FAKULTA JADERNÁ A FYZIKÁLNĚ INŽENÝRSKÁ
V PRAZE

SPONTÁNNÍ NARUŠENÍ SYMETRIE

Rešeršní práce

Michal Malinský III.ročník

Vedoucí práce: RNDr. Jaroslav Dittrich

V Praze 10.5.1997

Contents

1 Úvod

1.1 Úloha symetrie ve fyzice

Je dobře známo, že spoustu zdánlivě složitých fyzikálních úloh lze podstatně zjednodušit přihlédnutím k symetrii zkoumaného systému a následnou vhodnou volbou souřadnic, v nichž mají rovnice popisující soustavu daleko jednodušší tvar. Příkladem může být třeba problém řešení rovnice vedení tepla pro případ homogenní koule ponořené do lázně. Zavedením sférických souřadnic s počátkem ve středu koule dostaneme rovnice pro teplotu, jež bude funkcí pouze velikosti rádiusvektoru zkoumaného místa, což zřejmě koresponduje s radiální symetrií celého problému.

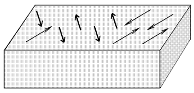
V jiných případech nám dokonce symetrie poskytuje možnost přímo odhalit některé důležité veličiny zjednodušující popis systému, jako jsou např. integrály pohybu. Příkladem může být tzv. *Teorém Noetherové*, jenž mimo jiné matematicky interpretuje zákony zachování energie, hybnosti popřípadě momentu hybnosti (tedy z pohledu klasické mechaniky základní principy) jako důsledky jistých fundamentálních symetrií samotného prostoru a času. Je tedy nasnadě, že přihlédnutí ke zjevným nebo odhalení vnitřních symetrií může a zpravidla též vede k celkovému zjednodušení problému.

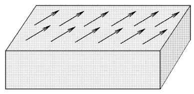
V první části této práce bude pojednáváno o případech z klasické fyziky, jež jsou každému běžně známé z praxe a na nichž je možno snadno demonstrovat výše popsané principy. Dále uvidíme, že přechodem od klasické ke kvantové mechanice se mohou vyskytnout i další případy symetrií, v klasické teorii striktně vyloučené (to ovšem čtenáře, který se již někdy setkal s kvantovou teorií a s jejími z klasického pohledu mnohdy ztřeštěnými výsledky, asi příliš nepřekvapí). Pak přejdeme k zajímavějším kapitolám týkajícím se principů symetrie v teorii pole a hlavně k samotnému spontánnímu narušení těchto symetrií, jež, jak uvidíme, bude mít dalekosáhlé důsledky např. v teorii elementárních částic. V dalším se podíváme na jeden z fundamentálních principů moderní fyziky - tzv. princip lokální kalibrační invariance a s tím spojenou teorii kalibračních polí, jež se zdají být nejlepším prostředkem na cestě k pochopení všech dějů v přírodě z jednotného hlediska. Závěrem by nejspíš bylo vhodné pokusit se popsat jednu z nejúspěšnějších teorií vybudovaných na základě principu spontánního narušení symetrie - tzv. Weinbergův-Salamův model elektroslabých interakcí.

2 Symetrie a případy jejího narušení v klasických teoriích

Pro příklad jevu označitelného jako spontánní narušení symetrie nemusíme chodit daleko, úplně postačí soustavy popisované klasickými teoriemi.Představme si např. skleněnou lahev s vypouklým dnem a předpokládejme její dokonalou osovou souměrnost.

Pustíme-li nyní dovnitř např. ocelovou kuličku a to přímo v ose lahve, přičemž předpokládáme ještě rovnoběžnost vektoru tíže a této osy, dopadne podle naší zkušenosti kulička na dno a sklouzne po něm ke kraji. Kam přesně to bude jsme schopni určit pouze tehdy, je li odchylka místa vypuštění od osy nádoby dostatečně dobře změřitelná. V opačném případě nemůžeme dost dobře předpovědět, kde se kulička usadí, jelikož i úplně nepatrná odchylka od původní polohy způsobí velkou změnu výsledku pokusu. Celkem tedy máme příklad děje, který ačkoli probíhá v soustavě oplývající jistou symetrií, má silně asymetrický vývoj a konečný stav již původní symetrii nemá. Jiným příkladem může být jev pozorovatelný při pokusech s feromagnetikem za teplot pohybujících se kolem Curieovy teploty θ_c daného materiálu. Při teplotách vyšších než θ_c jsou směry magnetických momentů jednotlivých domén vlivem intenzivního tepelného pohybu neustále náhodně vychylovány ze směrů původních a nemohou tudíž získat jakoukoli v čase alespoň trochu stabilní prostorovou orientaci.





Magnetizace feromagnetika pro $\theta > \theta_c$ a $\theta < \theta_c$

Jsou tedy orientovány náhodně, žádný směr není preferován. Ovšem snížíme-li nyní pomalu teplotu až na θ_c a následně ještě níž, začnou se některé domény spontánně orientovat do náhodně vybraného směru, čímž ovšem udají i okolním směr, v němž je orientace magnetických momentů energeticky nejvýhodnější. Celkově tedy dojde k tomu, že se nám poměrně velká část feromagnetika zdánlivě náhodně zmagnetizuje v nějakém směru, čímž ovšem naruší symetrii počátečního stavu.
Můžeme tedy říci, že ke spontánnímu narušení symetrie v "klasickém" slova smyslu dochází u některých makrosystémů, jež přecházejí ze stavů s vyšší do stavů s nižší energií.Jejich důležitou vlastností musí být ovšem to, že potenciály popisující silová působení mají jisté speciální vlastnosti, a sice více lokálních minim, v nichž se soustava může "usadit" ve stavech s nejnižší energií a tato minima nejsou invariantní vůči symetriím soustavy a jim odpovídajícím symetriím počátečních podmínek.

3 Symetrie a zákony zachování v klasických teoriích

Jak již bylo naznačeno v úvodu,hrají principy symetrie velmi důležitou úlohu v celé moderní fyzice. Na tomto místě si všimneme několika nejdůležitějších aplikací těchto principů v konkrétních případech.

Již například v klasické mechanice využíváme skutečnosti, že systém oplývá nějakou zjevnou symetrií, ke vhodné volbě souřadnic, v nichž se jej snažíme popsat. Jiná situace nastává, jedná-li se o nějaký typ "skryté" symetrie, jíž je obvykle míněna třída transformací, jež ponechávají beze změny např. tvar pohybových rovnic. Tato situace je v klasické mechanice popisována tzv. *teorémem Noetherové*, který spojuje symetrie se zákony zachování, jež pro studovanou soustavu musí platit, a dává dokonce jejich explicitní tvar v závislosti na konkrétních symetriích. Například vysvětluje zákon zachování hybnosti pomocí homogenity prostoru, zákon zachování momentu hybnosti jako důsledek jeho izotropnosti a jako příčinu zákona zachování celkové energie uvádí homogenitu času. My zde pro naši další potřebu uvedeme jeho formulaci v klasické teorii pole (podle [5]):

Věta: (teorém Noetherové)
Ke každé **s** *- parametrické spojité grupě transformací souřadnic a polí, jež ponechávají tvar Lagrangeových rovnic beze změny, náleží* **s** *čtyřvektorů* **k** *s nulovou čtyřdivergencí tj.*

$$\frac{\partial k_j^\mu}{\partial x^\mu} = 0 \quad ; \quad j \in \{1 \dots s\}$$

Důkaz: Mějme n-tici polí $u_i(x)$. Označme $u_{i;\mu}(x) \equiv \frac{\partial u_i(x)}{\partial x^\mu}$ a $(x) \equiv (x^\mu) \equiv (x^0, x^1, x^2, x^3)$. (Budeme používat Einsteinovu sumační konvenci, tj. sčítat přes všechny řecké indexy vyskytující se ve vztazích po dvojicích "křížem"; například $a_\mu b^\mu$ znamená $\sum_\mu a_\mu b^\mu$, podobně $\partial_\mu a^\mu \equiv \frac{\partial a^\mu}{\partial x^\mu}$ značí $\sum_\mu \frac{\partial a^\mu}{\partial x^\mu}$.)

Uvažujme libovolnou infinitesimální transformace souřadnic x^μ a polí $u_i(x)$ tvaru

$$x^\mu \to x'^\mu = x^\mu + \delta x^\mu \qquad u_i(x) \to u_i'(x) = u_i(x) + \delta u_i(x)$$

Požadavek zachování tvaru pohybových rovnic při těchto transformacích znamená ,že se při nich nesmí měnit akce systému, tj. její variace musí být nulová: $\delta S = 0$

$$\delta S = \delta \int_{V^*} \mathcal{L}\big(u_i(x), u_{i;\mu}(x)\big) dV^* = 0$$

Provedeme-li variování tohoto výrazu (musíme si uvědomit, že při variaci souřadnic dochází též ke změně integračního elementu dV^*) máme:

$$\delta S \;= \int_{V^*} \mathcal{L}\big(u_i'(x'), u_{i;\mu}'(x')\big) dV'^* - \int_{V^*} \mathcal{L}\big(u_i(x), u_{i;\mu}(x)\big) dV^* =$$

$$\int_{V^*} (\delta\mathcal{L}) dV^* + \int_{V^*} \mathcal{L}(\delta dV^*) + \mathcal{O}\big((\delta x^\mu)^2, (\delta u_i)^2\big)$$

kde $\delta\mathcal{L} = \mathcal{L}\big(u_i'(x'), u_{i;\mu}'(x') - \mathcal{L}\big(u_i(x), u_{i;\mu}(x)\big)$ je totální variace Lagrangiánu při změnách jak polí u_i, tak i souřadnic x^μ, na nichž ovšem Lagrangián závisí pouze nepřímo pomocí polních funkcí (lokální typ teorie) , $\delta dV^* = dV'^* - dV^*$ a $\mathcal{O}$ je zbytek vyšších než prvních řádů v infinitesimálních veličinách.

Provedeme-li naznačené variace (tj. rozvineme-li Lagrangián do Taylorovy řady se středem v bodě $\big[u_i(x), u_{i,\mu}(x)\big]$ a zanedbáme-li příspěvky členů s vyšší než první mocninou změn polí) ,dostáváme:

$$\delta\mathcal{L} = \sum_i \Big(\frac{\partial\mathcal{L}}{\partial u_i}\big(u_i'(x') - u_i(x)\big) + \frac{\partial\mathcal{L}}{\partial u_{i;\mu}}\big(u_{i;\mu}'(x') - u_{i;\mu}(x)\big)\Big)$$

Nyní použitím vztahů $\quad u_i'(x') - u_i(x) = \delta u_i + u_{i;\mu}\delta x^\mu \quad$ a jeho analogu pro derivaci $u_{i;\mu}'(x') - u_{i;\mu}(x) = \delta u_{i;\mu} + \frac{\partial}{\partial x^\nu} u_{i;\mu}\delta x^\nu$ obdržíme :

$$\delta\mathcal{L} = \sum_i \Big\{ \frac{\partial\mathcal{L}}{\partial u_i}\delta u_i + \Big[\frac{\partial\mathcal{L}}{\partial u_{i;\mu}}\delta u_{i,\mu} + \Big(\frac{\partial\mathcal{L}}{\partial u_i}\frac{\partial u_i}{\partial x^\mu} + \frac{\partial\mathcal{L}}{\partial u_{i;\nu}}\frac{\partial u_{i;\nu}}{\partial x^\mu}\Big)\delta x^\mu \Big] \Big\}$$

V kulaté závorce můžeme snadno rozpoznat totální derivaci Lagrangiánu $\frac{d}{dx^\mu}\mathcal{L}$ a tudíž po přeznačení :

$$\delta\mathcal{L} = \sum_i \Big[\frac{\partial\mathcal{L}}{\partial u_i}\delta u_i + \Big(\frac{\partial\mathcal{L}}{\partial u_{i;\mu}}\delta u_{i,\mu} + \frac{d\mathcal{L}}{dx^\mu}\delta x^\mu \Big) \Big]$$

Pro výpočet celkové variace akce nám ještě zbývá provést variaci integračního elementu $\delta(dV^*) = dV'^* - dV^*$. Jelikož $dV'^* = J dV^*$,získáváme

$$dV'^* - dV^* = (J-1) dV^*$$

přičemž J je jakobián transformace $x^\mu \to x'^\mu = x^\mu + \delta x^\mu$, s přesností do prvního řádu

$$J \approx \big(1 + \frac{\partial \delta x^\mu}{\partial x^\mu}\big)$$

a z toho vyplývá,že

$$\delta(dV^*) = \frac{\partial \delta x^\mu}{\partial x^\mu} dV^*$$

Nyní již můžeme dosadit:

$$\delta S = \int_{V^*} \Big(\delta \mathcal{L} + \mathcal{L} \frac{\partial \delta x^\mu}{\partial x^\mu} \Big) dV^* = \int_{V^*} \sum_i \Big[\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial u_i} \delta u_i + \Big(\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial u_{i;\mu}} \delta u_{i,\mu} + \frac{d}{dx^\mu} \big(\mathcal{L} \delta x^\mu \big) \Big) \Big] dV^*$$

První člen přepíšeme užitím pohybových rovnic

$$\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial u_i} = \frac{\partial}{\partial x^\mu} \Big(\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial u_{i;\mu}} \Big)$$

a postupně dostaneme

$$\delta S = \int_{V^*} \sum_i \Big(\frac{\partial}{\partial x^\mu} \Big(\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial u_{i;\mu}} \Big) \delta u_i + \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial u_{i;\mu}} \delta u_{i,\mu} + \frac{d}{dx^\mu} \big(\mathcal{L} \delta x^\mu \big) \Big) dV^* =$$

$$\int_{V^*} \sum_i \Big(\frac{\partial}{\partial x^\mu} \Big(\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial u_{i;\mu}} \Big) \delta u_i + \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial u_{i;\mu}} \Big(\frac{\partial}{\partial x^\mu} \delta u_i \Big) + \frac{d}{dx^\mu} \big(\mathcal{L} \delta x^\mu \big) \Big) dV^* =$$

$$= \int_{V^*} \sum_i \Big(\frac{d}{dx^\mu} \Big(\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial u_{i;\mu}} \delta u_i \Big) + \frac{d}{dx^\mu} \big(\mathcal{L} \delta x^\mu \big) \Big) dV^* = \int_{V^*} \sum_i \frac{d}{dx^\mu} \Big(\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial u_{i;\mu}} \delta u_i + \mathcal{L} \delta x^\mu \Big) dV^*$$

tzn. podmínka $\delta S \ = 0$ je ekvivalentní podmínce

$$\int_{V^*} \sum_i \frac{d}{dx^\mu} \Big(\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial u_{i;\mu}} \delta u_i + \mathcal{L} \delta x^\mu \Big) dV^* = 0$$

Jelikož se má tvar pohybových rovnic zachovávat pro libovolnou část čtyřprostoru a to znamená, že i variace libovolné “ lokální akce” musí být nulová,měla by tato podmínka platit pro libovolnou oblast čtyřprostoru, přes níž integrujeme, to ale podle Základního lemmatu variačního počtu dává

$$\frac{d}{dx^\mu} \Big(\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial u_{i;\mu}} \delta u_i + \mathcal{L} \delta x^\mu \Big) = 0 \qquad \forall i \in \{1 \dots n\}$$

To byl případ, kdy docházelo k transformacím polí nezávisle na transformacích souřadnic. Pro popis obecných transformací souřadnic a polí musíme zavést totální variaci pole

$$u_i(x) \to u'_i(x') = u_i(x) + \delta_{tot} u_i(x)$$

Pro její zavedení do naší podmínky využijeme vztahu

$$\delta_{tot} u_i(x) = \delta u_i + u_{i;\nu} \delta x^\nu$$

Vyjádříme z něj δu_i a dosadíme

$$\frac{d}{dx^\mu} \Big[\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial u_{i;\mu}} \Big(\delta_{tot} u_i(x) - u_{i;\nu} \delta x^\nu \Big) + \mathcal{L} \delta x^\mu \Big] = 0$$

což po úpravě můžeme napsat ve tvaru

$$\frac{d}{dx^\mu} \Big[\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial u_{i;\mu}} \delta_{tot} u_i(x) + \Big(\delta^\mu_\nu \mathcal{L} - \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial u_{i;\mu}} u_{i;\nu} \Big) \delta x^\nu \Big] = 0$$

V kulaté závorce jsme získali tenzor energie-hybnosti $\mathcal{T}^{\mu}_{\nu}$. Dále využijeme faktu, že infinitesimální transformace souřadnic δx^{μ} a polí $\delta_{tot}u_i$ lze vyjádřit jako lineární kombinaci nezávislých parametrů $\delta\omega^j$ ve tvaru :

$$\delta x^{\nu} = \sum_j \Psi^{\nu}_j \delta\omega^j \qquad \delta_{tot}u_i = \sum_j \Phi^i_j \delta\omega^j \qquad j \in \{1 \ldots s\}$$

Můžeme proto napsat :

$$\frac{d}{dx^{\mu}} \sum_{i,j} \Big[\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial u_{i;\mu}} \Phi^i_j - \mathcal{T}^{\mu}_{\nu} \Psi^{\nu}_j \Big] \delta\omega^j = 0$$

V důsledku lineární nezávislosti $\delta\omega^j$ se musí rovnat nule každý koeficient této lineární kombinace, vidíme tedy, že s-tice čtyřvektorů k^{μ}_j definovaná jako

$$k^{\mu}_j \equiv \sum_i \Big[\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial u_{i;\mu}} \Phi^i_j - \mathcal{T}^{\mu}_{\nu} \Psi^{\nu}_j \Big] \qquad j \in \{1 \ldots s\}$$

splňuje požadovanou rovnost. Tím je věta dokázána.

Z toho ovšem plyne, že každý z čtyřvektorů k_j splňuje rovnici kontinuity, a tudíž by se podle analogie s rovnicí kontinuity např. v hydrodynamice či v elektromagnetismu měla v čase zachovávat veličina tvaru:

$$\int_V k^0(x_i) dV$$

podobně jako podle zákona zachování celkového náboje. Opravdu, platí

Věta: *Buď* $\mathbf{k}(x^{\mu})$ *čtyřvektor v Minkowského prostoru mající nulovou čtyřdivergenci a pro* $|x^i| \to \infty$ *jdoucí dostatečně rychle k nule. Potom platí:*

$$\frac{d}{dt}\Big(\int_V k^0(t, x_i) dV \Big) = 0$$

Důkaz: Uvažujme speciální čtyřdimenzionální oblast ve V^* ve tvaru $V^*_0 = V_{123,R} \times T_{<t_1,t_2>}$, kde $V_{123,R}$ je koule v prostoru o poloměru r a $T_{<t_1,t_2>}$ je jistý časový interval. Podle předpokladu o nulovosti čtyřdivergence vektoru k můžeme použitím divergenční věty psát:

$$\int_{V^*_0} \frac{\partial k^{\mu}}{\partial x^{\mu}} dV^* = \oint_{\partial V^*_0} k^{\mu} df_{\mu} = 0$$

kde

$$\partial V^*_0 = \partial(V_{123,R} \times T_{<t_1,t_2>}) = \partial V_{123,R} \times T_{<t_1,t_2>} \cup V_{123,R} \times \partial T_{<t_1,t_2>}$$

Objemová forma df_{μ} má na nadrovinách $V_{123,R} \times \partial T_{<t_1,t_2>}$ tvar

$$df^{(x^0=t_1)}_{\mu} = -(dx^1 \wedge dx^2 \wedge dx^3, 0, 0, 0) \qquad df^{(x^0=t_2)}_{\mu} = (dx^1 \wedge dx^2 \wedge dx^3, 0, 0, 0)$$

a integrál přes druhou část hranice, tj. přes $\partial V_{123,R} \times T_{<t_1,t_2>}$ pro $R \to \infty$ vymizí. To celkově znamená, že:

$$\oint_{\partial V^*_0} k^{\mu} df_{\mu} = \oint_{V_{123,R} \times \partial T_{<t_1,t_2>}} k^{\mu} df_{\mu} = \oint_{V_{123,R} \times \{t_1\}} k^{\mu} df_{\mu} + \oint_{V_{123,R} \times \{t_2\}} k^{\mu} df_{\mu} =$$

$$\int_{R^3,t_1} k^0 dV - \int_{R^3,t_2} k^0 dV = 0$$

a jelikož jsme předpokládali libovolnost okamžiků t_1, t_2, znamená poslední rovnost, že se výraz $\int_V k^0(x_i) dV$ (obvykle nazývaný náboj) zachovává.

4 Symetrie v kvantové mechanice

4.1 Vakuum v klasické a kvantové mechanice

Stejně jako v klasické fyzice, je i v kvantové mechanice pod označením *vakuum* rozuměn stav, v němž má daný systém minimální možnou energii. Existuje zde však jeden podstatný rozdíl. Spočívá v tom, že zatímco v klasické fyzice je energie vakuového stavu určena přímo průběhem potenciálu a jeho minimy a vakuum má energii odpovídající energii jednoho z těchto minim, v kvantové mechanice tomu tak obvykle nebývá. Při řešení bezčasové Schrödingerovy rovnice

$$H\psi_n = E_n\psi_n \tag{1}$$

nás zajímají pouze kvadraticky integrabilní funkce ψ. K nim získáváme jednotlivé energie , mezi nimiž nemusí být žádná E_n rovna minimu potenciálu.

Klasickým příkladem může být potenciál jednodimenzionálního harmonického oscilátoru $V(x) = kx^2$, pro nějž získáme energetické spektrum tvaru $E_n = \hbar\omega(n+\frac{1}{2})$, jež má nenulové minimum, zatímco minimum potenciálu je $V(0) = 0$.

4.2 Symetrie řešení bezčasové Schrodingerovy rovnice

V dalším se omezíme na vyšetřování takových kvantověmechanických systémů, jejichž hamiltoniány zahrnují potenciální členy, které oplývají nějakou symetrií, a budeme zkoumat, zdali podobnou symetrii nevykazuje i vakuum takovéto teorie.

4.2.1 Jednodimenzionální případ

Mějme jednodimenzionální kvantověmechanický systém, jehož hamiltonián má tvar

$$H = -\frac{\hbar^2}{2m}\frac{d^2}{dx^2} + V(x) \tag{2}$$

přičemž předpokládáme, že funkce V je sudá, tj. symetrická vůči inverzi osy $x \to -x$. Jak ukážeme, v tomto *jednodimenzionálním* případě bude i základní stav takto symetrický.

Připomeňme, že v jednodimenzionálním případě jsou vlastní stavy hamiltoniánu nedegenerované. Dále je vždy možno vybrat ke každému vlastnímu číslu E_n reálnou vlastní funkci, od této chvíle budeme uvažovat právě tyto reálné vlastní funkce.

V případě symetrického potenciálu V platí, že pakliže funkce ψ řeší rovnici

$$-\frac{\hbar^2}{2m}\frac{d^2\psi}{dx^2} + V(x)\psi = E\psi \tag{3}$$

potom též funkce $\tilde{\psi}$ definovaná jako $\tilde{\psi}(x) := \psi(-x)$ řeší (3) pro stejnou energii E. V důsledku nedegenerovanosti energie a reálnosti ψ musí být buď $\tilde{\psi} = -\psi$ anebo $\tilde{\psi} = +\psi$. To znamená, že reálné vlastní funkce všech vlastních hodnot jsou buď liché, nebo sudé. Toto tvrzení nyní upřesníme:

Věta:(oscilační) *Nechť $E_0, E_1, E_2, \ldots, E_n, \ldots$ je rostoucí posloupnost vlastních čísel H. Potom reálná vlastní funkce ψ_n náležející vlastnímu číslu E_n má právě n nulových bodů v R.* Důkaz tohoto tvrzení lze najít např. v [7].

Tím pádem nemá vlnová funkce základního stavu (jelikož odpovídá energii E_0) žádný reálný kořen v $\mathcal{R}$, a tudíž musí být sudá.

4.2.2 Radiálně symetrický potenciál - třídimenzionální případ

Ve třídimenzionálním případě je již situace odlišná. Jak ukážeme, existuje systém s radiálně symetrickým potenciálem, v němž energie s-stavu je větší než energie p-stavu, což znamená, že základní stav již radiálně symetrický není.

Uvažujme kvantový systém částice v radiálně symetrickém potenciálu popsaném:

$$V(r) = \begin{cases} V_0 & 0 \leq r < a \\ 0 & a \leq r \leq b \\ +\infty & r > b \end{cases} \tag{4}$$

Pro takto definovaný potenciál máme řešit Schrödingerovu rovnici pro funkci $\psi(\vec{x})$:

$$-\frac{\hbar}{2M}\triangle\psi(\vec{x}) + V(\vec{x})\psi(\vec{x}) = E\psi(\vec{x}) \tag{5}$$

Z důvodu symetrie přejdeme ke sférickým souřadnicím r, θ, ϕ, a dále provedeme separaci proměnných, což dává

$$\psi(\vec{x}) = \Psi(r, \theta, \phi) = R(r)Y_{lm}(\theta, \phi) \tag{6}$$

a pro radiální část $R(r)$ obdržíme rovnici

$$R''_{El}(r) + \frac{2}{r}R'_{El}(r) + \frac{2M}{\hbar^2}\Big[E - V(r) - \frac{\hbar^2 l(l+1)}{2Mr^2}\Big]R_{El}(r) = 0 \tag{7}$$

Rozdělíme si interval $(0, b)$ na podintervaly $(0, a)$ a (a, b), na nichž je potenciál konstantní a řešení (7) snazší. Získáme-li takto obě řešení, "slepíme" z nich vhodným způsobem funkci, která již řeší (7) na celém $(0, b)$.

Omezme se nyní na jeden z těchto podintervalů. Na něm lze vynásobením (7) faktorem r^2 a substitucí $r \to kr \equiv \rho$, kde $k = \frac{\sqrt{2M(E-V)}}{\hbar}$, dostat pro $R(\rho)$ tzv. rovnici pro sférické cylindrické funkce

$$\rho^2 R''_{El}(\rho) + 2\rho R'_{El}(\rho) + \big[\rho^2 - l(l+1)\big]R_{El}(\rho) = 0 \tag{8}$$

Tu máme řešit za podmínky : $R'(r = b) = 0$ (jelikož oblast pro $r > b$ je nedostupná) a dále s požadavkem spojitosti řešení v bodě a i s první derivací. Dále připojujeme ještě podmínku integrability výsledné funkce, tj. $\int_{R^+} R(r)r^2 dr < +\infty$.

Řešíme tedy vlastně dvě rovnice typu (8), každou pro jeden z podintervalů :

$$\rho_1^2 R_1''(\rho_1) + 2\rho_1 R_1'(\rho_1) + \big[\rho_1^2 - l(l+1)\big]R_1(\rho_1) = 0 \tag{9}$$

$$\rho_2^2 R_2''(\rho_2) + 2\rho_2 R_2'(\rho_2) + \big[\rho_2^2 - l(l+1)\big]R_2(\rho_2) = 0 \tag{10}$$

kde $\rho_1 = k_1 r$ pro $r \in (0, a)$, $k_1 = \frac{\sqrt{2M(E-V_0)}}{\hbar}$, $\rho_2 = k_2 r$ pro $r \in (a, b)$, $k_2 = \frac{\sqrt{2ME}}{\hbar}$ a R_1 a R_2 značí dílčí řešení pro první a druhý podinterval.

Naším cílem je zjistit, jak vypadá nejnižší energetická hladina pro s-stavy a porovnat ji s nejnižší energií p-stavu. Teorie řešení diferenciálních rovnic říká (viz např. [4]), že libovolné řešení obou rovnic (9-10) lze napsat pro dané l jako lineární kombinaci tzv. Hankelových funkcí $h_l^{(1)}$ a $h_l^{(2)}$.

Z požadavku spojitosti výsledného řešení v bodě a včetně derivace dostáváme podmínky

$$A_l^1 h_l^{(1)}(k_1 a) + B_l^1 h_l^{(2)}(k_1 a) = A_l^2 h_l^{(1)}(k_2 a) + B_l^2 h_l^{(2)}(k_2 a) \tag{11}$$

$$A_l^1 k_1 h_l^{(1)\prime}(k_1 a) + B_l^1 k_1 h_l^{(2)\prime}(k_1 a) = A_l^2 k_2 h_l^{(1)\prime}(k_2 a) + B_l^2 k_2 h_l^{(2)\prime}(k_2 a) \tag{12}$$

Podmínka nulovosti v bodě b dále dává

$$A_l^2 h_l^{(1)}(k_2 b) + B_l^2 h_l^{(2)}(k_2 b) = 0 \tag{13}$$

A posledním požadavkem, jenž nám dourčuje koeficienty lineární kombinace je normovací podmínka.

Řešme nejprve soustavu (9-10) s podmínkami (11-13) pro s-stav, tj. pro $l = 0$. Řešení ψ_I^0 a ψ_{II}^0 na intervalech $I \equiv (0, a)$ a $II \equiv (a, b)$ mají obecný tvar

$$\psi_I(r) = A_0^1 h_0^{(1)}(k_1 r) + B_0^1 h_0^{(2)}(k_1 r), \qquad \psi_{II}(r) = A_0^2 h_0^{(1)}(k_2 r) + B_0^2 h_0^{(2)}(k_2 r) \tag{14}$$

Použijeme-li vztahu pro Hankelovy funkce :

$$h_0^{(1)}(z) = \frac{-i}{z} e^{iz}, \qquad h_0^{(2)}(z) = \frac{i}{z} e^{-iz} \tag{15}$$

dospějeme z (11-12) k podmínkám

$$\frac{-iA_0^1}{k_1 a} e^{ik_1 a} + \frac{iB_0^1}{k_1 a} e^{-ik_1 a} = \frac{-iA_0^2}{k_2 a} e^{ik_2 a} + \frac{iB_0^2}{k_2 a} e^{-ik_2 a} \tag{16}$$

$$A_0^1 k_1 e^{ik_1 a} (\frac{1}{k_1 a} + \frac{i}{k_1^2 a^2}) + B_0^1 k_1 e^{-ik_1 a} (\frac{1}{k_1 a} - \frac{i}{k_1^2 a^2}) =$$

$$= A_0^2 k_2 e^{ik_2 a} (\frac{1}{k_2 a} + \frac{i}{k_2^2 a^2}) + B_0^2 k_2 e^{-ik_2 a} (\frac{1}{k_2 a} - \frac{i}{k_2^2 a^2}) \tag{17}$$

Jelikož jsme separací proměnných (6) převedli naši úlohu na jednodimenzionální případ, v němž, jak známo, lze volit vlastní funkce reálné, podřídíme této možnosti pro usnadnění výpočtů i volbu konstant v lineárních kombinacích.

Zabývejme se dále podmínkou (13), jež má po dosazení z (15) tvar

$$\frac{-iA_0^2}{k_2 b} e^{ik_2 b} + \frac{iB_0^2}{k_2 b} e^{-ik_2 b} = 0 \tag{18}$$

Podržíme-li se požadavku reálnosti, implikuje tato podmínka rovnost $A_0^2 = \overline{B_0^2}$. Pomocí toho můžeme přepsat (18) do tvaru :

$$\mathrm{Re}(A_0^2) \sin k_2 b - \mathrm{Im}(A_0^2) \cos k_2 b = 0 \tag{19}$$

Konstanta b ovšem do této chvíle nebyla blíže specifikována. Zvolme ji nyní ve tvaru

$$b = \frac{n\pi}{k_2} = \frac{n\pi\hbar}{\sqrt{2ME_s}} \qquad n \in \mathbf{N} \tag{20}$$

(Touto volbou jsme se sice připravili o obecnost řešení, nám se ovšem jedná pouze o konstrukční důkaz existence jistého systému bez dříve specifikovaných parametrů, takže to nevadí.)

Aby bylo možno vyplnit (19), musí být $\mathrm{Im} A_0^2 = 0$, neboli $A_0^2 = B_0^2 \in \mathcal{R}$. Obdobně budeme postupovat i při diskusi konstant A_0^1 a B_0^1. Pro jednoduchost naložíme na vlastní funkce ještě podmínku spojitosti v bodě 0. To znamená

$$A_0^1 h_0^{(1)}(0) + B_0^1 h_0^{(2)}(0) < +\infty \tag{21}$$

Po dosazení máme v okolí bodu 0

$$\psi_I(r) = \frac{-iA_0^1}{k_1 r} e^{ik_1 r} + \frac{iB_0^1}{k_1 r} e^{-ik_1 r} \tag{22}$$

Podmínka reálnosti znovu dává $A_0^1 = \overline{B_0^1}$. Použitím goniometrického tvaru

$$\psi_I(r) = \mathrm{Re}(A_0^1) \frac{\sin k_1 r}{k_1 r} - \mathrm{Im}(A_0^1) \frac{\cos k_1 r}{k_1 r} \tag{23}$$

vidíme, že spojitosti ψ_I v počátku dosáhneme pouze tehdy, bude-li $\mathrm{Im}(A_0^1) = 0$. To znamená $A_0^1 = B_0^1 \in \mathcal{R}$. Podmínky (16) a (17) nyní přepíšeme do jednoduchého tvaru

$$\frac{2A_0^1}{k_1 a}\sin k_1 a = \frac{2A_0^2}{k_2 a}\sin k_2 a \tag{24}$$

$$\frac{2A_0^1}{a}\cos k_1 a - \frac{2A_0^1}{k_1 a^2}\sin k_1 a = \frac{2A_0^2}{a}\cos k_2 a - \frac{2A_0^2}{k_2 a^2}\sin k_2 a \tag{25}$$

Vydělíme-li rovnici (25) rovnicí (24) , dostaneme po úpravě transcendentní rovnici

$$\frac{k_2}{k_1} = \frac{\operatorname{tg} k_2 a}{\operatorname{tg} k_1 a} \tag{26}$$

jejíž řešením vzhledem k E_s "skryté" v k_1 a k_2 získáme již energii nejnižšího s-stavu. Ještě uveďme explicitní přepis této rovnice přímo v proměnné E_s:

$$\sqrt{\frac{E_s - V_0}{E_s}} = \frac{\operatorname{tg} c\sqrt{(E_s - V_0)}}{\operatorname{tg} c\sqrt{E_s}} \tag{27}$$

kde $c \equiv \frac{\sqrt{2M}}{\hbar}a$, přičemž ještě a je nutno brát z intervalu $(0, b)$, kde b je určeno vztahem (20). Pro energie E_s menší než V_0 použijeme navíc vztah $\operatorname{tg} i\beta = i\operatorname{tgh}\beta$, čímž opět dostáváme rovnici s reálnými koeficienty.

Nyní přistoupíme k obdobné konstrukci řešení rovnic (9-10) pro p-stavy, tzn. pro $l = 1$. Opět snadno napíšeme obecná řešení na intervalech I a II:

$$\psi_I(r) = A_1^1 h_1^{(1)}(k_1 r) + B_1^1 h_1^{(2)}(k_1 r), \qquad \psi_{II}(r) = A_1^2 h_1^{(1)}(k_2 r) + B_1^2 h_1^{(2)}(k_2 r) \tag{28}$$

kde ovšem nyní konstanty k_1 a k_2 mají význam: $k_1 = \frac{\sqrt{2M(E_p - V_0)}}{\hbar}$ a $k_2 = \frac{\sqrt{2ME_p}}{\hbar}$ Použijeme-li vztahy pro Hankelovy funkce :

$$h_1^{(1)}(z) = \frac{-i}{z^2}(1 - iz)e^{iz}, \qquad h_1^{(2)}(z) = \frac{i}{z^2}(1 + iz)e^{-iz} \tag{29}$$

dospějeme pomocí (11-12) k podmínkám

$$\begin{aligned} &\frac{-iA_1^1}{k_1^2 a^2}(1 - ik_1 a)e^{ik_1 a} + \frac{iB_1^1}{k_1^2 a^2}(1 + ik_1 a)e^{-ik_1 a} = \\ &= \frac{-iA_1^2}{k_2^2 a^2}(1 - ik_2 a)e^{ik_2 a} + \frac{iB_1^2}{k_2^2 a^2}(1 + ik_2 a)e^{-ik_2 a} \end{aligned} \tag{30}$$

$$\begin{aligned} &A_1^1 k_1 e^{ik_1 a}\left(-\frac{i}{k_1 a} + \frac{2}{k_1^2 a^2} + \frac{2i}{k_1^3 a^3}\right) + B_1^1 k_1 e^{-ik_1 a}\left(\frac{i}{k_1 a} + \frac{2}{k_1^2 a^2} - \frac{2i}{k_1^3 a^3}\right) = \\ &= A_1^2 k_2 e^{ik_2 a}\left(-\frac{i}{k_2 a} + \frac{2}{k_2^2 a^2} + \frac{2i}{k_2^3 a^3}\right) + B_1^2 k_2 e^{-ik_2 a}\left(\frac{i}{k_2 a} + \frac{2}{k_2^2 a^2} - \frac{2i}{k_2^3 a^3}\right) \end{aligned} \tag{31}$$

Jelikož jsme si při výpočtu s-stavu upevnili pro jednoduchost konstantu b, je možné splnit okrajovou podmínku

$$A_1^2(1 - ik_2 b)e^{ik_2 b} - B_1^2(1 + ik_2 b)e^{-ik_2 b} = 0 \tag{32}$$

již pouze vhodnou volbou konstant A_1^2 a B_1^2. Zřejmě musíme volit

$$A_1^2 = Ae^{i\phi_0}, \quad B_1^2 = Ae^{-i\phi_0}, \qquad \text{kde} \quad \phi_0 = \operatorname{ampl}(1 + ik_2 b)e^{-ik_2 b} \tag{33}$$

K nalezení vztahu mezi konstantami A_1^1 a B_1^1 užijeme požadavku integrability v okolí bodu 0. Tu nám zaručí opět pouze volba $A_1^1 = B_1^1$. Tím se nám zjednoduší (30) a (31) (při současném využití (33)) na tvaru

$$-\frac{2A}{k_2 a}\cos(k_2 a + \phi_0) + \frac{2A}{k_2^2 a^2}\sin(k_2 a + \phi_0) = -\frac{2A_1^1}{k_1 a}\cos k_1 a + \frac{2A_1^1}{k_1^2 a^2}\sin k_1 a \tag{34}$$

$$\begin{aligned}\frac{4A}{k_2 a}\cos(k_2 a + \phi_0) - \frac{4A}{k_2^2 a^2}\sin(k_2 a + \phi_0) + 2A\sin(k_2 a + \phi_0) = \\ = \frac{4A_1^1}{k_1 a}\cos k_1 a - \frac{4A_1^1}{k_1^2 a^2}\sin k_1 a + 2A_1^1 \sin k_1 a\end{aligned} \tag{35}$$

Opět vydělíme rovnici (34) rovnicí (35), čímž se zbavíme všech neznámých koeficientů, a po snadných úpravách obdržíme další transcendentní rovnici, tentokrát již pro p-stavy:

$$\frac{k_1}{\mathrm{tg}\,(k_2 a + \phi_0)} - \frac{k_2}{\mathrm{tg}\,k_1 a} = \frac{k_1}{k_2 a} - \frac{k_2}{k_1 a} \tag{36}$$

Zbývá tedy ještě spočíst hodnotu fázového posunutí ϕ_0 a to přímo ze vztahu (33). Jelikož amplituda součinu je rovna součtu amplitud, je jasné, že

$$\phi_0 = \mathrm{ampl}\,(1 + ik_2 b) + \mathrm{ampl}\,e^{-ik_2 b} = \mathrm{arctg}\,(k_2 b) - k_2 b \tag{37}$$

Po dosazení tedy máme rovnici

$$\frac{k_1}{\mathrm{tg}\,(k_2(a-b) + \mathrm{arctg}\,k_2 b)} - \frac{k_2}{\mathrm{tg}\,k_1 a} = \frac{k_1}{k_2 a} - \frac{k_2}{k_1 a} \tag{38}$$

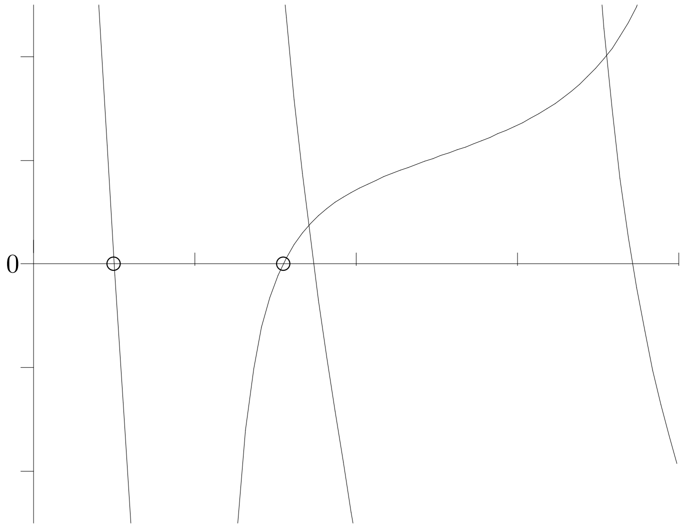
již na závěr přepíšeme explicitně pomocí energie E_p do tvaru

$$c\Big[\frac{\sqrt{E_p - V_0}}{\mathrm{tg}\,(c\sqrt{E_p}(1 - b/a) + \mathrm{arctg}\,(c\sqrt{E_p}b/a))} - \frac{\sqrt{E_p}}{\mathrm{tg}\,(c\sqrt{(E_p - V_0)})}\Big] = \sqrt{\frac{E_p - V_0}{E_p}} - \sqrt{\frac{E_p}{E_p - V_0}} \tag{39}$$

Zde jsme označili $c \equiv \frac{\sqrt{2M}}{\hbar}a$ a za b dosazujeme pevně zvolenou hodnotu vyhovující podmínce (20), tj. $b = \frac{n\pi\hbar}{\sqrt{2ME_s}}$ pro pevné $n \in \mathbf{N}$.

Nyní již můžeme analýzou rovnic (27) a (39) zjistit, zda existuje pro nějakou volbu konstant V_0, a, c, n nějaký p-stav, jenž má nižší energii než všechny s-stavy. Numerické řešení v programu GNUPLOT ukazuje, že tomu tak skutečně je:

Převedením (27) a (39) na tvar $f(E_s) = 0$ a $g(E_p) = 0$ získáme funkce f a g a naším úkolem je určit jejich nulové body. (Nejprve pro f, neboť g je v našem případě parametrizovaná hodnotou E_s.) Pro konkrétní hodnoty: $n = 3$, $a = 2,22.10^{-10}$ m, $V_0 = 5.10^{-18}$J$= 31,21$ eV, $M = m_e = 9,1.10^{-31}$ kg a $b = 5,61.10^{-10}$ m (jelikož E_s vychází $1,547.10^{-18}$ J$= 9,65$ eV), dostáváme průběhy funkcí f a g tak, jak je znázorněno na obrázku:



(škálování osy energie (tj. vodorovné) bylo voleno tak, že jednomu dílku odpovídá energie 10^{-18}J.) Průběh funkce f (pro E_s) je dán zvolna rostoucí křivkou, průběh funkce g (pro E_p) trojicí strmých křivek. Kroužky jsou označena řešení odpovídající energii s-stavu (vpravo) a p-stavu (vlevo).Energie p-stavu E_p vychází přibližně 5.10^{-19}J$= 3,1$ eV, a platí tedy $E_s > E_p$.

5 Narušení symetrie v teorii pole

5.1 Příklady teorií s asymetrickým vakuem

Mějme pro jednoduchost teorii popisující reálné skalární pole ϕ. Zabývejme se případem, kdy hustota lagrangeovy funkce (lagrangián) má tvar:

$$\mathcal{L} = \frac{1}{2}(\partial_\mu \phi)(\partial^\mu \phi) - V(\phi) \tag{40}$$

kde V předpokládáme pouze funkcí pole, nikoli jeho derivací. (Tento lagrangián produkuje po dosazení do Eulerových rovnic pohybovou rovnici pole ϕ. (Pro případ $V = \frac{1}{2}\mu^2\phi^2$ je to tzv. Klein-Gordonova rovnice $(\Box + \mu^2)\phi$ popisující vývoj vlnové funkce přiřazené volné částici o hmotnosti μ^2.) Přechodem k hamiltoniánu pomocí Legenderovy transformace dostáváme:

$$\mathcal{H} = \frac{1}{2}(\partial_0 \phi)^2 + \frac{1}{2}(\nabla \phi)^2 + V(\phi)$$

Vidíme, že stav s nejnižší energií, jenž budeme v dalším nazývat *vakuovým stavem* nebo též *vakuem teorie* je jednoznačně určen potenciálním členem $V(\phi)$ a je to takový stav ϕ_0, pro nejž nabývá funkce V minima.

Již v takto jednoduchém případě lze snadno sestrojit teorii, na níž bude možno zachytit základní momenty jevu nazývaného *spontánní narušení symetrie* .

Za tímto účelem vybereme speciální třídu potenciálů parametrizovatelnou dvěma reálnými čísly :

$$V(\phi) := \frac{\lambda}{4!}\phi^4 + \frac{\mu^2}{2}\phi^2 \tag{41}$$

kde λ je kladné reálné číslo a μ^2 reálné, tj. může být jak kladným, tak i záporným číslem (tj. μ je obecně komplexní). Důležité je, že teorie s touto třídou potenciálů je invariantní vůči transformacím typu

$$\phi \to -\phi \tag{42}$$

Nyní ovšem nastávají dva případy :
(a) Je- li μ^2 nezáporné číslo, potom odpovídající potenciál V má pouze jediné minimum a to v bodě $\phi_0 = 0$. Vidíme tedy, že vakuum pole ϕ je stejně jako celá teorie invariantní vůči transformaci (42).
(b) Je-li naopak μ^2 záporné, má V dvě lokální minima a sice v bodech $\phi = \pm\sqrt{-6\mu^2/\lambda}$ a žádný z těchto stavů již vzhledem k transformaci (42) invariantní není. Teoriím tohoto typu (tj. lagrangián je symetrický vůči nějaké třídě transformací, ale ne odpovídající vakuové stavy systému) se říká *teorie se spontánním narušením symetrie.*
Zabývejme se nyní právě případem (b), tj. teorií typu (40) s asymetrickým vakuem. Definujme $a^2 := -6\mu^2/\lambda$ Tím pádem můžeme přepsat potenciál (41) ve tvaru :

$$V(\phi) := \frac{\lambda}{4!}(\phi^2 - a^2)^2 - \frac{\lambda}{4!}a^4 \tag{43}$$

Minima funkce V jsou v bodech $\phi = \pm a$. Při přechodu k nízkým energiím si vlivem malých fluktuací systém jeden z těchto stavů “vybere” jako vakuum.(Oba stavy jsou ovšem fyzikálně zcela rovnocenné, a při dalším přechodu se může realizovat i druhý z nich.) Předpokládejme např. stav $\phi = a$. Pro popis dějů v blízkosti tohoto asymetrického vakua zavedeme pole ϕ':

$$\phi' := \phi - a$$

Lagrangián systému vyjádřený pomocí pole ϕ' má tedy tvar:

$$\mathcal{L} = \frac{1}{2}(\partial_\mu\phi')(\partial^\mu\phi') - V(\phi' + a) = \frac{1}{2}(\partial_\mu\phi')(\partial^\mu\phi') - \left[\frac{\lambda}{4!}\phi'^4 + \frac{a\lambda}{6}\phi'^3 + \frac{a^2\lambda}{6}\phi'^2\right]$$

(Zde jsme v potenciálu vynechali aditivní konstantu $-\frac{\lambda}{4!}a^4$ a budeme tak činit i v dalších případech.) Všimněme si koeficientu u ϕ'^2. Znamená, že tento lagrangián popisuje pole částice o nenulové hmotnosti $\sqrt{\lambda/3}a$. (identifikace hmotnosti v koeficientu u kvadrátu polní funkce plyne z toho, že hmotnost se v odpovídající Klein-Gordonově rovnici objevuje právě pomocí něho (viz Dodatek: Klein-Gordonova rovnice), v našem případě u ϕ'^2). Členy u ostatních mocnin popisují interakční vlastnosti pole.

5.2 Příklad spojité grupy symetrie a Goldstoneova věta

S diametrálně odlišnou situací se setkáme, budeme-li se zabývat teorií, jež je vybavena narozdíl od předcházejícího případu spojitou grupou symetrie. Typickým příkladem může být:

$$\mathcal{L} = \frac{1}{2}(\partial_\mu\phi)(\partial^\mu\phi) + \frac{1}{2}(\partial_\mu\psi)(\partial^\mu\psi) - V(\phi^2 + \psi^2) \tag{44}$$

kde

$$V(\phi^2 + \psi^2) = \frac{\mu^2}{2}(\phi^2 + \psi^2) + \frac{\lambda}{4}(\phi^2 + \psi^2)^2 \tag{45}$$

V tomto případě již máme jednoparametrickou spojitou grupu symetrií - grupu rotací v rovině $SO(2)$, neboť při transformaci typu :

$$\begin{pmatrix} \phi \\ \psi \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} \phi' \\ \psi' \end{pmatrix} := \begin{pmatrix} cos\omega & sin\omega \\ -sin\omega & cos\omega \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \phi \\ \psi \end{pmatrix} \tag{46}$$

zůstává lagrangián nezměněn. Pro minimum potenciálu (45) získáváme vztahy:

$$\frac{\partial V}{\partial \phi} = 0 \quad \Leftrightarrow \quad \phi[\mu^2 + \lambda(\phi^2 + \psi^2)] = 0$$

$$\frac{\partial V}{\partial \psi} = 0 \quad \Leftrightarrow \quad \psi[\mu^2 + \lambda(\phi^2 + \psi^2)] = 0$$

Vidíme,že pro případ μ^2 kladného máme jediné minimum v bodě $\phi = \psi = 0$, ovšem pro μ^2 záporné minima leží na kružnici

$$\phi^2 + \psi^2 = -\mu^2/\lambda$$

Opět si můžeme vybrat, který z bodů této množiny prohlásíme za vakuum. Jisté ovšem je, že jakýkoli výběr opět naruší $SO(2)$ symetrii. Vyberme například :

$$\phi_0 := \sqrt{-\mu^2/\lambda} \qquad\qquad \psi_0 := 0$$

Stejně jako v předchozím případě zaveďme nová pole:

$$\phi' := \phi - \phi_0 \qquad \psi' := \psi - \psi_0$$

Po dosazení do (45) dostáváme:

$$V(\phi', \psi') = -\mu^2\phi'^2 + \lambda\phi_0\phi'(\phi'^2 + \psi'^2) + \frac{\lambda}{4}(\phi'^2 + \psi'^2)^2 \tag{47}$$

(až na aditivní konstantu). To ovšem znamená, že lagrangián (44) se při přechodu k čárkovaným polím znění do tvaru:

$$\mathcal{L} = \frac{1}{2}(\partial_\mu\phi')(\partial^\mu\phi') + \frac{1}{2}(\partial_\mu\psi')(\partial^\mu\psi') + \mu^2\phi'^2 - \lambda\phi_0\phi'(\phi'^2 + \psi'^2) - \frac{\lambda}{4}(\phi'^2 + \psi'^2)^2 \tag{48}$$

Vidíme, že zatímco částice popsaná pomocí pole ϕ má hmotnost rovnou $\sqrt{-2\mu^2}$, částice pole ψ má hmotnost nulovou ! Takováto částice je obvykle nazývána Goldstoneovský boson. Toto je jeden z příkladů, o nichž mluví tzv. **Goldstoneova věta**. V nejjednodušší podobě může znít např. takto:

Máme-li teorii, jejíž Lagreangeova funkce je symetrická vůči nějaké spojité grupě transformací, jež ovšem není grupou symetrií vakua, objeví se v této teorii částice s nulovou hmotností - tzv. Goldstoneovy bosony.

V dalším paragrafu se pokusíme o demonstraci Higgsova mechanismu (viz 5.5) a za tím účelem bude užitečné přejít od začátku k polárním souřadnicím

$$\begin{aligned} \phi &= \rho\cos\theta \\ \psi &= \rho\sin\theta \end{aligned} \tag{49}$$

Transformace (46) mají v polárních souřadnicích tvar

$$\begin{pmatrix} \rho \\ \theta \end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix} \rho' \\ \theta' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \rho \\ \theta - \omega \end{pmatrix} \tag{50}$$

a pro lagrangián (44) dostáváme

$$\mathcal{L} = \frac{1}{2}(\partial_\mu\rho)^2 + \frac{1}{2}\rho^2(\partial_\mu\theta)^2 - V(\rho)$$

Potenciál (45) přejde do tvaru

$$V(\rho) = \frac{\mu^2}{2}\rho^2 + \frac{\lambda}{4}\rho^4$$

Vybereme $\rho_0 := a$ a $\theta_0 := 0$. Přejdeme-li opět k novým polím ρ' a θ' vztahy

$$\rho' := \rho - \rho_0 \qquad \theta' := \theta - \theta_0$$

dostaneme konečně

$$\mathcal{L} = \frac{1}{2}(\partial_\mu \rho')^2 + \frac{1}{2}(\rho' + \rho_0)^2(\partial_\mu \theta')^2 - \frac{\mu^2}{2}(\rho' + \rho_0)^2 - \frac{\lambda}{4}(\rho' + \rho_0)^4 \tag{51}$$

z čehož je jasné, že částice pole θ nemůže mít nenulovou hmotnost.Obecně můžeme říci, že ke každému parametru, jenž generuje transformaci, vůči níž jsou vakuové stavy stále invariantní (v našem případě kružnice) náleží jeden goldstoneovský boson. Konkrétně to dobře uvidíme v následujícím příkladu.

5.3 Narušení $SO(n)$ symetrie

Mějme ϕ $n-$komponentní reálné pole (symbol ϕ^i nechť značí jeho $i-$ tou složku) popisované lagrangiánem

$$\mathcal{L} = \frac{1}{2}\partial_\mu \phi^i \partial^\mu \phi^i - \frac{1}{2}\mu^2 \phi^i \phi^i - \frac{\lambda}{4}(\phi^i \phi^i)^2 \tag{52}$$

kde i je sumační index a probíhá množinu $\hat{n} \equiv \{1, 2, \ldots, n\}$. Lagrangián je evidentně invariantní vůči $n-$ rozměrným $SO(n)$ rotacím. Opět nás bude zajímat především případ, kdy je μ^2 záporné. V tom okamžiku tvoří minima potenciálu plášť koule v $\mathcal{R}^n$ definovaný:

$$\phi^i \phi^i = -\mu^2/\lambda$$

Vybereme libovolný bod ϕ_0 na této ploše a prohlásíme jej vakuem teorie. Dále zvolíme souřadný systém v $\mathcal{R}^n$ tak, že bude platit

$$\phi_0 = \begin{pmatrix} 0 \\ \vdots \\ 0 \\ \alpha \end{pmatrix} \tag{53}$$

Důležité je, že pro $n \geq 3$ existuje v $SO(n)$ netriviální podgrupa, vůči níž je ϕ_0 invariantní. Názorně si to můžeme představit např. na kouli. Libovolnou rotací podle středu přechází koule sama na sebe, tj. je $SO(3)$ invariantní. Označíme-li nyní na jejím povrchu nějaký bod, řekněme severní p˘l, potom již obecnou rotací nedostaneme tutéž situaci, tj. označený bod již nebude na místě severního p˘lu. Nicméně je možno se omezit na speciální třídu rotací - podle severojižní osy , jež nám opět kouli zachovává v původní podobě. Tyto transformace tvoří podgrupu $SO(2)$ v grupě $SO(3)$.

V obecném případě máme na počátku grupu $SO(n)$, jež má $n(n-1)/2$ generátorů, tj. každý její prvek je plně určen zadáním $n(n-1)/2$ reálných parametrů. Po volbě vakua zbyde podle předchozího podgrupa, jež stále zachovává jeho symetrii; je to grupa $SO(n-1)$ a ta je $(n-1)(n-2)/2$ parametrická.Označme $\mathcal{L}_{ij} (j \in \{1, \ldots, n\}, i < j)$ oněch $n(n-1)/2$ generátorů grupy rotací $SO(n)$. Mějme dále jejich matice $\mathbf{L}_{ij}$ ve výše zvolené bázi, tj. v té, v níž platí (53). Z nich vyberme ty matice $\mathbf{L}_{ij}$, jež generují přežívající symetrii, tj. podgrupu $SO(n-1) \subset\subset SO(n)$, vůči níž zůstává zvolené vakuum stále invariantní. Očíslujme si $\mathbf{L}_{ij}$ tak, aby to byly právě matice $\mathbf{L}_{ij}$

pro $j \in \{1, \dots, n-1\}, i < j$. (Můžeme to udělat například tak, že matice $\mathbf{L}_{ij}$ bude představovat rotace v rovině určené osami i a j.) Pro ně tedy platí

$$\mathbf{L}_{ij}\phi_0 = \phi_0 \qquad j \in \{1, \dots, n-1\}, i < j$$

Dále položme $\mathbf{K}_i := \mathbf{L}_{in}$, což jsou ostatní generátory; podgrupa generovaná těmito prvky tedy není grupou symetrie vakua. (Jsou to rotace v rovině, jež je určená osami i a n, jenže na ose n právě leží asymetrické vakuum a tím pádem $\mathbf{K}_i\phi_0 \neq \phi_0$.)
Souřadný systém jsme volili tak, že matice $\mathbf{L}_{ij}$ a $\mathbf{K}_i$ mají tvar

$$(\mathbf{L}_{ij})_{kl} = -i(\delta_{ik}\delta_{jl} - \delta_{il}\delta_{jk}) \qquad (\mathbf{K}_i)_{kl} = (\mathbf{L}_{in})_{kl} = -i(\delta_{ik}\delta_{nl} - \delta_{il}\delta_{nk}) \tag{54}$$

Nyní bychom opět mohli přejít transformací $\phi \to \phi - \phi_0$ k novým proměnným a spočíst lagrangián, ale budeme postupovat trochu jinak. Z postupu bude daleko jasnější role generátorů $\mathbf{K}_i$ v mechanismu vzniku členů popisujících Goldstoneovské bosony.
Definujme nová pole η a $\xi_j, i \in \{1, \dots, n-1\}$ (tzn. ke každému generátoru narušující se symetrie jedno) tak, aby platilo:

$$\phi = \exp i(\sum_i \xi_i \mathbf{K}_i/\alpha) \begin{pmatrix} 0 \\ \vdots \\ 0 \\ \eta + \alpha \end{pmatrix} \tag{55}$$

Všimněme si, jak působí jednotlivé operátory na vektor $\psi_i \equiv (\alpha + \eta)\delta_{in}$ (tj. vektor vpravo v definici (55)). Ze vztahu (54) plyne, že

$$(\mathbf{K}_i\psi)_j = \sum_l (\mathbf{K}_i)_{jl}\psi_l = \sum_l (\mathbf{L}_{in})_{jl}\psi_l =$$

$$= -i\sum_l (\delta_{ij}\delta_{nl} - \delta_{il}\delta_{nj})(\alpha + \eta)\delta_{ln} = -i(\alpha + \eta)\delta_{ij} \qquad i \in \{1, \dots n-1\} \tag{56}$$

Celkově tedy pro prvních $n-1$ složek platí

$$(i\sum_i \xi_i \mathbf{K}_i/\alpha\psi)_j = \xi_j(1 + \eta/\alpha) \qquad j \in \{1, \dots, n-1\} \tag{57}$$

Pro n-tou komponentu máme

$$(\mathbf{K}_i\psi)_n = \sum_l (\mathbf{K}_i)_{nl}\psi_l = \sum_l (\mathbf{L}_{in})_{nl}\psi_l =$$

$$= -i\sum_l (\delta_{in}\delta_{nl} - \delta_{il}\delta_{nn})(\alpha + \eta)\delta_{ln} = -i(\alpha + \eta)\delta_{in} \tag{58}$$

a jelikož sčítáme pouze přes $i \in \{1, \dots n-1\}$, znamená to

$$(i\sum_i \xi_i \mathbf{K}_i/\alpha\psi)_n = 0 \tag{59}$$

Při rozepsání do lineárních členů tedy dostáváme situaci analogickou dřívějším transformacím polí, protože:

$$\phi^i = \xi_i + \dots \qquad \phi^n = \alpha + \eta + \dots \tag{60}$$

a výrazy označené " ... " zahrnují členy vyššího než prvního řádu. Vidíme tedy, že jsme nadefinovali nová pole ξ_i a η ve shodě s dřívějšími případy, pouze jsme použili obecnější definici, jež má v aplikacích mnohé výhody.

Nyní již opět můžeme napsat lagrangián pomocí polí ξ_i a η :

$$\mathcal{L} = \frac{1}{2}[\partial_\mu \xi_i \partial^\mu \xi_i + \partial_\mu \eta \partial^\mu \eta] - \frac{1}{2}\mu^2(\alpha + \eta)^2 - \frac{\lambda}{4}(\alpha + \eta)^4 + \ldots \tag{61}$$

kde opět "..." značí ostatní členy (tj. nelineární a smíšené s derivacemi, jež ovšem představují vzájemnou interakci a dynamiku a nemají vliv na spektrum uvažovaných částic ξ_i a η). Důležité je, že tento lagrangián neobsahuje žádný člen typu $k\xi_i^2$, tj. všechna pole ξ_i jsou Goldstoneovská ! Obecně tedy můžeme říci, že ke každému generátoru $\mathbf{K}_i$ odpovídajícímu narušené symetrii existuje goldstoneovský boson ξ_i.

5.4 Goldstoneovy bosony v obecném případě

Na několika příkladech jsme si ukázali, že spontánní narušení spojité grupy symetrie vede ve shodě s Goldstoneovou větou k předpovědi existence Goldstoneových bosonů, tj. bosonů nulové hmotnosti. Potíž je ovšem v tom, že částice takovýchto vlastností nikdy nebyly pozorovány. Zdálo by se tedy, že v přírodě se případ spontánního narušení spojitých grup symetrií nerealizuje. Existuje však speciální třída teorií, v nichž není narušení symetrie provázeno vznikem takovýchto částic - chimér. Jedná se o tzv. kalibrační teorie, o nichž je pojednáváno v dalších paragrafech. V nich je možno jistým způsobem nazývaným *Higgsův mechanismus* docílit odstranění všech potíží spojených s předpověďmi Goldstoneových bosonů.

5.5 Higgsův mechanismus v kalibračních teoriích

O demonstraci této procedury se pokusíme nejprve v případě velmi jednoduché teorie, např. té z odstavce (5.2)

V první řadě bychom se ovšem měli zmínit o vlastní konstrukci kalibrační teorie z teorie dané a to ukážeme na příkladě jednoduché analogie s klasickou elektrodynamikou.

Mějme teorii popisující několik (n) polí, jež jsou sdružena do vektoru ϕ. Lagrangián popisující dynamiku tohoto systému nechť je v nejjednodušším rozumném tvaru, tj. je funkcí pouze polí a jejich prvních derivací : $\mathcal{L}(\phi, \partial_\mu\phi)$. Nechť je dále $\mathcal{L}$ invariantní vůči jednoparametrické spojité grupě transformací typu

$$\phi \rightarrow e^{i\mathbf{Q}\omega}\phi \tag{62}$$

kde $\mathbf{Q}$ je hermitovská matice a ω reálný parametr, jenž prozatím nezávisí na souřadnicích, tj. pole ϕ transformujeme globálně. Infinitesimální transformace má tedy tvar

$$\delta\phi = i\mathbf{Q}\phi(\delta\omega)$$

Pokusme se nyní zobecnit naše úvahy na případ, kdy parametr transformace ω bude záviset na souřadnicích, tj. $\omega = \omega(x)$. Rozepíšeme-li si nyní infinitesimální transformaci členů tvaru derivací, dostaneme

$$\delta(\partial_\mu\phi) = i\mathbf{Q}(\partial_\mu\phi)\delta\omega + i\mathbf{Q}\phi\partial_\mu(\delta\omega) \tag{63}$$

Aby naše teorie byla invariantní i vůči transformacím s parametrem ω závislým na souřadnici, musí platit

$$\delta\mathcal{L} = \frac{\partial\mathcal{L}}{\partial\phi}\delta\phi + \frac{\partial\mathcal{L}}{\partial(\partial_\mu\phi)}\delta(\partial_\mu\phi) = 0$$

což ovšem není splněno kvůli druhému členu ve výrazu (63). Přeformulovat teorii tak, aby se stala invariantní i vůči transformacím s $\omega(x)$, lze například tak, že zavedeme další, tzv. *kalibrační* pole A_μ, jež se bude transformovat způsobem

$$\delta A_\mu = -\frac{1}{g}\partial\mu(\delta\omega)$$

kde g je libovolná konstanta. Dále je nutno vybavit tuto teorii novým lagrangiánem, jenž již bude invariantní vůči transformaci (62) (s $\omega = \omega(x)$). O takovéto teorii potom říkáme, že vyhovuje tzv. *principu lokální kalibrační invariance*. Snadno se přesvědčíme, že zavedeme-li do původního lagrangiánu namísto obyčejných parciálních derivací ∂_μ tzv. kovariantní derivace D_μ způsobem

$$\partial_\mu\phi \to D_\mu\phi = \partial_\mu\phi + ig\mathbf{Q}A_\mu\phi$$

bude již nový lagrangián invariantní vůči (62). Ještě je ovšem nutné všimnout si, že lagrangián

$$\mathcal{L}(\phi, D_\mu\phi) \tag{64}$$

není plnohodnotným lagrangiánem popisujícím fyziku polí ϕ a A_μ , poněvadž pokusíme-li se vypočíst z něj pohybové rovnice pole A_μ, dostaneme vztah, jenž vůbec neobsahuje derivace, tj. je to jen jakási vazba a pole A_μ není z fyzikálního hlediska interpretovatelné jako skutečné pole, jež se např. může vyvíjet v čase. Z tohoto důvodu je třeba do kalibračně-invariantního lagrangiánu (64) doplnit ještě tzv. kinetický člen obsahující derivace, jenž ovšem nesmí narušit kalibrační invarianci (64). Formálně nejjednodušší člen vyhovující těmto podmínkám má tvar $(F_{\mu\nu})^2$, kde

$$F_{\mu\nu} = \partial_\mu A_\nu - \partial_\nu A_\mu$$

Obvykle se kinetický člen normuje tak, že výsledný plnohodnotný lagrangián teorie má tvar

$$\mathcal{L}(\phi, D_\mu\phi) - \frac{1}{4}(F_{\mu\nu})^2 \tag{65}$$

(V případě, že vektor ϕ sestavíme z polí popisujících klasické nabité částice, lze (65) interpretovat jako lagrangián elektrodynamiky s tzv. minimální interakcí.)

Vraťme se nyní k teorii, na níž jsme chtěli demonstrovat Higgsův mechanismus původně, tj. k (5.2). Pomocí původního lagrangiánu napsaného v polárních souřadnicích zformulujeme pomocí předchozího příkladu kalibračně invariantní analog této teorie. Znamená to zavést kovariantní derivace

$$\begin{aligned} D_\mu\rho' &= \partial_\mu\rho' \\ D_\mu\theta' &= \partial_\mu\theta' + gA_\mu \end{aligned} \tag{66}$$

v nichž vystupuje nové (kalibrační) pole A_μ. Dosazením kovariantních derivací a zavedením minimálního kinetického členu do lagrangiánu (51) máme

$$\mathcal{L} = -\frac{1}{4}(\partial_\mu A_\nu - \partial_\nu A_\mu)^2 + \frac{1}{2}(\partial_\mu\rho')^2 + \frac{1}{2}(\rho' + \rho_0)^2(\partial_\mu\theta' + gA_\mu)^2 - V(\rho' - \rho_0) \tag{67}$$

Zaveďme nyní nové pole C_μ vztahem

$$C_\mu = A_\mu + \frac{1}{g}\partial_\mu\theta$$

Tím dostane lagrangián výhodný tvar

$$\mathcal{L} = -\frac{1}{4}(\partial_\mu C_\nu - \partial_\nu C_\mu)^2 + \frac{1}{2}(\partial_\mu\rho')^2 + \frac{1}{2}(\rho' + \rho_0)^2(C_\mu)^2 - V(\rho' - \rho_0) \tag{68}$$

z něhož již můžeme udělat důležitý závěr o částicích této teorie. Především vidíme, že úplně zmizelo goldstoneovské pole θ. Namísto něj se objevilo nové vektorové pole C_μ , pro jehož částice platí $m_C^2 = \rho_0^2$ tj. jejich hmota je nenulová !

Toto byl jednoduchý případ , kdy se podařilo z teorie zavedením lokální kalibrační invariance odstranit Goldstoneovské bosony. Na takovouto možnost upozornil mezi prvními P. Higgs v roce 1964, a podle něj nese tato procedura název *Higgsův mechanismus*.

5.6 Higgsův mechanismus v případě neabelovské kalibrační grupy

Mějme teorii, jejíž lagrangián je invariantní vůči transformacím typu

$$\phi \to \phi' = \phi + \delta\phi, \qquad \delta\phi = \mathbf{T}_i \delta\omega^i \phi \tag{69}$$

kde $\mathbf{T}^i$ jsou generátory dané grupy symetrií (tj. operátory náležející lieovské algebře dané lieovské grupy) splňující komutační relace

$$[\mathbf{T}_j, \mathbf{T}_k] = c^i_{jk} \mathbf{T}_i$$

Opět ve shodě se zaváděním lokální kalibrační invariance v kapitole (7.1) předpokládejme závislost parametrů transformace ω^i na souřadnicích. V tomto okamžiku se teorie stává neinvariantní vůči transformacím (69) a musíme opět zavést kovariantní derivaci

$$\mathrm{D}_\mu \phi = \partial_\mu \phi + g \mathbf{T}_i A^i_\mu \phi \tag{70}$$

a předpokládat transformační vlastnosti nových polí A^i ve tvaru

$$\delta A^i_\mu = c^i_{jk} \delta\omega^j A^k_\mu - \frac{1}{g} \partial_\mu \delta\omega^i \tag{71}$$

Tím pádem již lagrangián tvaru $\mathcal{L}(\phi, \mathrm{D}_\mu \phi)$ vyhovuje požadavku lokální kalibrační invariantnosti.Zbývá tedy zavést ještě kinetický člen pro kalibrační pole a ten (za podmínky tzv. minimální interakce) zavedeme pomocí členu

$$F^i_{\mu\nu} := \partial_\mu A^i_\nu - \partial_\nu A^i_\mu + g c^i_{jk} A^j_\mu A^k_\nu \tag{72}$$

Snadno se přesvědčíme o tom, že pro takto zavedený výraz $F^i_{\mu\nu}$ platí vztah

$$\delta F^i_{\mu\nu} = c^i_{jk} \delta\omega^j F^k_{\mu\nu} \tag{73}$$

neboť přímým použitím transformačních vlastností (71) získáme

$$\begin{aligned} \delta F^i_{\mu\nu} &= \partial_\mu \delta A^i_\nu - \partial_\nu \delta A^i_\mu + g c^i_{jk} [A^k_\nu \delta A^j_\mu + A^j_\mu \delta A^k_\nu] = \\ &= c^i_{jk} \partial_\mu (\delta\omega^j A^k_\nu) - c^i_{jk} \partial_\nu (\delta\omega^j A^k_\mu) + g c^i_{jk} [A^k_\nu \delta A^j_\mu + A^j_\mu \delta A^k_\nu] \end{aligned} \tag{74}$$

Upravíme-li ještě

$$g c^i_{jk} [A^k_\nu \delta A^j_\mu + A^j_\mu \delta A^k_\nu] =$$

$$= g c^i_{jk} [A^k_\nu (c^j_{lm} \delta\omega^l A^m_\mu - \frac{1}{g} \partial_\mu \delta\omega^j) + A^j_\mu (c^k_{lm} \delta\omega^l A^m_\nu - \frac{1}{g} \partial_\nu \delta\omega^k)] =$$

$$= -c^i_{jk} \partial_\mu (\delta\omega^j) A^k_\nu - c^i_{jk} \partial_\nu (\delta\omega^k) A^j_\mu + g c^i_{jk} [A^k_\nu c^j_{lm} \delta\omega^l A^m_\mu + A^j_\mu c^k_{lm} \delta\omega^l A^m_\nu] = \tag{75}$$

$$= -c^i_{jk} \partial_\mu (\delta\omega^j) A^k_\nu - c^i_{jk} \partial_\nu (\delta\omega^k) A^j_\mu \tag{76}$$

Celkově tedy po dosazení do (74) a použití $c^i_{jk} = -c^i_{kj}$ dostaneme

$$\delta F^i_{\mu\nu} = c^i_{jk} \delta\omega^j F^k_{\mu\nu} \tag{77}$$

Z toho mimo jiné plyne, že invariantnosti dosáhneme např. volbou kinetického členu ve tvaru $F^i_{\mu\nu}F^{i\,\mu\nu}$, protože

$$\delta(F^i_{\mu\nu}F^{i\,\mu\nu}) = 0 \tag{78}$$

Máme tedy lokálně kalibračně invariantní teorii a nyní přistoupíme k demonstraci Higgsova mechanismu. Uvažujeme-li nějakou teorii, v níž vystupují goldstoneovské bosony tj. Lagrangián této teorie neobsahuje kvadráty některých polí, viz např. narušení grupy $SO(n)$, můžeme vždy vybrat kalibraci takovým způsobem, že po obvyklé redefinici polí se neobjeví Goldstoneovské bosony, nýbrž dojde k tomu, že původní kalibrační pole získají hmotnosti podle charakteru narušení symetrie. Lépe to uvidíme na konkrétním případě:

Mějme teorii, jejíž lagrangián má tvar

$$\mathcal{L} = \frac{1}{2}\partial_\mu\phi\partial^\mu\phi + \dots \tag{79}$$

(Poznamenejme, že stačí uvažovat pouze členy obsahující derivace, neboť právě na ně je vázána přítomnost Goldstoneových bosonů). Po zavedení kovariantní derivace (70), dostaneme členy typu

$$\mathcal{L} = \frac{1}{2}(\partial_\mu\phi + g\mathbf{T}_i A^i_\mu\phi)(\partial^\mu\phi + g\mathbf{T}_j A^j_\mu\phi) + \dots \tag{80}$$

Provedeme-li nyní středování polí, tj. zavedeme-li pole $\phi' = \phi - \phi_0$, kde ϕ_0 značí asymetrické vakuum, v relacích ϕ' bude mít $\mathcal{L}$ tvar

$$\mathcal{L} = \frac{1}{2}[\partial_\mu(\phi' + \phi_0) + g\mathbf{T}_i A^i_\mu(\phi' + \phi_0)][\partial^\mu(\phi' + \phi_0) + g\mathbf{T}_j A^j_\mu(\phi' + \phi_0)] + \dots \tag{81}$$

což po roznásobení povede na hmotový člen kalibračních polí odpovídajících operátorům generujícím narušené symetrie, tj. těm A^i, pro něž $\mathbf{T}_i\phi_0 \neq 0$. Ostatní kalibrační pole zůstanou bez hmotnosti. To znamená, že vhodným výběrem narušení symetrie je možno upravit spektrum hmotností částic, které taková teorie předpovídá.

6 Teorie klasických kalibračních polí

6.1 Klasické kalibrační teorie

Klasické kalibrační teorie polí představují velice speciální třídu teorií.Jejich pomocí se však úspěšně daří popisovat systémy, jež dřívější teorie popsat nedokázaly. Základní charakteristikou jakékoli kalibrační teorie může být například fakt, že jednoduchým způsobem pomocí tzv. *principu lokální kalibrační invariance* zobecňuje stávající teorii a zároveň umožňuje vysvětlit interakce polí pouze jako důsledek tohoto principu. Dá se říci, že vlastně většina moderních a jednotících teorií je budována právě na tomto základě a výsledky dosažené touto cestou jsou velmi dobré. Připomeňme např. úspěchy tzv. Standardního modelu elektroslabých interakcí, jehož triumfem bylo experimentální potvrzení mnoha předpovědí v 80. letech. My se zde spokojíme pouze s "letmým nahlédnutím pod pokličku " této fyzikální problematiky tak, jak je uvedeno například v článku [1].

Začněme s teorií popisující n-tici polí ϕ^i Mějme dále lokální lagrangián $\mathcal{L}(\phi^i, \partial_\mu\phi^i)$. Předpokládejme, že tento lagrangián je invariantní vůči infinitesimální transformaci

$$\phi^i \to \phi'^i = \phi^i + \delta\phi^i \qquad \delta\phi^i = (\mathbf{T}_p)^i_j\phi^j\delta\omega^p \qquad p \in \{1, \dots, s\} \tag{82}$$

kde $\delta\omega^p$ je s-tice infinitesimálních parametrů nezávislých na souřadnicích a $\mathbf{T}_k$ jsou lineární operátory na n-rozměrném prostoru obsahujícím vektory ϕ, $(\mathbf{T}_p)^i_j$ potom značí maticové elementy

k-tého operátoru ve standardní bázi) nazývané generátory transformace; příkladem takovéto transformace může být třeba $\phi'^i = \exp\left(\omega^p(\mathbf{T}_p)\right)^i_j \phi^j$. V takovém případě říkáme, že naše teorie je *invariantní vůči (globálním) kalibračním transformacím.*

Předpokládejme od počátku, že uvažované transformace tvoří lieovskou grupu, tzn. že generátory $\mathbf{T}^p$ jsou v její lieovské algebře svázány vztahem

$$[\mathbf{T}_k, \mathbf{T}_l] = c^i_{kl}\mathbf{T}_i \tag{83}$$

Invariantnost lagrangiánu vůči transformaci (134) znamená, že

$$\delta\mathcal{L} = \frac{\partial\mathcal{L}}{\partial\phi^i}\delta\phi^i + \frac{\partial\mathcal{L}}{\partial(\partial_\mu\phi^i)}\delta(\partial_\mu\phi^i) = 0 \qquad i \in \{1, \ldots, n\} \tag{84}$$

Dosazením $\delta\phi^i = (\mathbf{T}_p)^i_j\phi^j\delta\omega^p$ a $\delta(\partial_\mu\phi^i) = (\mathbf{T}_p)^i_j(\partial_\mu\phi^j)\delta\omega^p$ a užitím vztahu pro derivaci součinu dostáváme

$$0 = \Big\{\frac{\partial\mathcal{L}}{\partial\phi^i}(\mathbf{T}_p)^i_j\phi^j + \frac{\partial\mathcal{L}}{\partial(\partial_\mu\phi^i)}(\mathbf{T}_p)^i_j(\partial_\mu\phi^j)\Big\}\delta\omega^p = \tag{85}$$

$$= \Big\{\Big[\frac{\partial\mathcal{L}}{\partial\phi^i} - \frac{\partial}{\partial x^\mu}\Big(\frac{\partial\mathcal{L}}{\partial(\partial_\mu\phi^i)}\Big)\Big](\mathbf{T}_p)^i_j\phi^j + \frac{\partial}{\partial x^\mu}\Big(\frac{\partial\mathcal{L}}{\partial(\partial_\mu\phi^i)}(\mathbf{T}_p)^i_j\phi^j\Big)\Big\}\delta\omega^p =$$

$$= \frac{\partial}{\partial x^\mu}\Big(\frac{\partial\mathcal{L}}{\partial(\partial_\mu\phi^i)}(\mathbf{T}_p)^i_j\phi^j\Big)\delta\omega^p$$

přičemž poslední rovnítko plyne z platnosti Eulerových rovnic pole. V případě potřeby můžeme nyní získat ke každému generátoru $(\mathbf{T}_p)^i_j$ zachovávající se čtyřproud:

$$J^\mu_p = \frac{\partial\mathcal{L}}{\partial(\partial_\mu\phi^i)}(\mathbf{T}_p)^i_j\phi^j$$

Nás ovšem více bude zajímat situace, kdy dochází k tomu, že transformace pole není v každém bodě stejná, jinými slovy že parametry ω^p jsou funkcemi souřadnic $\omega^p(x)$ Zde už je situace složitější. Předně platí

$$\partial_\mu\delta\phi^i = \delta\omega^p(\mathbf{T}_p)^i_j(\partial_\mu\phi^j) + (\partial_\mu\delta\omega^p)(\mathbf{T}_p)^i_j\phi^j$$

Tím pádem variace (136) přejde do tvaru

$$\delta\mathcal{L} = \frac{\partial\mathcal{L}}{\partial\phi^i}(\mathbf{T}_p)^i_j\phi^j\delta\omega^p + \frac{\partial\mathcal{L}}{\partial(\partial_\mu\phi^i)}\Big(\delta\omega^p(\mathbf{T}_p)^i_j(\partial_\mu\phi^j) + (\partial_\mu\delta\omega^p)(\mathbf{T}_p)^i_j\phi^j\Big) =$$

$$= \Big\{\frac{\partial\mathcal{L}}{\partial\phi^i}(\mathbf{T}_p)^i_j\phi^j + \frac{\partial\mathcal{L}}{\partial(\partial_\mu\phi^i)}(\mathbf{T}_p)^i_j(\partial_\mu\phi^j)\Big\}\delta\omega^p + \frac{\partial\mathcal{L}}{\partial(\partial_\mu\phi^i)}(\partial_\mu\delta\omega^p)(\mathbf{T}_p)^i_j\phi^j =$$

$$= \frac{\partial\mathcal{L}}{\partial(\partial_\mu\phi^i)}(\partial_\mu\delta\omega^p)(\mathbf{T}_p)^i_j\phi^j \tag{86}$$

přičemž poslední rovnítko je důsledkem platnosti vztahu (137). Vidíme tedy, že tyto transformace již nejsou symetriemi uvažovaného lagrangiánu, neboť výraz (138) již není obecně nulový. Říkáme, že takováto teorie *není lokálně kalibračně invariantní.* (Lokálnost souvisí právě s tím, že invarianci narušují právě transformace lokálního charakteru, tj. s koeficienty ω^p závislými na souřadnicích). Pokusme se nyní *zobecnit* uvažovanou teorii takovým způsobem, aby vyhovovala tzv. *principu lokální kalibrační invariance*, tj. modifikovat ji tak, aby též lokální kalibrační transformace ponechávaly lagrangián beze změny.Právě to je klíčový moment celé teorie kalibračních polí a má

dalekosáhlé důsledky v celé moderní fyzice.
Vycházejme tedy z původní teorie s lagrangiánem $\mathcal{L}$ a uvažujme lokální transformace typu

$$\delta\phi^i = (\mathbf{T}_p)^i_j \phi^j \delta\omega^p(x) \tag{87}$$

K nim náleží transformace složek derivací

$$\partial_\mu \delta\phi^i = \delta\omega^p (\mathbf{T}_p)^i_j (\partial_\mu \phi^j) + (\partial_\mu \delta\omega^p)(\mathbf{T}_p)^i_j \phi^j \tag{88}$$

která, jak víme, má na svědomí narušení lokální kalibrační invariance. Tu můžeme zachránit tak, že zavedeme m-tici dalších polí A'^k a zařídíme, aby v novém lagrangiánu příspěvek v (138) od tohoto pole vykompenzoval nepříjemný člen kazící invariantnost. Pro popis takovéhoto systému polí budeme uvažovat lagrangián tvaru

$$\mathcal{L}'(\phi^i, \partial_\mu \phi^i, A'^k) \quad i \in \{1, \ldots, n\}, k \in \{1, \ldots, m\} \tag{89}$$

a transformační vlastnosti polí ϕ^i ve vztahu (139) doplníme o předpoklad transformačních vlastností nového pole A' :

$$\delta A'^k = \delta\omega^p (\mathbf{U}_p)^k_l A'^l + \mathbf{C}^k_{\mu,p} \partial_\mu \delta\omega^p \tag{90}$$

kde $\mathbf{U}_p$ jsou lineární operátory (reprezentované opět maticemi ve standardní bázi se složkami $(\mathbf{U}_p)^k_l$) působící na m-tici A'^k, $\mathbf{C}^k_{\mu p}$ jsou koeficienty určující charakter transformace nových polí v závislosti na tvaru koeficientů $\delta\omega^p$ respektive jejich derivací $\partial_\mu \delta\omega^p$. Konkrétní tvar $\mathbf{U}_p$ a $\mathbf{C}^k_{\mu,p}$ bude určen dále.
Lokální kalibrační invariance nové teorie vyžaduje, aby platilo

$$\delta\mathcal{L}' = \frac{\partial\mathcal{L}'}{\partial\phi^i}\delta\phi^i + \frac{\partial\mathcal{L}'}{\partial(\partial_\mu\phi^i)}\delta(\partial_\mu\phi^) + \frac{\partial\mathcal{L}'}{\partial A'^k}\delta A'^k = 0 \tag{91}$$

Odtud dosazením (139),(140) a (142) dostáváme po provedení soustavu rovnic (první náleží koeficientům u $\delta\omega^p$, druhá koeficientům u $\partial_\mu\delta\omega^p$):

$$\frac{\partial\mathcal{L}'}{\partial\phi^i}(\mathbf{T}_p)^i_j\phi^j + \frac{\partial\mathcal{L}'}{\partial(\partial_\mu\phi^i)}(\mathbf{T}_p)^i_j(\partial_\mu\phi^j) + \frac{\partial\mathcal{L}'}{\partial A'^k}(\mathbf{U}_p)^k_l A'^l = 0 \tag{92}$$

$$\frac{\partial\mathcal{L}'}{\partial(\partial_\mu\phi^i)}(\mathbf{T}_p)^i_j\phi^j + \frac{\partial\mathcal{L}'}{\partial A'^k}\mathbf{C}^k_{\mu,p} = 0 \tag{93}$$

Z těchto rovnic bychom rádi získali explicitní závislost $\mathcal{L}'$ na A'^k. To ovšem znamená, že lineární soustava (145) musí být řešitelná vzhledem k parciálním derivacím $\frac{\partial\mathcal{L}'}{\partial A'^k}$. To lze splnit jen tehdy, bude-li matice této soustavy , tj. matice

$$\mathbf{D} := \begin{pmatrix} \mathbf{C}^1_{0,1} & \ldots & \mathbf{C}^1_{3,s} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ \mathbf{C}^m_{0,1} & \ldots & \mathbf{C}^m_{3,s} \end{pmatrix}$$

čtvercová, tzn. počet polí A'^k musí být roven počtu kombinací μ, p a to lze pouze tehdy, platí-li $m = 4s$. (Navíc matice $\mathbf{D}$ musí být invertibilní, tj. regulární.) Celkem to tedy znamená, že počet komponent pole A' roven čtyřnásobku počtu generátorů kalibrační transformace, neboli ke každému generátoru $\mathbf{T}_p$máme jedem čtyřvektor $A'^{p\mu}$. Zaveďme proto ještě namísto m polí A'^k s polí-čtyřvektorů $A^{p,\mu}$ vztahem

$$A^{p,\mu} = (\mathbf{C}^{-1})^{p,\mu}_k A'^k \tag{94}$$

(Matice $(\mathbf{C}^{-1})_k^{p,\mu}$ je inversní k matici $\mathbf{D}$,přičemž zachováváme logickou strukturu koeficientů tak, že platí $(\mathbf{C}^{-1})_k^{p,\mu}\mathbf{C}^l_{p,\mu} = \delta_{kl}$.) Pomocí něj můžeme napsat (145) ve tvaru

$$\frac{\partial \mathcal{L}'}{\partial(\partial_\mu \phi^i)}(\mathbf{T}_p)^i_j(\partial_\mu \phi^j) + \frac{\partial \mathcal{L}'}{\partial A^{p,\mu}} = 0 \tag{95}$$

Co to znamená ? Rovnice (147) nám vlasně říká, že v novém lagrangiánu se můžou nová pole A objevit pouze ve výrazech typu

$$\mathrm{D}_\mu \phi^i \equiv \frac{\partial \phi^i}{\partial x^\mu} - (\mathbf{T}_p)^i_j \phi^j A^{p,\mu} \tag{96}$$

(bude-li tomu tak, je (147) splněna automaticky). Transformační vlastnosti pole A budou tím pádem

$$\delta A^{p,\mu} = \delta\omega^r (\mathbf{C}^{-1})_k^{p,\mu}(\mathbf{U}_r)^k_l \mathbf{C}^l_{q,\nu} A^{q,\nu} + \partial_\mu \delta\omega^p \tag{97}$$

Navíc lagrangián musí mít tvar

$$\mathcal{L}'(\phi^i, \partial_\mu \phi^i, A^{p,\mu}) = \mathcal{L}''(\phi^i, \mathrm{D}_\mu \phi^i) = \mathcal{L}''(\phi^i, \frac{\partial \phi^i}{\partial x^\mu} - (\mathbf{T}_p)^i_j \phi^j A^{p,\mu}) \tag{98}$$

Za těchto podmínek tedy bude teorie popisovaná pomocí $\mathcal{L}''$ lokálně kalibračně invariantní. Nalezněme nyní explicitní tvar funkce $\mathcal{L}''$. Podmínky na derivace $\mathcal{L}'$ a $\mathcal{L}''$ dávají

$$\frac{\partial \mathcal{L}'}{\partial \phi^i} - \frac{\partial \mathcal{L}''}{\partial \phi^i} + \frac{\partial \mathcal{L}''}{\partial(\mathrm{D}_\mu \phi^j)}(\mathbf{T}_q)^i_j A^{q,\mu} = 0 \tag{99}$$

$$\frac{\partial \mathcal{L}'}{\partial(\partial_\mu \phi^i)} - \frac{\partial \mathcal{L}''}{\partial(\mathrm{D}_\mu \phi^i)} = 0 \tag{100}$$

$$\frac{\partial \mathcal{L}'}{\partial A'^k} + \frac{\partial \mathcal{L}''}{\partial(\mathrm{D}_\mu \phi^i)}(\mathbf{T}_q)^i_j \phi^j (\mathbf{C}^{-1})_k^{q,\mu} = 0 \tag{101}$$

Dosazením těchto výrazů do (144) získáme rovnici pro finální lagrangián $\mathcal{L}''$

$$\frac{\partial \mathcal{L}'}{\partial \phi^i}(\mathbf{T}_p)^i_j \phi^j + \frac{\partial \mathcal{L}'}{\partial(\partial_\mu \phi^i)}(\mathbf{T}_p)^i_j(\partial_\mu \phi^j) + \frac{\partial \mathcal{L}'}{\partial A'^k}(\mathbf{U}_p)^k_l A'^l =$$

$$= \frac{\partial \mathcal{L}''}{\partial \phi^i}(\mathbf{T}_p)^i_j \phi^j + \frac{\partial \mathcal{L}''}{\mathrm{D}_\mu \phi^i}(\mathbf{T}_p)^i_j(\partial_\mu \phi^j) +$$

$$+ \frac{\partial \mathcal{L}''}{\partial(\mathrm{D}_\mu \phi^i)} \phi^j A^{q,\nu} \{[\mathbf{T}_p, \mathbf{T}_q]^i_j \delta^\mu_\nu - (\mathbf{C}^{-1})_k^{r,\mu}(\mathbf{U}_p)^k_l \mathbf{C}^l_{q,\nu}(\mathbf{T}_r)^i_j\} = 0 \tag{102}$$

Všimneme-li si, že první dva členy jsou formálně shodné s rozpisem variace původního lagrangiánu, pouze s tím rozdílem, že na místě, kde původně stály obyčejné derivace nyní vystupují kovariantní, můžeme učinit důležitý závěr : Zaměníme-li v původním lagrangiánu zcela formálně obyčejné derivace ∂_μ kovariantními, tj. postulujeme-li platnost vztahu

$$\mathcal{L}''(\phi^i, \mathrm{D}_\mu \phi^i) = \mathcal{L}(\phi^i, \mathrm{D}_\mu \phi^i) \tag{103}$$

stačí pro lokální kalibrační invariantnost $\mathcal{L}''$ již jenom vynulovat třetí člen v (154), čímž zároveň získáme explicitní vyjádření neznámých koeficientů $\mathbf{C}^j_{p,\mu}$ a operátorů $\mathbf{U}_r$:

$$[\mathbf{T}_p, \mathbf{T}_q]^i_j \delta^\mu_\nu - (\mathbf{C}^{-1})_k^{r,\mu}(\mathbf{U}_p)^k_l \mathbf{C}^k_{q,\nu}(\mathbf{T}_r)^i_j = 0 \tag{104}$$

neboli po zavedení strukturních kontant

$$[c^r_{pq}\delta^\mu_\nu - (\mathbf{C}^{-1})^{r,\mu}_k(\mathbf{U}_p)^k_l\mathbf{C}^l_{q,\nu}](\mathbf{T}_r)^i_j = 0 \tag{105}$$

což vzhledem k lineární nezávislosti operátorů $\mathbf{T}_r$ dává vztahy pro $\mathbf{C}^j_{p,\mu}$ a $\mathbf{U}_r$:

$$(\mathbf{C}^{-1})^{r,\mu}_k(\mathbf{U}_p)^k_l\mathbf{C}^l_{q,\nu} = c^r_{pq}\delta^\mu_\nu \tag{106}$$

Z tohoto vztahu dostaneme již konkrétní tvar transfromačních vlastností kalibračních polí definovaných vztahem (149)

$$\delta A^{p,\mu} = \delta\omega^r(\mathbf{C}^{-1})^{p,\mu}_k(\mathbf{U}_r)^k_l\mathbf{C}^l_{q,\nu}A^{q,\nu} + \partial_\mu\delta\omega^p = \delta\omega^r c^p_{rq}\delta^\mu_\nu A^{q,\nu} + \partial_\mu\delta\omega^p \tag{107}$$

což konečně dává

$$\delta A^{p,\mu} = \delta\omega^r c^p_{rq}A^{q,\mu} + \partial_\mu\delta\omega^p \tag{108}$$

Shrneme-li celou situaci, dospíváme od počátečního výběru kalibrační grupy (pomocí její Lieovy algebry tvořené generátory $\mathbf{T}_j$ svázanými komutátorem (135)) až ke konkrétnímu tvaru lokálně kalibračně invariantní teorie, jejíž lagrangián je určen vztahem (155) a transformační vlastnosti v ní vystupujících polí jsou určeny vztahy (134) a (160). Naše práce však ještě zdaleka není u konce. V lagrangiánu $\mathcal{L}(\phi^i, \mathrm{D}_\mu\phi^i)$ totiž vůbec nevystupují derivace kalibračních polí A^p, což znamená, že použitím Eulerových rovnic nezískáme pro kalibrační pole diferenciální rovnice, která by popisovaly jeho časový vývoj, nýbrž pouze vztahy odpovídající jakýmsi “vazbám”. Stávající lagrangián je tedy nutné doplnit o výrazy, jež tuto nepříjemnost odstraní, o tzv. *kinetický člen*; označme si jej $\mathcal{L}_0$.

Základním požadavkem, který na $\mathcal{L}_0$ naložíme, bude jeho *závislost na polních funkcích pouze do prvních derivací* , tj

$$\mathcal{L}_0(A^{p,\mu}, \partial_\nu A^{p,\mu})$$

Požadavek invariantnosti $\mathcal{L}_0$ znamená, že musí platit

$$\frac{\partial\mathcal{L}_0}{\partial A^{p,\mu}}\delta A^{p,\mu} + \frac{\partial\mathcal{L}_0}{\partial(\partial_\nu A^{p,\mu})}\delta(\partial_\nu A^{p,\mu}) = 0 \tag{109}$$

Dosazením vztahu (160) a jeho derivace dostaneme z lineární nezávislosti $\delta\omega^r$, $\partial_\nu\delta\omega^r$ a $\partial_\nu\partial_\mu\delta\omega^r$ trojici vztahů

$$\frac{\partial\mathcal{L}_0}{\partial A^{p,\mu}}c^p_{qr}A^{q,\mu} + \frac{\partial\mathcal{L}_0}{\partial(\partial_\nu A^{p,\mu})}c^p_{qr}\partial_\nu A^{q,\mu} = 0 \tag{110}$$

$$\frac{\partial\mathcal{L}_0}{\partial A^{p,\mu}} + \frac{\partial\mathcal{L}_0}{\partial(\partial_\mu A^{r,\nu})}c^r_{pq}A^{q,\nu} = 0 \tag{111}$$

$$\frac{\partial\mathcal{L}_0}{\partial(\partial_\nu A^{p,\mu})} + \frac{\partial\mathcal{L}_0}{\partial(\partial_\mu A^{p,\nu})} = 0 \tag{112}$$

Ze vztahu (164) snadno získáváme, že derivace kalibračních polí mohou v $\mathcal{L}_0$ vystupovat pouze společně ve členech tvaru

$$A^p_{[\mu,\nu]} \equiv \partial_\mu A^{p,\nu} - \partial_\nu A^{p,\mu} \tag{113}$$

Rovnici (163) pomocí této kombinace můžeme přepsat ve tvaru

$$\frac{\partial\mathcal{L}_0}{\partial A^{p,\mu}} - \frac{\partial\mathcal{L}_0}{\partial(\partial_\mu A^r_{[\nu,\mu]})}c^r_{pq}A^{q,\nu} = 0 \tag{114}$$

Aby byla tato rovnice splněna, můžou se v $\mathcal{L}_0$ vyskytovat derivace a pole pouze v kombinacích typu

$$F^p_{\mu\nu} \equiv A^p_{[\mu,\nu]} - c^p_{qr}(A^{q,\mu}A^{r,\nu} - A^{q,\nu}A^{r,\mu}) \tag{115}$$

(K nahlédnutí kalibrační invariantnosti členů s $F^p_{\mu\nu}$ viz též (5.6).) Snadno se můžeme přesvědčit, že za těchto podmínek je již rovnice (162) splněna automaticky.

6.2 U(1) invariance a klasická elektrodynamika

Nejjednodušším příkladem zavedení lokální kalibrační invariance do teorie je případ, kdy vybíráme abelovskou kalibrační grupu U(1). Uvidíme, že tato kalibrace odpovídá zavedení elektromagnetické interakce do stávající teorie.
Mějme tedy teorii popisující nabité (a tudíž komlexní) pole ϕ s lagrangiánem tvaru

$$\mathcal{L}(\phi, \phi^*, \partial_\mu \phi, \partial_\mu \phi^*) \tag{116}$$

Předpokládejme na počátku globální U(1) kalibrační symetrii, tj. invariantnost tohoto lagrangiánu vůči transformacím

$$\phi \to \phi' = e^{i\omega}\phi \qquad \omega \in \mathbf{R} \tag{117}$$

Infinitesimální transformace jsou tudíž tvaru

$$\delta\phi = i\phi\delta\omega \tag{118}$$

Lieovská algebra komutativní lieovské grupy je triviální (tím máme na mysli, že strukturní konstanty jsou všechny nulové). Přejdeme-li nyní k předpokladu, že koeficienty transformace ω závisejí na souřadnici tj. $\omega = \omega(x)$, musíme ve shodě s předcházejícím paragrafem zavést jedno čtyřkomponentní pole kompenzující členy kazicí invariantnost; nazvěme jej A^μ. Podle (160) se musí nové pole transformovat způsobem

$$\delta A^\mu = \frac{\partial \omega(x)}{\partial x_\mu} \tag{119}$$

abychom po nahrazení obyčejných derivací (v lagrangiánu) kovariantními

$$\partial_\mu \phi \to \mathrm{D}_\mu \phi = \partial_\mu \phi - iA^\mu \phi \tag{120}$$

získali teorii, která již je lokálně kalibračně invariantní. Ještě zbývá dovybavit tuto teorii kinetickým členem $\mathcal{L}_0$ nového pole A^μ. Opět jelikož $U(1)$ je abelovská, zjednoduší se tvar obecného členu na konkrétní závislost

$$\mathcal{L}_0 = \mathcal{L}_0(F_{\mu\nu}), \qquad F_{\mu\nu} = \frac{\partial A^\nu}{\partial x^\mu} - \frac{\partial A^\mu}{\partial x^\nu} \tag{121}$$

Obvykle se interakce pole A^μ volí tzv. minimálním způsobem, tj. tak, že finální lagrangián je tvaru

$$\mathcal{L}(\phi, \phi^*, \mathrm{D}_\mu \phi, \mathrm{D}_\mu \phi^*) + \frac{1}{4} F_{\mu\nu} F^{\mu\nu} \tag{122}$$

Podle teorému Noetherové je možno snadno získat zachovávajícíse čtyřproud: čtyřvektor k^μv () má v našem konkrétním případě (jedno pole, jednoparametrická grupa symetrie) tvar

$$k^\mu = -i\left(\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \mathrm{D}_\mu \phi}\phi - \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \mathrm{D}_\mu \phi^*}\phi^*\right) \tag{123}$$

a odpovídá skutečnému čtyřproudu z teorie elektromagnetického pole.

6.3 Neabelovské symetrie - kombinovaná $SU(2) \otimes U(1)$ invariance

Zde se zmíníme o konstrukci kalibrační teorie, v níž kromě předchozí "hypernábojové" $U(1)$ kalibrace zavedeme ještě další, tentokrát již neabelovskou kalibraci určenou grupou izospinových transformací $SU(2)$. Tato konstrukce není samoúčelná, opřeme se o ní v paragrafu věnovaném Standardnímu modelu.

Jelikož požadovaná $SU(2) \otimes U(1)$ kalibrační grupa má tvar tenzorového součinu, lze provést kalibraci "po částech", tj. nejprve $U(1)$ a potom $SU(2)$. Vycházejme proto z již hotové $U(1)$-lokálně kalibračně invariantní teorie popisované v předcházejícím paragrafu. Aby vůbec mělo smysl zavádět izospin, předpokládejme, že pole ϕ z (168) je alespoň dvoukomponentní. Mějme tedy $U(1)$-invariantní lagrangián

$$\mathcal{L}(\phi^i, \phi^{i*}, \mathrm{D}_\mu \phi^i, \mathrm{D}_\mu \phi^{i*}) + \frac{1}{4} F_{\mu\nu} F^{\mu\nu} \tag{124}$$

Pro vytvoření $SU(2)$ invariance musíme opět zavést tři nová pole B^i_μ, (jejich počet odpovídá počtu generátorů $SU(2)$), jež se transformují ve shodě s (160) způsobem:

$$\delta B^i_\mu = \delta\omega^j \epsilon_{ijk} B^k_\mu \delta\omega^j + \partial_\mu \delta\omega^i \tag{125}$$

a dále přejít od $U(1)$ kovariantních derivací D_μ k $SU(2) \otimes U(1)$ kovariantním

$$\mathrm{D}'_\mu \phi^j = \mathrm{D}_\mu \phi^j - i\tau_i B^i_\mu \phi^j = \partial_\mu \phi^j - iA^\mu \phi^j - i\tau_i B^i_\mu \phi^j \tag{126}$$

Ještě dodáme kinetický člen

$$\mathcal{L}_{kin\, B_\mu} = -\frac{1}{4} G^i_{\mu\nu} G^{i\,\mu\nu} \tag{127}$$

kde jsme podle (167) označili

$$G^i_{\mu\nu} = B^i_{[\mu,\nu]} - \epsilon_{ijk}(B^j_\mu B^k_\nu - B^j_\nu B^k_\mu) = \partial_\mu B^i_\nu - \partial_\nu B^i_\mu - \epsilon_{ijk}(B^j_\mu B^k_\nu - B^j_\nu B^k_\mu) \tag{128}$$

Po těchto krocích je již celkový lagrangián

$$\mathcal{L}(\phi^i, \phi^{i*}, \mathrm{D}'_\mu \phi^i, \mathrm{D}'_\mu \phi^{i*}) - \frac{1}{4} F_{\mu\nu} F^{\mu\nu} - \frac{1}{4} G^j_{\mu\nu} G^{j\,\mu\nu} \tag{129}$$

$SU(2) \otimes U(1)$ lokálně kalibračně invariantní.

6.4 Poznámky

Na závěr této kapitoly bychom se měli zmínit o tom, že nastíněný mechanismus poskytuje jistou volnost při konstrukci konkrétní teorie. Snadno lze např. nahlédnout, že ve výrazech definujících kovariantní derivace, tj. např v (178) můžeme doplnit multiplikativní konstanty ke členu s generátorem, tj. psát

$$\mathrm{D}'_\mu \phi^j = \partial_\mu \phi^j - ig' A^\mu \phi^j - ig\tau_i B^i_\mu \phi^j \tag{130}$$

přičemž je ovšem nutno provést kvůli zachování kalibrační invariantnosti změnu i v transformačních vlastnostech kalibračních polí, tj. v případě modifikace (182) musíme namísto (171) a (177) psát

$$\delta A^\mu = -\frac{1}{g'} \partial_\mu \omega \tag{131}$$

$$\delta B^i_\mu = \delta\omega^j \epsilon_{ijk} B^k_\mu \delta\omega^j - \frac{1}{g} \partial_\mu \delta\omega^i \tag{132}$$

a v případě neabelovské kalibrační grupy vystoupí multiplikativní konstanta i v definici (180)

$$G^i_{\mu\nu} = \partial_\mu B^i_\nu - \partial_\nu B^i_\mu + g\epsilon_{ijk}(B^j_\mu B^k_\nu - B^j_\nu B^k_\mu) \tag{133}$$

Vhodnou volbou těchto konstant se pak můžeme pokusit takovýto model "nafitovat" na experimentální data, jako jsou například hmotnosti jednotlivých částic (viz například v kapitole (**??**) vyjádření hmotností bosonů $W^\pm$,Z a A).

7 Standardní model elektroslabých interakcí

7.1 Klasické kalibrační teorie

Klasické kalibrační teorie polí představují velice speciální třídu teorií.Jejich pomocí se však úspěšně daří popisovat systémy, jež dřívější teorie popsat nedokázaly. Základní charakteristikou jakékoli kalibrační teorie může být například fakt, že jednoduchým způsobem pomocí tzv. *principu lokální kalibrační invariance* zobecňuje stávající teorii a zároveň umožňuje vysvětlit interakce polí pouze jako důsledek tohoto principu. Dá se říci, že vlastně většina moderních a jednotících teorií je budována právě na tomto základě a výsledky dosažené touto cestou jsou velmi dobré. Připomeňme např. úspěchy tzv. Standardního modelu elektroslabých interakcí, jehož triumfem bylo experimentální potvrzení mnoha předpovědí v 80. letech. My se zde spokojíme pouze s "letmým nahlédnutím pod pokličku " této fyzikální problematiky tak, jak je uvedeno například v článku [1].

Začněme s teorií popisující n-tici polí ϕ^i Mějme dále lokální lagrangián $\mathcal{L}(\phi^i, \partial_\mu \phi^i)$. Předpokládejme, že tento lagrangián je invariantní vůči infinitesimální transformaci

$$\phi^i \to \phi'^i = \phi^i + \delta\phi^i \qquad \delta\phi^i = (\mathbf{T}_p)^i_j \phi^j \delta\omega^p \qquad p \in \{1, \ldots, s\} \tag{134}$$

kde $\delta\omega^p$ je s-tice infinitesimálních parametrů nezávislých na souřadnicích a $\mathbf{T}_k$ jsou lineární operátory na n-rozměrném prostoru obsahujícím vektory ϕ, $(\mathbf{T}_p)^i_j$ potom značí maticové elementy k-tého operátoru ve standardní bázi) nazývané generátory transformace; příkladem takovéto transformace může být třeba $\phi'^i = \exp(\omega^p(\mathbf{T}_p))^i_j \phi^j$. V takovém případě říkáme, že naše teorie je *invariantní vůči (globálním) kalibračním transformacím.*

Předpokládejme od počátku, že uvažované transformace tvoří lieovskou grupu, tzn. že generátory $\mathbf{T}^p$ jsou v její lieovské algebře svázány vztahem

$$[\mathbf{T}_k, \mathbf{T}_l] = c^i_{kl} \mathbf{T}_i \tag{135}$$

Invariantnost lagrangiánu vůči transformaci (134) znamená, že

$$\delta\mathcal{L} = \frac{\partial\mathcal{L}}{\partial\phi^i}\delta\phi^i + \frac{\partial\mathcal{L}}{\partial(\partial_\mu\phi^i)}\delta(\partial_\mu\phi^i) = 0 \qquad i \in \{1, \ldots, n\} \tag{136}$$

Dosazením $\delta\phi^i = (\mathbf{T}_p)^i_j \phi^j \delta\omega^p$ a $\delta(\partial_\mu\phi^i) = (\mathbf{T}_p)^i_j(\partial_\mu\phi^j)\delta\omega^p$ a užitím vztahu pro derivaci součinu dostáváme

$$\begin{aligned} 0 &= \Big\{\frac{\partial\mathcal{L}}{\partial\phi^i}(\mathbf{T}_p)^i_j\phi^j + \frac{\partial\mathcal{L}}{\partial(\partial_\mu\phi^i)}(\mathbf{T}_p)^i_j(\partial_\mu\phi^j)\Big\}\delta\omega^p = \qquad (137)\\ &= \Big\{\Big[\frac{\partial\mathcal{L}}{\partial\phi^i} - \frac{\partial}{\partial x^\mu}\Big(\frac{\partial\mathcal{L}}{\partial(\partial_\mu\phi^i)}\Big)\Big](\mathbf{T}_p)^i_j\phi^j + \frac{\partial}{\partial x^\mu}\Big(\frac{\partial\mathcal{L}}{\partial(\partial_\mu\phi^i)}(\mathbf{T}_p)^i_j\phi^j\Big)\Big\}\delta\omega^p = \\ &= \frac{\partial}{\partial x^\mu}\Big(\frac{\partial\mathcal{L}}{\partial(\partial_\mu\phi^i)}(\mathbf{T}_p)^i_j\phi^j\Big)\delta\omega^p \end{aligned}$$

přičemž poslední rovnítko plyne z platnosti Eulerových rovnic pole. V případě potřeby můžeme nyní získat ke každému generátoru $(\mathbf{T}_p)^i_j$ zachovávající se čtyřproud:

$$J^\mu_p = \frac{\partial\mathcal{L}}{\partial(\partial_\mu\phi^i)}(\mathbf{T}_p)^i_j\phi^j$$

Nás ovšem více bude zajímat situace, kdy dochází k tomu, že transformace pole není v každém bodě stejná, jinými slovy že parametry ω^p jsou funkcemi souřadnic $\omega^p(x)$ Zde už je situace složitější. Předně platí

$$\partial_\mu\delta\phi^i = \delta\omega^p(\mathbf{T}_p)^i_j(\partial_\mu\phi^j) + (\partial_\mu\delta\omega^p)(\mathbf{T}_p)^i_j\phi^j$$

Tím pádem variace (136) přejde do tvaru

$$\delta\mathcal{L} = \frac{\partial\mathcal{L}}{\partial\phi^i}(\mathbf{T}_p)^i_j\phi^j\delta\omega^p + \frac{\partial\mathcal{L}}{\partial(\partial_\mu\phi^i)}\Big(\delta\omega^p(\mathbf{T}_p)^i_j(\partial_\mu\phi^j) + (\partial_\mu\delta\omega^p)(\mathbf{T}_p)^i_j\phi^j\Big) =$$

$$= \Big\{\frac{\partial\mathcal{L}}{\partial\phi^i}(\mathbf{T}_p)^i_j\phi^j + \frac{\partial\mathcal{L}}{\partial(\partial_\mu\phi^i)}(\mathbf{T}_p)^i_j(\partial_\mu\phi^j)\Big\}\delta\omega^p + \frac{\partial\mathcal{L}}{\partial(\partial_\mu\phi^i)}(\partial_\mu\delta\omega^p)(\mathbf{T}_p)^i_j\phi^j =$$

$$= \frac{\partial\mathcal{L}}{\partial(\partial_\mu\phi^i)}(\partial_\mu\delta\omega^p)(\mathbf{T}_p)^i_j\phi^j \tag{138}$$

přičemž poslední rovnítko je důsledkem platnosti vztahu (137). Vidíme tedy, že tyto transformace již nejsou symetriemi uvažovaného lagrangiánu, neboť výraz (138) již není obecně nulový. Říkáme, že takováto teorie *není lokálně kalibračně invariantní.* (Lokálnost souvisí právě s tím, že invarianci narušují právě transformace lokálního charakteru, tj. s koeficienty ω^p závislými na souřadnicích). Pokusme se nyní *zobecnit* uvažovanou teorii takovým způsobem, aby vyhovovala tzv. *principu lokální kalibrační invariance*, tj. modifikovat ji tak, aby též lokální kalibrační transformace ponechávaly lagrangián beze změny.Právě to je klíčový moment celé teorie kalibračních polí a má dalekosáhlé důsledky v celé moderní fyzice.

Vycházejme tedy z původní teorie s lagrangiánem $\mathcal{L}$ a uvažujme lokální transformace typu

$$\delta\phi^i = (\mathbf{T}_p)^i_j\phi^j\delta\omega^p(x) \tag{139}$$

K nim náleží transformace složek derivací

$$\partial_\mu\delta\phi^i = \delta\omega^p(\mathbf{T}_p)^i_j(\partial_\mu\phi^j) + (\partial_\mu\delta\omega^p)(\mathbf{T}_p)^i_j\phi^j \tag{140}$$

která, jak víme, má na svědomí narušení lokální kalibrační invariance. Tu můžeme zachránit tak, že zavedeme m-tici dalších polí A'^k a zařídíme, aby v novém lagrangiánu příspěvek v (138) od tohoto pole vykompenzoval nepříjemný člen kazící invariantnost. Pro popis takovéhoto systému polí budeme uvažovat lagrangián tvaru

$$\mathcal{L}'(\phi^i, \partial_\mu\phi^i, A'^k) \quad i \in \{1,\ldots,n\}, k \in \{1,\ldots,m\} \tag{141}$$

a transformační vlastnosti polí ϕ^i ve vztahu (139) doplníme o předpoklad transformačních vlastností nového pole A' :

$$\delta A'^k = \delta\omega^p(\mathbf{U}_p)^k_l A'^l + \mathbf{C}^k_{\mu,p}\partial_\mu\delta\omega^p \tag{142}$$

kde $\mathbf{U}_p$ jsou lineární operátory (reprezentované opět maticemi ve standardní bázi se složkami $(\mathbf{U}_p)^k_l$) působící na m-tici A'^k, $\mathbf{C}^k_{\mu p}$ jsou koeficienty určující charakter transformace nových polí v závislosti na tvaru koeficientů $\delta\omega^p$ respektive jejich derivací $\partial_\mu\delta\omega^p$. Konkrétní tvar $\mathbf{U}_p$ a $\mathbf{C}^k_{\mu,p}$ bude určen dále.

Lokální kalibrační invariance nové teorie vyžaduje, aby platilo

$$\delta\mathcal{L}' = \frac{\partial\mathcal{L}'}{\partial\phi^i}\delta\phi^i + \frac{\partial\mathcal{L}'}{\partial(\partial_\mu\phi^i)}\delta(\partial_\mu\phi^) + \frac{\partial\mathcal{L}'}{\partial A'^k}\delta A'^k = 0 \tag{143}$$

Odtud dosazením (139),(140) a (142) dostáváme po provedení soustavu rovnic (první náleží koeficientům u $\delta\omega^p$, druhá koeficientům u $\partial_\mu\delta\omega^p$):

$$\frac{\partial\mathcal{L}'}{\partial\phi^i}(\mathbf{T}_p)^i_j\phi^j + \frac{\partial\mathcal{L}'}{\partial(\partial_\mu\phi^i)}(\mathbf{T}_p)^i_j(\partial_\mu\phi^j) + \frac{\partial\mathcal{L}'}{\partial A'^k}(\mathbf{U}_p)^k_l A'^l = 0 \tag{144}$$

$$\frac{\partial\mathcal{L}'}{\partial(\partial_\mu\phi^i)}(\mathbf{T}_p)^i_j\phi^j + \frac{\partial\mathcal{L}'}{\partial A'^k}\mathbf{C}^k_{\mu,p} = 0 \tag{145}$$

Z těchto rovnic bychom rádi získali explicitní závislost $\mathcal{L}'$ na A'^k. To ovšem znamená, že lineární soustava (145) musí být řešitelná vzhledem k parciálním derivacím $\frac{\partial \mathcal{L}'}{\partial A'^k}$. To lze splnit jen tehdy, bude-li matice této soustavy , tj. matice

$$\mathbf{D} := \begin{pmatrix} \mathbf{C}^1_{0,1} & \dots & \mathbf{C}^1_{3,s} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ \mathbf{C}^m_{0,1} & \dots & \mathbf{C}^m_{3,s} \end{pmatrix}$$

čtvercová, tzn. počet polí A'^k musí být roven počtu kombinací μ, p a to lze pouze tehdy, platí-li $m = 4s$. (Navíc matice $\mathbf{D}$ musí být invertibilní, tj. regulární.) Celkem to tedy znamená, že počet komponent pole A' roven čtyřnásobku počtu generátorů kalibrační transformace, neboli ke každému generátoru $\mathbf{T}_p$máme jedem čtyřvektor $A'^{p\mu}$. Zaveďme proto ještě namísto m polí A'^k s polí-čtyřvektorů $A^{p,\mu}$ vztahem

$$A^{p,\mu} = (\mathbf{C}^{-1})^{p,\mu}_k A'^k \tag{146}$$

(Matice $(\mathbf{C}^{-1})^{p,\mu}_k$ je inversní k matici $\mathbf{D}$,přičemž zachováváme logickou strukturu koeficientů tak, že platí $(\mathbf{C}^{-1})^{p,\mu}_k \mathbf{C}^l_{p,\mu} = \delta_{kl}$.) Pomocí něj můžeme napsat (145) ve tvaru

$$\frac{\partial \mathcal{L}'}{\partial(\partial_\mu \phi^i)} (\mathbf{T}_p)^i_j (\partial_\mu \phi^j) + \frac{\partial \mathcal{L}'}{\partial A^{p,\mu}} = 0 \tag{147}$$

Co to znamená ? Rovnice (147) nám vlasně říká, že v novém lagrangiánu se můžou nová pole A objevit pouze ve výrazech typu

$$\mathrm{D}_\mu \phi^i \equiv \frac{\partial \phi^i}{\partial x^\mu} - (\mathbf{T}_p)^i_j \phi^j A^{p,\mu} \tag{148}$$

(bude-li tomu tak, je (147) splněna automaticky). Transformační vlastnosti pole A budou tím pádem

$$\delta A^{p,\mu} = \delta\omega^r (\mathbf{C}^{-1})^{p,\mu}_k (\mathbf{U}_r)^k_l \mathbf{C}^l_{q,\nu} A^{q,\nu} + \partial_\mu \delta\omega^p \tag{149}$$

Navíc lagrangián musí mít tvar

$$\mathcal{L}'(\phi^i, \partial_\mu \phi^i, A^{p,\mu}) = \mathcal{L}''(\phi^i, \mathrm{D}_\mu \phi^i) = \mathcal{L}''(\phi^i, \frac{\partial \phi^i}{\partial x^\mu} - (\mathbf{T}_p)^i_j \phi^j A^{p,\mu}) \tag{150}$$

Za těchto podmínek tedy bude teorie popisovaná pomocí $\mathcal{L}''$ lokálně kalibračně invariantní. Nalezněme nyní explicitní tvar funkce $\mathcal{L}''$. Podmínky na derivace $\mathcal{L}'$ a $\mathcal{L}''$ dávají

$$\frac{\partial \mathcal{L}'}{\partial \phi^i} - \frac{\partial \mathcal{L}''}{\partial \phi^i} + \frac{\partial \mathcal{L}''}{\partial(\mathrm{D}_\mu \phi^j)} (\mathbf{T}_q)^i_j A^{q,\mu} = 0 \tag{151}$$

$$\frac{\partial \mathcal{L}'}{\partial(\partial_\mu \phi^i)} - \frac{\partial \mathcal{L}''}{\partial(\mathrm{D}_\mu \phi^i)} = 0 \tag{152}$$

$$\frac{\partial \mathcal{L}'}{\partial A'^k} + \frac{\partial \mathcal{L}''}{\partial(\mathrm{D}_\mu \phi^i)} (\mathbf{T}_q)^i_j \phi^j (\mathbf{C}^{-1})^{q,\mu}_k = 0 \tag{153}$$

Dosazením těchto výrazů do (144) získáme rovnici pro finální lagrangián $\mathcal{L}''$

$$\frac{\partial \mathcal{L}'}{\partial \phi^i} (\mathbf{T}_p)^i_j \phi^j + \frac{\partial \mathcal{L}'}{\partial(\partial_\mu \phi^i)} (\mathbf{T}_p)^i_j (\partial_\mu \phi^j) + \frac{\partial \mathcal{L}'}{\partial A'^k} (\mathbf{U}_p)^k_l A'^l =$$

$$= \frac{\partial \mathcal{L}''}{\partial \phi^i} (\mathbf{T}_p)^i_j \phi^j + \frac{\partial \mathcal{L}''}{\mathrm{D}_\mu \phi^i} (\mathbf{T}_p)^i_j (\partial_\mu \phi^j) +$$

$$+\frac{\partial \mathcal{L}''}{\partial(\mathrm{D}_\mu \phi^i)}\phi^j A^{q,\nu}\{[\mathbf{T}_p,\mathbf{T}_q]^i_j\delta^\mu_\nu - (\mathbf{C}^{-1})^{r,\mu}_k(\mathbf{U}_p)^k_l\mathbf{C}^l_{q,\nu}(\mathbf{T}_r)^i_j\} = 0 \tag{154}$$

Všimneme-li si, že první dva členy jsou formálně shodné s rozpisem variace původního lagrangiánu, pouze s tím rozdílem, že na místě, kde původně stály obyčejné derivace nyní vystupují kovariantní, můžeme učinit důležitý závěr : Zaměníme-li v původním lagrangiánu zcela formálně obyčejné derivace ∂_μ kovariantními, tj. postulujeme-li platnost vztahu

$$\mathcal{L}''(\phi^i, \mathrm{D}_\mu\phi^i) = \mathcal{L}(\phi^i, \mathrm{D}_\mu\phi^i) \tag{155}$$

stačí pro lokální kalibrační invariantnost $\mathcal{L}''$ již jenom vynulovat třetí člen v (154), čímž zároveň získáme explicitní vyjádření neznámých koeficientů $\mathbf{C}^j_{p,\mu}$ a operátorů $\mathbf{U}_r$:

$$[\mathbf{T}_p,\mathbf{T}_q]^i_j\delta^\mu_\nu - (\mathbf{C}^{-1})^{r,\mu}_k(\mathbf{U}_p)^k_l\mathbf{C}^k_{q,\nu}(\mathbf{T}_r)^i_j = 0 \tag{156}$$

neboli po zavedení strukturních kontant

$$[c^r_{pq}\delta^\mu_\nu - (\mathbf{C}^{-1})^{r,\mu}_k(\mathbf{U}_p)^k_l\mathbf{C}^l_{q,\nu}](\mathbf{T}_r)^i_j = 0 \tag{157}$$

což vzhledem k lineární nezávislosti operátorů $\mathbf{T}_r$ dává vztahy pro $\mathbf{C}^j_{p,\mu}$ a $\mathbf{U}_r$:

$$(\mathbf{C}^{-1})^{r,\mu}_k(\mathbf{U}_p)^k_l\mathbf{C}^l_{q,\nu} = c^r_{pq}\delta^\mu_\nu \tag{158}$$

Z tohoto vztahu dostaneme již konkrétní tvar transfromačních vlastností kalibračních polí definovaných vztahem (149)

$$\delta A^{p,\mu} = \delta\omega^r(\mathbf{C}^{-1})^{p,\mu}_k(\mathbf{U}_r)^k_l\mathbf{C}^l_{q,\nu}A^{q,\nu} + \partial_\mu\delta\omega^p = \delta\omega^r c^p_{rq}\delta^\mu_\nu A^{q,\nu} + \partial_\mu\delta\omega^p \tag{159}$$

což konečně dává

$$\delta A^{p,\mu} = \delta\omega^r c^p_{rq}A^{q,\mu} + \partial_\mu\delta\omega^p \tag{160}$$

Shrneme-li celou situaci, dospíváme od počátečního výběru kalibrační grupy (pomocí její Lieovy algebry tvořené generátory $\mathbf{T}_j$ svázanými komutátorem (135)) až ke konkrétnímu tvaru lokálně kalibračně invariantní teorie, jejíž lagrangián je určen vztahem (155) a transformační vlastnosti v ní vystupujících polí jsou určeny vztahy (134) a (160). Naše práce však ještě zdaleka není u konce. V lagrangiánu $\mathcal{L}(\phi^i, \mathrm{D}_\mu\phi^i)$ totiž vůbec nevystupují derivace kalibračních polí A^p, což znamená, že použitím Eulerových rovnic nezískáme pro kalibrační pole diferenciální rovnice, která by popisovaly jeho časový vývoj, nýbrž pouze vztahy odpovídající jakýmsi "vazbám". Stávající lagrangián je tedy nutné doplnit o výrazy, jež tuto nepříjemnost odstraní, o tzv. *kinetický člen*; označme si jej $\mathcal{L}_0$.

Základním požadavkem, který na $\mathcal{L}_0$ naložíme, bude jeho *závislost na polních funkcích pouze do prvních derivací* , tj

$$\mathcal{L}_0(A^{p,\mu}, \partial_\nu A^{p,\mu})$$

Požadavek invariantnosti $\mathcal{L}_0$ znamená, že musí platit

$$\frac{\partial\mathcal{L}_0}{\partial A^{p,\mu}}\delta A^{p,\mu} + \frac{\partial\mathcal{L}_0}{\partial(\partial_\nu A^{p,\mu})}\delta(\partial_\nu A^{p,\mu}) = 0 \tag{161}$$

Dosazením vztahu (160) a jeho derivace dostaneme z lineární nezávislosti $\delta\omega^r$, $\partial_\nu\delta\omega^r$ a $\partial_\nu\partial_\mu\delta\omega^r$ trojici vztahů

$$\frac{\partial\mathcal{L}_0}{\partial A^{p,\mu}}c^p_{qr}A^{q,\mu} + \frac{\partial\mathcal{L}_0}{\partial(\partial_\nu A^{p,\mu})}c^p_{qr}\partial_\nu A^{q,\mu} = 0 \tag{162}$$

$$\frac{\partial\mathcal{L}_0}{\partial A^{p,\mu}} + \frac{\partial\mathcal{L}_0}{\partial(\partial_\mu A^{r,\nu})}c^r_{pq}A^{q,\nu} = 0 \tag{163}$$

$$\frac{\partial\mathcal{L}_0}{\partial(\partial_\nu A^{p,\mu})} + \frac{\partial\mathcal{L}_0}{\partial(\partial_\mu A^{p,\nu})} = 0 \tag{164}$$

Ze vztahu (164) snadno získáváme, že derivace kalibračních polí mohou v $\mathcal{L}_0$ vystupovat pouze společně ve členech tvaru

$$A^p_{[\mu,\nu]} \equiv \partial_\mu A^{p,\nu} - \partial_\nu A^{p,\mu} \tag{165}$$

Rovnici (163) pomocí této kombinace můžeme přepsat ve tvaru

$$\frac{\partial \mathcal{L}_0}{\partial A^{p,\mu}} - \frac{\partial \mathcal{L}_0}{\partial(\partial_\mu A^r_{[\nu,\mu]})} c^r_{pq} A^{q,\nu} = 0 \tag{166}$$

Aby byla tato rovnice splněna, můžou se v $\mathcal{L}_0$ vyskytovat derivace a pole pouze v kombinacích typu

$$F^p_{\mu\nu} \equiv A^p_{[\mu,\nu]} - c^p_{qr}(A^{q,\mu}A^{r,\nu} - A^{q,\nu}A^{r,\mu}) \tag{167}$$

(K nahlédnutí kalibrační invariantnosti členů s $F^p_{\mu\nu}$ viz též (5.6).) Snadno se můžeme přesvědčit, že za těchto podmínek je již rovnice (162) splněna automaticky.

7.2 U(1) invariance a klasická elektrodynamika

Nejjednodušším příkladem zavedení lokální kalibrační invariance do teorie je případ, kdy vybíráme abelovskou kalibrační grupu U(1). Uvidíme, že tato kalibrace odpovídá zavedení elektromagnetické interakce do stávající teorie.
Mějme tedy teorii popisující nabité (a tudíž komlexní) pole ϕ s lagrangiánem tvaru

$$\mathcal{L}(\phi, \phi^*, \partial_\mu \phi, \partial_\mu \phi^*) \tag{168}$$

Předpokládejme na počátku globální U(1) kalibrační symetrii, tj. invariantnost tohoto lagrangiánu vůči transformacím

$$\phi \to \phi' = e^{i\omega}\phi \qquad \omega \in \mathbf{R} \tag{169}$$

Infinitesimální transformace jsou tudíž tvaru

$$\delta\phi = i\phi\delta\omega \tag{170}$$

Lieovská algebra komutativní lieovské grupy je triviální (tím máme na mysli, že strukturní konstanty jsou všechny nulové). Přejdeme-li nyní k předpokladu, že koeficienty transformace ω závisejí na souřadnici tj. $\omega = \omega(x)$, musíme ve shodě s předcházejícím paragrafem zavést jedno čtyřkomponentní pole kompenzující členy kazicí invariantnost; nazvěme jej A^μ. Podle (160) se musí nové pole transformovat způsobem

$$\delta A^\mu = \frac{\partial \omega(x)}{\partial x_\mu} \tag{171}$$

abychom po nahrazení obyčejných derivací (v lagrangiánu) kovariantními

$$\partial_\mu \phi \to \mathrm{D}_\mu \phi = \partial_\mu \phi - iA^\mu \phi \tag{172}$$

získali teorii, která již je lokálně kalibračně invariantní. Ještě zbývá dovybavit tuto teorii kinetickým členem $\mathcal{L}_0$ nového pole A^μ. Opět jelikož $U(1)$ je abelovská, zjednoduší se tvar obecného členu na konkrétní závislost

$$\mathcal{L}_0 = \mathcal{L}_0(F_{\mu\nu}), \qquad F_{\mu\nu} = \frac{\partial A^\nu}{\partial x^\mu} - \frac{\partial A^\mu}{\partial x^\nu} \tag{173}$$

Obvykle se interakce pole A^μ volí tzv. minimálním způsobem, tj. tak, že finální lagrangián je tvaru

$$\mathcal{L}(\phi, \phi^*, \mathrm{D}_\mu \phi, \mathrm{D}_\mu \phi^*) + \frac{1}{4} F_{\mu\nu} F^{\mu\nu} \tag{174}$$

Podle teorému Noetherové je možno snadno získat zachovávajícíse čtyřproud: čtyřvektor k^μv () má v našem konkrétním případě (jedno pole, jednoparametrická grupa symetrie) tvar

$$k^\mu = -i\left(\frac{\partial\mathcal{L}}{\partial \mathrm{D}_\mu\phi}\phi - \frac{\partial\mathcal{L}}{\partial \mathrm{D}_\mu\phi^*}\phi^*\right) \tag{175}$$

a odpovídá skutečnému čtyřproudu z teorie elektromagnetického pole.

7.3 Neabelovské symetrie - kombinovaná $SU(2)\otimes U(1)$ invariance

Zde se zmíníme o konstrukci kalibrační teorie, v níž kromě předchozí "hypernábojové" $U(1)$ kalibrace zavedeme ještě další, tentokrát již neabelovskou kalibraci určenou grupou izospinových transformací $SU(2)$. Tato konstrukce není samoúčelná, opřeme se o ní v paragrafu věnovaném Standardnímu modelu.

Jelikož požadovaná $SU(2)\otimes U(1)$ kalibrační grupa má tvar tenzorového součinu, lze provést kalibraci "po částech", tj. nejprve $U(1)$ a potom $SU(2)$. Vycházejme proto z již hotové $U(1)$-lokálně kalibračně invariantní teorie popisované v předcházejícím paragrafu. Aby vůbec mělo smysl zavádět izospin, předpokládejme, že pole ϕ z (168) je alespoň dvoukomponentní. Mějme tedy $U(1)$-invariantní lagrangián

$$\mathcal{L}(\phi^i, \phi^{i*}, \mathrm{D}_\mu\phi^i, \mathrm{D}_\mu\phi^{i*}) + \frac{1}{4}F_{\mu\nu}F^{\mu\nu} \tag{176}$$

Pro vytvoření $SU(2)$ invariance musíme opět zavést tři nová pole B^i_μ, (jejich počet odpovídá počtu generátorů $SU(2)$), jež se transformují ve shodě s (160) způsobem:

$$\delta B^i_\mu = \delta\omega^j\epsilon_{ijk}B^k_\mu\delta\omega^j + \partial_\mu\delta\omega^i \tag{177}$$

a dále přejít od $U(1)$ kovariantních derivací D_μ k $SU(2)\otimes U(1)$ kovariantním

$$\mathrm{D}'_\mu\phi^j = \mathrm{D}_\mu\phi^j - i\tau_i B^i_\mu\phi^j = \partial_\mu\phi^j - iA^\mu\phi^j - i\tau_i B^i_\mu\phi^j \tag{178}$$

Ještě dodáme kinetický člen

$$\mathcal{L}_{kin\,B_\mu} = -\frac{1}{4}G^i_{\mu\nu}G^{i\,\mu\nu} \tag{179}$$

kde jsme podle (167) označili

$$G^i_{\mu\nu} = B^i_{[\mu,\nu]} - \epsilon_{ijk}(B^j_\mu B^k_\nu - B^j_\nu B^k_\mu) = \partial_\mu B^i_\nu - \partial_\nu B^i_\mu - \epsilon_{ijk}(B^j_\mu B^k_\nu - B^j_\nu B^k_\mu) \tag{180}$$

Po těchto krocích je již celkový lagrangián

$$\mathcal{L}(\phi^i, \phi^{i*}, \mathrm{D}'_\mu\phi^i, \mathrm{D}'_\mu\phi^{i*}) - \frac{1}{4}F_{\mu\nu}F^{\mu\nu} - \frac{1}{4}G^j_{\mu\nu}G^{j\,\mu\nu} \tag{181}$$

$SU(2)\otimes U(1)$ lokálně kalibračně invariantní.

7.4 Poznámky

Na závěr této kapitoly bychom se měli zmínit o tom, že nastíněný mechanismus poskytuje jistou volnost při konstrukci konkrétní teorie. Snadno lze např. nahlédnout, že ve výrazech definujících kovariantní derivace, tj. např v (178) můžeme doplnit multiplikativní konstanty ke členu s generátorem, tj. psát

$$\mathrm{D}'_\mu\phi^j = \partial_\mu\phi^j - ig'A^\mu\phi^j - ig\tau_i B^i_\mu\phi^j \tag{182}$$

přičemž je ovšem nutno provést kvůli zachování kalibrační invariantnosti změnu i v transformačních vlastnostech kalibračních polí, tj. v případě modifikace (182) musíme namísto (171) a (177) psát

$$\delta A^{\mu} = -\frac{1}{g'}\partial_{\mu}\omega \tag{183}$$

$$\delta B^{i}_{\mu} = \delta\omega^{j}\epsilon_{ijk}B^{k}_{\mu}\delta\omega^{j} - \frac{1}{g}\partial_{\mu}\delta\omega^{i} \tag{184}$$

a v případě neabelovské kalibrační grupy vystoupí multiplikativní konstanta i v definici (180)

$$G^{i}_{\mu\nu} = \partial_{\mu}B^{i}_{\nu} - \partial_{\nu}B^{i}_{\mu} + g\epsilon_{ijk}(B^{j}_{\mu}B^{k}_{\nu} - B^{j}_{\nu}B^{k}_{\mu}) \tag{185}$$

Vhodnou volbou těchto konstant se pak můžeme pokusit takovýto model "nafitovat" na experimentální data, jako jsou například hmotnosti jednotlivých částic (viz například v kapitole (**??**) vyjádření hmotností bosonů $W^{\pm}$,Z a A).

8 Doplňky

8.1 Základní vlastnosti některých grup symetrie

V tomto paragrafu budou uvedeny základní poznatky teorie grup aplikované na případy grup zmiňovaných v této práci a jejich maticových reprezentací.

8.1.1 Grupa vlastních ortogonálních transformací $SO(n)$

Grupa $O(n)$ všech ortogonálních transformací n-dimenzionálního prostoru $\mathbf{R}^n$ je definována jako množina všech transformací, které transformují vektory v $\mathbf{R}^n$ způsobem

$$\phi_i \rightarrow \phi'_i = \sum_{j=1}^{n} \mathbf{C}_{ij}\phi_j$$

při zachování jejich normy, tj $\| \phi \| = \| \phi' \|$. Jedná se tedy o lineární transformace. Z definice normy plyne

$$\| \phi' \|^2 = \sum_{i=1}^{n} \phi'_i\phi'_i = \sum_{j,k=1}^{n} \mathbf{C}_{ij}\mathbf{C}_{ik}\phi_j\phi_k$$

tj. v maticovém zápise (bereme složky ϕ ve formě sloupcového číselného vektoru)

$$\| \phi' \|^2 = \phi_i'^T\phi'_i = \phi^T\mathbf{C}^T\mathbf{C}\phi$$

což má být rovno $\| \phi \|^2$ a to je možné pouze tehdy, bude-li $\mathbf{C}^T\mathbf{C} = \mathbf{I}$, tj. matice $\mathbf{C}$ musí být ortogonální.Podgrupa $SO(n) \subset\subset O(n)$ je tvořena těmi ortogonálními maticemi, pro něž navíc platí ještě det$\mathbf{C} = 1$; jsou to tzv. vlastní ortogonální transformace. Tyto matice odpovídají obyčejným rotacím souřadného systému podle počátku. Jaká je dimenze prostoru matic grupy SO(n) ? V tomto případě je nejjednodušší nalézt přímo jeho bázi. Definujeme-li

$$\mathbf{C}_{ij}(\omega) := \begin{array}{cc} \begin{pmatrix} \mathbf{I} & \vdots & & \vdots & \\ \dots & \cos\omega & \dots & \sin\omega & \dots \\ & \vdots & \mathbf{I} & \vdots & \\ \dots & -\sin\omega & \dots & \cos\omega & \dots \\ & \vdots & & \vdots & \mathbf{I} \end{pmatrix} & \begin{array}{c} \\ \leftarrow i \\ \\ \leftarrow j \\ \\ \end{array} \end{array} \qquad i < j, \quad j \in \{1,\dots,n\} \tag{186}$$

získáme $n(n-1)/2$ nezávislých matic, které představují jednotlivé rotace v rovinách určených osami i, j. Lze dokázat, že libovolná rotace kolem počátku se dá složit z těchto dílčích rotací. Množina matic $\mathbf{C}_{ij}$ tedy generuje grupu $SO(n)$. Jelikož se jedná o spojitou grupu, existují hermitovské matice $\mathbf{L}_{ij}$, jež vztahem

$$\mathbf{C}_{ij}(\omega) = e^{-i\mathbf{L}_{ij}\omega}$$

generují libovolnou rotaci $\mathbf{C}_{ij}$. Tyto generátory mají tvar

$$\mathbf{L}_{ij} = i \begin{array}{cc} \left(\begin{array}{ccccc} & \vdots & & \vdots & \\ \dots & 0 & \dots & -1 & \dots \\ & \vdots & & \vdots & \\ \dots & 1 & \dots & 0 & \dots \\ & \vdots & & \vdots & \end{array} \right) & \begin{array}{c} \\ \leftarrow i \\ \\ \leftarrow j \\ \\ \end{array} \end{array} \qquad \Rightarrow (\mathbf{L}_{ij})_{kl} = -i(\delta_{ik}\delta_{jl} - \delta_{il}\delta_{jk}) \tag{187}$$

8.1.2 Grupa hypernáboje $U(1)$

Grupa $U(1)$ nazývaná též někdy grupou hypernáboje je příkladem abelovské grupy symetrií. Je definována jako množina všech komplexních čísel ležících na jednotkové kružnici v $\mathbf{C}$ opatřená standardním násobením. Nejjednodušší parametrizace se obvykle zapisuje ve tvaru

$$g \in U(1) \Rightarrow g = e^{i\omega}, \quad \omega \in \mathbf{R}$$

Jedná se tedy o spojitou jednoparametrickou grupu s generátorem i. Z vlastností exponenciály, která převádí grupové násobení na sčítání v prostoru parametrů, vidíme, že $U(1)$ je abelovská. Lieovská algebra této grupy je tudíž triviální (v tom smyslu, že její prvky komutují)
Říkáme-li, že nějaká teorie je $U(1)$ invariantní, znamená to, že lagrangián se nezmění při transformacích tvaru

$$\phi \to \phi' := e^{i\omega}\phi \tag{188}$$

Odpovídající infinitesimální transformace má tvar

$$\delta\phi = i\omega\phi \tag{189}$$

Použitím goniometrického zápisu komplexních čísel vidíme, že $U(1)$ je izomorfní grupě všech rotací v rovině $\mathbf{R}^2$

$$U(1) \cong SO(2)$$

8.1.3 Grupa izospinu $SU(2)$

Podobně jako v případě spinu lze na neutron a proton pohlížet jako na dva nábojově odlišné izotopické stavy jediné částice - nukleonu. Sdružují se proto v tzv. izotopický dublet, a přechodům nukleonu mezi těmito dvěma stavy např. při interakci s π-mezonem odpovídá "promíchávání" jeho složek. To se děje právě pomocí generátorů grupy $SU(2)$. Samotná $SU(2)$ je definována jako grupa všech dvojrozměrných unitárních matic s jednotkovým determinantem. Tím je určeno, že existují pouze 3 nezávislé parametry, máme tedy trojdimenzionílní lieovskou grupu. Po jejím "vyderivování" získáme generátory σ_i, $i = 1, 2, 3$, které vyhovují komutačním relacím

$$[\sigma_i, \sigma_j] = i\epsilon_{ijk}\sigma_k \tag{190}$$

Matice σ_i se nazývají Pauliho matice a platí :

$$\sigma_1 = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \qquad \sigma_2 = \begin{pmatrix} 0 & -i \\ i & 0 \end{pmatrix}, \qquad \sigma_3 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}, \tag{191}$$

8.2 Diracova rovnice

Schrödingerova rovnice velmi dobře popisuje kvantové děje probíhající na úrovni atomu či molekuly v běžných nerelativistických případech,ale pro přesnější popis částic (zejména při vyšších, mnohdy relativistických energiích) se většinou nehodí. Je třeba použít jinou vlnovou rovnici, a jí je právě *Diracova relativistická vlnová rovnice.* Na rozdíl od konstrukce Schrödingerovy rovnice vycházíme z relativistického dispersního vztahu pro de-Broglieovy vlny ve tvaru

$$\frac{E^2}{c^2} = p^2c^2 + m^2c^4$$

Podobným postupem jako u původní Schrödingerovy rovnice se dopracujeme k tzv. *Klein-Gordonově rovnici*

$$(\Box + m^2)\psi = 0 \qquad \text{neboli} \qquad (\partial_\mu \partial^\mu + m^2)\psi = 0 \tag{192}$$

(zde pokládáme $\hbar = 1$, $c = 1$), jež je ovšem rovnicí druhého řádu ve všech čtyřech proměnných. Jak ukázal P. Dirac, je možné některá řešení této rovnice získat jako řešení jednodušší rovnice prvního řádu, a to jakýmsi formálním roztržením Klein-Gordonova operátoru v (192) na součin dvou jednodušších. Postulujeme-li totiž, že platí

$$(\partial_\mu \partial^\mu - m^2)\psi = (i\gamma^\nu \partial_\nu + m)(i\gamma^\mu \partial_\mu - m) \tag{193}$$

pro nějaké zatím neznámé maticové koeficienty γ^μ, převede se naše úloha na problém jejich nalezení. Roznásobením a porovnáním koeficientů u jednotlivých ∂_μ dostaneme rovnici

$$\gamma^\nu \gamma^\mu \partial_\nu \partial_\mu = \partial_\mu \partial^\mu = g^{\mu\nu} \partial_\nu \partial_\mu \tag{194}$$

Předpokládáme-li záměnnost ∂_μ a ∂_ν, dostáváme důležitý vztah pro antikomutátor

$$\gamma^\mu \gamma^\nu + \gamma^\nu \gamma^\mu = 2g^{\mu\nu}\mathbf{I} \tag{195}$$

kde $\mathbf{I}$ je jednotková matice zatím neznámé dimenze n. Lze ukázat, že tato soustava maticových rovnic má řešení pro n minimálně 4, tj. nejjednodušší matice γ^μ splňující vztah (194) jsou čtyřdimenzionální.

Tím se nám podařilo "rozštěpit" původní Klein-Gordonův operátor na součin (193). Můžeme tedy učinit závěr, že každé řešení rovnice

$$(i\gamma^\mu \partial_\mu - m)\psi = 0 \tag{196}$$

je rovněž řešením původní Klein-Gordonovy rovnice. Rovnice (196) se nazývá *Diracova rovnice* a její řešení se interpretuje jako vlnová funkce popisující částici o hmotnosti m.

V případě, že jsme na plochém prostoru, kde metrický tenzor má diagonální tvar, dostáváme řešení (194) například (až na podobnostní transformace) ve tvaru

$$\gamma^0 = \begin{pmatrix} \mathbf{I} & 0 \\ 0 & -\mathbf{I} \end{pmatrix}, \quad \gamma^j = \begin{pmatrix} 0 & -\sigma^j \\ \sigma^j & 0 \end{pmatrix} \tag{197}$$

kde σ^j je obyčejná j-tá Pauliho matice. Zvláštní význam má též matice

$$\gamma^5 = i\gamma^0\gamma^1\gamma^2\gamma^3 = \begin{pmatrix} 0 & \mathbf{I} \\ \mathbf{I} & 0 \end{pmatrix}$$

jež antikomutuje se všemi ostatními γ^μ. Tím pádem např. (po vynásobení Diracovy rovnice zleva γ^5a prokomutování) platí

$$-(i\gamma^\mu \partial_\mu + m)\gamma^5\psi = 0 \tag{198}$$

ale zároveň

$$(i\gamma^\mu \partial_\mu - m)\psi = 0 \tag{199}$$

Chceme-li popisovat částici nulové hmotnosti (např. neutrino), redukuje se tato soustava na tvar

$$\begin{aligned} -i\gamma^\mu \partial_\mu \gamma^5 \psi &= 0 \\ i\gamma^\mu \partial_\mu \psi &= 0 \end{aligned} \tag{200}$$

jež má dvě nezávislá řešení řešení splňující vztah $\gamma^5\psi = \pm\psi$. Libovolný stav ψ je proto možno rozložit na levo a pravostranou komponentu způsobem

$$\psi = \psi_L + \psi_R \quad \text{kde} \quad \psi_L = \frac{1-\gamma^5}{2}\psi \quad \psi_R = \frac{1+\gamma^5}{2}\psi$$

přičemž ψ_L a ψ_R jsou projekce na vlastní podprostory γ^5 a $\frac{1}{2}(1-\gamma^5)$ a $\frac{1}{2}(1+\gamma^5)$jsou odpovídající projekční operátory.

Fyzikálně tyto stavy interpretujeme jako orientaci spinu v závislosti na směru pohybu částice, tj. ψ_L pro stav se spinem ve směru pohybu, ψ_R proti směru pohybu částice.

Máme-li tedy například popisovat částici nulové hmotnosti se spinem ve směru pohybu, můžeme bez újmy na obecnosti používat zápis $\psi = \frac{1}{2}(1-\gamma^5)\phi$.

References

[1] Utiyama,R.:*Invariant teoretical interpretation of interaction.* Physical Review, 101, 1597 (1956).

[2] Coleman,S.:*Secrete symmetry : Introduction to spontaneous symmetry breaking in gauge theories* z knihy *Laws of hadronic matter*(proceedings of the 11th Course of the Etore Majoranta International School of Subnuclear Physics), ed. A. Zichichi, Academic Press, 1975.

[3] *Kvantovaja těorija kalibrovočnych polej*, ed. N.P. Konopleva, Mir, Moskva 1977.

[4] Formánek, J.:*Úvod do kvantové teorie*, Academia Praha 1983.

[5] N.N.Bogoljubov, D.V.Širkov:*Vveděnie v těoriju kvantovanych polej.* Nauka, Moskva 1973.

[6] Altarelli,G.:*Phenomenology of Flavordynamics* z knihy *Quantum Flavordynamics, Quantum Chromodynamics and Unified Theories*, eds. K.T. Mahanthappa, J.Randa, Plenum press, New York , 1980.

[7] Levinson N., Coddington E.A. :*Theory of ordinary differential equations*, McGraw-Hill Book Company, Inc., New York, 1955.