chování generických a partikulárních řešení Burgersovy rovnice zjistíme dosazením ansatzu

$$u = u_0\phi^\alpha \quad . \tag{118}$$

Dostáváme rovnici

$$u_0\alpha\phi^{\alpha-1}\phi_t + u_0^2\alpha^2\phi^{2\alpha-1}\phi_x = \sigma u_0\alpha(\alpha-1)\phi^{\alpha-2}\phi_x^2 \quad . \tag{119}$$

Jediná relevantní možnost dominantního chování je

$$2\alpha - 1 = \alpha - 2 \qquad \Longrightarrow \qquad \alpha = -1 \quad . \tag{120}$$

Dominantní část Burgersovy rovnice potom bude

$$uu_x = \sigma u_{xx} \quad . \tag{121}$$

Za vztahu

$$u_0^2 \alpha^2 \phi^{2\alpha-1} \phi_x = \sigma u_0 \alpha(\alpha - 1)\phi^{\alpha-2}\phi_x^2 \tag{122}$$

po dosazení

$$\alpha = -1 \tag{123}$$

plyne

$$u_0 = -2\sigma\phi_x \quad . \tag{124}$$

Rezonanční analýzu Burgersovy rovnice provedeme dosazením ansatzu

$$u = u_0\phi^{-1} + \gamma\phi^{-1+r} \tag{125}$$

do dominantní části (121). V nejnižším netriviálním řádu dostáváme lineární rovnici pro γ

$$\gamma u_0(r-2)\phi_x = \sigma\gamma(r-1)(r-2)\phi_x^2 \quad , \tag{126}$$

tedy

$$\gamma(r-2)(r+1) = 0 \quad . \tag{127}$$

Pro rezonance tedy platí

$$r \in \{-1, 2\} \quad . \tag{128}$$

Pro ověření splnění podmínek kompatibility nejdříve rozepíšeme první členy vyrazů z Burgersovy rovnice

$$\begin{aligned} u_t &= -u_0\phi^{-2}\phi_t + u_{0t}\phi^{-1} + u_{1t} + u_2\phi_t + ..., \\ uu_x &= -\phi^{-3}\left(u_0^2\phi_x\right) + \phi^{-2}\left(u_0u_{0x} - u_1u_0\phi_x\right) + \\ &+ \phi^{-1}\left(u_0\left(u_{1x} + u_2\phi_x\right) + u_1u_{0x} - u_2u_0\phi_x\right) + ..., \\ u_{xx} &= \phi^{-3}\left(2u_0\phi_x^2\right) - \phi^{-2}\left(2u_{0x}\phi_x + u_0\phi_{xx}\right) + \phi^{-1}u_{0xx} + ... \quad . \end{aligned} \tag{129}$$

Nyní srovnáme výrazy v Burgersove rovnici, které jsou stejného řádu v mocninách ϕ. Dostáváme podmínky kompatibility

$$\begin{aligned} j &= 0, \qquad u_0 = -2\sigma\phi_x, \\ j &= 1, \qquad \phi_t + u_1\phi_x = \sigma\phi_{xx}, \\ j &= 2, \qquad \partial_x\left(\phi_t + u_1\phi_x - \sigma\phi_{xx}\right) = 0 \quad . \end{aligned} \tag{130}$$

Vidíme, že podmínka kompatibility pro rezonanci $r = 2$ je splněna identicky a proto Burgersova rovnice prochází P-testem.

Příklad 11, (KdV): Aplikujeme Painlevé-Gambierův test na rovnici

$$u_t + uu_x + \sigma u_{xxx} = 0, \qquad \sigma \neq 0 \quad . \tag{131}$$

Dosazením (118) dostaneme, že jediná vedoucí mocnina je

$$\alpha = -2, \tag{132}$$

při dominantní části

$$uu_x + \sigma u_{xxx} = 0 \quad . \tag{133}$$

Při hledání rezonancí dosadíme do dominantní části ansatz

$$u = \phi^{-2}\left(u_0 + u_r\phi^r\right). \tag{134}$$

Odtud je vidět, že

$$u_0 = -12\sigma\phi_x^2, \tag{135}$$

dále máme v nejnižším řádu rovnici

$$\gamma(r+1)(r-4)(r-6) = 0 \quad . \tag{136}$$

Našli jsme tedy rezonance

$$r \in \{-1, 4, 6\} \quad . \tag{137}$$

Důkladným propočítáním podmínek kompatibility se lze přesvědčit, že všechny podmínky jsou splněny. Rovnice KdV tedy prochází Painlevého testem.

3 Analýza Halphenova systému

V tomto odstavci provedeme Painlevého analýzu Halphenova systému

$$
\begin{aligned}
\dot{\omega}_1 &= \omega_2\omega_3 - \omega_1\omega_2 - \omega_1\omega_3, && (138)\\
\dot{\omega}_2 &= \omega_3\omega_1 - \omega_2\omega_3 - \omega_1\omega_2, && (139)\\
\dot{\omega}_3 &= \omega_1\omega_2 - \omega_3\omega_1 - \omega_2\omega_3 \quad . && (140)
\end{aligned}
$$

3.1 Painlevé-Gambierův test

1. **Dominantní analýza**

   Do rovnic dosadíme ansatz dominantního chování

$$
\omega_1 = u(z-z_0)^\alpha, \qquad \omega_2 = v(z-z_0)^\beta, \qquad \omega_3 = w(z-z_0)^\gamma \quad . \tag{141}
$$

   Výsledkem budou vztahy

$$
\begin{aligned}
\alpha u(z-z_0)^{\alpha-1} &= vw(z-z_0)^{\beta+\gamma} - uv(z-z_0)^{\alpha+\beta} - uw(z-z_0)^{\alpha+\gamma}, && (142)\\
\beta v(z-z_0)^{\beta-1} &= uw(z-z_0)^{\alpha+\gamma} - vw(z-z_0)^{\gamma+\beta} - uv(z-z_0)^{\alpha+\beta},\\
\gamma w(z-z_0)^{\gamma-1} &= uv(z-z_0)^{\alpha+\beta} - uw(z-z_0)^{\alpha+\gamma} - vw(z-z_0)^{\beta+\gamma} \quad .
\end{aligned}
$$

   Jedna z možností dominantního chování je

$$
(\alpha, \beta, \gamma) = (-1, -1, -1) \quad . \tag{143}
$$

   Dominantní částí je potom celý Halphenův systém. Po dosazení (143) do (142) dostáváme

$$
\begin{aligned}
-u &= vw - uv - uw, && (144)\\
-v &= uw - vw - uv, && (145)\\
-w &= uv - uw - vw \quad . && (146)
\end{aligned}
$$

   Jediným nenulovým řešením této soustavy je

$$
(u, v, w) = (1, 1, 1) \quad . \tag{147}
$$

2. **Rezonanční analýza**

Pro rezonanční analýzu větve $(\alpha, \beta, \gamma) = (-1, -1, -1)$ máme ansatz

$$\begin{aligned} \omega_1 &= (z - z_0)^{-1} \left(1 + \gamma_1 (z - z_0)^r\right), && (148) \\ \omega_2 &= (z - z_0)^{-1} \left(1 + \gamma_2 (z - z_0)^r\right), && (149) \\ \omega_3 &= (z - z_0)^{-1} \left(1 + \gamma_3 (z - z_0)^r\right) \quad . && (150) \end{aligned}$$

Dosazením těchto vztahů do dominantní části (tedy do celého Halphenova systému) vyjdou rovnice

$$\gamma_1(r+1) = 0, \qquad \gamma_2(r+1) = 0 \qquad \gamma_3(r+1) = 0 \quad . \tag{151}$$

Jejich vyřešením pro r najdeme jedinou trojnásobnou rezonanci

$$r = -1 \quad . \tag{152}$$

3. **Konstanty integrace**

   Pro tuto dominantní větev počítání konstant integrace odpadá. Jediná a tedy i nejvyšší rezonance je rovna -1 a proto vlastně není co počítat.

Tato větev tedy prochází P-testem. Možností dominantního chování (5) Halphenova systému je však nekonečně mnoho, jako u podobných Eulerových setrvačníkových rovnic. Protože není možné všechny větve analyzovat, Painlevé-Gambierův test nedává jednoznačný výsledek.

3.2 α-metoda pro Halphenův system

Nyní zkusíme Halphenův systém analyzovat pomocí α-metody, která je obecnější, než Painlevé-Gambierův test. Nepředpokládá totiž, že jedinými pohyblivými singularitami řešení jsou póly. Nejprve provedeme perturbaci

$$t = t_0 + \varepsilon x \tag{153}$$

a použijeme ansatz

$$\begin{aligned} \omega_1 &= \varepsilon^p \sum_{n=0}^{+\infty} \varepsilon^n u_n, && (154) \\ \omega_2 &= \varepsilon^q \sum_{m=0}^{+\infty} \varepsilon^m v_m, && (155) \\ \omega_3 &= \varepsilon^r \sum_{s=0}^{+\infty} \varepsilon^s w_s \quad . && (156) \end{aligned}$$

Perturbovaný Halphenův systém bude mít tvar

$$
\begin{aligned}
\frac{d}{dx}(u_0+...) &= \varepsilon^{q+r+1-p}(v_0w_0+...)-\varepsilon^{q+1}(u_0v_0+...)-\varepsilon^{r+1}(u_0w_0+...),\\
\frac{d}{dx}(v_0+...) &= \varepsilon^{p+r+1-q}(u_0w_0+...)-\varepsilon^{r+1}(v_0w_0+...)-\varepsilon^{p+1}(u_0v_0+...),\\
\frac{d}{dx}(w_0+...) &= \varepsilon^{p+q+1-r}(u_0v_0+...)-\varepsilon^{p+1}(u_0w_0+...)-\varepsilon^{q+1}(v_0w_0+...),
\end{aligned}
$$

za podmínek nezápornosti všech mocnin ε (viz **Věta 2** a odstavec o α-metodě). Tyto podmínky tvoří soustavu nerovnic

$$
\begin{aligned}
p,q,r &\in Z, && (157)\\
p,q,r &\geq -1, && (158)\\
-p+q+r+1 &\geq 0, && (159)\\
p-q+r+1 &\geq 0, && (160)\\
p+q-r+1 &\geq 0 \quad , && (161)
\end{aligned}
$$

která je analogií podmínek pro dominantní mocniny z Painlevé-Gambierova testu. Nyní budeme řešit soustavu podmínek (157)-(161). Nejprve poslední tři nerovnice doplníme na rovnice

$$
\begin{aligned}
-p+q+r-s_1 &= -1, && (162)\\
p-q+r-s_2 &= -1, && (163)\\
p+q-r-s_3 &= -1, && (164)\\
s_1,s_2,s_3 &\geq 0 \quad . && (165)
\end{aligned}
$$

Řešením teto soustavy je

$$
\begin{aligned}
p &= -1+\frac{1}{2}(s_2+s_3), && (166)\\
q &= -1+\frac{1}{2}(s_1+s_2), && (167)\\
r &= -1+\frac{1}{2}(s_1+s_3) \quad , && (168)
\end{aligned}
$$

za podmínek

$$
\begin{aligned}
s_1,s_2,s_3 &\geq 0, && (169)\\
(s_1+s_2),(s_2+s_3),(s_3+s_1) &\in 2N_0 \quad , && (170)
\end{aligned}
$$

kde symbol $2N_0$ značí nezáporná sudá čísla. Podmínky (170) dostaneme také doplněním soustavy (158) na rovnice

$$\begin{aligned} p - s_4 &= -1, && (171)\\ q - s_5 &= -1, && (172)\\ r - s_6 &= -1, && (173)\\ s_4, s_5, s_6 &\geq 0, && (174)\\ s_4, s_5, s_6 &\in Z \quad , && (175) \end{aligned}$$

vyřešením

$$p = -1 + s_4, \quad q = -1 + s_5, \quad r = -1 + s_6 \tag{176}$$

a porovnáním s (166)-(168)

$$\frac{1}{2}(s_2 + s_3) = s_4, \qquad \frac{1}{2}(s_1 + s_2) = s_5, \qquad \frac{1}{2}(s_1 + s_3) = s_6 \quad . \tag{177}$$

Množina všech řešení soustavy nerovnic je tedy parmetrizována pomocí (s_1, s_2, s_3). Tyto parametry nabývají hodnot podle (169), (170), tedy

$$(s_1 + s_2, s_2 + s_3, s_1 + s_3) \in \{(0,0,0), (2,0,0), (0,2,0), (0,0,2), (2,2,0), ...\} \quad .$$

Dalším požadavkem α-metody je tzv. podmínka nelinearity, tedy požadavek na nulovost alespoň jedné mocniny ε v perturbovaném systému. Požadujeme tedy, aby alespoň v jedné nerovnici (158)-(161) platila rovnost. Pokud požadujeme, aby v některé z podmínek (159)-(161) nastala rovnost, musí být pravdivý následující výrok

$$(\exists i \in \{1,2,3\})\,(s_i = 0) \quad . \tag{178}$$

Pokud požadujeme splnění rovnosti v některé z podmínek (158), je to ekvivalentní výroku

$$(\exists i, j \in \{1,2,3\})\,(i \neq j)\,(s_i + s_j = 0) \quad . \tag{179}$$

Díky podmínce (165) tento výrok můžeme zapsat

$$(\exists i, j \in \{1,2,3\})\,(i \neq j)\,(s_i = s_j = 0) \quad . \tag{180}$$

Podmínka nelinearity tedy bude splněna právě tehdy, když alespoň jedna složka výrazu (s_1, s_2, s_3) bude nulová. A z toho při použití podmínky (170) plyne, že čísla $s_i, i \in \{1, 2, 3\}$ jsou sudá.

Začneme nyní analyzovat jednotlivé přípustné případy. Halphenův systém je invariantní vůči permutaci proměnných, proto stačí vybrat několik kombinací.

3.2.1 Případ $(s_1, s_2, s_3) = (0, 2k, 2l), \quad k \neq 0, \quad l \neq 0$

V tomto případě z (166)-(168) plyne

$$
\begin{aligned}
p &= -1 + k + l, && (181)\\
q &= -1 + k, && (182)\\
r &= -1 + l \quad . && (183)
\end{aligned}
$$

Perturbovaný Halphenův systém pak má tvar

$$
\begin{aligned}
\frac{d}{dx}(u_0 + ...) &= (v_0 w_0 + ...) - \varepsilon^k (u_0 v_0 + ...) - \varepsilon^l (u_0 w_0 + ...), && (184)\\
\frac{d}{dx}(v_0 + ...) &= \varepsilon^{2l} (u_0 w_0 + ...) - \varepsilon^l (v_0 w_0 + ...) - \varepsilon^{k+l} (u_0 v_0 + ...), && (185)\\
\frac{d}{dx}(w_0 + ...) &= \varepsilon^{2k} (u_0 v_0 + ...) - \varepsilon^{k+l} (u_0 w_0 + ...) - \varepsilon^k (v_0 w_0 + ...). && (186)
\end{aligned}
$$

V nejnižším řádu tedy máme rovnice

$$
\begin{aligned}
\dot{u}_0 &= v_0 w_0, && (187)\\
\dot{v}_0 &= 0, && (188)\\
\dot{w}_0 &= 0 \quad . && (189)
\end{aligned}
$$

Jejich řešením je

$$
v_0(x) = E, \qquad w_0(x) = F, \qquad u_0(x) = EFx + G \quad . \qquad (190)
$$

Vzhledem k tomu, že rovnice vyšších řádů jsou lineární s konstantními koeficienty, na jejichž pravých stranách jsou funkce (190) a funkce z nich vznikající variací konstant, nevznikne v řešení žádný pohyblivý větvící bod.

3.2.2 Případ $(s_1, s_2, s_3) = (2k, 0, 0)$

V tomto případě z (29)-(31) plyne

$$
\begin{aligned}
p &= -1, && (191)\\
q &= -1 + k, && (192)\\
r &= -1 + k \quad . && (193)
\end{aligned}
$$

Perturbovaný Halphenův systém pak má tvar

$$
\begin{aligned}
\frac{d}{dx}(u_0+...) &= \varepsilon^{2k}(v_0w_0+...)-\varepsilon^k(u_0v_0+...)-\varepsilon^k(u_0w_0+...), && (194)\\
\frac{d}{dx}(v_0+...) &= (u_0w_0+...)-\varepsilon^k(v_0w_0+...)-(u_0v_0+...), && (195)\\
\frac{d}{dx}(w_0+...) &= (u_0v_0+...)-(u_0w_0+...)-\varepsilon^k(v_0w_0+...) \quad . && (196)
\end{aligned}
$$

V nejnižším řádu dostáváme rovnice

$$
\begin{aligned}
\dot{u}_0 &= 0, && (197)\\
\dot{v}_0 &= u_0(w_0-v_0), && (198)\\
\dot{w}_0 &= u_0(v_0-w_0) \quad . && (199)
\end{aligned}
$$

Jejich řešení dostaneme postupnými úpravami

$$u_0(x)=C, \quad \dot{v}_0=C(w_0-v_0), \quad \dot{w}_0=C(v_0-w_0) \quad , \qquad (200)$$

dále pak

$$\dot{v}_0+\dot{w}_0=0, \qquad \dot{v}_0-\dot{w}_0=-2C \quad . \qquad (201)$$

Odtud potom

$$
\begin{aligned}
u_0(x) &= C, && (202)\\
v_0(x) &= \frac{D+E+\exp(-2Cx)}{2}, && (203)\\
w_0(x) &= \frac{D-E-\exp(-2Cx)}{2} \quad . && (204)
\end{aligned}
$$

Ze stejných důvodů jako v předešlém případě se v řešení nevyskytne pohyblivý větvící bod.

3.2.3 Případ $(s_1, s_2, s_3) = (0, 0, 0)$

Poslední možností je případ $(s_1, s_2, s_3) = (0, 0, 0)$. V tomto případě bude platit

$$p=q=r=-1 \quad . \qquad (205)$$

V nejnižším řádu ε perturbovaného Halphenova systému potom dostaneme rovnice

$$\begin{aligned} \dot{u}_0 &= v_0 w_0 - w_0 u_0 - u_0 v_0, && (206) \\ \dot{v}_0 &= w_0 u_0 - v_0 w_0 - u_0 v_0, && (207) \\ \dot{w}_0 &= u_0 v_0 - w_0 u_0 - v_0 w_0 \quad . && (208) \end{aligned}$$

Tyto rovnice jsou však shodné s původním Halphenovým systémem. Jinými slovy: **Pro Painlevého analýzu Halphenova systému nejdříve musíme vyřešit Halphenův systém**. A to je důvod, proč Painlevého analýza nerozhodne o integrabilitě Halphenova systému.

4 Poisson-Lie T-duální σ-model

Budeme se zabývat modelem, který je popsán hustotou Lagrangiánu

$$\begin{aligned} L &= L(\varrho(x_+, x_-), \sigma(x_+, x_-), \partial\varrho(x_+, x_-), \partial\sigma(x_+, x_-)) = \\ &= \left(x - u\varrho - y\varrho + v\varrho^2\right) \partial_-\sigma\partial_+\sigma + (y - v\varrho)\, \partial_-\sigma\partial_+\varrho + \\ &+ (u - v\varrho)\, \partial_-\varrho\partial_+\sigma + v\partial_-\varrho\partial_+\varrho \quad , \end{aligned} \tag{209}$$

kde x, y, u, v jsou konstanty, x_+, x_- proměnné světelného kužele, $\partial_i = \partial_{x_i}$, ϱ, σ jsou polní proměnné. Standartním postupem z principu stacionarní akce odvodíme pohybové rovnice

$$2v\partial^2_{+-}\varrho + (u + y - 2v\varrho)\left(\partial^2_{+-}\sigma + \partial_-\sigma\partial_+\sigma\right) = 0 \quad , \tag{210}$$

$$\begin{aligned} &2\partial^2_{+-}\sigma \left(x - (u+y)\varrho + v\varrho^2\right) + (2v\varrho - (u+y))\left(\partial_-\varrho\partial_+\sigma + \partial_-\sigma\partial_+\varrho\right) + \\ &+\partial^2_{+-}\varrho(y + u - 2v\varrho) - 2v\partial_-\varrho\partial_+\varrho = 0 \quad . \end{aligned} \tag{211}$$

Při provádění Painlevé-Gambierova testu se nejprve zaměříme na první z nich (210). Nejdříve dosadíme ansatz

$$\varrho = a\phi^\alpha, \qquad \sigma = b\phi^\beta \quad . \tag{212}$$

Rovnice (210) má v nejnižším řádu tvar

$$\begin{aligned} &2va\alpha(\alpha - 1)\phi^{\alpha-2}\ddot{\phi} + \\ &(u + y - 2va\phi^\alpha)\left(b\beta(\beta - 1)\phi^{\beta-2}\ddot{\phi} + b^2\beta^2\phi^{2\beta-2}\dot{\phi}^2\right) = 0, \end{aligned} \tag{213}$$

kde

$$\ddot{\phi} = \partial^2_{+-}\phi, \qquad \dot{\phi}^2 = \partial_-\phi\partial_+\phi \quad . \tag{214}$$

Pro nalezení vedoucí mocniny v (213) musíme předpokládat relace mezi α, β.

- **Případ** $\beta > 0$

  V tomto případě platí

$$\alpha - 2 < \alpha + \beta - 2 < \alpha + 2\beta - 2, \tag{215}$$
$$\beta - 2 < 2\beta - 2 \tag{216}$$

  Dominantní tedy mohou byt mocniny $\alpha - 2$ nebo $\beta - 2$.

  - Zkusíme nalézt podmínky, které odpovídají případu

$$\alpha = \beta \quad . \tag{217}$$

    Členy nejnižšího řádu rovnice (213) tvoří rovnici

$$(2va + b(u + y))\beta(\beta - 1)\ddot{\phi} = 0 \quad . \tag{218}$$

    Hledáme její řešení pro libovolné ϕ. Proto budeme řešit rovnici

$$(2va + b(u + y))\beta(\beta - 1) = 0 \quad . \tag{219}$$

    Máme tedy tři možnosti

$$\begin{array}{l} \beta = 1, \\ \beta = 0, \\ (2va + b(u + y)) = 0 \qquad \beta \in R^+ \quad . \end{array} \tag{220}$$

    Případ $\beta = 0$ je ve sporu s předpoklady. Zajímavější je poslední možnost, kdy β je neurčeno.

  - Pro nás však bude nejdůležitější případ

$$\alpha < \beta \quad . \tag{221}$$

    Členy nejnižšího řádu rovnice (213) potom tvoří rovnici

$$2va\alpha(\alpha - 1)\phi^{\alpha-2}\ddot{\phi} = 0 \quad . \tag{222}$$

    Pro libovolné ϕ dostáváme možnosti

$$\alpha \in \{0, 1\} \wedge \alpha < \beta, \qquad v = 0 \wedge \alpha < \beta \quad . \tag{223}$$

Přeskočíme nyní analýzu dalších možností i případů $\beta < 0$, $\beta = 0$ a provedeme dominantní analýzu rovnice (211). Dosazením ansatzu (212) dostaneme rovnici

$$
\begin{aligned}
&2b\beta(\beta-1)\phi^{\beta-2}\ddot{\phi}\left(x-(u+y)b\phi^{\beta}+vb^2\phi^{2\beta}\right)+\\
&+\left(2vb\phi^{\beta}-(u+y)\right)\left(2ab\alpha\beta\phi^{\alpha+\beta-2}\dot{\phi}^2-a\alpha(\alpha-1)\phi^{\alpha-2}\ddot{\phi}\right)-\\
&-2va^2\phi^{2\alpha-2}\dot{\phi}^2=0 \quad .
\end{aligned}
\tag{224}
$$

Dále se budeme rovnou věnovat nejdůležitějšímu případu.

- $\beta > 0 \quad \wedge \quad \alpha < \beta$

  Dominantními mocninami mohou být $\alpha - 2$ nebo $2\alpha - 2$.

  - Zaměříme se na případ

    $$\alpha - 2 = 2\alpha - 2 \quad \Rightarrow \quad \alpha = 0 \quad . \tag{225}$$

    Rovnice (224) se v nejnižším řádu redukuje na

    $$(u+y)a\alpha(\alpha-1)\ddot{\phi} - 2va^2\alpha^2\dot{\phi}^2 = 0, \tag{226}$$

    což je splněno triviálně.

Analýza dalších případů a možností není nutná. Z (223) a (226) vidíme, že je připuštěna možnost

$$(\alpha, \beta) = (0, \beta \notin Z) \quad . \tag{227}$$

Model, posaný Lagrangiánem (209), tedy **nemůže** být integrabilní, pokud požadujeme

$$u + y \neq 0 \qquad \vee \qquad v \neq 0 \quad . \tag{228}$$

V případě

$$u + y = v = 0 \tag{229}$$

však pohybové rovnice (210), (211) přestávají být zajímavé.

5 Klein - Gordonovské systémy

Provedeme analýzu systému

$$\begin{aligned} \varphi_1 \Diamond \varphi_1 &= A_1 \partial\varphi_1 \partial\varphi_1 + A_2 \partial\varphi_1 \partial\varphi_2, + A_3 \partial\varphi_2 \partial\varphi_2, & (230) \\ \varphi_1 \Diamond \varphi_2 &= B_1 \partial\varphi_1 \partial\varphi_1 + B_2 \partial\varphi_1 \partial\varphi_2 + B_3 \partial\varphi_2 \partial\varphi_2 \quad , & (231) \end{aligned}$$

kde $\Diamond$ značí d'Alambertův vlnový operátor ve dvou proměnných a symbol $\partial\varphi\partial\varphi$ je zkratkou pro $\partial_x\varphi\partial_x\varphi - \partial_t\varphi\partial_t\varphi$.

5.1 Dominantní analýza

Pro dominantní analýzu dosadíme do (230), (231) ansatz

$$\varphi_1 = u\phi^\alpha \quad \varphi_2 = v\phi^\beta \quad . \tag{232}$$

Soustava dostane tvar

$$\begin{aligned} u^2\alpha(\alpha-1)\phi^{2\alpha-2}\dot{\phi}^2 &= A_1 u^2\alpha^2\phi^{2\alpha-2} + A_2\alpha\beta uv\phi^{\alpha+\beta-2} + A_3\beta^2 v^2\phi^{2\beta-2} & (233) \\ uv\beta(\beta-1)\phi^{\alpha+\beta-2} &= B_1 u^2\alpha^2\phi^{2\alpha-2} + B_2\alpha\beta uv\phi^{\alpha+\beta-2} + B_3\beta^2 v^2\phi^{2\beta-2} \quad . \end{aligned}$$

5.1.1 Případ $A_3 \neq 0$

Předpokládejme, že

$$A_3 \neq 0 \quad . \tag{234}$$

Rovnice (230) potom připouští dominantní mocniny

$$0 = \beta < \alpha \quad . \tag{235}$$

Její dominantní část tvoří rovnici

$$A_3 \partial\varphi_2 \partial\varphi_2 = 0 \quad . \tag{236}$$

Mocnina α zůstává neurčena. Analýzu rovnice (231) provedeme ve dvou krocích.

- $B_3 \neq 0$

  Předpokládejme nejprve, že v rovnici (231) platí $B_3 \neq 0$. Případu (235) dominantního chování odpovídá, že dominantní část (231) tvoří rovnici

$$B_3 \partial\varphi_2 \partial\varphi_2 = 0 \quad . \tag{237}$$

Dostáváme tedy podmínku dominantního chování

$$B_3\beta^2 v^2 \phi^{2\beta-2} = 0 \quad . \tag{238}$$

Stále platí , že α zůstává neurčeno. Je tedy připuštěna možnost

$$0 = \beta < \alpha \notin Z \quad . \tag{239}$$

- $B_3 = 0$

  Za předpokladu (235) tvoří dominantní část (231) rovnici

  $$\varphi_1 \diamond \varphi_2 = B_2 \partial\varphi_1 \partial\varphi_2 \quad . \tag{240}$$

  Tomu odpovídá dominantní podmínka

  $$uv\beta(\beta-1)\phi^{\alpha+\beta-2} = B_2\alpha\beta uv\phi^{\alpha+\beta-2} \quad . \tag{241}$$

  Tato podmínka bude opět splněna pro libovolné α.

Vidíme, že pokud $A_3 \neq 0$, jsou připuštěny necelé vedoucí mocniny α. V těchto případech proto soustava (230), (231) neprojde P-testem.

5.1.2 Případ $A_3 = 0 \wedge A_2 \neq 0$

Rovnice (230) opět připouští dominantní mocniny

$$0 = \beta < \alpha \quad . \tag{242}$$

Její dominantní část přitom tvoří rovnici

$$A_2 \partial\varphi_1 \partial\varphi_2 = 0 \quad . \tag{243}$$

Máme tedy podmínku dominantního chování

$$A_2 \alpha\beta uv\phi^{\alpha+\beta-2} = 0 \quad . \tag{244}$$

Mocnina α zůstává neurčena. Analýzu rovnice (231) opět provedeme ve dvou krocích.

- $B_3 \neq 0$

  V tomto případě tvoří dominantní část (231) rovnici

  $$B_3 \partial\varphi_2 \partial\varphi_2 = 0 \quad . \tag{245}$$

  Dostáváme tedy podmínku dominantního chování

  $$B_3\beta^2 v^2 \phi^{2\beta-2} = 0 \quad . \tag{246}$$

  Opět platí, ze α zustává neurčeno.

- $B_3 = 0$

  Pokud $B_3 = 0$, potom za předpokladu (242) tvoří dominantní část (231) rovnici

  $$\varphi_1 \diamond \varphi_2 = B_2 \partial\varphi_1 \partial\varphi_2 \quad . \tag{247}$$

  Odtud plyne podmínka dominantního chování

  $$uv\beta(\beta-1)\phi^{\alpha+\beta-2} = B_2 \alpha\beta uv \phi^{\alpha+\beta-2} \quad . \tag{248}$$

  Mocnina α opět zůstává neurčena.

Stejně jako v případě $A_3 \neq 0$ jsou připuštěny dominantní necelé mocniny α. Soustava (230), (231) tedy neprochází P-testem.

Ukázali jsme, že soustava (230), (231) může projít P-testem pouze za předpokladu

$$A_2 = A_3 = 0 \quad . \tag{249}$$

Soustava

$$\begin{aligned} \varphi_1 \diamond \varphi_1 &= A_1 \partial\varphi_1 \partial\varphi_1, & (250)\\ \varphi_1 \diamond \varphi_2 &= B_1 \partial\varphi_1 \partial\varphi_1 + B_2 \partial\varphi_1 \partial\varphi_2 + B_3 \partial\varphi_2 \partial\varphi_2 & (251) \end{aligned}$$

však už není fyzikálně zajímavá, protože její rovnice se staly nezávislými. Další podrobnosti o analýze soustav podobných (250), (251) je možno najít v [7]. Pro nás je však důležité, že Klein-Gordonovské systémy nejsou integrabilní, pokud studujeme rovnice vzájemně provázané.

6 Závěr

Nejdůležitějšími odstavci obecné části jsou odstavce **2.4**, **2.6**, **2.8.2**, **2.9.2**. Je zde ukázán společný základ všech metod P-analýzy, její méně obvyklé formy a nad rámec běžné literary i důkladné zdůvodnění používaného algoritmu P-G testu. Na Halphenově systému je možné demonstrovat mnoho problémů, které vznikají mechanickou aplikací nejběžnější metody Painlevého analýzy (P-G testu). Na druhou stranu je vidět, že ani použití sofistikovanějších metod často nevede k cíli. Ostatní analyzované systémy ukazují, jak těžké je hledání integrabilních modelů mezi současnými polními teoriemi.

Reference

[1] Ablowitz, M.J., Ramani, A., Segur, H.: A connection between nonlinear evolution equations and ordinary differential equations of P-type, J. Math. Phys. 21 , p.715, 1980

[2] Clarkson, P.A., Cosgrove, Ch.: Symmetry, the Chazy equation and hierarchies.

[3] Conte, R., editor: The Painlevé Property, Springer-Verlag New York, 1999

[4] Freit, M.: Painlevého analýza parciálních diferenciálních rovnic, diplomová práce, MFF UK, 1990

[5] Golubev, V.V.: Lekcii po intěgrirovaniju uravněnij dviženija ťaželovo tvěrdovo těla okolo něpodvižnoj točky, Gostěchizdat, 1953

[6] Hlavatý, L., Šnobl, L.: Poisson-Lie T-dual models with two-dimensional targets, hep-th 0110139

[7] Kavka, V.: Painlevého vlastnost diferenciálních rovnic, výzkumný úkol, FJFI ČVUT, 2001

[8] Klimčík, C.: Poisson-Lie T-duality, Nucl. Phys. (Proc. Suppl.)46, 1996

[9] Ramani, A., Gramaticos, Bountis: The Painlevé property and singularity analysis of integrable and non-integrable systems, Phys.Rep. 180 , p.159, 1989

[10] Weiss, J., Tabor, M., Carnevale, G.: The Painlevé property for partial differential equations, J. Math. Phys. 24 , p.522, 1983

Obsah