Klasické aspekty N=2 struny

Jan Souček

October 7, 1999

Contents

1 Úvod

Obsahem této práce, jenž je současně výsledkem mého výzkumného úkolu, je analýza některých vlastností supersymetrických modelů vyskytujících se v teorii strun. V první části se pokusím shrnout základy matematické teorie antikomutujících veličin. Ve zbylé části se zabývám různými způsoby formulace supersymetrických strunových akcí a především tzv. druhou supersymetrií a podmínkami její existence. Případnému čtenáři může tato práce sloužit jako úvod do supersymetrie s aplikacemi v teorii σ-modelů. Zabývám se zde výhradně klasickými vlastnostmi supersymetrických σ-modelů, ohledně složité problematiky jejich kvantování se odkazuji na literaturu (např. [4]).

Na tomto místě musím poděkovat především svému školiteli ing. Václavu Jásenskému, bez jehož spolupráce by tato práce nemohla nikdy vzniknout. Děkuji také svému kolegovi Luboši Kloudovi, za četné konzultace problematických partií. V neposlední řadě děkuji doc. Ladislavu Hlavatému, který množstvím připomínek podstatně přispěl k zkvalitnění této práce.

2 Supersymetrie

2.1 Superčísla

Definice 1 *Grassmanovou algebrou nazýváme asociativní algebru generovanou množinou N lineárně nezávislých prvků η_i $(i = 1 \ldots N)$, které splňují relaci:*

$$\eta_i \eta_j + \eta_j \eta_i = 0 \tag{1}$$

tedy antikomutují. Grassmanovu algebru značíme Λ_N.

Poznámka: Libovolný prvek $a \in \Lambda_N$ můžeme vyjádřit ve tvaru:

$$a = \alpha + \sum_{k=1}^{N} \frac{1}{k!} C_{i_1,i_2,\ldots,i_k} \eta_{i_1}\eta_{i_2} \ldots \eta_{i_k} \tag{2}$$

kde $\alpha, C_{i_1,i_2,\ldots,i_k} \in \mathbf{C}$. V Λ_N tedy můžeme zvolit bázi:

$$1, \eta_i,\ \eta_{i_1}\eta_{i_2}\, (i_1 < i_2), \ldots, \eta_{i_1}\eta_{i_2}...\eta_{i_k}\, (i_1 < i_2 < ... < i_k), \ldots, \eta_1\eta_2...\eta_n \tag{3}$$

a dimenze Λ_N je tedy 2^N.

Definice 2 *Λ_∞ označme nekonečnou Grassmanovu algebru generovanou η_i kde $i = 1, 2, 3, \ldots$. Prvky Λ_∞ budeme nazývat superčísla.*

Poznámka: Prvky Λ_∞ mají tvar $z = z_B + z_S$, [1] kde

$$\begin{aligned} z_B &\in \mathbf{C} \\ z_S &= \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k!} C_{i_1,i_2,\ldots,i_k} \eta_{i_1}\eta_{i_2} \ldots \eta_{i_k} \end{aligned} \tag{4}$$

kde ale pouze konečný počet koeficientů $C_{i_1,i_2,..,i_k}$ je nenulový.

Poznámka: Λ_∞ má přirozenou $\mathbf{Z_2}$ gradaci. Nechť $z \in \Lambda_\infty$ je libovolný prvek. Potom jej lze jednoznačně rozložit na $z = z_c + z_a$,

$$z_c = z_B + \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{(2k)!} C_{i_1,i_2,\ldots,i_{2k}} \eta_{i_1}\eta_{i_2} \ldots \eta_{i_2k} \tag{5}$$

$$z_a = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{(2k+1)!} C_{i_1,i_2,\ldots,i_{2k+1}} \eta_{i_1}\eta_{i_2} \ldots \eta_{i_{2k+1}} \tag{6}$$

[1] Indexy B a S znamenají "Body" a "Soul", tedy tělo a duše superčísla. Tuto terminologii zavedl B. de Witt.

jestliže $z_a = 0$, pak z nazýváme c-číslo, množinu všech c-čísel značíme Λ_c. Podobně zavedeme Λ_a jako množinu všech z, pro které je $z_c = 0$ (a-čísla). Z definice je zjevné, že:

$$\begin{aligned} \Lambda_c \cdot \Lambda_c &= \Lambda_c \\ \Lambda_c \cdot \Lambda_a &= \Lambda_a \\ \Lambda_a \cdot \Lambda_a &\subset \Lambda_c \end{aligned} \tag{7}$$

a jsou tedy splněny podmínky gradace.

Definice 3 *Nechť η_i jsou generátory Λ_∞; $u, v \in \Lambda_\infty$; $\alpha \in \mathbf{C}$. Potom definujme unární operaci komplexní sdružení $*$ následovně:*

$$\begin{aligned} (\eta_i)^* &= \eta_i \\ (\alpha u)^* &= \alpha^* u^* \\ (u+v)^* &= u^* + v^* \\ (uv)^* &= v^* u^* \end{aligned} \tag{8}$$

Ve složkách má superčíslo komplexně sdružené k superčíslu (4) tvar:

$$z^* = z_B^* + \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k!} C^*_{i_1, i_2, \ldots, i_k} \eta_{i_k} \eta_{i_{k-1}} \ldots \eta_{i_1} \tag{9}$$

$$= z_B^* + \sum_{k=1}^{\infty} (-1)^{k(k-1)/2} \frac{1}{k!} C^*_{i_1, i_2, \ldots, i_k} \eta_{i_1} \eta_{i_2} \ldots \eta_{i_k} \tag{10}$$

Poznámka: Množinu superčísel splňujících $\Lambda_\infty^R = \{z \in \Lambda_\infty \,|\, z = z^*\}$ nazýváme *reálná superčísla*. Stejně tak $\Lambda_\infty^I = \{z \,|\, z = -z^*\}$ nazýváme *imaginární superčísla*.

2.2 Supervektorový prostor

Supervektorový prostor je analogií lineárního vektorového prostoru nad superčísly. Protože ale Λ_∞ není těleso, musíme definici vektorového prostoru pozměnit.

Definice 4 *Supervektorovým prostorem nazýváme množinu $\mathcal{L}$ (prvky jsou supervektory) s operacemi:*

(i) sčítání (+)

(ii) násobení superčíslem zleva a zprava
(iii) komplexní sdružení
splňující následující axiomy:

$$\begin{aligned}
\exists \mathbf{o} \in \mathcal{L} \qquad\quad (\mathbf{x}+\mathbf{o} &= \mathbf{x}, \forall \mathbf{x} \in \mathcal{L}) \\
\forall \mathbf{x} \in \mathcal{L}\ \exists \mathbf{y} \in \mathcal{L}\ (\mathbf{x}+\mathbf{y} &= \mathbf{o}) \\
\forall \alpha, \beta \in \Lambda_\infty; \forall \mathbf{x}, \mathbf{y} \in \mathcal{L} & \\
\mathbf{x}+\mathbf{y} &= \mathbf{y}+\mathbf{x} \\
(\mathbf{x}+\mathbf{y})+\mathbf{z} &= \mathbf{x}+(\mathbf{y}+\mathbf{z}) \\
(\alpha+\beta)\mathbf{x} &= \alpha\mathbf{x}+\beta\mathbf{x} \\
\alpha(\mathbf{x}+\mathbf{y}) &= \alpha\mathbf{x}+\alpha\mathbf{y} \\
(\alpha\beta)\mathbf{x} &= \alpha(\beta\mathbf{x}) \\
1 \cdot \mathbf{x} &= \mathbf{x}
\end{aligned}$$

a analogicky pro násobeni zprava

$$\begin{aligned}
(\alpha\mathbf{x})\beta &= \alpha(\mathbf{x}\beta) \\
(\mathbf{x})^{**} &= \mathbf{x} \\
(\mathbf{x}+\mathbf{y})^* &= \mathbf{x}^*+\mathbf{y}^* \\
(\alpha\mathbf{x})^* &= \mathbf{x}^*\alpha^* \\
(\mathbf{x}\alpha)^* &= \alpha^*\mathbf{x}^* \\
\forall \alpha \in \Lambda_c; \forall \mathbf{x} \in \mathcal{L} \qquad \alpha\mathbf{x} &= \mathbf{x}\alpha
\end{aligned}$$

Poznámka 1: Každý $\mathbf{x} \in \mathcal{L}$ lze rozdělit na sudou ($\mathbf{x_0}$) a lichou ($\mathbf{x_1}$) část $\mathbf{x} = \mathbf{x_0} + \mathbf{x_1}$, kde:

$$\begin{aligned}
\forall \alpha \in \Lambda_a : \quad \alpha\mathbf{x_0} &= \mathbf{x_0}\alpha \\
\alpha\mathbf{x_1} &= -\mathbf{x_1}\alpha
\end{aligned}$$

Poznámka 2: Když $\mathbf{x} \in \mathcal{L}$ je sudý (resp. lichý), pak $\mathbf{x}^*$ je sudý (resp. lichý).
Poznámka 3: Analogicky definujeme reálný supervektorový prostor (nad Λ_∞^R), operace komplexního sdružení pak pochopitelně nemá smysl.

2.3 Superfunkce

V následujících kapitolách budeme potřebovat pojem superfunkce. Pokusme se definovat tento pojem (jehož definice se v litertuře často obchází) co nejkorektněji:

Definice 5 *Nechť $\mathcal{L}$ je* **reálný** *supervektorový prostor dimenze p+q. Zvolme v tomto prostoru bazi složenou z p sudých $(\mathbf{e}_\alpha)$ a q lichých (Θ^β) supervektorů. Definujme nyní $\mathbf{R}^{p,q}$ jako sudou část prostoru $\mathcal{L}$ (t.j. množinu tvořenou sudými částmi vektorů z $\mathcal{L}$) rozloženou na direktní součet dvou disjunktních částí:*

$$\mathbf{R}^{p,q} = \{\xi^\alpha \mathbf{e}_\alpha + \theta_\beta \mathbf{\Theta}^\beta \,|\, \xi^\alpha \in \mathbf{\Lambda_c}, \theta_\beta \in \mathbf{\Lambda_a}\} \tag{11}$$

$\mathbf{R}^{p,q}$ je tedy paramterizován $p+q$ souřadnicemi: p komutujícími ξ^a a q antikomutujícími θ_b.

Definice 6 *Superfunkcí (nebo fyzikálněji "Superpolem") nazýváme zobrazení $\Phi : \mathbf{R}^{p,q} \to \Lambda_\infty$, které je hladké v tom smyslu, že koeficienty α a $C_{i_1,i_2,\ldots,i_k}$ ve vyjádření (2), jsou z $C^\infty(\mathbf{R}^{p,q})$.*

Fyzikálně zajímavé pro nás budou především superfunkce zobrazující $\mathbf{R}^{p,q} \to \Lambda_c$. Pro praktické výpočty je fundametální fakt, že libovolnou superfunkci můžeme pomocí zobecněného (Super-)Taylorova rozvoje vyjádřit v následujícím praktickém tvaru. Tento rozvoj je vždy konečný, neboť každá z antikomutujících proměnných se může v rozvoji vyskytnou v nejvýše první mocnině. (protože $(\theta_\alpha)^2 = 0 \;\; \forall\alpha$) :

$$\Phi(\xi_\mu, \theta_\nu) = f_0(\xi_\mu) + \sum_{\alpha=1}^{q} f_1(\xi_\mu)^\alpha \theta_\alpha + \sum_{\alpha<\beta}^{q} f_2(\xi_\mu)^{\alpha\beta} \theta_\alpha \theta_\beta + \cdots + f_q(\xi_\mu)\, \theta_1\theta_2 \ldots \theta_q \tag{12}$$

V rámci zachování podmínky $\Phi(\xi_\alpha, \theta_\beta) \in \Lambda_c$ je však nutné aby koeficienty f_{2k+1} byly antikomutující a f_{2k} komutující.

Příklad 1: V následujícím textu se bude často vyskytovat případ kdy $q = 2$. Obecná funkce má pak tvar:

$$\Phi(x^\mu, \theta_1, \theta_2) = \phi(x^\mu) + \psi_1(x^\mu)\, \theta_1 + \psi_2(x^\mu)\, \theta_2 + F(x^\mu)\, \theta_1\theta_2 \tag{13}$$

Zde potom interpretujeme komutující pole ϕ jako bosonové, antikomutující pole $\psi_{1,2}$ jako fermionová a pole F nemající fyzikální interpretaci vždy z pohybových rovnic vymizí.

2.4 Superalgebry, Supergrupy

Superalgebra je přirozeným rozšířením pojmu Lieovy algebry zahrnujícím kromě komutátoru i antikomutátory.

Definice 7 *Superalgebrou nazýváme* $\mathbf{Z_2}$ *gradovaný vektorový prostor* $L = L^0 \oplus L^1$ *který je zároveň algebrou s operací* $[.,.\} : L \times L \to L$, *která splňuje následující podmínky:*

$$\begin{aligned} &1. \quad [a,b\} = -(-1)^{\kappa(a)\kappa(b)}[b,a\} && (14)\\ &2. \quad \kappa([a,b\}) = (\kappa(a)+\kappa(b)) \ mod\ 2 && (15)\\ &3. \quad (-1)^{\kappa(a)\kappa(c)}[a,[b,c\}\} + (-1)^{\kappa(b)\kappa(a)}[b,[c,a\}\} + \\ &\quad\ + (-1)^{\kappa(c)\kappa(b)}[c,[a,b\}\} = 0 && (16)\end{aligned}$$

kde $\kappa(x)$ *je paritní funkce* $\mathbf{Z_2}$ *gradovaného prostoru* L*:*

$$\kappa(x) = \left\langle \begin{array}{ll} 0 & x \in L^0 \\ 1 & x \in L^1 \end{array} \right. \qquad (17)$$

První podmínka zde vyjadřuje vlastnost: "Sudé prvky (L^0) komutují s čímkoliv, Liché L^1 mezi sebou antikomutují". Třetí je analogií Jacobiho identity. Z (14) a (15) vidíme jak se chová operace $[.,.\}$ vůči gradaci L:

$$\begin{array}{rcl} [L^0, L^0] & \subset & L^0 \\ [L^0, L^1] & \subset & L^1 \\ \{L^1, L^1\} & \subset & L^0 \end{array} \qquad (18)$$

Příklad: Mějme algebru komplexních čtvercových matic $(p+q)\times(p+q)$ označovanou $Mat(p,q|\mathbf{C})$. Libovolnou matici vyjádříme v blokovém zápisu:

$$R = \begin{pmatrix} A & B \\ C & D \end{pmatrix} \qquad (19)$$

Kde A, B, C, D mají rozměry $p\times p$, $p \times q$, $q \times p$, $q\times q$. Tato algebra je přirozeně Z_2 gradovaná, sudá a lichá část matice R má tento tvar:

$$R^0 = \begin{pmatrix} A & 0 \\ 0 & D \end{pmatrix}, \ R^1 = \begin{pmatrix} 0 & B \\ C & 0 \end{pmatrix} \qquad (20)$$

Definujeme-li na $Mat(p,q|\mathbf{C})$ super-závorku

$$[R,S\} = [R^0,S^0] + [R^0,S^1] + [R^1,S^0] + \{R^1,S^1\} \tag{21}$$

vznikne nám superalgebra označovaná $gl(p,q|\mathbf{C})$. Rádi bychom měli na $gl(p,q|\mathbf{C})$ nějakou operaci stopy. Snadno zjistíme, že obyčejný trace nesplňuje podmínku $\mathrm{tr}\,[R,S\} = 0$. Definujeme však tzv. supertrace, který už tuto valstnost má.

$$\mathrm{str}\,R = \mathrm{tr}\,A - \mathrm{tr}\,D \tag{22}$$

Analogicky s Lieovými algebrami můžeme definovat například superalgebru $sl(p,q|C)$ jako podalgebru $gl(p,q|C)$ s vazbou $\mathrm{str}R = 0$. Dalším zajímavým příkladem je orthosymplektická superalgebra $osp(p,2q|C)$ Je to podalgebra $sl(p,2q|C)$ definovaná vazbami

$$A + A^T = 0\ ,\ JD + D^TJ = 0\ ,\ B = i\,C^TJ \tag{23}$$

kde J je $2q \times 2q$ matice:

$$J = \begin{pmatrix} 0 & \mathbf{1}_q \\ -\mathbf{1}_q & 0 \end{pmatrix} \tag{24}$$

Z podmínek (23) vidíme, že $A \in so(p,C)$ a $D \in sp(2q,C)$. Sudá část superalgebry $osp(p,2q|C)$ je obyčejná Lieova algebra:

$$osp(p,2q|C)^0 = so(p,C) \oplus sp(2q,C) \tag{25}$$

Lichou část však takto rozložit nelze, tyto podalgebry jsou v $osp(p,2q|C)$ netriviálně provázané.

Příklad 2 - Super-Poincarého algebra: Historicky byla supersymetrie objevena právě v souvislosti se supersymetrickým rozšířením Poincarého algebry. Byla hledána Lieova algebra netriviálně kombinující Poincarého algebru s nějakou jinou algebrou grupy symetrie. Bylo však dokázáno za velmi obecných předpokladů (Coleman a Mandula), že taková algebra neexistuje, resp. je vždy izomorfní direktnímu součtu Poincarého algebry s nějakou jinou algebrou. Pokud však připustíme i antikomutující generátory (budeme tedy hledat superalgebru), zjistíme [6], že takové rozšíření existuje a například pro dva antikomutující (dvojsložkové) spinorové generátory $q^\alpha, \bar{q}^\alpha$ je dokonce jednoznačné. (Jsou-li $q^\alpha, \bar{q}^\alpha$ spinory, jejich komutátory s generátory Poincarého algebry jsou dány jako $[j_{ab}, q_\alpha] = i(\sigma_{ab})_\alpha^{\ \beta} q_\beta$,

$[\rho_a, q_\alpha] = 0$ a podobně pro $\bar{q}_\alpha$.) Tato Super-Poincarého algebra je definována takto:

$$
\begin{aligned}
[\rho_a, \rho_b] = 0 \qquad [j_{ab}, \rho_c] &= i\eta_{ac}\rho_b - i\eta_{bc}\rho_a \\
[j_{ab}, j_{cd}] &= i\eta_{ac}j_{bd} - i\eta_{ad}j_{bc} + i\eta_{bd}j_{ac} - i\eta_{bc}j_{ad} \\
[j_{ab}, q_\alpha] = i(\sigma_{ab})_\alpha^{\ \beta} q_\beta \qquad & [\rho_a, q_\alpha] = 0 \\
[j_{ab}, \bar{q}_\alpha] = i(\bar{\sigma}_{ab})_\alpha^{\ \beta} \bar{q}_\beta \qquad & [\rho_a, \bar{q}_\alpha] = 0 \\
\{q_\alpha, q_\beta\} = 0 \qquad & \{\bar{q}_\alpha, \bar{q}_\beta\} = 0 \\
\{q_\alpha, \bar{q}_\beta\} &= 2(\sigma^a)_{\alpha\beta}\, q_a
\end{aligned}
\tag{26}
$$

Zde $a = 0, 1, 2, 3$; $\alpha = 0, 1$; j_{ab} jsou generátory Lorentzových transformací, ρ_a generátory translací, σ_a jsou Pauliho matice, $(\tilde{\sigma^a})_{\alpha\beta} = \varepsilon^{\alpha\mu}\varepsilon^{\beta\mu}(\sigma^a)_{\mu\nu}$, $(\sigma_{ab})_\beta^\alpha = -\frac{1}{4}(\sigma_a\tilde{\sigma}_b - \sigma_b\tilde{\sigma}_a)$, $(\tilde{\sigma}_{ab})_\beta^\alpha = -\frac{1}{4}(\tilde{\sigma}_a\sigma_b - \tilde{\sigma}_b\sigma_a)$

Podobně jako lze exponenciováním Lieovy algebry získat příslušnou grupu, je možné vytvořit ze superalgebry supergrupu. Matematicky korektní teorie supergrup a supervariet existuje [5], nicméně je mimo rozsah této práce. My se spokojíme se zjednodušeným pohledem na supergrupy. Každý prvek (skoro) g Lieovy grupy může být vyjádřen jako $g = \exp(a)$, kde a je prvek příslušné Lieovy algebry. Mějme tedy superalgebru $\mathcal{S}$. Chápejme supergrupu jako množinu prvků tvaru $\exp(a), a \in \mathcal{S}$. Na množině těchto "formálních exponenciel" definujme grupové násobení pomocí supersymetrické analogie Hausdorff-Baker-Campbellovy formule:

$$
\exp(a)\exp(b) = \exp(a + b + \frac{1}{2}[a, b\} + \frac{1}{12}(\,[a, [a, b\}\} + [b, [b, a\}\}\,) + \cdots) \tag{27}
$$

Topologií této grupy se nebudeme zabývat.

2.5 Diferenciální a integrální počet s antikomutujícími veličinami

V této sekci podáme přehled základních pravidel pro početní práci s derivacemi a integrály obsahujícími antikomutující proměnné. Matematickou teorii opět naleznete v [5].

Pro počítání derivací superfunkcí platí běžná pravidla diferenciálního počtu. Jediný problematický je případ:

$$
\frac{\partial\,(\theta_1\theta_2)}{\partial\theta_1} = -\frac{\partial\,(\theta_2\theta_1)}{\partial\theta_1} \tag{28}
$$

Konvencí se definuje:

$$\frac{\partial\,(\theta_1\theta_2)}{\partial\theta_1} := \theta_2 \tag{29}$$

Při integraci podle Grassmanových proměnných užíváme Berezinův integrál definovaný jako:

$$\int d\theta\;\theta \;=\; 1 \tag{30}$$

$$\int d\theta \;=\; 0 \tag{31}$$

plus běžná pravidla pro integrál součtu a násobení konstantou. Například integrál funkce ve tvaru (13) spočítáme následovně:

$$\int d\theta_1 d\theta_2\,(\phi + \psi_1\,\theta_1 + \psi_2\,\theta_2 + F\,\theta_1\theta_2) = F \tag{32}$$

I u Berezinova integrálu je možná integrace per-partes. Platí totiž:

$$\int d\theta_1 d\theta_2\,\frac{\partial V}{\partial\theta_1} = 0 \tag{33}$$

pro libovolnou superfunkci V.

3 Supersymetrické σ-modely

3.1 Supersymetrie jako symetrie σ-modelu s fermionovým členem

Bosonová struna detailně zmiňovaná například v [1] měla jako fyzikální model řadu nevýhod. Například neobsahovala žádná fermionová pole. Naivním způsobem jak tento model zobecnit je pochopitelně přidat k bosonové části další členy obsahující fermionová (spinorová) pole. Ukazuje se (např. [4]), že jen málo takto zobecněných modelu dává zajímavé (netriviální) teorie. Pro nás důležité bude toto rozšíření: Nechť ψ^μ_A je D-tice Majoranových spinorových polí a X^μ je jako dříve zobrazení do cílové variety (zde v lokálních souřadnicích). [2] Uvažujme akci

$$S = -\frac{1}{2\pi}\int d^2\sigma\,\{\partial_\alpha X^\mu\partial^\alpha X_\mu - i\overline{\psi}^\mu\rho^\alpha\partial_\alpha\psi_\mu\} \tag{34}$$

[2] $A = \{0,1\}$ je spinorový index, $\mu = 0,\ldots,D-1$ vektorový

kde ρ^α jsou Diracovy matice pro dimenzi 2.[3] Tato akce má kromě symetrií bosonové části [1], které zde nejsou narušeny, ještě novou symetrii nazývanou supersymetrií. Akce (34) je tedy invariantní vůči:

$$\begin{aligned} \delta X^\mu &= \bar{\epsilon}\psi^\mu \\ \delta\psi^\mu &= -i\rho^\alpha \partial_\alpha X^\mu \epsilon \end{aligned} \tag{35}$$

Zde ϵ je *antikomutujícící* konstantní spinor. [4] Všimeme si, že tato symetrie zaměňuje bosonová a fermionová pole. Základní algebraickou vlastností této symetrie je, že komutátor dvou symetrií dává prostorovou translaci (myšleno translaci na světoploše). Zjevně:

$$[\delta_1, \delta_2] X^\mu = \delta_1(\overline{\epsilon_2}\psi^\mu) - \delta_2(\overline{\epsilon_1}\psi^\mu) = a^\alpha \partial_\alpha X^\mu \tag{36}$$

kde a^α jsou komutující koeficienty:

$$a^\alpha = 2i\overline{\epsilon_1}\rho^\alpha \epsilon_2 \tag{37}$$

Na základě těchto symetrií můžeme pomocí theorému Noetherové opět najít zákony zachování. [4]

3.2 Formulace pomocí superprostoru

Nyní přistoupíme k formulaci předchozího modelu pomocí superprostoru. Tentokrát nebudeme vycházet z akce, ale z reprezentace supersymetrie na superpolích, kde je supersymetrie "geometrickou transformací".

Náš σ-model budeme nyní formulovat jako zobrazení ze 2-rozměrného superprostoru ($\mathbf{R}^{2,2}$). Antikomutující proměnné zde budou 2 (θ_0 a θ_1) a budou tvořit složky dvojkomponentního Majoranova spinoru. Komutující prostoročasové proměnné značíme σ_α. Obecná superfunkce na $\mathbf{R}^{2,2}$ má tvar:

$$Y^\mu(\sigma, \theta) = X^\mu(\sigma) + \overline{\theta}\psi^\mu(\sigma) + \frac{1}{2}\overline{\theta}\theta F^\mu(\sigma) \tag{38}$$

Na těchto superfunkcích je supersymetrie reprezentována pomocí generátorů

[3] Tedy matice spňující $\{\rho^\alpha, \rho^\beta\} = -2\eta^{\alpha\beta}$. Například matice: $\rho^0 = \begin{pmatrix} 0 & -i \\ i & 0 \end{pmatrix}$, $\rho^1 = \begin{pmatrix} 0 & i \\ i & 0 \end{pmatrix}$

[4] V celém dalším textu platí: Nechť ϵ je spinor, pak $\bar{\epsilon} = \epsilon\rho^0$

$$Q_A = \frac{\partial}{\partial \overline{\theta}^A} + i(\rho^\alpha \theta)_A \partial_\alpha \tag{39}$$

Je pohodlné zavést si infinitezimální antikomutující paramter ϵ_A, jenž nám umožní převést superkomutátory z kapitoly 2.4 na komutátory tím způsobem, že místo s Q budeme pracovat s $\overline{\epsilon}Q$. Potom $\overline{\epsilon}Q$ generuje superprostorovou transformaci:

$$\begin{aligned} \delta\theta^A &= [\overline{\epsilon}Q, \theta^A] = \epsilon^A \\ \delta\sigma^\alpha &= [\overline{\epsilon}Q, \sigma^\alpha] = i\overline{\epsilon}\rho^\alpha\theta \end{aligned} \tag{40}$$

Na superpolích působí $\overline{\epsilon}Q$ pochopitelně:

$$\delta Y^\mu = \overline{\epsilon}QY^\mu \tag{41}$$

Algebraická struktura supersymetie (36) se zde odrazí jako antikomutační relace mezi generátory:

$$\{Q_A, \overline{Q}_B\} = -2i(\rho^\alpha)_{AB}\partial_\alpha \tag{42}$$

Rozepíšeme-li vztah (41) do komponent, obdržíme:

$$\delta X^\mu = \overline{\epsilon}\psi^\mu \tag{43}$$

$$\delta\psi^\mu = -i\rho^\alpha\partial_\alpha X^\mu\epsilon + F^\mu\epsilon \tag{44}$$

$$\delta F^\mu = -i\overline{\epsilon}\rho^\alpha\partial_\alpha\psi^\mu \tag{45}$$

Uvážíme-li, že u modelu (34) byla jedna z pohybových rovnic $\rho^\alpha\partial_\alpha\psi_\mu = 0$ a pole F^μ na počátku nulové, reprodukuje se zde přesně symetrie (35).

Nyní bychom chteli formulovat teorii pomocí Lagrangiámu invariantního vůči supersymetrii (41). K tomu potřebujeme derivační operátor D který je také supersymetricky invariantní. (Tedy $D(\delta Y) = \delta(DY)$) Měl by tedy splňovat

$$[\overline{\epsilon}Q, D] = 0 \tag{46}$$

nebo ekvivalentně:

$$\{Q_A, D_B\} = 0 \tag{47}$$

Takový operátor existuje a má tvar [4]:

$$D = \frac{\partial}{\partial\overline{\theta}} - i\rho^\alpha\theta\partial_\alpha \tag{48}$$

Snadno ověříme, že i tyto operátory mají antikomutační vlastnosti supersymetrie.

$$\{D_A, \overline{D}_B\} = 2i(\rho^\alpha)_{AB}\partial_\alpha \tag{49}$$

Při formulaci Lagrangiánů budeme pochopitelně užívat Berezinův integrál. Tento integrál má následující pro nás pozitivní vlastnost. Nechť Y je libovolné superpole, potom výraz

$$S = \int d^2\sigma d^2\theta\, Y \tag{50}$$

je supersymetricky invariantní. Snadno totiž ukážeme (integrací per-partes), že variace

$$\delta S = \int d^2\sigma d^2\theta\, \overline{\epsilon} Q Y \tag{51}$$

je nulová. Zkusíme tedy takto formulovat nějaké supersymetrické Lagrangiány. Jako první nás asi napadne:

$$S = \frac{i}{4\pi}\int d^2\sigma d^2\theta\, g_{\mu\nu}(X^\alpha)\overline{D}Y^\mu DY^\nu \tag{52}$$

Zde metrika $g_{\mu\nu}(X^\alpha)$ závisí pouze na komutující části superpole Y. (Chceme totiž reprodukovat původní akci, kde metrika měla tuto vlastnost) Po provedení integrace přes θ podle pravidla (32) Obdržíme ve složkách akci:

$$S = -\frac{1}{2\pi}\int d^2\sigma\, \{\partial_\alpha X^\mu \partial^\alpha X_\mu - i\overline{\psi}^\mu \rho^\alpha \partial_\alpha \psi_\mu + F^\mu F_\mu\} \tag{53}$$

Pohybová rovnice plynoucí z varice této akce podle F^μ je $F^\mu = 0$. Tento člen můžeme tedy v akci klidně vynechat a získáváme takto (34). Tuto akci sme tedy získali jako nejjednodušší σ-model, konstruovaný tak aby byl supersymetricky invariantní.

3.3 Příklad - supersymetrický S^2 model

Předchozí postup budeme demonstrovat na příkladu S^2 modelu, v nesupersymetrické verzi analyzovaného už v [1]. V tomto modelu volíme metriku světoplochy g_{AB} jako δ_{AB} (tedy Riemmanovskou), cílovou varietou je sféra S^2, v naší formulaci reprezentovaná jako R^3 s vazbou $Y^2 = 1$. Pro větší početní komfort zde přejdeme k souřadnicím $\theta = (\theta_0 + i\theta_1)/2, \overline{\theta} = (\theta_0 - i\theta_1)/2$, tím se zbavíme všech imaginárních koficientů v super-derivacích.

(Náš model je reálný, tak to bude vhodné). Super-derivace nabývají tvaru: [5]

$$D = \frac{\partial}{\partial\theta} + \theta\partial\ ,\ \ \overline{D} = \frac{\partial}{\partial\bar{\theta}} + \bar{\theta}\bar{\partial} \tag{54}$$

Superpole Y vyjádříme ve tvaru

$$Y(z,\bar{z},\theta,\bar{\theta}) = \phi(z,\bar{z}) + \psi(z,\bar{z})\,\theta + \bar{\psi}(z,\bar{z})\,\bar{\theta} + F(z,\bar{z})\,\theta\bar{\theta} \tag{55}$$

Vyjdeme z akce

$$S = \int d^2z d^2\theta\,\delta_{ij} DY^i\overline{D}Y^j \tag{56}$$

s vazbou $Y^2 = 1$, kterou rozložíme podle mocnin θ.

$$\begin{aligned} \phi^i\phi^i &= 1 \\ \phi^i\psi^i = \phi^i\bar{\psi}^i &= 0 \\ \phi^i F^i - \psi^i\bar{\psi}^i &= 0 \end{aligned} \tag{57}$$

V tomto příkladě sčítáme podle latinských indexů nezávisle na jejich poloze [nahoře - dole] ($i = 1,2,3$). Nyní rozepíšeme akci (56) ve složkách, provedeme Berezinovu integraci podle vzorce (32) a aplikujeme vazby (57) pomocí Lagrangeových multiplikátorů.

$$\begin{aligned} S = \int d^2z(\partial\phi^i\bar{\partial}\phi^i &- \psi^i\bar{\partial}\psi^i - \bar{\psi}^i\partial\bar{\psi}^i + F^iF^i - \\ &- \lambda\phi^i\phi^i - \mu\phi^i\psi^i - \bar{\mu}\phi^i\bar{\psi}^i - \nu[\phi^iF^i - \psi^i\bar{\psi}^i]) \end{aligned} \tag{58}$$

Variujme nyní tuto akci podle F^i. Vynásobíme-li pohybovou rovnici

$$2F^i - \nu\phi^i = 0 \tag{59}$$

zprava ϕ^i a vysčítáme, získáme hodnotu multiplikátoru $\nu = 2\phi^iF^i$. Po zpětném dosazení ν do (59) a vynásobení F^i získáme:

$$F^iF^i = (\phi^iF^i)^2 \tag{60}$$

a s použitím poslední vazby (57) vidíme.

$$F^iF^i = (\psi^i\bar{\psi}^i)^2 \tag{61}$$

[5] $\partial = \frac{\partial}{\partial z}, \overline{\partial} = \frac{\partial}{\partial\bar{z}}; z = x + iy$

Protože se F^i nevyskytuje ve vazbách ani v akci v derivacích, můžeme řešení algebraické rovnice dosadit zpět do (56) a eliminovat pole F^i. Akce se nám redukuje na:

$$S = \int d^2z(\,\partial\phi^i\bar{\partial}\phi^i - \psi^i\bar{\partial}\psi^i - \bar{\psi}^i\partial\bar{\psi}^i + (\psi^i\bar{\psi}^i)^2 - \lambda\phi^i\phi^i - \mu\phi^i\psi^i - \bar{\mu}\phi^i\bar{\psi}^i) \quad (62)$$

Variací této akce po výpočtu a dosazení multiplikátorů docházíme k pohybovým rovnicím tohoto modelu:

$$\begin{aligned}
\partial\bar{\partial}\phi^i - (\phi^k\partial\bar{\partial}\phi^k)\phi^i - (\phi^k\bar{\partial}\psi^k)\psi^i - (\phi^k\partial\bar{\psi}^k)\bar{\psi}^i &= 0 \\
\bar{\partial}\psi^i - (\psi^k\bar{\psi}^k)\bar{\psi}^i - (\bar{\partial}\psi^k\phi^k)\phi^i &= 0 \\
\partial\bar{\psi}^i - (\psi^k\bar{\psi}^k)\psi^i - (\partial\bar{\psi}^k\phi^k)\phi^i &= 0 \qquad (63)
\end{aligned}$$

Vidíme tedy, že rozšíření původního (nesupersymetrického) modelu s pohybovou rovnicí

$$\partial\bar{\partial}\phi^i - (\phi^k\partial\bar{\partial}\phi^k)\phi^i = 0 \quad (64)$$

je i na úrovni pohybových rovnic značně netriviální.

3.4 Supersymetrický chirální WZWN model

U klasických chirálních modelů je je cílovým prostorem zobrazení Lieova grupa. U supersymetrických modelů nás požadavek supersymetrické invariance vede ke zvolení supergrupy jako cílového prostoru. Obecný prvek supergrupy má analogicky s (13) tvar (užijeme značení z předchozího příkladu):

$$G = g + \theta\psi + \bar{\theta}\bar{\psi} + \theta\bar{\theta}F \quad (65)$$

kde ovšem tentokrát pole q, ψ, $\bar{\psi}$, F nabývají hodnot v Lieově grupě **G**. Dále předpokládejme, že algebra **g** grupy **G** je poloprostá, tedy na ní existuje nedegenerovaná Killingova forma. Při formulaci akce použijeme jako obvykle prvek Lieovy super-algebry ve tvaru $G^{-1}DG$. Inverzní element vypočteme z rovnice

$$G^{-1}G = 1 \quad (66)$$

Akce pro náš (N = 1 SUSY chirální model s WZW členem) je tedy

$$\begin{aligned}
S &= \int d^2z\, d^2\theta\, (< G^{-1}DG, G^{-1}\overline{D}G >) \\
&- \int d^2z\, dt\, d^2\theta\, (< G^{-1}\frac{\partial G}{\partial t}, \{G^{-1}DG, G^{-1}\overline{D}G\} >) \qquad (67)
\end{aligned}$$

Druhý člen integrujeme přes trojrozměrnou varietu parametrizovanou proměnnými (z, $\bar{z}$, t), jejíž hranicí je naše světoplocha. Variací této akce můžeme získat pohybové rovnice, které zde nabývají elegantního tvaru (stejně jako v nesupersymetrickém případě).

$$\overline{D}(G^{-1}DG) = D(G^{-1}\overline{D}G) = 0 \tag{68}$$

Akce (67) je invariantní vůči nekonečnědimenzionální grupě transformací analogické k "obkládací" symetrii $g \to h_1^{-1}(z)gh_2(\bar{z})$ u nesupersymetrického sigma-modelu. Je to tzv. Super-Kac-Moodyho symetrie:

$$\begin{aligned} \delta_a G(z,\bar{z},\theta,\bar{\theta}) &= a(\bar{z},\theta)\, G(z,\bar{z},\theta,\bar{\theta}) \\ \delta_{\bar{a}} G(z,\bar{z},\theta,\bar{\theta}) &= G(z,\bar{z},\theta,\bar{\theta})\, \bar{a}(z,\bar{\theta}) \end{aligned} \tag{69}$$

kde a a $\bar{a}$ jsou superpole s hodnotami v algebře $\mathbf{g}$. Supersymetrické transformace vůči nimž je (67) invariantní mají tvar

$$\begin{aligned} G^{-1}\delta_\epsilon G &= G^{-1}\epsilon Q G \\ \delta_{\bar{\epsilon}} G\, G^{-1} &= \bar{\epsilon}\bar{Q} G\, G^{-1} \end{aligned} \tag{70}$$

Pohybové rovnice (68) lze také zapsat jako Laxův pár (resp. Zobecněný Laxův pár kde místo komutátoru máme super-komutátor). Chceme tedy rovnici vyjádřit ve tvaru:

$$[D + A(\lambda), \bar{D} + \bar{A}(\lambda)\} = 0 \tag{71}$$

Kde A a $\bar{A}$ jsou liché prvky superalgebry g závislé na reálném parametru λ. Protože A i $\bar{A}$ jsou liché a $[D, \bar{D}\} = \{D, \bar{D}\} = 0$ můžeme zde psát místo super-komutátoru antikomutátor. Předpokládejme, že závislost A a $\bar{A}$ na λ je polynomiální.

$$A(\lambda) = p(\lambda)A \quad , \quad \bar{A}(\lambda) = q(\lambda)\bar{A} \tag{72}$$

kde p a q jsou polynomy v λ. Rozepíšeme rovnici (71) do složek:

$$q(\lambda)D\bar{A} + p(\lambda)\bar{D}A + p(\lambda)q(\lambda)\{A, \bar{A}\} = 0 \tag{73}$$

a vydělíme ji $p(\lambda)q(\lambda)$ a podíly $1/p$ a $1/q$ vyjádříme jako $1 - (p-1)/p$ a stejně pro q.

$$(1 + \frac{1 - p(\lambda)}{p(\lambda)})D\bar{A} + (1 + \frac{1 - q(\lambda)}{q(\lambda)})\bar{D}A + \{A, \bar{A}\} = 0 \tag{74}$$

Zvolíme-li nyní vhodně polynomy p a q např $p = \lambda^2 + 1$ a $q = \lambda^3 + 1$, potom z požadavku, aby rovnice (74) platila pro všechna smysluplná λ, dostáváme 3 rovnice

$$\begin{aligned} D\bar{A} + \bar{D}A + \{A, \bar{A}\} &= 0 \\ D\bar{A} &= 0 \\ \bar{D}A &= 0 \end{aligned} \tag{75}$$

První z nich je podmínka nulové křivosti pro super-konexi, která jako v komutujícím případě implikuje existenci (lokálního) pole G

$$\begin{aligned} A &= G^{-1}DG \\ \bar{A} &= \bar{D}G\,G^{-1} \end{aligned} \tag{76}$$

Z dalších dvou rovnic pak plynou pohybové rovnice přesně ve tvaru (68).

3.5 N = (1,1) model a jeho komponentní rozvoj

Budeme nyní uvažovat supersymetrický σ-model tvaru,

$$S = \int d^2\sigma d^2\theta\, g_{\mu\nu}(Y) DY^\mu \overline{D} Y^\nu \tag{77}$$

jehož cílový prostor je Riemmanovskou varietou s nějakou netriviální metrikou $g_{\mu\nu}$, která závisí jak na komutujících, tak i na antikomutujících složkách superpole Y^μ. Pohybovou rovnici tohoto modelu můžeme zapsat v elegantním kompaktním tvaru.

$$D\overline{D}Y^\alpha + \Gamma^\alpha_{\beta\gamma} DY^\beta \overline{D} Y^\gamma = 0 \tag{78}$$

$\Gamma^\alpha_{\beta\gamma}$ je funkcí superpole Y^α a je to Levi-Civitova konexe od metriky $g_{\mu\nu}(Y^\alpha)$ Také vyjádření této akce v komponentách (55) dává zajímavý výsledek; akci se nám totiž podaří formulovat pomocí geometrických veličin.

Nejprve rozvineme metrický tenzor $g_{\mu\nu}$ do (konečného) Taylorova rozvoje.

$$g_{\mu\nu}(Y^\alpha) = g_{\mu\nu}(\phi^\alpha + \Omega^\alpha) = g_{\mu\nu}(\phi^\alpha) + \Omega^\beta \partial_\beta g_{\mu\nu}(\phi^\alpha) + \frac{1}{2}\Omega^\beta \Omega^\gamma \partial_{\alpha\gamma} g_{\mu\nu}(\phi^\alpha) \tag{79}$$

kde Ω^α je část pole Y^α obsahující antikomutující proměnné.

$$\Omega^\alpha = \psi(z,\bar{z})\,\theta + \bar{\psi}(z,\bar{z})\,\bar{\theta} + F(z,\bar{z})\,\theta\bar{\theta} \tag{80}$$

Prostým dosazením tohoto do (77) a provedením integrace, získáme vyjádření akce ve tvaru:

$$S = \int d^2\sigma\{g_{\mu\nu}(\phi^\alpha)\partial\phi^\mu\bar{\partial}\phi^\nu - g_{\mu\nu}(\phi^\alpha)\psi^\mu(\overline{\nabla}_\phi\psi)^\nu - g_{\mu\nu}(\phi^\alpha)\bar{\psi}^\mu(\nabla_\phi\bar{\psi})^\nu$$
$$+ \quad R_{\alpha\beta\mu\nu}(\phi^\alpha)\psi^\alpha\bar{\psi}^\beta\psi^\mu\bar{\psi}^\nu\} \tag{81}$$

Zde $\nabla_\phi\bar{\psi} = \partial\bar{\psi} + \Gamma^\alpha_{\kappa\lambda}\partial\phi^\kappa\bar{\psi}^\lambda$ a $\overline{\nabla}_\phi\psi = \bar{\partial}\psi + \Gamma^\alpha_{\kappa\lambda}\bar{\partial}\phi^\kappa\psi^\lambda$ jsou kovariantní derivace příslušných polí ve směru daném tečným vektorem $d\phi$. $\Gamma^\alpha_{\kappa\lambda}(\phi^\alpha)$ a $R_{\alpha\beta\mu\nu}(\phi^\alpha)$ jsou samozřejmě odvozeny od metrického tenzoru zúženého na komutující část - tedy $g_{\mu\nu}(\phi^\alpha)$.

3.6 Druhá supersymetrie v N = (1,1) modelu

V této sekci budeme uvažovat σ-model (77) s pohybovou rovnicí (78). Supersymetrii (41) vůči níž je tento model invariantní vyjádříme v našich souřadnicích

$$\delta Y^\alpha = \epsilon QY^\alpha + \bar{\epsilon}\bar{Q}Y^\alpha \tag{82}$$

kde ϵ a $\bar{\epsilon}$ jsou složky antikomutujícího infinitezimálního spinoru a

$$Q = \frac{\partial}{\partial\theta} - \theta\partial\ ,\ \bar{Q} = \frac{\partial}{\partial\bar{\theta}} - \bar{\theta}\bar{\partial} \tag{83}$$

Budeme nyní hledat podmínky, za kterých má tento model další nezávislou symetrii, jejíž generátory tvoří stejnou algebru jako u supersymetrie. Budeme tedy hledat druhou nezávislou supersymetrii tohoto modelu a ukážeme, že tyto symetrie souvisí s komplexními strukturami na cílové varietě. Novou symetrii budeme hledat ve následujícím tvaru.

$$\delta Y^\alpha = \eta J^\alpha_\beta DY^\beta + \bar{\eta}\bar{J}^\alpha_\beta\bar{D}Y^\beta \tag{84}$$

kde $J^\alpha_\beta(Y^\gamma)$ a $\bar{J}^\alpha_\beta(Y^\gamma)$ jsou obecné (1,1) tenzory na cílové varietě. Z nutného požadavku aby δY^α byla komutující veličina musí být η a $\bar{\eta}$ antikomutující. Nejprve nalezneme podmínky na J a $\bar{J}$ nutné proto, aby (84) bylo symetrií akce (77). Tyto podmínky získáme standardním způsobem z rovnice:

$$\delta S = \int d^2\sigma d^2\theta\, g_{\mu\nu}(Y^\alpha + \delta Y^\alpha)D(Y^\mu + \delta Y^\mu)\overline{D}(Y^\nu + \delta Y^\nu) = 0 \tag{85}$$

kde zanedbáme členy vyššího než prvního řádu:

$$\delta S = \int d^2\sigma d^2\theta\,\{g_{\mu\nu}(Y^\alpha)D(\delta Y^\mu)\overline{D}Y^\nu + g_{\mu\nu}(Y^\alpha)DY^\mu\overline{D}(\delta Y^\nu) +$$
$$+\,\partial_\lambda g_{\mu\nu}(Y^\alpha)\,\delta Y^\lambda DY^\mu\overline{D}Y^\nu\} = 0 \tag{86}$$

Po zdlouhavém nepříjemném výpočtu, který je nutné provádět ve složkách dospějeme k rovnicím

$$\begin{aligned} \nabla_\lambda J^\alpha_\beta = \nabla_\lambda \bar{J}^\alpha_\beta &= 0 \\ g_{\lambda[\alpha} J^\lambda_{\beta]} &= 0 \\ g_{\lambda[\alpha} \bar{J}^\lambda_{\beta]} &= 0 \end{aligned} \tag{87}$$

Našim druhým požadavkem je, aby tato symetrie měla stejné algebraické vlastnosti jako supersymetrie. Požadujeme tedy

$$[\delta_1, \delta_2] Y^\alpha = 2\eta_1\eta_2 \partial Y^\alpha + 2\bar{\eta}_1\bar{\eta}_2 \bar{\partial} Y^\alpha \tag{88}$$

Rozepíšeme tuto podmínku pomocí ansatzu (84). Pro jednoduchost to uděláme pouze pro tenzor J pro $\bar{J}$ je to úplně stejné.

$$[\delta_1, \delta_2] Y^\alpha = \eta_1 J^\alpha_\beta D(\eta_2 J^\beta_\lambda Y^\lambda) - (1 \leftrightarrow 2) = 2\eta_1\eta_2 J^\alpha_\beta D(J^b_\lambda Y^\lambda) \tag{89}$$

Nyní užijeme mimo jiné vztahu $DD(Y^\alpha) = \partial Y^\alpha$ a dostneme

$$[\delta_1, \delta_2] Y^\alpha = 2\eta_1\eta_2 \{ J^\alpha_\beta \partial_\gamma J^\beta_\omega DY^\gamma DY^\omega + J^\alpha_\beta J^\beta_\lambda \partial Y^\lambda \} \tag{90}$$

Abychom dostali vztah (88) musí tedy platit

$$J^2 = -1 \ , \ J^\alpha_\beta \partial_{[\gamma} J^\beta_{\omega]} = 0 \tag{91}$$

Z první podmínky je patrné, že J bude mít vlastnosti "skoro komplexní" (almost complex) struktury. S pomocí již známých podmínek (87) můžeme dokázat, že J je dokonce komplexní struktura tj. splňuje podmíku integrability [10].

$$N(u,v) = 2([Ju, Jv] - [u,v] - J[u, Jv] - J[Ju, v]) = 0 \tag{92}$$

nebo-li ve složkách

$$N^\alpha_{\beta\lambda}[J] = J^\delta_{[\beta} \partial_\delta J^\alpha_{\lambda]} - J^\alpha_\delta \partial_{[\lambda} J^\delta_{\beta]} = 0 \tag{93}$$

Tenzor N se nazývá Nijenhuisův tenzor. Nulovost druhého členu je přesně jedna z pomínek (91) a nulovost prvního členu lze dokázat z (87). Celkově tedy sada podmínek na J a $\bar{J}$ je:

$$\begin{aligned} \nabla_\lambda J^\alpha_\beta = \nabla_\lambda \bar{J}^\alpha_\beta &= 0 \\ g_{\lambda[\alpha} J^\lambda_{\beta]} = g_{\lambda[\alpha} \bar{J}^\lambda_{\beta]} &= 0 \\ J^2 = \bar{J}^2 &= -1 \\ N^\alpha_{\beta\lambda}[J] = N^\alpha_{\beta\lambda}[\bar{J}] &= 0 \end{aligned} \tag{94}$$

Naše akce je tedy invariantní vůči druhé supersymetrii právě když na cílové varietě existují dvě kovariantně konstantní komplexní struktury a pro obě z nich je metrika variety hermitovská.

Uvažujme nyní N= (1,1) supersymetrický sigma-model jehož cílovou varietou je Lieova grupa např. (67). Korespondence druhé supersymetrie a komplexních struktur je zde samozřejmě stejná (neboť tento model je speciálním případem obecného modelu z této kapitoly). Druhá supersymetrie má tvar:

$$\begin{aligned}(G^{-1}\delta_\eta G)^\alpha &= \eta J^\alpha_\beta (G^{-1}DG)^\beta \\ (\delta_{\bar\eta} G\, G^{-1})^\alpha &= \bar\eta \bar J^\alpha_\beta (\bar D G\, G^{-1})^\beta \end{aligned} \tag{95}$$

V tomto případě můžeme ukázat bijektivní korespondenci mezi komplexními strukturami na Lieově algebře $\mathbf{g}$ a Maninovými triplety [viz. Dodatek]. Platí následující tvrzení: Pro každý komplexní Maninův triplet $(\mathbf{g}, \mathbf{g}_+, \mathbf{g}_-)$ existuje existuje komplexní strukura na $\mathbf{g}$ taková, že $\mathbf{g}_\pm$ jsou její vlastní podprostory příslušné vlastním číslům $\pm i$. Pro reálnou Lieovu algebru můžeme uvažovat komplexifikaci $\mathbf{g}^{\mathbf{C}}$. Nechť $\mathbf{g}$ je tentokrát reálná Lieova algebra s nedegenerovanou ad-invariantní symetrickou bilineární formou a antisymetrickou komplexní strukturou J. Nechť $\mathbf{g}_\pm$ jsou vlastní podprostory $\mathbf{g}^{\mathbf{C}}$ operátoru J příslušné vlastním číslům $\pm i$. Potom $(\mathbf{g}^{\mathbf{C}}, \mathbf{g}_+, \mathbf{g}_-)$ je komplexní Maninův triplet. Navíc lze dokázat následující tvrzení.

Věta 1 *Existuje 1-1 korespondence mezi těmito dvěma objekty*

(i) Komplexním Maninovým tripletem s antilineární involucí $\tau : \mathbf{g}_\pm \to \mathbf{g}_\mp$

(ii) Reálnou Lieovou algebrou s ad-invariantní nedegenerovanou symetrickou bilineární formou $<,>$ *a komplexní strukturou* J*, která je antisymetrická vzhledem k* $<,>$.

V našem případě chirálního σ-modelu budeme uvažovat komplexní Maninovy triplety, kde involuce τ je tvořena hermitovskou konjugací. Proto grupu G budeme volit jako podgrupu grupy unitárních matic. Elementy rozvoje (65) tedy budou splňovat podmínky

$$g^*_{mn} = (g^{-1})_{mn}\ ,\ \psi^*_{mn} = (\psi^{-1})_{mn}\ ,\ \bar\psi^*_{mn} = (\bar\psi^{-1})_{mn}\ ,\ F^*_{mn} = (F^{-1})_{mn} \tag{96}$$

Mějme tedy pevnou reálnou (unitární) Lieovu grupu $\mathbf{G}$ a její algebru s komplexní strukturou $(\mathbf{g}, J)$. Komplexifikace $\mathbf{g}^{\mathbf{C}}$ této algebry má Maninův triplet ($\mathbf{g}^{\mathbf{C}}$, $\mathbf{g}_+$, $\mathbf{g}_-$). Exponenciováním těchto algeber získáváme trojici

($\mathbf{G^C}$, $\mathbf{G_+}$, $\mathbf{G_-}$). Původní grupu $\mathbf{G}$ vydělíme z $\mathbf{G^C}$ pomocí hermitovské konjugace.

$$G = \{g \in \mathbf{G}^C | \tau(g) = g^{-1}\} \tag{97}$$

Každý prvek z okolí jednotkového prvku $\mathbf{G_1} \subset \mathbf{G}^C$ můžeme rozložit dvěma způsoby:

$$g = g_+ g_-^{-1} = \tilde{g}_- \tilde{g}_+^{-1} \tag{98}$$

Tento vztah určuje dobře definované zobrazení $g_\pm \to \tilde{g}_\pm$ (viz. [9]) Ze vztahů (97) a (98) vidíme, že prvek $g \in \mathbf{G_1}$ náleží reálné grupě $\mathbf{G}$ právěkdyž pro něj platí $\tau(g_\pm) = \tilde{g}_{mp}^{-1}$. Pole G v našem modelu můžeme tedy rozložit na

$$G(z,\bar{z}) = G_+(z,\bar{z}) G_-^{-1}(z,\bar{z}) = \tilde{G}_-(z,\bar{z}) \tilde{G}_+^{-1}(z,\bar{z}) \tag{99}$$

S použitím Super-Polyakovovy-Wiegmannovy identity

$$S_{WZW}[GH] = S_{WZW}[G] + S_{WZW}[H] + \int d^2z\, d^2\theta < G^{-1} DG, \overline{D}H\, H^{-1} > \tag{100}$$

a definice Maninova tripletu můžeme přepsat akci (67) v jednodušším a viditelně reálném tvaru.

$$S_{WZW} = -\frac{1}{2} \int d^2z\, d^2\theta (<\rho_+, \rho_->+<\tilde{\rho}_+, \tilde{\rho}_->) \tag{101}$$

kde $\rho_\pm, \tilde{\rho}_\pm$ jsou superpole

$$\begin{aligned} \rho_+ &= G_+^{-1} DG_+ \ , \ \rho_- = \overline{D} G_-^{-1}\, G_- \\ \tilde{\rho}_+ &= \tilde{G}_+^{-1} D\tilde{G}_+ \ , \ \tilde{\rho}_- = \overline{D} \tilde{G}_-^{-1}\, \tilde{G}_- \end{aligned} \tag{102}$$

korespondující 1-formám na $\mathbf{G}_\pm$ s hodnotami v $\mathbf{g}$

$$r^\pm = g_\pm^{-1} dg_\pm \ , \ \tilde{r}^\pm = \tilde{g}_\pm^{-1} d\tilde{g}_\pm \tag{103}$$

3.7 Superpole typu N = (2,2)

Podobně jako u N=(1,1) supersymetrie zde formulujeme σ-model takovým způsobem, že i jeho druhá supersymetrie bude explicitní, tedy daná konstrukcí. Využijeme opět konstrukce pomocí superprostoru, tentokrát však $\mathbf{R^{2,4}}$. Nechť je $\mathbf{R^{2,4}}$ parametrizováno pomocí $(z, \bar{z}, \theta^\pm, \bar{\theta}^\pm)$. Kovariantní derivace jsou

$$D_\pm \equiv \frac{\partial}{\partial\theta^\pm} + \theta^\mp \partial, \qquad \bar{D}_\pm \equiv \frac{\partial}{\partial\bar{\theta}^\pm} + \bar{\theta}^\mp \bar{\partial}. \tag{104}$$

a generátory symetrií

$$Q_\pm = \frac{\partial}{\partial \theta^\pm} - \theta^\mp \partial; \qquad \bar{Q}_\pm = \frac{\partial}{\partial \bar{\theta}^\pm} - \bar{\theta}^\mp\ \theta \tag{105}$$

Obecná transformace na superpoli Y působí takto:

$$\delta Y = \epsilon^+ Q_+ Y + \epsilon^- Q_- Y + \bar{\epsilon}^+ \bar{Q}_+ Y + \bar{\epsilon}^- \bar{Q}_- Y \tag{106}$$

Aby byl názorný přechod k modelu z předchozí kapitoly, musíme zavést otočené souřadnice. Korespondovat s N=(1,1) souřadnicemi budou

$$\theta = \frac{1}{\sqrt{2}}(\theta^+ + \theta^-), \qquad \bar{\theta} = \frac{1}{\sqrt{2}}(\bar{\theta}^+ + \bar{\theta}^-), \tag{107}$$

a navíc jsou přidány

$$\widehat{\theta} = \frac{1}{\sqrt{2}}(\theta^+ - \theta^-), \qquad \widehat{\bar{\theta}} = \frac{1}{\sqrt{2}}(\bar{\theta}^+ - \bar{\theta}^-). \tag{108}$$

Nový tvar derivací je

$$D = \frac{1}{\sqrt{2}}(D_+ + D_-) = \frac{\partial}{\partial \theta} + \theta \partial, \qquad \widehat{D} = \frac{1}{\sqrt{2}}(D_+ - D_-) = \frac{\partial}{\partial \widehat{\theta}} - \widehat{\theta}\partial, \tag{109}$$

a podobně pro $\bar{D}$ a $\widehat{\bar{D}}$. Nové generátory budou

$$Q \equiv \frac{1}{\sqrt{2}}(Q_+ + Q_-) = \frac{\partial}{\partial \theta} - \theta \partial \qquad \widehat{Q} = \frac{1}{\sqrt{2}}(Q_+ - Q_-) = \frac{\partial}{\partial \widehat{\theta}} + \widehat{\theta}\partial, \tag{110}$$

a podobné výrazy pro $\bar{Q}$ a $\widehat{\bar{Q}}$.

Na superpole Y^α teď naložíme nějaké vazby, čímž omezíme počet stupňů volnosti. Použijeme vazbu v následujícím tvaru (Z Lorentzovské invariance plyne, že je to nejobecnější vazba jakou můžeme pro danou levou stranu použít, ale pro nás to není důležité, bereme to jako ansatz).

$$\widehat{D} Y^\alpha = i J^\alpha_\beta D Y^\beta \tag{111}$$

Nicméně tato vazba nesmí narušit základní algebraickou strukturu supersymetrie - tedy $\{\widehat{D}, \widehat{D}\} = -2\partial$, ekvivalentně zapsáno $\widehat{D}^2 = -\partial$. Dosadíme li do této podmínky získáme následuící rovnici.

$$\widehat{D} Y^\alpha = (J^2)^\alpha_\beta \partial Y^\beta + \frac{1}{2} N^\alpha_{\beta\lambda}[J]\, DY^\beta DY^\lambda = -\partial Y^\alpha \tag{112}$$

Z toho získáváme známé podmínky pro komplexní strukturu. $J^2 = -1$ a $N^{\alpha}_{\beta\lambda}[J] = 0$. Další vazbou kterou můžeme na naše superpole naložit je analogicky

$$\hat{\bar{D}}Y^{\alpha} = i\bar{J}^{\alpha}_{\beta}\bar{D}Y^{\beta} \tag{113}$$

Konzistence s $\hat{D}^2 = -\partial$ opět vyžaduje aby $\bar{J}$ byla komplexní struktura. Navíc tu ještě máme relaci $\{\hat{D}, \hat{\bar{D}}\} = 0$. Její zachování vyžaduje podmínku:

$$0 = [\bar{J}, J]^{\alpha}_{\beta}\bar{D}DY^{\beta} + M^{\alpha}_{\beta\lambda}[J, \bar{J}]\bar{D}Y^{\beta}DY^{\lambda} \tag{114}$$

kde tenzor $M^{\alpha}_{\beta\lambda}[J, \bar{J}]$ je definován

$$M[J, \bar{J}](u, v) = [Ju, \bar{J}v] - J[u, \bar{J}v] - \bar{J}[Ju, v] + J\bar{J}[u, v] \tag{115}$$

Platí (Důkaz v [3]), že pokud $[J, \bar{J}] = 0$ a $N[J] = N[\bar{J}] = 0$, pak $M[J, \bar{J}] = 0$. Naložení výše uvedených vazeb tedy vyžaduje aby komplexní struktury komutovaly. V minulé kapitole jsme k této podmínce nedospěli.

Nyní tedy máme dvě komutující komplexní struktury J a $\bar{J}$. Existuje souřadnicový systém takový, že obě komplexní struktury jsou v něm diagonální. Nicméně, toto je možné udělat celkem čtyřmi způsoby (podle toho jak se kombinují vlastní čísla $\pm i$)

1. chirální superpole:

$$\hat{D}Y = -DY, \qquad \hat{\bar{D}}Y = -\bar{D}Y \tag{116}$$

2. anti-chirální superpole:

$$\hat{D}Y = +DY, \qquad \hat{\bar{D}}Y = +\bar{D}Y \tag{117}$$

3. twistované chirální superpole:

$$\hat{D}Y = -DY, \qquad \hat{\bar{D}}Y = +\bar{D}Y \tag{118}$$

4. twistované anti-chirální superpole:

$$\hat{D}Y = +DY, \qquad \hat{\bar{D}}Y = -\bar{D}Y \tag{119}$$

Naložením vazeb na obecné (2,2) superpole se nám podařilo zredukovat počet stupňů volnosti na stejný jako u (1,1) modelu a navíc je pak toto pole (po souřadnicové transformaci) jednoho ze čtyř výše jmenovaných typů.

4 Dodatek - Maninův triplet

V tomto dodatku uvedeme definci Maninova tripletu, na kterou se v textu odvoláváme.

Definice 8 *Nechť* $\mathcal{G}$ *je Lieova algebra s nedegenerovanou bi-lineární formou* $<,>$. *Nechť* $\mathcal{G}_+$, $\mathcal{G}_-$ *jsou podalgebry* $\mathcal{G}$ *a platí* $\mathcal{G} = \mathcal{G}_+ \oplus \mathcal{G}_-$. *Nechť ještě platí* $0 =< \mathcal{G}_+, \mathcal{G}_+ >=< \mathcal{G}_-, \mathcal{G}_- >$. *Potom trojici* $(\mathcal{G}, \mathcal{G}_+, \mathcal{G}_-)$ *nazýváme Maninův triplet.*

Jako příklad Maninova tripletu nám poslouží triplet $(sl(n, \mathbf{C})$, $su(n)$, $b(n))$, kde $b(n)$ je Lieova algebra odvozená od grupy B_n (podgrupy horních trojúhelníkových matic s reálnou diagonálou v $SL(n, \mathbf{C})$). Prvky algebry $b(n)$ jsou tedy horní trojúhelníkoné matice s reálnou digonálou a nulovou stopou. Ona nedegenerovaná bilineární forma má tvar $< x, y >= \mathrm{Im}(\mathrm{Tr}(xy))$.

References

[1] Klouda L., Souček J., *Sigma modely a D-brány*, rešeršní práce - FJFI, 1998

[2] West P. C., *Supergravity, Brane Dynamics and String Duality*, **hep-th/9811101**, 1998

[3] Sevrin A., Troost J., *Off-Shell Formulation of N=2 Non-linear σ-models*, **hep-th/9610102**, 1996

[4] Green M. B., Schwarz J. H., Witten E., *Superstring theory Vol. I, II*, Cambridge University Press, 1987

[5] Manin Y. I., *Gauge Field Theory and Complex Geometry*, Springer Verlag, 1988

[6] Buchbinder I. L., Kuzenko S. M., *Ideas and methods of supersymetry and supergravity*, Institute of Physics Publishing - Bristol and Philadelphia

[7] Hull C. M., Witten E., *Supersymetric sigma models and the heterotic string*, Physics Letters, Vol. 160B, Number 6, p. 393 - 407, 1985

[8] Alvarez-Gaume L., Freedman D. Z., *Geometrical Structure and UV Finitness in the Supersymetric sigma-model*, Commun. Math. Phys., Vol. 80, 443-451, 1981

[9] Parkhomenko S. E., *On the Quantum Poisson-Lie T-Duality and Mirror Symmetry*, **hep-th/9812048**, 1998

[10] Choquet-Bruhat Y. et al, *Analysis, Manifolds and Physics, Part 1*, Elsevier Science B. V., 1996

[11] Deligne P., Freed D. S., *Supersolutions*, **hep-th/9901094**, 1999