Výzkumný úkol: Kalibrace WZWN modelu

Luboš Klouda

11. listopadu 1999

Obsah

1 Úvod

Předkládaná práce se zabývá principy kalibrace sigma a WZWN-modelů a zkoumá podmínky její existence .

Tato teorie se začala bouřlivě rozvíjet od roku 1994 v souvislosti s tzv. druhou strunovou revolucí. Kalibrovaný WZWN model může sloužit ke konstrukci duálního modelu k původnímu. Jeden z prvních příkladů je model na toru o poloměru R, který je duální k modelu na toru o poloměru 1/R. Tento příklad také dal název T-dualitě. Pro zajímavost připomínám, že S-dualita je dualitou mezi silnou a slabou vazbou (např. známý příklad magnetických monopólů) a U-dualita je tzv. dualita dualit.

V úvodu této práce jsou stručně shrnuty definice základních pojmů zmíněné teorie. V dalších částech se podrobně zkoumá tvar a podmínky existence kalibrované akce pro sigma model. Za částí, kde je podána obecná definice WZWN modelu je provedena podrobná diskuse otázky, kdy lze provést kalibraci WZWN modelu a je k tomuto účelu rozvinut i potřebný matematický aparát. Tyto, tzv. Hull- Spenceovy podmínky jsou zde aplikovány na dvoudimezionální chirální WZWN model. Podrobně jsou rozebrány vlastnosti vektorové kalibrace, která má nejelegantnější vlastnosti. Zařadil jsem sem i konstrukci kalibrovaného modelu pomocí involuce na grupě.

Rád bych poděkoval svému školiteli doc. Ing. Václavu Jásenskému za kvalitní vedení , konstruktivní kritiku a pomoc, bez které by některé pasáže tohoto výzkumného úkolu vůbec nemohly vzniknout. V neposlední řadě můj dík patří též mému kolegovi Janu Součkovi za cenné připomínky a spolupráci, prof. Ing. RNDr. Jiřímu Tolarovi, DrSc., doc. Ladislavu Hlavatému, DrSc. za mnoho cenných připomínek, spolupráci a podporu, rady a nápady, jak ještě více zkvalitnit odborný obsah této práce.

Luboš Klouda

2 Sigma-modely

2.1 Základní definice sigma modelu

Mějme dvě hladké Riemannovy variety (M, g)- definiční obor a (N, G)- cílový prostor. Sigma modelem - v matematice harmonické zobrazení- nazveme hladké zobrazení $\phi : M \to N$ mezi těmito varietami stacionarizující následující akci- výraz pod integrálem je vlastně zobecnění výrazu pro kinetickou energii a fyzikálně to vše znamená přímé zobecnění vázaného pohybu hmotného bodu na pohyb vícerozměrného objektu (automaticky uvažujeme jen ty zobrazení, pro která následující integrál je konečný- užíváme definici integrálu přes varietu jak je definováno v [5, 9, 8]):

$$S(\phi) = \int_M \frac{1}{2} |d\phi|^2 v_M = \int_M \frac{1}{2} Tr(\phi^* G) v_M = \tag{1}$$
$$= \int_M \frac{1}{2} g^{ij} \langle \frac{\partial \phi}{\partial x^i}, \frac{\partial \phi}{\partial x^j} \rangle_{\phi^{-1}(TN)} v_M = \int_M \frac{1}{2} \langle d\phi, d\phi \rangle_{TM^* \otimes \phi^{-1}(TN)} v_M \ ,$$

kde $|d\phi|$ je Hilbert-Schmidtova norma [1] diferenciálu[2] ϕ a v_M je element objemu na M a $\langle\rangle$ je norma na příslušném bundlu .

V lokálních souřadnicích vypadá akce:

$$S = \frac{1}{2} \int_M \partial_a \phi^\mu \partial_b \phi^\nu \sqrt{|g|} g^{ab} G_{\mu\nu} d^{dimM} x \ , \tag{2}$$
$$a, b = 1, \ldots, dimM \quad \mu, \nu = 1, \ldots, dimN \ .$$

Klasický konfigurační prostor sigma modelu je:

$$Q_{SM}(M, N) = \{\phi : M \to N, \phi \in C^\infty(M, N)\}$$

Z akčního principu plynou varirováním [3] následující pohybové rce, které jsou zobecněním rovnic pro geodetiky:

$$\delta S = 0 \qquad \Rightarrow$$

[1] $|A|^2 = \sum_{i \in \hat{n}} \|Ae_i\|^2$ a e_i ,kde $i \in \hat{n}$, je ONB

[2] Tento diferenciál lze chápat jako řez v bundlu $TM^* \otimes \phi^{-1}(TN)$ a tedy $d\phi = \frac{\partial \phi^\mu}{\partial x^i} dx^i \otimes \frac{\partial}{\partial \phi^\mu}$; $\phi^{-1}(TN)$ je podmnožina v M určující variace zkoumaného zobrazení s metrikou v bodě x ve složkách $G_{ij}(\phi(x))$ a s konexí definovanou $\nabla_X^{\phi^{-1}(TN)} := \nabla^N_{\phi^* X}$, takto definovaná konexe je metrická a má nulovou torzi

[3] Varirováním akce dostáváme: $\partial_a \phi^\mu \partial_b \phi^\nu \sqrt{|g|} g^{ab} \frac{\partial G_{\mu\nu}}{\partial y^i} = \partial_i (2 \partial_b \phi^\nu \sqrt{|g|} g^{kb} G_{i\nu})$; dalšími úpravami Euler-Lagrangeových rovnic: $G_{i\nu} g^{kb} \left[\frac{\partial^2 \phi^\nu}{\partial x^k \partial x^b} - \frac{\partial \phi^\nu}{\partial x^b} g^{jl} (\partial_j g_{lk} - \frac{1}{2} \partial_k g_{lj}) \right] + G_{i\nu} g^{kb} \left[\frac{\partial \phi^\alpha}{\partial x^b} \frac{\partial \phi^\beta}{\partial x^k} G^{l\nu} (\frac{\partial G_{l\alpha}}{\partial y^\beta} - \frac{1}{2} \frac{\partial G_{\beta\alpha}}{\partial y^l}) \right] = 0$ a s uvážením vztahů platných v diferenciální geometrii dostáváme (3)

$$g^{ij}\left[\frac{\partial^2\phi^\gamma}{\partial x^i\partial x^j}-\left\{\begin{matrix}k\\ ij\end{matrix}\right\}_M\frac{\partial\phi^\gamma}{\partial x^k}\right]+g^{ij}\left[\left\{\begin{matrix}\gamma\\ \alpha\beta\end{matrix}\right\}_N\circ\phi\;\frac{\partial\phi^\alpha}{\partial x^i}\frac{\partial\phi^\beta}{\partial x^j}\right]=0\ ,\qquad(3)$$

$$\forall\gamma\in\{1,\ldots,dimN\}\ .$$

Což jest při použití Laplace Beltramiho operátoru $\triangle_M=-\frac{1}{\sqrt{|g|}}\frac{\partial}{\partial x^i}\left(\sqrt{|g|}g^{ij}\frac{\partial}{\partial x^j}\right)$ a kovariantního diferenciálu ∇ (zde je nutno si uvědomit, že se jedná o kovariantní derivaci formy, jejíž hodnoty leží ve vektorovém bundlu- není to tedy přímo afinní konexe známá z Riemanovy geometrie- je to její přirozené zobecnění) přepsatelné ve tvaru:

$$g^{ij}(\nabla(d\phi))^\gamma_{ij}=\triangle\phi+g^{ij}\left[\left\{\begin{matrix}\gamma\\ \alpha\beta\end{matrix}\right\}_N\circ\phi\;\frac{\partial\phi^\alpha}{\partial x^i}\frac{\partial\phi^\beta}{\partial x^j}\right]=0\ ,\qquad(4)$$

$$\forall\gamma\in\{1,\ldots,dimN\}\ .$$

V normálních souřadnicích v bodě a ,t.j. $g^{ij}(a)=\delta^{ij},\{\}_M(a)=\{\}_N(\phi(a))=0$, dostanou rce tvar $\partial_l\partial_l\phi^\gamma(a)=0$ pro $1\leq\gamma\leq n$.

Kde $\{\}_M$ resp. $\{\}_N$ jsou Christofellovy koeficienty na M resp. na N a $g=det(g_{ab})$ a $g^{ab}g_{bc}=\delta^a_c$; přes opakující se indexy se sčítá až do dimenze variety.

Varirování je možno provést také v bezsložkovém zápise s uvážením vztahů: $\psi=\psi^i\frac{\partial}{\partial\phi^i},\psi\in\Gamma(\phi^{-1}TN)$[4] indukuje variaci $\phi_t(x):=exp_{f(x)}(t\psi(x))$, dále platí pro $t=0$ vztah[5]mezi variací a kov. derivací $\nabla_{\frac{\partial}{\partial t}}d\phi_t=d\psi$ a tedy můžeme

$$\begin{aligned}\frac{d}{dt}S(\phi_t)_{|t=0}&=\int_M\frac{1}{2}\frac{d}{dt}\langle d\phi_t,d\phi_t\rangle_{|t=0}v_M\\&=\int_M\langle d\phi,\nabla_{\frac{\partial}{\partial t}}d\phi_t\rangle_{t=|0}v_M\ \text{(konexe je metrická)}\\&=\int_M\langle d\phi,d\psi\rangle v_M\\&=\int_M\langle d\phi,\nabla_{\frac{\partial}{\partial x^i}}(\psi)\otimes dx^i\rangle v_M\\&=-\int_M\langle\nabla_{\frac{\partial}{\partial x^i}}d\phi,\psi\otimes dx^i\rangle v_M\ \text{(metr. kon. a pevné konce)}\end{aligned}$$

[4]Γ jsou hladké řezy v příslušném bundlu

[5]pro $t=0$ dostáváme $\nabla_{\frac{\partial}{\partial t}}d\phi_t=\nabla_{\frac{\partial}{\partial t}}\frac{\partial\phi^i_t}{\partial x^\alpha}\frac{\partial}{\partial\phi^i}\otimes dx^\alpha=$ díky nulovosti torze konexe a komutativnosti obou vektorových polí $=\nabla_{\frac{\partial}{\partial x^\alpha}}\frac{\partial\phi^i_t}{\partial t}\frac{\partial}{\partial\phi^i}\otimes dx^\alpha=$díky tomu, že v 0 je exp identické zobrazení$=d\psi$

$$= \quad -\int_M \langle \mathrm{trace} \nabla d\phi, \psi \rangle v_M \tag{5}$$

a tedy poh. rce jsou opět [6]

$$\mathrm{trace} \nabla d\phi = 0 \ . \tag{6}$$

Jak je patrno už z tvaru akce, jedná se o zobecnění 1-rozměrného pohybu 0 rozměrného volného (zde je nutno upozornit, že např. v OTR je gravitační působení obsaženo již v metrickém tenzoru cílové variety- tedy hmotný bod tak „úplně volný“ být nemusí) hmotného bodu na varietě na $dimM$ -rozměrný- přitom souvislost integrandu a kinetické energie volné částice je zřejmá. Speciálně když $g = diag(+1, \dots, +1)$ dostáváme jednodušší tvar a souvislost s diferenciálními rovnicemi pro geodetiky je teď evidentní:

$$\frac{\partial^2 \phi^\gamma}{\partial x^i \partial x^j} + \left\{ \begin{matrix} \gamma \\ \alpha\beta \end{matrix} \right\}_N \circ \phi \ \frac{\partial \phi^\alpha}{\partial x^i} \frac{\partial \phi^\beta}{\partial x^j} = 0 \ , \tag{7}$$
$$\forall \gamma \in \{1, \dots, dimN\} \quad \mathrm{a} \quad \forall i, j \in \{1, \dots, dimM\} \ .$$

2.1.1 Skládání harmonických zobrazení

Zkoumejme jak vypadají pohybové rce (6) pro složené zobrazení. Nechť $f : M \to N$ a $g : N \to Q$, kde M, N, Q jsou Riemannovy variety, spočítejme

$$\begin{aligned} \mathrm{trace} \nabla d(g \circ f) &= g^{ij} \nabla_{\frac{\partial}{\partial x^i}} \frac{\partial}{\partial x^j} (g \circ f) \\ &= g^{ij} \nabla_{\frac{\partial}{\partial x^i}} \left(\frac{\partial g}{\partial f^\alpha} \frac{\partial f^\alpha}{\partial x^j} \right) \\ &= g^{ij} \left(\nabla_{\frac{\partial}{\partial f^\alpha}} \frac{\partial g}{\partial f^\beta} \right) \frac{\partial f^\alpha}{\partial x^j} \frac{\partial f^\beta}{\partial x^i} + g^{ij} \frac{\partial g}{\partial f^\alpha} \nabla_{\frac{\partial}{\partial x^i}} \frac{\partial f^\alpha}{\partial x^j} \\ \mathrm{trace} \nabla d(g \circ f) &= g^{ij} \nabla dg \left(\frac{\partial f}{\partial x^i}, \frac{\partial f}{\partial x^j} \right) + \mathrm{trace}(dg)(\nabla df) \ . \end{aligned} \tag{8}$$

Z námi odvozeného řetězového pravidla pro harmonická zobrazení plyne, že když f, g jsou harmonická zobrazení, jejich složení jím ještě být nemusí, např. stačí, že f je harmonické a pro g platí: $\nabla dg = 0$, taková zobrazení se nazývají totálně geodetická a jsou to právě ty, které zobrazují geodetiky na geodetiky (viz [8]).

Příklady harmonických zobrazení je možno nalézt v [10], jedním takovým triviálním jsou např. harmonická zobrazení známá z klasické analýzy, dále již zmiňovaná totálně geodetická zobrazení či holomorfní zobrazení.

[6] s využitím konexe ∇ , která působí na bundlu $TM^* \otimes \phi^{-1}(TN)$ tak jako derivace- symbolicky: $\nabla(\phi \otimes \zeta) = (\nabla \phi) \otimes \zeta + \phi \otimes (\nabla \zeta)$

2.1.2 Symetrie sigma-modelu

Sigma model definovaný v (1) má jednu triviální *symetrii*. Napíšeme-li integrand ve tvaru: $\mathcal{L} = g^{ij}\langle\frac{\partial\phi}{\partial x^i},\frac{\partial\phi}{\partial x^j}\rangle_{\phi^{-1}(TN)}$, vidíme, že při působení izometrického zobrazení $\psi : N \rightarrow N$ na zobrazení ϕ se integrand nezmění: $g^{ij}\langle\frac{\partial\psi\circ\phi}{\partial x^i},\frac{\partial\psi\circ\phi}{\partial x^j}\rangle_{(\psi\circ\phi)^{-1}(TN)} = g^{ij}\langle\frac{\partial\phi}{\partial x^i},\frac{\partial\phi}{\partial x^j}\rangle_{\phi^{-1}(TN)}$ .Platí tedy: sigma-model má jednoparametrickou grupu symetrií tvořenou izometriemi, jinak: $L_X\mathcal{L} = 0$, kde L je Lieova derivace a X je Killingovo vektorové pole na N .

3 Chirální modely

3.1 Principální chirální modely

Principální chirální modely jsou sigma modely jejichž cílovou varietou je poloprostá Lieova grupa s metrikou určenou Killingovou formou ($K(X,Y) = Tr(AdX, AdY)$, t.j. je to symetrická bilineární forma definovaná působící na Lieově algebře, která je Ad- invariantní, tj. $K(Ad(X)Y, Z) + K(Y, Ad(X)Z) = 0$), která je pro poloprosté Lieovy grupy nedegenerovaná.

Akce (2) pro tento speciální sigma model[7] má tvar:

$$S = \int_M K(g^{-1}\partial_\mu g, g^{-1}\partial_\mu g) d^d x \ , \tag{9}$$

kde $K(\ , \ )$ je Killingova forma a sčítání probíhá přes dimenzi variety, jež je definičním oborem sigma modelu. Dále připomeňme, že prvek $g^{-1}\partial_\mu g$ leží v Lieově algebře naší Lieovy grupy a tedy výraz pod integrálem má smysl.

V maticové representaci má akce tvar , kde $Tr(g^{-1}\partial g)$ (ztotožnili jsme zobrazení do Lieovy grupy a jeho maticovou representaci) [8] :

$$S = \int_M Tr(g^{-1}\partial_\mu g g^{-1}\partial_\mu g) d^d x \ . \tag{10}$$

Zároveň je vidět symetrie tohoto sigma-modelu daná $g \to agb$, pro tuto vlastnost je důležitá cykličnost stopy. V obecném případě je jasné, že požadavek invariance vůči této transformaci dává na formu další podmínku a to podmínku Ad- invariance, což ovšem Killingova forma splňuje.

Z akce (10) plynoucí pohybové rovnice jsou:

$$\partial^\mu (g^{-1}\partial_\mu g) = 0 \ . \tag{11}$$

Stručně naznačíme jejich odvození, přičemž využíváme cykličnosti stopy a platnosti vztahu (zderivováním def. vztahu inv. matice) $\delta g^{-1} = -g^{-1}\delta g g^{-1}$: $\delta Tr(\cdots) = Tr(-g^{-1}\partial_\mu g \partial^\mu g^{-1}\delta g + \partial_\mu (g^{-1}\partial^\mu g g^{-1})\delta g - \partial_\mu g^{-1}\partial^\mu g g^{-1}\delta g - \partial_\mu \partial^\mu g^{-1}\delta g) = Tr(g^{-1}\partial_\mu(\partial^\mu g) g^{-1}\delta g - \partial_\mu\partial^\mu g^{-1}\delta g) = Tr((\partial_\mu(g^{-1}\partial^\mu g)g^{-1} - \partial_\mu g^{-1}\partial^\mu g g^{-1} + \partial_\mu(g^{-1}\partial^\mu g g^{-1}))\delta g) = Tr((\partial_\mu(g^{-1}\partial^\mu g)g^{-1} - \partial_\mu g^{-1}\partial^\mu g g^{-1} + \partial_\mu g^{-1}\partial^\mu g g^{-1} + g^{-1}\partial_\mu g \partial^\mu g^{-1} + \partial_\mu(g^{-1}\partial^\mu g)g^{-1} - g^{-1}\partial_\mu g\partial^\mu g^{-1})\delta g) = Tr(2\partial^\mu(g^{-1}\partial_\mu g)g^{-1}\delta g) = 0$ s vynecháním totálních derivací, jejichž variace

[7] pro jednoduchost pracujeme v maticové reprezentaci

[8] platí Tr(AdXAdY)=2nTr(XY)-2Tr(X)Tr(Y), kde X,Y jsou čtvercové matice dané representace v čtvercových maticích $n \times n$

na hranici integrační oblasti vymizí. Zároveň je vidět nutnost požadavku nedegenerovanosti Killingovy formy.

Přepišme tvar pohybových rovnic v proměnných světelného kužele pro 2-dimensionální PCM:

$$\partial_\eta(g^{-1}\partial_\xi g) + \partial_\xi(g^{-1}\partial_\eta g) = 0 \text{ , kde } \xi := t + x \quad \eta := t - x \text{ .}$$

Poznamenejme ještě , jak souvisí $S(2)$ model ([16]) s chirálním: $S(2)$ model představuje vlastně chirální model s cílovým homogenním prostorem $SO(3)/SO(2)$. Konstrukce modelů na homogenních prostorech je možná např. pomocí kalibrace.

3.2 Principální chirální model s WZW členem

Vraťme se ještě jednou k předcházející akci a přidejme do ní nový člennazývaný WZWN (Wess-Zumino-Witten-Novikov) člen, přičemž definičním oborem sigma modelu bude 2-dimensionální kompaktní uzavřená plocha v R^3 obklopující oblast B v R^3 .

$$S = \zeta \int_{\partial B} d^2x Tr(g^{-1}\partial_\mu g g^{-1}\partial_\mu g) + \xi \int_B d^3y \epsilon_{\alpha\beta\gamma} Tr(\tilde{g}^{-1}\partial^\alpha \tilde{g}\tilde{g}^{-1}\partial^\beta \tilde{g}\tilde{g}^{-1}\partial^\gamma \tilde{g}) \tag{12}$$

$$\xi, \zeta \in R$$

Zde je ovšem na místě poznamenat, že $\tilde{g}$ značí rozšíření pole g definovaného na ∂B na B , které existuje pravě díky poloprostotě naší Lieovy grupy; ukážeme však, že pohybové rce nejsou závislé na volbě tohoto rozšírení, protože se nám podaří převést variaci tohoto integrálu na integrál přes hranici B označenou ∂B , protože ta může být psána jako totální derivace. $\epsilon_{\alpha\beta\gamma}$ značí 3-rozměrný Levi-Civitův tenzor a $\epsilon_{\alpha\beta}$ je 2-rozměrný Levi-Civitův tenzor. Pohybové rce vypadají:

$$2\zeta\partial^\mu(g^{-1}\partial_\mu g) + 3\xi\epsilon_{\mu\nu}\partial^\mu(g^{-1}\partial^\nu g) = 0 \text{ .} \tag{13}$$

Opět naznačíme jejich odvození; první člen je stejný jako v případě (10), zaměříme se tudíž na WZW člen- jeho varirováním s využitím cykličnosti stopy dostaneme: nejdříve $Tr(\delta(\tilde{g}^{-1}\partial^\alpha\tilde{g})\tilde{g}^{-1}\partial^\beta\tilde{g}\tilde{g}^{-1}\partial^\gamma\tilde{g}) = Tr(\partial^\alpha(\tilde{g}^{-1}\partial^\beta\tilde{g}\tilde{g}^{-1}\partial^\gamma\tilde{g}\tilde{g}^{-1}\delta g) \quad - \quad \tilde{g}^{-1}\partial^\alpha\tilde{g}\tilde{g}^{-1}\partial^\beta\tilde{g}\tilde{g}^{-1}\partial^\gamma\tilde{g}g^{-1}\delta g \quad - \partial^\alpha(\tilde{g}^{-1}\partial^\beta\tilde{g}\tilde{g}^{-1}\partial^\gamma\tilde{g}\tilde{g}^{-1})\delta g)$, výraz pod integrálem ve WZW členu je totiž symetrický vůči cyklické záměně indexů α, β, γ dále máme tedy s využitím tohoto faktu: $\delta\epsilon_{\alpha\beta\gamma}Tr(\ldots) = Tr(\epsilon_{\alpha\beta\gamma}(\partial^\alpha(\tilde{g}^{-1}\partial^\beta\tilde{g}\tilde{g}^{-1}\partial^\gamma\tilde{g}\tilde{g}^{-1}\delta g) +$

$\partial^\beta(\tilde{g}^{-1}\partial^\gamma\tilde{g}\tilde{g}^{-1}\partial^\alpha\tilde{g}\tilde{g}^{-1}\delta g) + \partial^\gamma(\tilde{g}^{-1}\partial^\alpha\tilde{g}\tilde{g}^{-1}\partial^\beta\tilde{g}\tilde{g}^{-1}\delta g)) - (\epsilon_{\alpha\beta\gamma} + \epsilon_{\gamma\alpha\beta} + \epsilon_{\beta\gamma\alpha})\tilde{g}^{-1}\partial^\alpha(\partial^\beta\tilde{g}\tilde{g}^{-1}\partial^\gamma\tilde{g}\tilde{g}^{-1})\delta g) = \epsilon_{\alpha\beta\gamma}Tr(3\partial^\alpha(\tilde{g}^{-1}\partial^\beta\tilde{g}\tilde{g}^{-1}\partial^\gamma\tilde{g}\tilde{g}^{-1}\delta g) - 3\tilde{g}^{-1}\partial^\alpha(\partial^\beta\tilde{g}\tilde{g}^{-1}\partial^\gamma\tilde{g}\tilde{g}^{-1})\delta g)$ = (vynecháním symetrických členů v $\alpha\beta\gamma$ v druhém členu dostaneme) = $\epsilon_{\alpha\beta\gamma}Tr(3\partial^\alpha(\tilde{g}^{-1}\partial^\beta\tilde{g}\tilde{g}^{-1}\partial^\gamma\tilde{g}\tilde{g}^{-1}\delta g) - 3\tilde{g}^{-1}\partial^\beta\tilde{g}\partial^\alpha\tilde{g}^{-1}\partial^\gamma\tilde{g}\tilde{g}^{-1}\delta g - 3\tilde{g}^{-1}\partial^\beta\tilde{g}\tilde{g}^{-1}\partial^\gamma\tilde{g}\partial^\alpha\tilde{g}^{-1}\delta g)$ =(ale poslední dva členy jsou svázány záměnou $\alpha \leftrightarrow \beta$ a tedy vypadnou díky Levi-Civitovu tenzoru) = $\epsilon_{\alpha\beta\gamma}Tr(3\partial^\alpha(\tilde{g}^{-1}\partial^\beta\tilde{g}\tilde{g}^{-1}\partial^\gamma\tilde{g}\tilde{g}^{-1}\delta g)$. Vyjádřili jsme variaci integrandu WZW členu jako totální derivaci použitím Stokesovy věty dostáváme:$\delta S_{WZW} = \int_B d^3y\epsilon_{\alpha\beta\gamma}\partial^\alpha Tr(3\tilde{g}^{-1}\partial^\beta\tilde{g}\tilde{g}^{-1}\partial^\gamma\tilde{g}\tilde{g}^{-1}\delta g) = \int_{\partial B} d^2x\epsilon_{ab}Tr(3g^{-1}\partial^a gg^{-1}\partial^b gg^{-1}\delta g)$. Zároveň jsme přešli od rozšíření pole $\tilde{g}$ k g , protože přes hranici se integruje zúžení formy na hranici.

Pokud pracujeme na prostoru s Minkowského metrikou, pak můžeme definovat souřadnice světelného kužele $x_\pm = x_0 \pm x_1$, v kterých má pohybová rovnice tvar:

$$(\zeta + \frac{3}{2}\xi)\partial_-(g^{-1}\partial_+ g) + (\zeta - \frac{3}{2}\xi)\partial_+(g^{-1}\partial_- g) = 0. \qquad (14)$$

Pokud $\zeta = \pm\frac{3}{2}\xi$ jsou pohybové rovnice snadno řešitelné, když předpokládáme řešení ve tvaru $g(x_+, x_-) = A(x_+)B(x_-)$, kde A, B jsou libovolné hladké funkce s hodnotami v G .

3.3 Zobecnění chirálních modelů

Můžeme uvažovat zobecnění principálního chirálního modelu, kde nahradíme Killingovu formu, tak jak byla definovaná v úvodu této kapitoly, obecnou symetrickou bilineární, Ad- invariantní, t.j. $L(Ad(X)Y, Z) + L(Y, Ad(X)Z) = 0$, formou L o složkách v bázi e_i algebry L_{ij} . Uvedené podmínky lze přepsat ve složkách (f_{ij}^k jsou strukturní koeficienty):

$$[e_i, e_j] = f_{ij}^k e_k, \quad L_{i(j}f_{k)l}^i = 0 \quad det(L_{ab}) \neq 0 \; . \qquad (15)$$

Toto zobecnění má význam v tom, že můžeme zkoumat chirální modely i na algebrách, jejichž Killingova forma je degenerovaná, avšak existuje tam jiná nedegenerovaná forma splňující uvedené relace, tedy nemusí být poloprosté.

Zobecněná akce vypadá potom ve složkovém zápise- můžeme upustit i od požadavku Ad-invariantnosti, požadujeme tedy-*symetričnost, bilinearitu, regularitu*:

$$S = \zeta \int_{\partial B} L_{ij}A_\mu^i A_\mu^j \qquad \text{kde} A_\mu^i e_i := g^{-1}\partial_\mu g \; . \qquad (16)$$

Příslušné pohybové rce mají tvar:

$$L_{ac}\partial_\mu A^{\mu a} + L_{(ab)} f^b_{dc} A^a_\mu A^{\mu d} = 0 \ ; \tag{17}$$

odvozeny byly přepsáním variace $\delta(A^a_\mu e_a) = -g^{-1}\delta g g^{-1}\partial_\mu g + \partial_\mu(g^{-1}\delta g) + g^{-1}\partial_\mu g g^{-1}\delta g = \delta\partial_\mu(\rho^c)e_c + f^c_{ab}A^a_\mu \delta\rho^b e_c$, kde $\delta\rho^b e_b := g^{-1}\delta g$ a zvarirováním celé akce za pomoci tohoto mezikroku.

Akce s WZW členem vypadá ve složkovém zápise:

$$S = \zeta \int_{\partial B} L_{ij} A^i_\mu A^j_\mu + \xi \int_B \epsilon^{\alpha\beta\gamma} L_{ab} A^a_\alpha A^c_\beta A^d_\gamma f^b_{cd} \quad \mathrm{kde} A^i_\mu e_i := g^{-1}\partial_\mu g \ . \tag{18}$$

Varirováním dostaneme pohybové rovnice:

$$3\xi L_{ac}\partial_\mu A^{\mu a} + 2\zeta(L_{(ab)} f^b_{dc} A^a_\mu A^{\mu d} + L_{cb}\epsilon^{\mu\nu} f^b_{ad} A^a_\mu A^d_\nu) = 0 \tag{19}$$

3.3.1 Akce pro 2-dim sigma-model s WZW členem

Přidáme-li k akci (2) pro 2-dim sigma model další člen, který je analogií WZW členu zavedeného v (12):

$$S = \int d^2\xi(\partial_a\phi^\mu\partial^a\phi^\nu G_{\mu\nu}(\phi) + \epsilon^{ab}\partial^a\phi^\mu\partial^b\phi^\nu B_{\mu\nu}(\phi)) \tag{20}$$

Podobně jako v odvození (3) dostaneme varirováním rce:

$$\begin{aligned} G_{i\nu}\delta^{kb}\frac{\partial^2\phi^\nu}{\partial x^k\partial x^b} + \frac{\partial\phi^\alpha}{\partial x^b}\frac{\partial\phi^\beta}{\partial x^k}[G_{i\nu}\delta^{kb}\Gamma^\nu_{\beta\alpha} + & \\ +\epsilon^{bk}\frac{1}{2}(\frac{\partial B_{i\alpha}}{\partial y^\beta} + \frac{\partial B_{\beta i}}{\partial y^\alpha} - \frac{\partial B_{\alpha\beta}}{\partial y^i})] &= 0 \ . \end{aligned}$$

Předchozí pohybovou rovnici můžeme interpretovat tak, že pole $B_{\mu\nu}$ přidává nenulovou torzi cílovému prostoru sigma modelu .

Vyjádříme to přechodem k komplexní reprezentaci: $G_{i\nu}\frac{\partial^2\phi^\nu}{\partial z\partial\bar{z}} + \frac{\partial\phi^\alpha}{\partial\bar{z}}\frac{\partial\phi^\beta}{\partial z}[G_{i\nu}\Gamma^\nu_{\beta\alpha} + i\frac{1}{2}(\frac{\partial B_{i\alpha}}{\partial y^\beta} + \frac{\partial B_{\beta i}}{\partial y^\alpha} - \frac{\partial B_{\alpha\beta}}{\partial y^i})] = 0$, což lze ještě přepsat jako

$$G_{i\nu}\frac{\partial^2\phi^\nu}{\partial z\partial\bar{z}} + \frac{\partial\phi^\alpha}{\partial\bar{z}}\frac{\partial\phi^\beta}{\partial z}[G_{i\nu}\Gamma^\nu_{\beta\alpha} + iH_{i\alpha\beta}] = 0 \ , \tag{21}$$

kde $H = dB$ v řeči forem. Modifikované Christoffelovy symboly vypadají tedy:

$$\Gamma^{\tilde{\nu}}_{\beta\alpha} = \Gamma^\nu_{\beta\alpha} + iG^{i\nu}H_{i\alpha\beta} \tag{22}$$

a je tedy vidět, že člen obsahující B efektivně přidává torzi cílovému prostoru.

3.3.2 Příklad - E_2^C

Algebra E_2^C je definovaná následujícími komutačními relacemi:

$$[e_3, e_i] = \epsilon_{ij} e_j, \quad [e_i, e_j] = \epsilon_{ij} e_4, \quad [e_4, e_i] = [e_4, e_3] = 0, \quad i, j \in \hat{2}\ , \tag{23}$$

kde e_i generují translace , e_3 generuje rotaci a e_4 je z centra. Je to, jak už z označení plyne centrální rozšíření algebry E_2, kde ovšem neexistuje zobecněná forma s takovými vlastnostmi, jaké hledáme (nefunguje nedegenrovanost).

Tato algebra má degenerovanou Killingovu formu ale existuje nedegenerovaná forma, taková jakou jsme uvažovali v předchozím odstavci, nedegenerovanou, symetrickou, bilineární, Ad-invariantní:

$$L_{ab} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2\gamma & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} \tag{24}$$

Parametrizujeme-li příslušnou grupu $g = e^{\sum_i x_i e_i} e^{u e_3 + v e_4}$, můžeme příslušnou akci přepsat[9] v jiné symbolice.

To vše je zde přepsáno pro speciální volbu koeficientů (poměr $\frac{3}{2}$) před jednotlivými členy v chirálním modelu:

$$S = \int d^2\sigma (\partial x_i \overline{\partial} x_i + \epsilon_{ij} x_j \partial x_i \overline{\partial} u 2\gamma \partial u \overline{\partial} u + 2\partial u \overline{\partial} v) \tag{25}$$

[9] definujeme zde $\partial := \frac{1}{2}(\partial_1 - i\partial_2), \overline{\partial} := \frac{1}{2}(\partial_1 + i\partial_2)$

4 Kalibrace I

4.1 Kalibrace σ- modelu

Jak bylo ukázáno v 2.1.2 vykazuje každý σ-model jistou symetrii a tou je invariance vůči tokům generovaným Killingovskými vektorovými poli, tj. vůči isometriím. Jedná se o globální invarianci vůči isometrii $\delta\phi^i = \lambda^a K_a^i$, kde K_a jsou Killingovy vektory. Tyto Killingovy vektory tvoří Lieovu algebru $[K_a, K_b] = f_{ab}^c K_c$.
Pozn.:$K = K^i \frac{\partial}{\partial\phi^i}$ je Killingův vektor $\Leftrightarrow (L_K G = 0) \Leftrightarrow$
$((\nabla_i K)^j + (\nabla_j K)^i = 0)$

Zkoumejme speciální σ- model daný akcí:

$$S = \int_M G_{ij}(\phi)\partial_\mu\phi^i\partial^\mu\phi^j d^m x \ .$$

Požadujme navíc invarianci i vůči lokálním kalibračním transformacím daných $\delta\phi^i = \lambda^a(x) K_a^i(\phi(x))$, tj. přidáním závislosti konstanty lineární kombinace vektorových polí na souřadnicích vstupního prostoru.

Je zřejmé, že akce již vůči této transformaci invariantní není; je totiž:

$$\begin{aligned}\delta S &= \int d^m x\{[K_a^k\partial_k(G_{ij})\partial_\mu\phi^i\partial^\mu\phi^j + G_{ij}\partial_m(K_a^i)\partial^\mu\phi^j\partial_\mu\phi^m + \\ &+G_{ij}\partial_m(K_a^j)\partial^\mu\phi^i\partial_\mu\phi^m]\lambda^a + G_{ij}\partial_\mu(\lambda^a)K_a^i\partial^\mu\phi^j + G_{ij}\partial_\mu(\lambda^a)K_a^j\partial^\mu\phi^i\}\end{aligned}$$

první člen vznikne variací metriky, další 4 členy pocházejí z variace derivací, variací derivace totiž dostaneme vždy dva členy, protože i λ závisí na x

$$\begin{aligned}\delta S &= \int d^m x\{[K_a^k\partial_k(G_{ij}) + G_{ij}\partial_i K_a^l + G_{ij}\partial_j K_a^l]\partial_\mu\phi^i\partial^\mu\phi^j\lambda^a + \\ &+G_{ij}\partial_\mu(\lambda^a)K_a^i\partial^\mu\phi^j + G_{ij}\partial_\mu(\lambda^a)K_a^j\partial^\mu\phi^i\} \ .\end{aligned}$$

Kde první tři členy představují přesně podmínku, že se jedná o Killingovská vektorová pole a tyto členy tedy nepřispějí, X je Killingovo pole[10] $\Leftrightarrow X_a^k\partial_k(G_{ij}) + G_{ij}\partial_i X_a^l + G_{ij}\partial_j X_a^l = 0$.

Aby byla akce invariantní provedeme přechod:

$$\partial_\mu\phi \longrightarrow D_\mu\phi = \partial_\mu\phi + A_\mu^a K_a \tag{26}$$

a zároveň budeme požadovat (což lze vše uhádnout z tvaru transformace akce při lokální transformaci- je třeba zrušit členy obsahující derivaci λ),

[10]Tuto podmínku lze odvodit s uvážením platnosti $L_X g = 0$ a Riemannovosti konexe

aby *kovariantní derivace* měla transformační vlastnosti:

$$\delta(D_\mu \phi) = \lambda^a \partial_j (K_a) D_\mu \phi^j \ . \tag{27}$$

Z této podmínky dostáváme i transformační vlastnosti "konexe":

$$\partial_\mu A^a = -\partial_\mu \lambda - f^a_{bc} \lambda^b A^c_\mu \ . \tag{28}$$

Taky je okamžitě, z toho co už bylo řečeno, vidět, že nahradíme-li tedy parciální derivace kovariantními je naše akce už invariantní. A takto rozšířená akce je už invariantní vůči akci grupy izometrií působící na cílovém prostoru

V teorii pole lze ke kalibraci přistupovat i z pohledu diferenciální geometrie za použití konexe, kdy pole je vlastně řez v asociovaném bundlu, jehož bází je časoprostor a vláknem cílový vektorový prostor, kam zobrazují polní proměnné. Tento přístup ale v případě σ- modelu aplikovat přímo nejde, protože jeho cílovým prostorem je Riemannova varieta a nikoli vektorový prostor, ale jak je vidět z výše naznačeného, jedná se o analogický přístup, řešený ovšem v lokální trivializaci cílové variety a vše by bylo možno formálně provést stejně.

4.2 Vyintegrování konexe z kalibrované akce

Provedeme-li zvarirování kalibrované akce $S = \int_M G_{ij}(\phi) D_\mu \phi^i D^\mu \phi^j d^m x$. dostaneme "pohybové rovnice pro konexi" :

$$\partial_\mu \phi^i + A^a_\mu K^i_a = 0 \ . \tag{29}$$

Konexi z těchto rovnic vyjádříme a dosadíme zpět do akce, přičemž zavedeme označení $G_{ml} K^m_a K^l_b =: T_{ab}$. Za předpokladu, že matice T je invertibilní, máme tedy $A^\mu_b = -(T^{-1})_{ab} K^i_a \partial^\mu \phi_i$; po dosazení dostaváme obyčejnou sigma-modelovou akci ovšem pro jinou metriku

$$\tilde{G_{ij}} = 2(G_{ij} - K_{ia}(T^{-1})_{ab} K_{bj}) \ , \tag{30}$$

která má tu pozoruhodnou vlastnost, že je *degenerovaná* a to ve směrech daných Killingovými vektory $\tilde{G_{ij}} K^j_a = 0$.

Odpovídá tedy sigma modelu na příslušném *faktorprostoru* podle Killingovských vektorových polí.

4.3 Příklad- vektorová kalibrace chirálního modelu

Chirální model

$$S(g) = \int_M Tr(g^{-1}\partial_\mu g g^{-1}\partial_\mu g) d^2x \; . \tag{31}$$

definovaný v 3.1 ma triviální globální symetrii: $g \longrightarrow hgh^{-1}$, podle předchozího lze tuto symetrii přirozeně kalibrovat, přejděme tedy od normální derivace k kovariantní: $\partial g \longrightarrow Dg = \partial g + [A, g]$, kde A je konexe. Konkrétní realizace kalibrované akce je:

$$\begin{aligned} S(\tilde{g}) &= \int_M Tr(g^{-1}D_\mu g g^{-1}D_\mu g) d^2x \\ &= S_\sigma(g) + 2\int d^2x Tr(g^{-1}[gA^\mu, A_\mu]) + \\ &\quad +2\int d^2x Tr(\partial_\mu g[g^{-1}, A_\mu]) \; . \end{aligned} \tag{32}$$

4.3.1 Vyintegrování kalibračního pole

Zde vyintegrujeme kalibrační pole z předchozího odstavce . Varirováním akce vzhledem k konexi dostáváme

$$\frac{\delta S}{\delta A} = \int 2Tr(\delta A_\mu [D^\mu g, g^{-1}]) = 0 \tag{33}$$

Zavedeme-li speciální bázi algebry splňující $Tr(K_a K_b) = \delta_{ab}$ budeme schopní napsat pohybové rce (řecké indexy označují tu část báze příslušející grupě, kterou kalibrujeme a latinskou abecedou celé grupě): $0 = Tr(\delta A_\mu[D^\mu g, g^{-1}]) = Tr(K_\alpha([\partial_\mu g, g^{-1}] + 2A_\mu^\beta K_\beta - A_\mu^\beta(gK_\beta g^{-1} + g^{-1}K_\beta g)))$, z čehož snadno vyjádříme rovnice pro kalibrační pole:

$$A_\mu = \frac{Tr(K_\alpha([\partial_\mu g, g^{-1}]))}{Tr(2\delta_{\alpha\beta} - K_\alpha(gK_\beta g^{-1} + g^{-1}K_\beta g))} K_\beta \tag{34}$$

5 WZW člen

5.1 Obecná definice WZW členu

Nechť jsou B_{m+1}, N_n, M_m Riemannovy variety, M kompaktní, a $\phi : M \longrightarrow N$ takové, že platí $\partial B = M$, a zároveň nechť existuje zobrazeni $\tilde{\phi} : B \longrightarrow N$ takové, že $\tilde{\phi}|_M = \phi$. Dále mějme uzavřenou formu ω na cílové varietě $(\omega \in \Lambda^{m+1}(N_n), d\omega = 0) \Leftrightarrow ([\omega] \in H^{m+1}(N))$, tj. representuje tedy třídu kohomologie. Definujme nyní akci[11]:

$$S_{WZW}(\phi) := \int_B \tilde{\phi}^* \omega = \int_{\tilde{\phi}B} \omega \ ; \tag{35}$$

je třeba upozornit na to, že akci definujeme pro ϕ přes jeho hladké rozšíření $\tilde{\phi}$, jehož existenci předpokládáme- později uvidíme, že tento postup je z hlediska určení dynamiky systému korektní a nezávisí na volbě tohoto rozšíření.

Varirováním[12] (*s využitím uzavřenosti formy* ω , díky níž při variaci vypadne závislost na volbě hladkého rozšírení zobrazení $\tilde{\phi}$) dostáváme pohybové rovnice ve tvaru:

$$\phi^*(i_{V_a}(\omega)) = 0 \ , a \in \hat{n} \tag{36}$$

kde set $V_a, a \in \hat{n}$ je bází $\phi^{-1}(TN)$, alespoň lokálně.

Označme $\delta\phi = \epsilon^a V_a, L.$ je Lieova derivace příslušející vektorovým polím z TN a spočítejme variaci za předpokladu, že máme jednoparametrickou množinu zobrazení $\phi_t = exp_{\phi(x)}(tV.)$ i s jejich hladkými rozšířeními[13]:

$$\begin{aligned}
\frac{dS(\phi_t)}{dt}|_{t=0} &= \int_B \frac{d}{dt}|_{t=0} \tilde{\phi}^* \omega \\
&= \int_B L.(\tilde{\phi}^* \omega) \\
&= \int_B d(\tilde{\phi}^* i.(\omega)) \quad \text{užití:} L = di + id, d\omega = 0 \\
&= \int_M \phi^* i.(\omega) \quad \text{Stokesova věta a } \tilde{\phi}|_{M=\partial B} = \phi \ .
\end{aligned}$$

Je tedy vidět, že ačkoli akce na volbě hladkého rozšíření závisí, pohybové rovnice nikoli. Ve fyzice může např. B představovat plochu, jejíž hranicí je časoprostor.

[11] srovnej s definicemi v 3.2
[12] viz dále
[13] tečka označuje libovolné vektorové pole patřící do TN

6 Kalibrace II

6.1 Úvod ke kalibraci WZW členu

V této části budeme hledat rozšíření akce pro WZW člen tak, aby byla kalibračně invariatní při akci Lieovy grupy G , jejíž symetrie chceme rozšířit, na varietě N , tedy na cílové varietě.

Je zřejmé, že situace bude poněkud obtížnější než v 4, protože, jak je vidět v 5.1, důležitou skutečností pro samotnou dynamiku systému je nezávislost na volbě rozšíření, uzavřenost formy definující WZW člen. Očividně po zavedení "minimálního couplingu" $d \longrightarrow D := d - \omega^a L_a$ už naše forma uzavřená být nemusí a tedy by i mohlo dojít k patologické situaci, kdy nová akce závisí na volbě rozšíření.

Pokusíme se najít podmínky, kdy kalibraci provést lze. Nejsnadnějším, ale i nejobecnějším způsobem je za použití pojmu Weylovy algebry a equivariantní kohomologie.
V celé této sekci budeme pracovat v lokální trivializaci cílové variety, tedy jako s vektorovým prostorem, značení přejmeme z kapitoly 5.1 .

6.2 Weylova algebra

Mějme libovolný bundl a nechť G je grupa(z předchozího odstavce, z definice bundlu) působící na tomto bundlu a $\mathcal{G}$ nechť je její algebra. Definujme teď diferenciální gradovanou algebru $W(\mathcal{G})$:

$$W(\mathcal{G}) := \Lambda(\mathcal{G}^*) \otimes S(\mathcal{G}^*) \ , \tag{37}$$

kde $\Lambda(\mathcal{G}^*)$ je vnější algebra duálu $\mathcal{G}$ generovaná prvky stupně 1 A^a a $S(\mathcal{G}^*)$ je symetrická algebra generovaná prvky stupně 2 F^a.

Diferenciál na $W(\mathcal{G})$ je definován na generátorech a odtud se rozšíří na ostatní prvky jako lineární antiderivace s vlastností $d^2 = 0$:

$$\begin{aligned} dA^a &= -\frac{1}{2} f^a_{bc} A^b A^c + F^a & (38) \\ dF^a &= f^a_{bc} F^b A^c \ . & (39) \end{aligned}$$

Všimněme si, že definice přesně korespondují se strukturní rovnicí a Bianchiho identitou pro konexi na přidruženém bundlu(f^a_{bc} jsou strukturní koeficienty a X_a generátory Lieovy algebry $\mathcal{G}$). Na $W(\mathcal{G})$ dále definujme(analogicky dle situace pro konexi a křivost na principálním bundlu viz [6, 7]) zobrazení, jenž se opět rozšíří na celou algebru :

$$i_{X_a} A^b = \delta_a^b \qquad i_{X_a} F^b = 0 \ . \tag{40}$$

Skutečně vidíme, že Weylova algebra má všechny určující vlastnosti algebry generované konexí a křivostí a přirozeně definovaný Weylův homorfismus představuje universální model pro vztahy splňované těmito formami (zde chápeme $F = F^a X_a \in S^1(\mathcal{G}^*) \otimes \mathcal{G}$ a $A = A^a X_a \in \Lambda^1(\mathcal{G}^*) \otimes \mathcal{G})$. Dále bychom mohli zcela přirozeně definovat Lieovu derivaci jako $L = di + id$.

6.3 Podmínky uzavřenosti kalibrované formy

Situace je tedy takováto: máme uzavřenou G-invariantní formu, kterou chceme rozšířit "přidáním" členů závisejících na konexi a křivosti, tak aby byla uzavřená .

S využitím Weylovy algebry to znamená: $\omega \in \Omega(N) \longrightarrow \tilde{\omega} \in W(\mathcal{G}) \otimes \otimes(\mathcal{N})$, $\tilde{\omega}(A = 0, F = 0) = \omega$(kde uvažujeme přirozenné vnoření nekalibrovaných forem do kalibrovaných), protože jak jsme již uvedli konexi můžeme Weylovým homorfismem přenést do Weylovy algebry a všechny výsledky budou tytéž .

X_a nechť je vektorové pole representující bázi Lieovy algebry $\mathcal{G}$. Zkoumejme, jak se změní uzavřenost formy ω po provedení minimálního couplingu(značíme ho $\tilde{\omega}$)$\omega \longrightarrow \tilde{\omega}$:

$$\omega = \omega_{i_1 \ldots i_p} d\phi^{i_1} \wedge \ldots \wedge d\phi^{i_p} \longrightarrow \tilde{\omega} = \omega_{i_1 \ldots i_p} D\phi^{i_1} \wedge \ldots \wedge D\phi^{i_p} \tag{41}$$

tedy nejdříve určeme působení diferenciálu $\mathbf{d} = d \otimes 1 + 1 \otimes d$ na souřadnicových fcích

$$\mathbf{d} D\phi = -F^a \otimes L_a \phi^i + A^a D L_a \phi^i \tag{42}$$

Máme tedy celkem:

$$\begin{aligned} \mathbf{d}\tilde{\omega} \quad = \quad & (\tilde{d\omega}) + [\partial_j \omega_{i_1 \ldots i_p} A^a L_a \phi^j \wedge D\phi^{i_1} \wedge \ldots \wedge D\phi^{i_p} - \\ & - \sum_{s \in \hat{p}} (-1)^s \omega_{i_1 \ldots i_p} [A^a D L_a \phi^{i_s} - F^a L_a \phi^{i_s}] D\phi^{i_1} \wedge \ldots \hat{D\phi^{i_s}} \ldots \wedge D\phi^{i_p}] \end{aligned}$$

Druhý člen představuje $(F^a \tilde{i_a} \omega)$ a třetí s posledním dají dohromady přesně $(A^a \tilde{L}_a \omega)$.

Výsledek přepišme tedy ještě jednou:

$$\mathbf{d}\tilde{\omega} = (\tilde{d\omega}) + (A^a \tilde{L}_a \omega) - (F^a \tilde{i}_a \omega) \ . \tag{43}$$

Vidíme tedy, že uzavřená forma si tuto vlastnost zachová i po provedení min. couplingu, právě když je *horizontální* (tj.$i_a\omega = 0$) a *invariantní* vůči působení akce G (tj.$L_a\omega = 0$) .

6.4 Zobrazení provádějící kalibraci

V tomto odstavci definujeme homorfismus algeber, zavádějící minimální coupling, tedy jakési "kalibrační " zobrazení ψ .

$$\psi := exp(-\sum_a A^a \otimes i_a), \tag{44}$$

kde exponencielu je zde treba chápat jako formální sumu a mocniny jako skládání homomorfismů. Díky vlastnostem členů $((A^a \otimes i_a)(A^b \otimes i_b) = (A^b \otimes i_b)(A^a \otimes i_a)$ a současně $((A^b \otimes i_b))^2 = 0)$ se ve skutečnosti nejedná o nekonečnou sumu ale o konečný součet a platí tedy identita:

$$\psi = \prod_a (1 - (A^a \otimes i_a)) \ . \tag{45}$$

Je vidět, že se skutečně jedná o homorfimus algeber, zbývá ukázat jak působí na diferenciál: $\prod_a (1 - (A^a \otimes i_a))d\phi = (1 - \sum_a A^a \otimes i_a)d\phi = (d - A^a L_a)\phi$; a skutečně toto zobrazení realizuje min. coupling.

Jedná se dokonce o izomorfismus algeber, protože inverzní zobrazení je dáno jednoduše $\psi^{-1} = exp(\sum_a A^a \otimes i_a)$.

Spočítejme teď jakým způsobem ψ přenese diferenciál $\mathbf{d}$ na nekalibrované formy, očekáváme stejný výsledek (vskutku jedná se o tentýž výsledek, ke kterému se dospěje jinou cestou), tedy chceme určit $\psi^{-1} d\psi$. Nejdříve si připravíme několik pomocných vztahů(platí díky gradaci): $(u \otimes v)(x \otimes y) = (-1)^{|v||x|}(ux \otimes vy)$) :

$$\mathbf{d}(A^a \otimes i_a) = +\frac{1}{2} f^a_{bc} A^b A^c \otimes i_a - F^a \otimes i_a + A^a d \otimes i_a + A^a \otimes di_a \tag{46}$$

(využili jsme strukturních rovnic) a dále $(A^a \otimes i_a)\mathbf{d} = -A^a \otimes i_a d + A^a d \otimes i_a$, máme tedy:

$$[\mathbf{d}, A^a \otimes i_a] = +\frac{1}{2} f^a_{bc} A^b A^c \otimes i_a - F^a \otimes i_a + A^a \otimes L_a \ , \tag{47}$$

díky antisymetričnosti zobrazení, s kterými pracujeme, můžeme přidat člen, jehož příspěvek je díky tvaru výsledku (47) nulový:

$$[\mathbf{d}, A^a \otimes i_a] = (1 - A^a \otimes i_a)[\mathbf{d}, A^a \otimes i_a] \ . \tag{48}$$

S využitím platnosti vztahu $[L_a, i_b] = i_{[a,b]}$ dostáváme (při "násobení" je třeba vždy uvažovat gradaci členů) $[A^a \otimes i_a, A^b \otimes L_b] = -f^c_{ab} A^a A^b \otimes i_c$, což je jediný člen , který přispěje k výsledku

$$[A^a \otimes i_a, [\mathbf{d}, A^b \otimes i_b]] = -f^c_{ab} A^a A^b \otimes i_c \ . \tag{49}$$

Podobné komutátory vyšších řádů jsou nulové a v této části dva opakující se indexy neimplikují nutně sčítání přes ně, rozeznat to je snadné, je to jednoznačně určeno výrazem na druhé straně rovnice.

Teď jsme připraveni určit působení $\psi^{-1}\mathbf{d}\psi$. Představme si $\psi^{-1}\mathbf{d}\psi$ tedy jako součin členů $(n)^{-1}(n-1)^{-1}\dots(1)^{-1}\mathbf{d}(1)(2)\dots(n)$, přičemž $(i) = 1 - A^i \otimes i_i$. Dále, přičemž teď platí už v plné míře sumační konvence $\mathbf{d}(1)\dots(n) = [\mathbf{d},(1)](2)\dots(n) + (1)\mathbf{d}(2)\dots(n) = (1)(2)[[\mathbf{d},(1)],(2)](3)\dots(n) + (1)(2)[\mathbf{d},(1)](3)\dots(n) + (1)[\mathbf{d},(2)](3)\dots(n) + (1)(2)\mathbf{d}(3)\dots(n) = \dots = (1)\dots(n)\{\mathbf{d} - \frac{1}{2}f^c_{ab}A_a A_b \otimes i_c + \frac{1}{2}f^a_{bc}A^b A^c \otimes i_a - F^a \otimes i_a + A^a \otimes L_a\}$, v posledním členu první výraz má faktor jedna polovina, protože prvotně vznikl j ako vysčítávání přes rostoucí indexy a, b , kdežto ve výsledku se sčítá přes všechny takové dvojice, proto faktor jedna polovina. Jestliže ještě zapůsobíme inverzním zobrazením ψ^{-1} na celý výsledek dostáváme očekávaný výsledek:

$$\psi^{-1}\mathbf{d}\psi = \mathbf{d} - F^a \otimes i_a + A^a \otimes L_a =: \delta \tag{50}$$

6.5 Cartanův a Weylův model

Vezměme dvě kopie $\Delta, \mathbf{D}$ naší $W(\mathcal{G})\otimes\otimes(\mathcal{N})$ s definovanými diferenciály $\delta, \mathbf{d}$. Z (50) je vidět, že ψ je izomorfismus těchto diferenciálních algeber. Jestliže $\mathbf{D}$ zúžíme na horizontální a invariantní formy,tedy basic formy, dostaneme podalgebru Δ - Cartanův model.

Protože platí :

$$[A^a \otimes i_a, i_b \otimes 1 + 1 \otimes i_b] = -1 \otimes i_b \tag{51}$$

$$[A^a \otimes i_a, 1 \otimes i_b] = 0 \tag{52}$$

$$[A^a \otimes i_a, L_b \otimes 1 + 1 \otimes L_b] = 0 \tag{53}$$

dostáváme:

$$\psi^{-1}(i_b \otimes 1 + 1 \otimes i_b)\psi = i_b \otimes 1 \tag{54}$$

$$[\psi, L \otimes 1 + 1 \otimes L] = 0 \tag{55}$$

Z toho plyne, že podmínka horizontality implikuje vazbovou podmínku $i_b \otimes 1 = 0$, což znamená, že vypadne jakákoli závislost na konexi (je ekvivalentní tomu, že konexe položíme rovny nule) a z Weylovy algebry zbyde jen její symetrická část; podmínka invariance zůstává neměnná. Diferenciál se změní s uvážením (53) $A^a L_a F^b \otimes 1 = dF^b \otimes 1$ a (50) implikuje:

Cartanův model Δ je diferenciální gradovaná algebra $(S(\mathcal{G}) \otimes \Omega(N))^{\mathcal{G}}$ s diferenciálem daným:

$$d_C = 1 \otimes d - F^a \otimes i_a \tag{56}$$

Zároveň vidíme, že zobrazení ψ^{-1} nedělá nic jiného než dosazuje za konexi nulu.

6.6 Hull-Spencovy podmínky kalibrace (uzavřené horizontální invariantní formy)

Vraťme se zpět k problému, kdy lze danou formu kalibrovat tak, aby si zachovala uzavřenost, a kdy je tato forma kalibračně invariatní.

Zatím jsme se jen hypoteticky zabývali možností implemetovat minimální coupling, bez očividného odůvodnění: na funkcích platí vztah: $L_{\zeta^a X_a}|_{\mathrm{fce}} = \zeta^a L_{X_a}$, kde $\zeta^a \in C^{infty}$, to samé, ale už neplatí na formách a tohle je právě důvod proč se zavádí minimální coupling je totiž : $\mathbf{L}_{\zeta^\mathbf{a} \mathbf{X}_\mathbf{a}} D\phi = (d\zeta^a \wedge i_a + \zeta^a \mathbf{L}_\mathbf{a})(d - A^b \otimes L_b)\phi = \zeta^a L_{X_a}(D\phi)$.

Minimální coupling sám o sobě tedy už zaručuje lokální kalibrační invarianci. Stačí tedy ještě prozkoumat otázku kalibrovatelnosti, tj. existence rozšíření závislého na konexi a křivosti, ovšem při zachování uzavřenosti. Přeneseme řešení tohoto problému do Cartanova modelu, z předešlého je zřejmé, že takovýto postup bude velice výhodný.

Hledáme tedy v Δ takovou formu $\tilde{\omega}$, že bude platit současně: $d_c\omega = 0, \quad \psi^{-1}\tilde{\omega} = \omega$. Pro platnost druhé podmínky je nutné a stačí vyřadit z Cartanova modelu z jeho symetrické části členy řádu nula. Hledat budeme tedy v $\sum_s \oplus [S^s(\mathcal{G}^*) \otimes \Lambda^{n-2s}(N)]^{\mathcal{G}}$.

Podmínky na $\tilde{\omega} = \omega + \sum_{s=1}^p F^{a_1} \wedge \ldots \wedge F^{a_s} v_{a_1 \ldots a_s}$, kde $v_{a_1 \ldots a_s} \in \Lambda^{n-2s}$, jsou tedy

$$\begin{aligned} \mathbf{L_b} F^{a_1} \wedge \ldots \wedge F^{a_s} v_{a_1 \ldots a_s} &= 0 \qquad (57) \\ d_c \tilde{\omega} &= 0 \, . \qquad (58) \end{aligned}$$

Což lze přepsat v souřadnicích(p je celá část$\frac{n}{2}$):

$$0 = (L_b v_{a_1 \ldots a_s} - f^c_{ba_1} v_{c \ldots a_s} \ldots - f^c_{ba_s} v_{a_1 \ldots c}) F^{a_1} \wedge \ldots \wedge F^{a_s} \tag{59}$$

$$
\begin{aligned}
0 \;=\;& \sum_s F^{a_1}\wedge\ldots\wedge F^{a_s}\,dv_{a_1\ldots a_s} - \\
& -F^b i_b\omega - \sum_s F^b\wedge F^{a_1}\wedge\ldots\wedge F^{a_s}\, i_b v_{a_1\ldots a_s}\ . \qquad (60)
\end{aligned}
$$

Z toho dostáváme nutné a postačující podmínky kalibrace, tzv. Hull- Spencovy podmínky :

$$
\begin{aligned}
dv_{a_1} &= i_{a_1}\omega \\
dv_{a_1 a_2} &= i_{\{a_1} v_{a_2\}} \\
&\vdots \\
dv_{a_1\ldots a_s} &= i_{\{a_s} v_{a_1\ldots a_{s-1}\}} \qquad (61)
\end{aligned}
$$

6.7 Wittenovy podmínky

Nyní ukážeme aplikaci Hull- Spenceových podmínek na kalibraci WZW chirálního modelu . Kalibrujme levé i pravé působení algebry dané grupy ve tvaru $g \longrightarrow agb^{-1}$.

Máme tedy v příslušné Lieově algebře $T_a \longrightarrow (T_{a,L}, T_{b,R})$, příslušné variace odpovídající vektorovým polím jsou:

$$\delta g = \epsilon^a X_a = \epsilon^a (T_{a,L} g - g T_{a,R}) \ , \tag{62}$$

a (61) se nazývají pro dvoudimensionální případ Wittenovými podmínkami. Požadují existenci jednoforem λ_a na N splňujících :

$$\begin{aligned} i_{X_a}\omega &= d\lambda_a \\ i_{X_a}\lambda_b + i_{X_b}\lambda_a &= 0 \end{aligned} \tag{63}$$

Při platnosti těchto podmínek se dá akce kalibrovaná minimálním couplingem ještě zjednodušit:

$$S_{WZW}(\phi, A) = S_{WZW}(\phi) - \int_{\partial B} A^a \wedge \phi^*(\lambda_a) - \int_{\partial B} A^a \wedge A^b \phi^*(i_{X_b}\lambda_a) \tag{64}$$

6.7.1 Řešení Wittenových podmínek pro vektorovou kalibraci chirálního modelu s WZW členem

Zkoumejme řešení Wittenových podmínek pro WZW člen v chirálním modelu z předchozího odstavce . Ten dostaneme z našeho obecného případu, jak už bylo řečeno, dosazením $\omega = Tr(g^{-1}dg \wedge g^{-1}dg \wedge g^{-1}dg)$.
Působení jednoformy na vektorové pole udávající kalibrační transformaci vypadá: $g^{-1}dgX = g^{-1}\delta g = \epsilon^a(g^{-1}T_{a,L}g - T_{a,R})$, z bezsložkové definice diferenciálu.

První rovnice (63) má řešení:

$$\lambda_a = Tr(T_{a,L}(dgg^{-1}) + T_{a,R}(g^{-1}dg)) \ , \tag{65}$$

z druhé rce dostaneme

$$i_{X_a}\lambda_b + i_{X_b}\lambda_a = Tr(T_{a,L}T_{b,L} - T_{a,R}T_{b,R}) = 0 \tag{66}$$

Pro tuto jednoformu splňující Wittenovy podmínky můžeme přepsat kalibrovanou akci (64):

$$\begin{aligned} S_{WZW}(g, A) &= S_{WZW}(g) - \int_{\partial B} A^a \wedge Tr(T_{a,L}dgg^{-1} + T_{a,R}g^{-1}dg) \\ &\quad - \int_{\partial B} A^a \wedge A^b Tr(T_{a,R}g^{-1}T_{b,L}g - T_{b,R}g^{-1}T_{a,L}g) \end{aligned} \tag{67}$$

6.8 Kalibrace $\alpha g\tau(\alpha^{-1})$, kde τ je involuce na grupě

V kapitole 3.2 jsme zkoumali chirální modely s WZW členem; je vidět, že část akce pro WZW člen dostaneme položíme-li v naší obecné definici WZW členu (5.1) $\omega = Tr(g^{-1}dg \wedge g^{-1}dg \wedge g^{-1}dg)$. V této části chceme kalibrovat transformace:

$$g \longrightarrow \alpha g\tau(\alpha^{-1}) \ . \tag{68}$$

Provedeme to opět zavedením kovariantní derivace:

$$Dg = \partial g + Ag - g\tau(A) \ , \tag{69}$$

působení involuce na algebře se indukuje z následujícího pravidla $\tau(g^{-1}\partial g) = \tau(g^{-1})\partial(\tau(g))$, a požadujeme aby se tato transformovala analogickým způsobem jako pole,

$$\text{tj. } Dg \longrightarrow \alpha Dg\tau(\alpha^{-1}) \ , \tag{70}$$

z toho dostáváme transformační vlastnosti konexe

$$A = \alpha^{-1}\partial\alpha + \alpha^{-1}A\alpha \ , \tag{71}$$

část odpovídající konexi pod involucí je v pořádku díky definici působení involuce na algebře grupy (na celý vztah pro konexi pod involucí jsme působili involucí) .

Tento případ obsahuje v sobě jak *vektorovou* $g \longrightarrow \alpha g\alpha^{-1}$, tak i *axiální* kalibraci $g \longrightarrow \alpha g\alpha$, tvar příslušných involucí je identita a inverze.

Tím jsme vlastně dokončili diskusi kalibračních podmínek započatou v kapitole 4.3.

6.9 Příklad- Vektorová kalibrace WZW členu

Jak už bylo řečeno v části zabývající se kalibrací sigma-modelu akce typu, jaký zkoumáme, mají globální symetrii a tedy i pro náš WZW člen máme globální symetrii, kterou bychom rádi kalibrovali: $g \longrightarrow hgh^{-1}$.

Zkusme to provést odlišným způsobem než bylo naznačeno výše:zatímco $S_{WZW}(g)$ není kalibračně invariantní výraz $S(kgk^{-1})$ je už *kalibračně invariantní* za předpokladu, že budeme požadovat transformaci $k \longrightarrow kh^{-1}$!

Podívejme se na výraz:$S_{WZW}(kgk^{-1})$ a upravme ho. Tedy $S_{WZW}(kg) = S_{WZW}(g) + S_{WZW}(k) + 3\epsilon^{ijk}\int d^3y Tr(\partial_i gg^{-1}\partial_j gg^{-1}k^{-1}\partial_k k) + 3\epsilon^{ijk}\int d^3y Tr(\partial_i gg^{-1}k^{-1}\partial_j kk^{-1}\partial_k k)$, převedeme třetí člen na tvar čtvrtého členu:

$\epsilon^{ijk}\int d^3y Tr(\partial_i gg^{-1}\partial_j gg^{-1}k^{-1}\partial_k k) \ = \ 3\epsilon^{ijk}\int d^3y \partial_i(Tr(\partial_j gg^{-1}k^{-1}\partial_k k)) \ -$

$\epsilon^{ijk} \int d^3y Tr(\partial_i g g^{-1} k^{-1} \partial_j k k^{-1} \partial_k k))$. Poslední dva členy se nám převedou na jeden integrál přes dvourozměrnou hranici a máme tedy:$S_{WZW}(kg) = S_{WZW}(g) + S_{WZW}(k) + 3\epsilon^{\mu\nu} \int d^2x Tr(\partial_\mu g g^{-1} k^{-1} \partial_\nu k)$; obložíme ještě z druhé strany a postupem zcela analogickým dostáváme- tento výsledek bývá nazýván jako Polyakovova identita:

$$\begin{aligned} S_{WZW}(kgk^{-1}) &= S_{WZW}(g) + S_{WZW}(k) + S_{WZW}(k^{-1}) + \\ &+3\epsilon^{\mu\nu} \int d^2x Tr(\partial_\mu g\{g^{-1}, k^{-1}\partial_\nu k\}) - \\ &-3\epsilon^{\mu\nu} \int d^2x Tr(g^{-1}k^{-1}\partial_\mu k g k^{-1} \partial_\nu k) \ . \end{aligned} \tag{72}$$

A vidíme, že tato kalibrace splňuje všechny podmínky, co jsme požadovali.

Vyšetřeme ještě část výrazu kalibrované akce stojícího pod stopou:z $S_{WZW}(kgk^{-1})$ dostáváme uvnitř členy typu: $g^{-1}k^{-1}(\partial k g k^{-1} + k \partial g k^{-1} - kgk^{-1}\partial k k^{-1})k = g^{-1}(\partial g + k^{-1}\partial k g - g k^{-1} \partial k) =$, označíme-li ještě navíc $k^{-1}\partial k =: A$ můžeme vše přepsat ve tvaru: $= g^{-1}(\partial g + [A, g])$.

Vidíme tedy, že námi provedená kalibrace ve výsledku zcela odpovídá kalibraci prováděné minimálním couplingem.

Vezměme Polyakovovu identitu(72) z minulého odstavce s uvážením identity platné pro vektorovou kalibraci $S_{WZW}(k) = -S_{WZW}(k^{-1})$. Úpravami ještě před variací jsme dostali ty výrazy, které přispějí k naší variaci : $S_{WZW} = \epsilon^{\mu\nu} \int d^2x Tr(\partial_\mu g\{g^{-1}, A_\nu\}) - \epsilon^{\mu\nu} \int d^2x Tr(g^{-1} A_\mu g A_\nu)$. A můžeme provést vyintegrování konexe podobně jako u obyčejného sigma modelu jako v (4.3.1) .

7 Závěr

V této práci jsou ukázány základy obecné teorie kalibrace WZWN modelů. Získané výsledky mají aplikaci v:
1. Integrabilní modely, které lze zkonstruovat z kalibrovaného WZWN modelu s tzv hmmotnostním členem (např. zobecněné Sin- Gordonovy modely)
2. Teorie Hull- Spenceových podmínek pro supersymetrický případ (viz [17])
3. Tzv. exaktní strunové řešení
4. Hull- Spenceovy podmínky pro non-semisimple případ chirálního modelu (a souvislost s tzv. iracionální konformní teorií pole)

Jádrem práce je aplikace obecných Hull- Spenceových podmínek pro konkrétní příklady WZWN modelu. Zabýval jsem se i kalibrací E_C^2 modelu, ale ukazuje se, že podmínky v tomto případě mají velice neelegantní tvar. Konkrétně jsem se zabýval i kalibrací tohoto modelu podle podgrupy $U(1)$. Dosti podrobně jsem se zabýval i Weylovou algebrou a zobecněním zobrazení provádějícího kalibraci.

Při svých výzkumech jsem si kromě poznatků a objevování nových faktů z již zmíněných oblastí rozšířil svoje znalosti o nové postupy a teoretické náhledy z oblastí matematiky a strunových teorií.

Vyvinu velké usilí, aby tento slibný trend našel své pokračovaní v diplomové práci.

Reference

[1] J. Souček: Sigma modely a D-brány, část A, ČVUT FJFI (1998)

[2] Willmore: Riemannian geometry, Oxford university press Inc. (1993)

[3] Manfredo Perdigaõ de Carmo: Riemannian geometry, Birkhaüser Boston (1992)

[4] O. Kowalski: Úvod do Riemanovy geometrie, skripta Karlova universita (1990)

[5] O. Kowalski: Základy matematické analýzy na varietách, skripta Karlova universita (1979)

[6] S .Kobayashi, K .Nomizu: Foundations of differential geometry I, ruský překlad, Nauka (1981)

[7] S .Kobayashi, K .Nomizu: Foundations of differential geometry II, ruský překlad, Nauka (1981)

[8] J. Jost: Riemannian geometry and geometric analysis, Springer Verlag (1995)

[9] H. Urakawa: Calculus of variations and harmonic maps, American Mathematical Society (1993)

[10] J. Eells, L. Lemaire: A report on harmonic maps, Bull. London Math. Soc., 10 (1978), 1-68

[11] J. A. de Azcárrga, J. C. Pérez Bueno: On the general structure of gauged Wess-Zumino-Witten terms, hep-th/9802192

[12] E. Braaten, Nuclear Physics, B260 (1985), 630

[13] J. M Figureoa-O'Farrill, S. Stanciu: Equivariant cohomology and gauged bosonic σ-models, hep-th/9407149

[14] E. Witten: On holomorphic factorization of WZW nad Coset models, Commun. Math. Phys. 144, 189(1992)

[15] C. M. Hull: The geometry of gauged σ-model with WZ term, Nuclear Physics B 353 (1991), 379

[16] L. Klouda: σ-modely a D-brány, Část B, ČVUT FJFI (1998)

[17] J. Souček: Klasické aspekty $N = 2$ struny, ČVUT FJFI (1999)