Fakulta Jaderná a Fyzikálně Inženýrská v Praze

Teoretické horní meze hmotností Higgsových částic v modelech elektroslabých interakcí

Výzkumný úkol

Michal Malinský IV.ročník

Vedoucí práce: Prof. Jiří Hořejší

V Praze 28.5.1998

Contents

1 Úvod

Jedním z největších problémů současné fyziky elementárních částic je otázka existence tzv. Higgsova bosonu. To je částice, jejíž zavedení je z teoretického hlediska nezbytné pro konsistentní poruchovou formulaci teorie snažící se o popis elektroslabých interakcí, jedné z důležitých součástí tzv. Standardního modelu. (Bez přítomnosti interakce s higgsovským skalárem nejsme schopni zkonstruovat teorii s hmotnými vektorovými bosony, jež by v prvním řádu poruchové teorie (na stromové úrovni) splňovala podmínku unitarity, neboť by existovaly procesy, jejichž amplitudy by v asymptotické oblasti energií vykazovaly lineární divergence (blíže viz [5])).

Standardní model (SM) bohužel však pro hmotnost Higgsova bosonu nedává žádnou přímou předpověď. Například v tzv. Minimálním standardním modelu vybudovaném S.Glashowem, A.Salamem a S.Weinbergem v průběhu 60. let je hmotnost Higgsova bosonu dána výrazem $m_H^2 = 2\lambda v^2$, kde v^2 je s vázáno s tzv. Fermiho vazbovou kostantou G_F vystupující v původní kontaktní teorii ze 60. let (a jejíž hodnotu známe) vztahem $v^2 = (G_F\sqrt{2})^{-1}$; nic podobného se ale nedá říci o hodnotě konstanty λ. Z technických požadavků "řádného" chování poruchových rozvojů lze sice stanovit jistou hranici, jíž by velikost této konstanty neměla překročit, aby poruchová formulace neztratila smysl; s tím souvisí další problém - nakolik je vůbec technický požadavek poruchové renormalizovatelnosti fyzikálně relevantní.

Dnes tedy bohužel pro konstantu λ nemáme nic přesnějšího než horní mez, která dává maximální hmotnost Higgsova bosonu řádu několika stovek GeV.

Další nebezpečí se skrývá v tom, že lze formulovat celou třídu modelů, které budou správně popisovat již pozorované, tj. například hmotnosti W a Z bosonů, budou se však od původního GWS modelu lišit strukturou Higgsova sektoru a především jeho bohatostí. Přirozeně se naskýtá otázka, jestli i v případě, že by se v přírodě nerealizoval Minimální standardní model ale nějaký z jeho "bohatších příbuzných", máme naději očekávat existenci Higgsových částic na energetické úrovni technicky dosažitelné v rozumném časovém horizontu. Poznamenejme, že současná experimentální hodnota hmotnosti Higgsova bosonu je nade vší pochybnost větší než 77 GeV.

V této práci bych se chtěl věnovat několika článkům z 80. let, které souvisejí s danou problematikou, zejména pak odvození v nich prezentovaných sumačních pravidel používaných pro stanovování mezí hmotností Higgsových bosonů v konkrétních zobecněních Minimálního standardního modelu.

2 Zobecnění Standardního modelu

Formulace původní GWS teorie byla provedena v jistém smyslu "minimálním způsobem" (odtud pochází často užívané označení Minimální standardní model (MSM)). To ovšem není jediná možnost (ani v rámci poruchové formulace), jak konstruovat teorie elektroslabých interakcí, jež ve svých hlavních rysech dávají předpovědi shodné s původním GWS modelem.

Jednou z možných cest je zobecnění Higgsova sektoru teorie. Jelikož právě tato část standardního modelu je experimentálně probádaná nejméně (včetně skutečnosti, zda vůbec Higgsův boson existuje), nejsme při konstrukci zobecněných modelů příliš omezováni požadavky na jeho konkrétní strukturu a bohatost. Obvykle se požaduje, aby spontánní narušení symetrie ve spojení s Higgsovým mechanismem dávalo správné hodnoty experimentálně již změřených veličin jako jsou třeba hmotnosti intermediálních vektorových bosonů a pod. Rozšíření splňující tuto konkrétní podmínku zkonstruovat lze, jak bude naznačeno ve zbytku tohoto paragrafu. Otázka, které z nich ve skutečnosti nejlépe popíše co možná největší množství experimentálních dat a tím vnese trochu světla do struktury Higgsova sektoru, musí být zatím ponechána dalším experimentům.

Další intenzivně studovanou možností rozšíření SM je třída tzv. supersymetrických modelů, které obohacují původní teorie ještě výrazněji, což na spektrum hmotností Higgsova sektoru může mít též velký vliv.

Co se tedy stane v případě, že se v přírodě koneckonců nerealizuje původní minimální (třeba ve smyslu bohatosti Higgsova sektoru) GWS-model, ale nějaký obecnější ? Budou i nadále důvody věřit, že stejně jako v MSM i zde existují dostatečně lehké Higgsovy částice, jejichž hmotnosti budou alespoň teoreticky na úrovni dosažitelné na současných urychlovačích nebo na aparaturách ne příliš vzdálené budoucnosti ?

Obsahem této práce bude diskuse jednoduchých algebraických schémat, která si kladou za cíl podpořit argumenty *pro* další experimentální hledání Higgsových částic. Vyplývá z nich, že *v každé "rozumné" teorii s rozšířeným Higgsovým sektorem je důvod očekávat existenci alespoň jednoho Higgsova bosonu s hmotností "na úrovni slabé škály"*, tj. řádově stovek GeV.

2.1 Hmotnost W a Z bosonu v modelech s rozšířeným Higgsovým sektorem

Uvažujme nějaký z modelů s rozšířeným Higgsovým sektorem, tj. až na bohatost Higgsova multipletu a odpovídajícím způsobem modifikovanou Yukawovskou interakci shodný s původním GWS-modelem. Nechť tento multiplet obsahuje n komplexních skalárních polí (v GWS-modelu $n = 2$), tj. připišme mu izospin $T = \frac{1}{2}(n-1)$. Dále mu přiřaďme slabý hypernáboj Y takový, aby platilo $Y \in \{-T, \ldots, T\}$; to má mimo jiné za následek, že jedno z polí multipletu bude neutrální a tudíž anihilováno operátorem náboje T_3+Y.V případě základního stavu s nenulovou právě touto komponentou to odpovídá narušení původní plné $SU(2) \otimes U(1)$ na zbytkovou tzv. $U(1)_{em}$ symetrii, jejímž důsledkem je "přežití" zákona zachování elektrického náboje, což je obvykle formulováno jako jeden z obecných požadavků.

Zapišme nyní tu část lagrangiánu této teorie, pomocí níž se generují hmotové členy intermediálních vektorových bosonů (viz např. [10]):

$$\mathcal{L}_{IVB}^{mass} = \phi_0^\dagger (igA_\mu^i T_i + ig' B_\mu Y)(-igA^{j\,\mu} T_j - ig' B^\mu Y)\phi_0 \tag{1}$$

Jednotlivé symboly mají následující význam: g a g' jsou vazbové konstanty odpovídající po řadě kalibračním grupám $SU(2)$ a $U(1)$, A_μ^i a B_μ jsou komponenty kalibračních polí, operátory T_i tvoří reprezentaci algebry $su(2)$ na prostoru dimenze n, Y je operátor slabého hypernáboje a konečně symbolem ϕ_0 jsme označili vektor minimalizující Higgsovský potenciál, konkrétně $\phi_0^\dagger = \frac{1}{\sqrt{2}}(0, \ldots, v, \ldots, 0)$. (Tato část lagrangiánu vzniká z lokálně kalibračně invariantního kinetického členu $\phi^\dagger D_\mu^\dagger D^\mu \phi$ poté, co se docílí "narušení symetrie".) Použitím relací

$$\frac{1}{2}\{T_+, T_-\} = T_1^2 + T_2^2 = T^2 - T_3^2 \quad , \quad T_3\phi_0 = -Y\phi_0 \quad \text{a} \quad \phi_0^\dagger T_\pm \phi_0 = 0 \tag{2}$$

upravíme výraz (1) postupně do tvaru

$$\mathcal{L} = \phi_0^\dagger[\tfrac{g^2}{2}(A^1_\mu - iA^2_\mu)(A^{1\,\mu} + iA^{2\,\mu})\tfrac{1}{2}\{T_+, T_-\} + (gA^3_\mu - g'B_\mu)(gA^{3\,\mu} - g'B^\mu)T_3^2]\phi_0 = \\ = \tfrac{v^2}{2}g^2[T(T+1) - Y^2]W^-_\mu W^{+\,\mu} + \tfrac{v^2}{2}(g^2 + g'^2)Y^2 Z_\mu Z^\mu \qquad (3)$$

kde jsme zavedli obvyklým způsobem

$$W^\pm_\mu \equiv \frac{A^1_\mu \mp iA^2_\mu}{\sqrt{2}} \quad \text{a} \quad Z_\mu \equiv \cos\theta_W A^3_\mu - \sin\theta_W B_\mu\,, \quad \cos\theta_W \equiv \frac{g}{\sqrt{g^2 + g'^2}} \qquad (4)$$

V tomto výrazu již snadno identifikujeme hmotnosti intermediálních vektorových bosonů:

$$m_W^2 = \frac{v^2}{2}g^2[T(T+1) - Y^2] \qquad \frac{1}{2}m_Z^2 = \frac{v^2}{2}(g^2 + g'^2)Y^2. \qquad (5)$$

Požadujeme-li, aby tento model správně reprodukoval experimentální fakt, že

$$m_W^2 = m_Z^2 \cos\theta_W{}^2 \qquad (6)$$

znamená to, že je nutné, aby

$$T(T+1) - 3Y^2 = 0 \qquad (7)$$

tj. na začátku musíme vybrat takovou konfiguraci Higgsova sektoru (izospin,slabý hypernáboj), která splňuje (7). Kromě dvojice $(T, Y) = (\frac{1}{2}, -\frac{1}{2})$, která popisuje Higgsův sektor původního GWS-modelu, má tato rovnice i další řešení, např. $(3, 2)$ (blíže viz [8]).

Z hlediska splnění požadavků na hmotnosti intermediálních vektorových bosonů tedy opravdu existují jiné konstrukce modelů elektroslabých interakcí, mezi nimiž nejsme na současné úrovni poznatků schopni rozhodnout. To znamená, že otázka existence dostatečně lehkého Higgsova bosonu v obecnějších teoriích není pouze akademickou záležitostí a může se časem ukázat jako velmi důležitá.

3 Vztah komplexní a reálné parametrizace Higgsova sektoru

Ve většině monografií zabývajících se problematikou standardního modelu je k popisu Higgsova sektoru použita komplexní parametrizace, tj. Higgsovo pole vstupuje do lagrangiánu ve formě komplexního multipletu (v konkrétním případě původního GSW-modelu jako komplexní dublet), jemuž je připisován isospin $T = \frac{1}{2}(n-1)$, kde n je počet komponent zmiňovaného multipletu a slabý hypernáboj Y takový, aby existovala neutrální komponenta.

Na druhé straně všechna sumační pravidla prezentovaná v této práci jsou odvozována pomocí parametrizace reálné, proto považuji za důležité zmínit se alespoň krátce o souvislosti těchto formulací.

Obecně se vlastně jedná o konstrukci nějakého zobrazení $\mathcal{C}^n \to \mathcal{R}^{2n}$ a reprezentace kalibrační grupy na $\mathcal{R}^{2n}$ a to takové, která bude reprodukovat algebraickou strukturu původního modelu.

Mějme tedy obecný vektor $\Phi \in \mathcal{C}^n$ a definujme zobrazení $\Psi : \mathcal{C}^n \to \mathcal{R}^{2n}$ předpisem

$$\Psi \begin{pmatrix} \Phi_1 \\ \vdots \\ \Phi_n \end{pmatrix} := \begin{pmatrix} \mathrm{Re}\Phi_1 \\ \vdots \\ \mathrm{Re}\Phi_n \\ \mathrm{Im}\Phi_1 \\ \vdots \\ \mathrm{Im}\Phi_n \end{pmatrix} \tag{8}$$

což je asi nejsnazší reálná reprezentace komplexní n-tice. Pro zkrácení zápisu se dále omezme na případ $n = 2$, tj. dublet; ostatní případy se dostanou naprosto shodným způsobem. Všimněme si nejprve, že pro Ψ sice platí $\Psi(x + y) = \Psi(x) + \Psi(y)$ (tzn. je aditivní), ale homogenní, tj. $\Psi(\alpha x) = \alpha\Psi(x)$ je pouze pro α *reálná*. To ovšem znamená, že pro reprezentaci algebry $su(2)$, která působí na původním komplexním dubletu pomocí $\tau_i = \frac{1}{2}\sigma_i$ (σ_i jsou Pauliho matice) a má *ryze imaginární* strukturní konstanty je nutno odpovídající reprezentaci $\tilde{\tau}_i$ na $\mathcal{R}^4$ definovat způsobem

$$\tilde{\tau}_i\Psi(\Phi) := i\Psi(-i\tau_i\Phi) \tag{9}$$

Pouze tehdy totiž bude možno zajistit, aby platilo $[\tilde{\tau}_i, \tilde{\tau}_j] = i\epsilon_{ijk}\tilde{\tau}_k$, což je podmínka reprodukování původní algebraické struktury. (V případě "naivní" definice tvaru $\tilde{\tau}_i\Psi(\Phi) := \Psi(\tau_i\Phi)$ nebude možno "protáhnout" imaginární strukturní konstantu přes Ψ.) Nyní můžeme psát

$$[\tilde{\tau}_i, \tilde{\tau}_j]\Psi(\Phi) = (\tilde{\tau}_i\tilde{\tau}_j - \tilde{\tau}_j\tilde{\tau}_i)\Psi(\Phi) = -\Psi(-[\tau_i, \tau_j]\Phi) = -\Psi(-i\epsilon_{ijk}\tau_k\Phi) = i\epsilon_{ijk}\tilde{\tau}_k\Psi(\Phi) \tag{10}$$

Jak vypadají konkrétně matice $\tilde{\tau}_i$? Uvážíme-li, že

$$-i\tau_i \begin{pmatrix} \Phi_1 \\ \Phi_2 \end{pmatrix} = -i(\mathrm{Re}\tau_i + i\mathrm{Im}\tau_i) \begin{pmatrix} \mathrm{Re}\Phi_1 + i\mathrm{Im}\Phi_1 \\ \mathrm{Re}\Phi_2 + i\mathrm{Im}\Phi_2 \end{pmatrix} =$$

$$= \left\{ \mathrm{Re}\tau_i \begin{pmatrix} \mathrm{Im}\Phi_1 \\ \mathrm{Im}\Phi_2 \end{pmatrix} + \mathrm{Im}\tau_i \begin{pmatrix} \mathrm{Re}\Phi_1 \\ \mathrm{Re}\Phi_2 \end{pmatrix} \right\} + i \left\{ -\mathrm{Re}\tau_i \begin{pmatrix} \mathrm{Re}\Phi_1 \\ \mathrm{Re}\Phi_2 \end{pmatrix} + \mathrm{Im}\tau_i \begin{pmatrix} \mathrm{Im}\Phi_1 \\ \mathrm{Im}\Phi_2 \end{pmatrix} \right\} \tag{11}$$

můžeme pomocí (8) přepsat definiční vztah (9) do podoby

$$\tilde{\tau}_i\Psi(\Phi) = i \begin{pmatrix} \mathrm{Im}\tau_i & \mathrm{Re}\tau_i \\ -\mathrm{Re}\tau_i & \mathrm{Im}\tau_i \end{pmatrix} \Psi(\Phi) \qquad \Rightarrow \qquad \tilde{\tau}_i = i \begin{pmatrix} \mathrm{Im}\tau_i & \mathrm{Re}\tau_i \\ -\mathrm{Re}\tau_i & \mathrm{Im}\tau_i \end{pmatrix} \tag{12}$$

Vidíme tedy, že pro zvolenou parametrizaci (8) má odpovídající reálná reprezentace jednoduchou maticovou strukturu (konkrétněji pro případ MSM viz např. [9]).

Zobrazení Ψ navíc zachovává normu, tj. přímo z definice dostáváme

$$\Psi(\Phi)^\dagger\Psi(\Phi) = \sum_{i=1}^{n}(\mathrm{Re}\Phi_i^2 + \mathrm{Im}\Phi_i^2) = \Phi^\dagger\Phi \tag{13}$$

a dále třeba

$$\Psi(\Phi)^\dagger(\tilde{\tau}_i)^\dagger\tilde{\tau}_i\Psi(\Phi) = \Psi(-i\tau_i\Phi)^\dagger\Psi(-i\tau_i\Phi) = (-i\tau_i\Phi)^\dagger(-i\tau_i\Phi) = \Phi^\dagger\Phi \ = \Psi(\Phi)^\dagger\Psi(\Phi) \tag{14}$$

což zaručuje $su(2)$ invarianci obrazů kvadratických výrazů $\Phi^\dagger\Phi$, z nichž je vybudován původní samointerakční potenciál Higgsových polí.

Další věcí, kterou budeme potřebovat, je výpočet hmotností částic Higgsova sektoru z explicitního tvaru interakčního potenciálu V, jenž je reálnou funkcí polí Φ_i komlexního multipletu Φ. V lagrangiánu popisujícím systém těchto komlexních skalárních polí nechť vystupuje V způsobem

$$\mathcal{L} = \partial_\mu \Phi^\dagger \partial^\mu \Phi - V(\Phi) \tag{15}$$

Použijeme-li obvyklou parametrizaci

$$\Phi \equiv \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} \phi^1 + i\phi^2 \\ \vdots \\ \phi^{2n-1} + i\phi^{2n} \end{pmatrix} \tag{16}$$

automaticky dostaneme správně normalizované kinetické členy jednotlivých reálných komponent ϕ^i v lagrangiánu, který vznikne z původního přechodem od Φ_i k ϕ_i:

$$\mathcal{L} = \frac{1}{2}\partial_\mu \phi^i \partial^\mu \phi^i - V(\phi) \tag{17}$$

Hmotové členy získáme Taylorovým rozvojem V v okolí minima ϕ_0

$$\mathcal{L} = \frac{1}{2}\partial_\mu \phi^i \partial^\mu \phi^i - \frac{1}{2}\frac{\partial^2 V}{\partial\phi_i \partial\phi_j}|_{\phi_0}(\phi - \phi_0)^i (\phi - \phi_0)^j + \dots \tag{18}$$

a následnou diagonalizací tzv. matice kvadrátů hmotností $M^2_{ij} \equiv \frac{\partial^2 V}{\partial\phi^i\partial\phi^j}|_{\phi_0}$

4 Sumační pravidla

4.1 Polynomiální potenciály

Obsahem tohoto paragrafu bude odvození horní meze pro hmotnost nejlehčího Higgsova bosonu v obecných modelech, v nichž má potenciál popisující interakci higgsovského sektoru polynomiální charakter. Příkladem takovéto teorie může být třeba Minimální supersymetrický standardní model (MSSM), pro nějž v závěru odvodíme konkrétní pravidlo. Budeme vycházet z práce [1], jež se jako první zabývala touto problematikou, ale která neobsahovala přesnější matematickou formulaci problému.

Uvažujme teorii popisující systém N reálných skalárních polí ϕ^i, $i \in \hat{N}$, které uspořádáme do N-komponentního vektoru ϕ. Nechť lagrangián tohoto systému má tvar $\mathcal{L} = \mathcal{L}_0 + V$, kde $V : \mathcal{R}^N \to \mathcal{R}$ je samointerakční potenciál tvaru *polynomu nejvýše čtvrtého řádu* ve ϕ^i, který je invariantní vůči působení nějaké N-dimenzionální reprezentace T Lieovy grupy symetrie G na ϕ. Dále o V předpokládejme, že platí $\lim_{||\phi||\to\infty} V(\phi) = +\infty$, což např. již stačí pro existenci minima (ne nutně ostrého); označme vektor, v němž V tohoto minima nabývá, symbolem ϕ_0 (popřípadě vyberme jeden z množiny těchto minimalizujících vektorů). Definujme *matici kvadrátů hmotností* jako

$$M^2_{ij} \equiv \frac{\partial^2 V}{\partial\phi^i \partial\phi^j}\Big|_{\phi_0}. \tag{19}$$

M^2 je reálná symetrická matice $N \times N$, která je navíc maticí pozitivně semidefinitní kvadratické formy a tudíž existuje podobnostní (dokonce ortogonální) transformace, která ji převede do diagonálního tvaru $\tilde{M}^2_{ij} = m^2_{\underline{j}} \delta_{i\underline{j}}$ (budeme používat obvyklou sumační konvenci, tj. sčítá se od 1 do N přes všechny indexy vyskytující se ve dvojicích s výjimkou případů, kdy jsou oba indexy podtržené). Na diagonále stojí nezáporná vlastní čísla m^2_i, jež se identifikují s kvadráty hmotností částic popisovaných systémem polí ϕ. Každopádně však je možno zvolit v $\mathcal{R}^n$ ortonormální bázi tvořenou vlastními vektory matice M^2 (vlastní vektory k různým vlastním číslům jsou ortogonální automaticky, v případě degenerace m^2_j zvolíme ortogonální bázi v $Ker(M^2 - m^2_j)$ libovolně), označme ji $\mathcal{E} \equiv \{e_k\}^n_{k=1}$, tj. $M^2 e_k = m^2_{\underline{k}} e_{\underline{k}}$. Vyjádříme-li si nyní v této bázi vektor ϕ, je

$$\phi = \psi^k e_k \quad \Rightarrow \quad \phi^i = \psi^k (e_k)^i \quad \Rightarrow \quad \frac{\partial \phi^i}{\partial \psi_k} = (e_k)^i. \tag{20}$$

Pomocí těchto vztahů dostáváme explicitní vyjádření $\tilde{M}^2_{kl}$, poněvadž

$$\frac{\partial^2 V}{\partial \psi^k \partial \psi^l}\bigg|_v = \left(\frac{\partial^2 V}{\partial \phi^i \partial \phi^j}\right)\bigg|_v (e_k)^i (e_l)^j = M^2_{ij} (e_k)^i (e_l)^j = m^2_{\underline{k}} \delta_{\underline{k}l} = \tilde{M}^2_{kl}. \tag{21}$$

(Vlastně se jedná o převod kvadratické formy ze standardní báze do $\mathcal{E}$.) Kdybychom tedy uměli rozepsat potenciál V pomocí ψ^k, znali bychom kompletní spektrum M^2. Obecný polynomiální potenciál maximálně čtvrtého řádu ve ϕ můžeme jistě napsat ve tvaru

$$V(\phi) = a + b_i \phi^i + c_{ij} \phi^i \phi^j + d_{ijk} \phi^i \phi^j \phi^k + e_{ijkl} \phi^j \phi^j \phi^k \phi^l \tag{22}$$

Díky komutativitě součinu funkcí lze vždy toto rozepsání zařídit tak, že koeficienty b_i, c_{ij}, d_{ijk} a e_{ijkl} jsou symetrické ve všech indexech. Uvažujme infinitesimální transformaci $\phi \to \phi' = \phi + \delta\phi$, kde $\delta\phi$ můžeme vyjádřit pomocí generátorů θ^α uvažované reprezentace jako $\delta\phi = \epsilon_\alpha \theta^\alpha \phi$. Předpokládáme-li G-invarianci V, znamená to, že do členů prvního řádu v $\delta\phi$ musí platit $V(\phi + \delta\phi) = V(\phi)$. Díky symetrii b, c, d a e je možno tento požadavek přepsat do tvaru

$$b_i \delta\phi^i + 2! c_{ij} \phi^i \delta\phi^j + 3! d_{ijk} \phi^i \phi^j \delta\phi^k + 4! e_{ijkl} \phi^j \phi^j \phi^k \delta\phi^l = 0 \tag{23}$$

a to pro libovolné ϕ. Toho samozřejmě nemůžeme obecně dosáhnout, kdykoli by b_i byly nenulové. Předpokládejme proto $b_i \equiv 0$. Dosadíme-li nyní do (22) vyjádření (20), získáme tak závislost V na ψ:

$$V(\psi) = a + c_{ij} (e_r)^i (e_s)^j \psi^r \psi^s + d_{ijk} (e_r)^i (e_s)^j (e_t)^k \psi^r \psi^s \psi^t + e_{ijkl} (e_r)^i (e_s)^j (e_t)^k (e_u)^l \psi^r \psi^s \psi^t \psi^u \tag{24}$$

a tu pomocí substitucí

$$c_{ij} (e_r)^i (e_s)^j \equiv \frac{1}{2} \mu^2_{rs} \quad d_{ijk} (e_r)^i (e_s)^j (e_t)^k \equiv \frac{1}{3} \sigma_{rst} \quad e_{ijkl} (e_r)^i (e_s)^j (e_t)^k (e_u)^l \equiv \frac{1}{4} \lambda_{rstu} \tag{25}$$

přepíšeme do kratšího tvaru

$$V(\psi) = a + \frac{1}{2} \mu^2_{rs} \psi^r \psi^s + \frac{1}{3} \sigma_{rst} \psi^r \psi^s \psi^t + \frac{1}{4} \lambda_{rstu} \psi^r \psi^s \psi^t \psi^u. \tag{26}$$

Díky symetrii c, d a e jsou μ^2_{rs}, σ_{rst} a λ_{rstu} opět úplně symetrické. Označme ještě $v^k \equiv \psi^k|_v$ a dále $n \equiv v/||v||$, tj. pro n platí $||n|| = 1$. Nyní proveďme operaci $n^k n^l \frac{\partial^2}{\partial \psi^k \partial \psi^l}\Big|_v$ na obě strany rovnosti (26). Na levé straně získáme výraz

$$\text{L.S.} = n^k n^l \frac{\partial^2 V}{\partial\psi^k \partial\psi^l}\Big|_v = \sum_{l=1}^{N} n^k n^l \delta_{nl} m_l^2 = (n^k)^2 m_k^2 \tag{27}$$

Pro výrazy na pravé straně postupně dostaneme:

$$\frac{1}{2}\mu^2_{rs} n^k n^l \frac{\partial^2}{\partial\psi^k \partial\psi^l}\Big|_v (\psi^r\psi^s) = \frac{1}{2}\mu^2_{rs} n^k n^l (\delta_{rk}\delta_{sl} + \delta_{sk}\delta_{rl}) = \mu^2_{rs} n^r n^s \equiv \mu^2 \tag{28}$$

a zcela analogicky

$$\frac{1}{3}\sigma_{rst} n^k n^l \frac{\partial^2}{\partial\psi^k \partial\psi^l}\Big|_v (\psi^r\psi^s\psi^t) = 2n^r n^s n^t \sigma_{rst}||v|| \equiv 2\sigma||v|| \tag{29}$$

$$\frac{1}{4}\lambda_{rstu} n^k n^l \frac{\partial^2}{\partial\psi^k \partial\psi^l}\Big|_v (\psi^r\psi^s\psi^t\psi^u) = 3\lambda_{rstu} n^r n^s n^u n^t ||v||^2 \equiv 3\lambda||v||^2. \tag{30}$$

(použili jsme identitu $v^r = n^r||v||$) Sečtením těchto výrazů a porovnáním s (27) získáváme důležitou rovnost

$$\sum_{k=1}^{N} (n^k)^2 m_k^2 = \mu^2 + 2\sigma||v|| + 3\lambda||v||^2. \tag{31}$$

Nyní se pokusme v tomto vztahu nějakým způsobem eliminovat konstanty μ^2 a σ. O potenciálu V víme, že je minimalizován vektorem ϕ_0, tj. že $\frac{\partial V}{\partial\phi^i}\big|_{\phi_0} = 0$, což přepsáno pomocí ψ znamená $\frac{\partial V}{\partial\psi^k}\big|_v = 0$. Z explicitního vyjádření (26) tak dostáváme podmínku

$$\sum_{k=1}^{N} n^k \frac{\partial V}{\partial\psi^k}\Big|_v = \mu^2||v|| + \sigma||v||^2 + \lambda||v||^3 = ||v||(\mu^2 + \sigma||v|| + \lambda||v||^2) = 0 \tag{32}$$

Ta je samozřejmě splněna když $||v|| = 0$, tj. i $\phi_0 = 0$. O toto řešení se zde však zajímat nebudeme a to z fyzikálních důvodů: Budeme chtít totiž vyšetřovat pouze takovou třídu potenciálů, pro něž odpovídající ϕ_0 není G-invariantní, tj. pro které v Lieově algebře reprezentace T existuje operátor θ^β takový, že $\theta^\beta\phi_0 \neq 0$. To ovšem v případě $\phi_0 = 0$ splnit nelze. Předpokládejme proto dále $||v|| > 0$. Podmínka (32) tedy dává

$$\mu^2 + \sigma||v|| + \lambda||v||^2 = 0 \tag{33}$$

Vyjádříme-li z ní $\mu^2 = -\sigma||v|| - \lambda||v||^2$ a dosadíme do (31), zjednoduší se (31) do tvaru

$$\sum_{k=1}^{N} (n^k)^2 m_k^2 = \sigma||v|| + 2\lambda||v||^2. \tag{34}$$

Nakonec ukážeme, že platí $\sigma < 0$. Řešení kvadratické rovnice (33) vzhledem k $||v||$ má tvar

$$||v||_\pm = \frac{-\sigma \pm \sqrt{\sigma^2 - 4\lambda\mu^2}}{2\lambda} \tag{35}$$

Vzhledem k přirozenému požadavku $||v|| \in \mathcal{R}$ musí nutně být $\sigma^2 > 4\lambda\mu^2$. (Při kladném σ může zatím stále existovat řešení.) Dále víme, že v bodě v potenciál $V(\psi)$ nabývá minima.To znamená, že Hessova matice v tomto bodě musí být maticí pozitivně semidefinitní kvadratické formy, neboli

$$(\tilde{M}^2)_{kl} = \frac{\partial^2 V}{\partial\psi^k \partial\psi^l}\Big|_v = \frac{1}{n^k n^l}(\mu^2 + 2\sigma||v|| + 3\lambda||v||^2) \succeq 0. \tag{36}$$

Využijeme-li diagonálnosti matice $\tilde{M}^2$ a faktu, že z (33) plyne $||v||^2 = -\frac{1}{\lambda}(\mu^2+\sigma||v||)$, dostáváme pro (36) vyjádření

$$\frac{1}{(n^k)^2}(-\sigma||v|| - 2\mu^2) \geq 0 \qquad \Leftrightarrow \qquad \sigma||v|| + 2\mu^2 \leq 0 \tag{37}$$

Dosaďme nyní do poslední podmínky za $||v||$ ze vztahu (35) a roznásobme kladným λ, tím podmínka (37) přejde na

$$-(\sigma^2 - 4\lambda\mu^2) \pm \sigma\sqrt{\sigma^2 - 4\lambda\mu^2} \leq 0 \tag{38}$$

Kdy lze tuto podmínku splnit ? Jelikož platí vztah

$$|\sigma|\sqrt{\sigma^2 - 4\lambda\mu^2} \geq (\sigma^2 - 4\lambda\mu^2) \geq 0 \tag{39}$$

(stačí umocnit a roznásobit), znamená to, že (38) vyžaduje pro $||v||_\pm$ platnost $\sigma < (>) 0$. Bylo-li by ovšem $\sigma > 0$, nutně by z (35) plynulo $||v|| < 0$, což je spor. Tedy $\sigma < 0$. Vrátíme-li se nyní ke vztahu (34), můžeme na základě právě provedeného zjištění vynechat na pravé straně záporný člen $\sigma||v||$, čímž získáme omezení pro vlastní čísla M^2 ve tvaru nerovnosti

$$\sum_{k=1}^{N}(n^k)^2 m_k^2 \leq 2\lambda||v||^2. \tag{40}$$

Nyní bychom již rádi učinili závěr o tom, že nahradíme-li v součtu na levé straně všechna vlastní čísla m_k^2 nejmenším (označme si jej m_{min}^2), zůstane nerovnost (40) v platnosti. Jelikož platí $\sum(n^k)^2 = 1$, znamenalo by to, že dostáváme vztah

$$m_{min}^2 \;\leq\; 2\lambda\;||v||^2. \tag{41}$$

Matice M^2 však od počátku může být singulární (to odpovídá případu semidefinitostni jí generované kvadratické formy), neboli může být $m_{min}^2 = 0$. Tím bychom ovšem získali pouze triviální nerovnost mezi nulou a nezáporným číslem. Naštěstí lze ovšem za dosti obecných podmínek zajistit platnost obdobné nerovnosti i v tomto případě, avšak pro nejmenší *nenulové* vlastní číslo. Jedná se tedy o to, jestli záměnou všech m_k^2 ve výrazu (40) za nejmenší nenulové ($\tilde{m}_{min}^2$) nemůžeme pravou stranu této rovnosti zvětšit. Stačilo by nám ukázat, že za určitých předpokladů nulovost m_k^2 implikuje nulovost odpovídajícího n^k. Z definice v je $\phi_0 = v^k e_k$. To znamená $(e_i, \phi_0) = v^i$. Tedy $n^i = v^i/||v|| = 0 \Leftrightarrow (e_i, \phi_0) = 0$. Potřebujeme tedy formulovat podmínku, která zajistí splnění $(e_i, \phi_0) = 0$ pro každé i, jež odpovídá nulovému m_i^2.

Podívejme se na tento problém z geometrického hlediska. Za velmi obecných podmínek, které všechny "fyzikální" potenciály V splňují, můžeme na množinu minim $\mathcal{V} \equiv \{\phi_0 | \frac{\partial V}{\partial \phi}|_{\phi_0} = 0\}$ pohlížet jako na diferencovatelnou varietu v $\mathcal{R}^{2N}$. Tečný prostor $\mathcal{V}$ v bodě ϕ_0 pak lze ztotožnit s prostorem $KerM^2$, kde M^2 je konkrétní matice konstruovaná v bodě ϕ_0. Podmínka nulovosti (e_i, ϕ_0) pak odpovídá podmínce $\phi_0 \in (T_{\phi_0}\mathcal{V})^\perp$. *Ta bude splněna v případě, že pro danou volbu*

ϕ_0 *je tento bod stacionárním bodem funkce* $||\phi||$ *zúžené na varietu* V. Jak je tato podmínka realizovatelná v konkrétních modelech ?

Nejjednodušší je případ, kdy V je invariantní vůči unitární (tj. ortogonální v případě reálné formulace) reprezentaci kalibrační grupy. To znamená, že V je funkcí pouze $||\phi||$ a tedy varieta $\mathcal{V}$ je koule daná podmínkou $||\phi|| = konst.$ S touto situací se setkáváme např. v MSM a je to též nejpřirozenější cesta v modelech s rozšířeným Higgsovým sektorem. Oproti tomu v MSSM nic podobného neplatí a je tedy nutno dokázat přímo stacionaritu $||\phi||$ pro konkrétní ϕ_0.

Přidejme tedy k našim předpokladům ještě tuto podmínku, tj. požadujme, aby v modelech, jimiž se zabýváme, minimum ϕ_0 splňovalo například požadavek $\frac{\partial ||\phi||}{\partial \Omega}|_{\phi_0} = 0$ ($\frac{\partial}{\partial \Omega}$ značí derivace vůči všem úhlovým proměným parametrizujícím vektor ϕ ve varietě $\mathcal{V}$ v okolí ϕ_0), tj. aby "narušení symetrie bylo realizováno vektorem, pro který platí *podmínka stacionarity*".

Přijmeme-li toto omezení, můžeme na základě předcházejících argumentů tvrdit, že žádný ze členů, jež obsahují nenulová n_k, nemůže po záměně m_k^2 za nejmenší nenulové $\tilde{m}_{min}^2$ zvětšit hodnotu levé strany v (40). n_k^2 stojící u nulových m_k^2 jsou totiž všechna nulová. To nám dovoluje přepsat tuto nerovnost do finální podoby

$$\tilde{m}_{min}^2 \leq 2\lambda ||v||^2 \tag{42}$$

Na závěr tohoto paragrafu odvodíme jednoduché omezení pro nejmenší nenulové vlastní číslo M^2 Higgsova sektoru v tzv. Minimálním supersymetrickém rozšíření standardního modelu (MSSM). Jak víme, bude nutno dokázat též relevanci tohoto postupu, poněvadž není apriori zřejmé, že tento model splňuje "podmínku stacionarity". Pro přehlednost tento důkaz provedeme až na konci celého paragrafu.

Podle [6] má v reálné formulaci Higgsův sektor MSSM následující strukturu: je tvořen dvojicí komplexních skalárních dubletů (od značení použitého v [6] se odchylujeme normalizační konstantou $\frac{1}{\sqrt{2}}$; naše volba má tu výhodu, že stále platí $M_{ij}^2 = \frac{\partial^2 V}{\partial h_i \partial h_j}|_{min}$):

$$H_1 \equiv \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} h_1 + ih_2 \\ h_3 + ih_4 \end{pmatrix} \qquad H_2 \equiv \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} h_5 + ih_6 \\ h_7 + ih_8 \end{pmatrix} \tag{43}$$

V této parametrizaci pro samointerakční potenciál platí

$$\begin{aligned} V(h_j) = {} & \frac{m_1^2}{2} \sum_{i=1}^{4} h_i^2 + \frac{m_2^2}{2} \sum_{i=5}^{8} h_i^2 - m_3^2 (h_1 h_7 + h_4 h_6 - h_3 h_5 - h_2 h_8) + \\ & + \frac{1}{32} (g^2 + g'^2) (\sum_{i=1}^{4} h_i^2 - \sum_{i=5}^{8} h_i^2)^2 + \frac{1}{8} g^2 (h_1 h_5 + h_2 h_6 + h_3 h_7 + h_4 h_8)^2 + \\ & + \frac{1}{8} g^2 (h_1 h_6 + h_3 h_8 - h_2 h_5 - h_4 h_7)^2 \end{aligned} \tag{44}$$

Z tohoto vyjádření budeme chtít získat konkrétní hodnotu konstanty λ. Podle definice je (ve shodě s (24))

$$\lambda ||v||^4 = \lambda_{rstu} \psi_r|_{h_0} \psi_s|_{h_0} \psi_t|_{h_0} \psi_u|_{h_0} = 4 e_{ijkl} (h_0)_i (h_0)_j (h_0)_k (h_0)_l \tag{45}$$

kde h_0 je příslušné minimum V, v tomto konkrétním případě tvaru

$$h_0 \equiv (h_1 = v_1, h_7 = v_2, h_i = 0 \quad \forall i \in \{2,3,4,5,6,8\}) \tag{46}$$

a konstanty e_{ijkl} mají stejný význam jako ve vztahu (24), tj. jsou to koeficienty u jednotlivých kombinací $h_i h_j h_k h_l$ v potenciálu (44). Po vyčíslení dostaneme pro hledanou mez $2\lambda||v||^2$ výraz

$$2\lambda||v||^2 = (g^2 + g'^2)\frac{(v_1^2 - v_2^2)^2}{||v||^2} \tag{47}$$

Pro hmotnost Z-bosonu v MSSM platí vztah (viz (130))

$$m_Z^2 = \frac{1}{8}(g^2 + g'^2)||v||^2 \tag{48}$$

kde tomto případě $||v||^2 \equiv v_1^2 + v_2^2$. Po zavedení do (47) a užitím (40) tak získáváme nerovnost

$$m_{min}^2 \leq 8m_Z^2\frac{(v_1^2 - v_2^2)^2}{(v_1^2 + v_2^2)^2} = 8m_Z^2\cos^2 2\beta \leq 8m_Z^2 \quad \Rightarrow m_{min} \leq 2\sqrt{2}m_Z \tag{49}$$

(použili jsme označení $\frac{v_1}{v_2} \equiv \tan\beta$). To znamená, že hmotnost nejlehčího Higgsova bosonu by měla být určitě srovnatelná s hmotností intermediálního Z-bosonu.

4.2 Důkaz použitelnosti metody pro polynomiální potenciály v případě MSSM

Jak jsme již naznačili, v případě MSSM nelze použít pro zdůvodnění nulovosti (e_i, ϕ_0) unitaritu reprezentace, vůči níž je potenciál V invariantní. Musíme tedy dokázat stacionaritu normy vybraného základního stavu. To znamená ukázat, že funkce $f(h) := ||h||$ má v bodě h_0 nulové derivace vzhledem k varietě minim $\mathcal{V}$, což je analogie úloh na vázaný extrém. Budeme ji řešit obvyklým způsobem, tj. pomocí Lagrangeových multiplikátorů. Zároveň namísto funkce f budeme kvůli jednoduchosti řešit ekvivalentní úlohu pro funkci $F \equiv f^2$, tj. $F(h) = \sum_i h_i^2$.

Varieta $\mathcal{V}$ je popsaná rovnicemi $G_i(h_0) \equiv \frac{\partial V}{\partial h_i}|_{h_0} = 0$. Lagrangeova funkce této úlohy má tedy tvar

$$\Lambda(h) = F(h) - \lambda_i G_i(h) = \sum_{i=1}^{8} h_i^2 - \lambda_i \frac{\partial V}{\partial h_i}. \tag{50}$$

Nutnou podmínkou toho, aby bod h_0 byl stacionárním bodem funkce F vzkledem k $\mathcal{V}$, je splnění soustavy rovnic

$$\frac{\partial \Lambda}{\partial h_j}|_{h_0} = 2(h_0)_j - \lambda_i \frac{\partial^2 V}{\partial h_i \partial h_j}|_{h_0} = 2(h_0)_j - \lambda_i M_{ij}^2 = 0 \tag{51}$$

pro nějaká λ_i společně s vazbovou podmínkou

$$G_i(h_0) = \frac{\partial V}{\partial h_i}|_{h_0} = 0 \tag{52}$$

Vyhovuje všem těmto požadavkům konkrétní h_0 v MSSM ?

Podmínku (51) můžeme pro toto h_0 přepsat do maticového tvaru (využíváme faktu, že v bázi $\mathcal{H} \equiv (h_1, h_7, h_2, h_8, h_3, h_5, h_4, h_6)$ je M^2 blokově diagonální, viz (112)

$$\begin{pmatrix} M_A^2 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & M_B^2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & M_C^2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & M_D^2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \lambda_A \\ \lambda_B \\ \lambda_C \\ \lambda_D \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} h_A \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \tag{53}$$

kde

$$\lambda_A = \begin{pmatrix} \lambda_1 \\ \lambda_7 \end{pmatrix}, \quad \lambda_B = \begin{pmatrix} \lambda_2 \\ \lambda_8 \end{pmatrix}, \quad \lambda_C = \begin{pmatrix} \lambda_3 \\ \lambda_5 \end{pmatrix}, \quad \lambda_D = \begin{pmatrix} \lambda_4 \\ \lambda_6 \end{pmatrix} \quad \text{a} \quad h_A = 2 \begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \end{pmatrix} \tag{54}$$

a M_A^2 má stejný význam jako ve vztahu (117). (Explicitní tvar $M_{B,C,D}^2$ nebudeme potřebovat.) Vektor h_0 bude stacionárním bodem funkce F jedině tehdy, bude-li existovat řešení této soustavy, jež splňuje zároveň podmínky (52). Vzhledem k tomu, že se soustava (53) rozpadá na čtveřici nezávislých rovnic, můžeme o její řešitelnosti snadno učinit závěr: Především je evidentní, že $\lambda_B = \lambda_C = \lambda_D = 0$ řeší trojici homogenních soustav v (53). O řešitelnosti celé soustavy (53) tedy rozhoduje řešitelnost rovnice $M_A^2 \lambda_A = 2h_A$. Jelikož je ale M_A^2 (až na případ $v_1 = v_2$) regulární, řešení této rovnice pro každou dvojici $v_1 \neq v_2$ má tvar $\lambda_A = (M^2)^{-1} 2h_A$. V případě $v_1 = v_2$ je sice M_A^2 singulární, ale i v tomto případě řešení existuje a to z toho důvodu, že za podmínky $\lambda_1 = \lambda_7$ jsou obě rovnice tvořící tuto soustavu identické. To celkově znamená, že existuje vektor $\lambda^T \equiv (\lambda_1 \ldots \lambda_8)$, který je řešením (53).

Zjistili jsme tedy, že pro vektory h_0 a λ platí

$$\operatorname{grad} \Lambda|_{h_0} = \operatorname{grad} F|_{h_0} - \lambda^T \operatorname{grad} G|_{h_0} = 0 \tag{55}$$

Z toho vyplývá, že

$$h_0 = \frac{1}{2} \operatorname{grad} F|_{h_0} \in \{(\operatorname{grad} G|_{h_0})_i\}_{lin} = \mathrm{N}_{h_0}\mathcal{V} = (T_{h_0}\mathcal{V})^{\perp} \tag{56}$$

($\mathrm{N}_{h_0}\mathcal{V}$ značí normálový prostor variety $\mathcal{V}$ v bodě h_0 a $\{\ldots\}_{lin}$ je symbol pro lineární obal) To ovšem bylo cílem našeho snažení.

Ukázali jsme tedy, že vektor h_0 používaný v MSSM k minimalizaci potenciálu V_{MSSM} skutečně splňuje podmínku stacionarity.

4.3 Obecné potenciály

Sumační pravidlo odvozené v předchozí kapitole pro případ polynomiálního potenciálu můžeme zobecnit i pro potenciály obecnější, vyskytující se například v teoriích typu supergravitace.(Budeme vycházet z práce [2].) Uvažujme tedy nyní samointerakci reálného skalárního K-dimenzionálního multipletu ϕ zadanou funkcí $V : \mathcal{R}^K \to \mathcal{R}$, na níž klademe pouze požadavek diferencovatelnosti do 4. řádu; odpovídající minimalizující vektor opět označme ϕ_0. Definujme matici kvadrátů hmotností

$$M_{ij}^2 \equiv \frac{\partial^2 V}{\partial \phi^i \partial \phi^j}\Big|_{\phi_0}. \tag{57}$$

a dále tzv. efektivní kubické a kvartické vazbové konstanty

$$d_{ijk} \equiv \frac{\partial^3 V}{\partial\phi^i\partial\phi^j\partial\phi^k}\Big|_{\phi_0} \qquad e_{ijkl} \equiv \frac{\partial^4 V}{\partial\phi^i\partial\phi^j\partial\phi^k\partial\phi^l}\Big|_{\phi_0}. \tag{58}$$

Nechť V je G-invariantní (obvykle při konstrukci modelů elektroslabých interakcí $G \supset\supset SU(2)\otimes U(1)$), tj. platí $V(\phi) = V(\phi + \epsilon_\alpha \theta^\alpha \phi)$, kde θ^α jsou generátory uvažované Lieovské grupy G. Rozvinutím do Taylorovy řady se středem v počátku dostáváme z tohoto požadavku omezení

$$\frac{\partial V}{\partial \phi^i}(\theta^\alpha\phi)^i = 0 \qquad \forall\alpha \tag{59}$$

Derivujme nyní tuto identitu postupně podle ϕ^j,ϕ^k a ϕ^l:

$$\frac{\partial}{\partial\phi^j}\Big|_{\phi_0} \rightarrow \qquad 0 = \frac{\partial^2 V}{\partial\phi^i\partial\phi^j}\Big|_{\phi_0}(\theta^\alpha\phi_0)^i + \frac{\partial V}{\partial\phi^i}\Big|_{\phi_0}\theta^\alpha_{ij} = M^2_{ik}(\theta^\alpha\phi_0)_k \tag{60}$$

a obdobně využíváním vztahů $\frac{\partial V}{\partial\phi}|_{\phi_0} = 0$ a (60) obdržíme

$$\begin{aligned}
\frac{\partial^2}{\partial\phi^j\partial\phi^k}\Big|_{\phi_0} \rightarrow \qquad 0 &= d_{ijk}(\theta^\alpha\phi_0)_i + [M^2, \theta^\alpha]_{jk} &(61)\\
\frac{\partial^3}{\partial\phi^j\partial\phi^k\partial\phi^l}\Big|_{\phi_0} \rightarrow \qquad 0 &= e_{ijkl}(\theta^\alpha\phi_0)_i + d_{ijk}\theta^\alpha_{il} + d_{ijl}\theta^\alpha_{ik} + d_{ikl}\theta^\alpha_{ij} &(62)
\end{aligned}$$

Nyní se pokusíme ze vztahů (60),(61) a (62) vyloučit závislost na d_{ijk} a odvodit relaci mezi M^2_{ij} a e_{ijkl}. Vynásobme (61) výrazem $(\theta^\beta\phi_0)_j(\theta^\gamma\theta^\delta\phi_0)_k$. Použitím pravidel pro násobení matic dostáváme

$$d_{ijk}(\theta^\alpha\phi_0)_i(\theta^\beta\phi_0)_j(\theta^\gamma\theta^\delta\phi_0)_k + M^2_{ik}(\theta^\alpha\theta^\beta\phi_0)_i(\theta^\gamma\theta^\delta\phi_0)_k = 0 \tag{63}$$

Podobně vynásobením (62) členy $(\theta^\beta\phi_0)_j(\theta^\gamma\phi_0)_k(\theta^\delta\phi_0)_l$ obdržíme

$$\begin{aligned}
&e_{ijkl}(\theta^\alpha\phi_0)_i(\theta^\beta\phi_0)_j(\theta^\gamma\phi_0)_k(\theta^\delta\phi_0)_l + d_{ijk}(\theta^\beta\phi_0)_j(\theta^\gamma\phi_0)_k(\theta^\alpha\theta^\delta\phi_0)_i +\\
&+d_{ijl}(\theta^\beta\phi_0)_j(\theta^\alpha\theta^\gamma\phi_0)_i(\theta^\delta\phi_0)_l + d_{ikl}(\theta^\alpha\theta^\beta\phi_0)_i(\theta^\gamma\phi_0)_k(\theta^\delta\phi_0)_l = 0
\end{aligned} \tag{64}$$

Pro úpravu tohoto výrazu a vyloučení závislosti na d_{ijk} využijeme vztah (63) s odpovídajícími permutacemi indexů

$$\begin{aligned}
d_{ijk}(\theta^\beta\phi_0)_j(\theta^\gamma\phi_0)_k(\theta^\alpha\theta^\delta\phi_0)_i &= -M^2_{ik}(\theta^\beta\theta^\gamma\phi_0)_i(\theta^\alpha\theta^\delta\phi_0)_k\\
d_{ikl}(\theta^\gamma\phi_0)_k(\theta^\delta\phi_0)_l(\theta^\alpha\theta^\beta\phi_0)_i &= -M^2_{ik}(\theta^\alpha\theta^\beta\phi_0)_i(\theta^\gamma\theta^\delta\phi_0)_k\\
d_{ijl}(\theta^\beta\phi_0)_j(\theta^\delta\phi_0)_l(\theta^\alpha\theta^\gamma\phi_0)_i &= -M^2_{ik}(\theta^\alpha\theta^\gamma\phi_0)_i(\theta^\beta\theta^\delta\phi_0)_k
\end{aligned} \tag{65}$$

Dosazením do (64) dospíváme k důležitému vztahu

$$\begin{aligned}
M^2_{ik}[(\theta^\beta\theta^\gamma\phi_0)_i(\theta^\alpha\theta^\delta\phi_0)_k + (\theta^\alpha\theta^\beta\phi_0)_i(\theta^\gamma\theta^\delta\phi_0)_k + (\theta^\alpha\theta^\gamma\phi_0)_i(\theta^\beta\theta^\delta\phi_0)_k] =&\\
e_{ijkl}(\theta^\alpha\phi_0)_i(\theta^\beta\phi_0)_j(\theta^\gamma\phi_0)_k(\theta^\delta\phi_0)_l&
\end{aligned} \tag{66}$$

který svazuje již pouze elementy matice kvadrátů hmotností a kvartické vazbové konstanty, což bylo naším cílem. Jelikož platí

$$(\theta^\alpha\theta^\beta\phi_0)_i = \frac{1}{2}(\{\theta^\alpha, \theta^\beta\}\phi_0)_i + \frac{1}{2}c^{\alpha\beta}_\gamma(\theta^\gamma\phi_0)_i \tag{67}$$

kde $c_\gamma^{\alpha\beta}$ jsou strukturní konstanty algebry operátorů θ^α tzn. $[\theta^\alpha, \theta^\beta] = c_\gamma^{\alpha\beta}\theta^\gamma$, získáváme díky (60) vztah

$$M_{ij}^2(\theta^\alpha\theta^\beta\phi_0)_i = \frac{1}{2}M_{ij}^2(\{\theta^\alpha, \theta^\beta\}\phi_0)_i, \tag{68}$$

jímž můžeme původní vyjádření (66) symetrizovat.

Dále se budeme snažit použít vztahu (66) pro odvození jistých omezujících podmínek, které musejí splňovat vlastní čísla M^2. Máme možnost pokusit se vybrat některé z generátorů uvažované symetrie skalárního sektoru dané teorie (která je jistě alespoň stejně bohatá jako celá grupa symetrií jejího lagrangiánu) a pro tyto konkrétní operátory získat odpovídající omezení pro m_j^2. Při tomto výběru jsme omezeni pouze požadavkem, aby pravá strana získané rovnosti byla reálná, poněvadž bychom ji rádi identifikovali s kvartickou vazbovou konstantou jistých fyzikálních procesů. To je důvod, proč v konkrétních volbách operátorů θ^α využíváme pouze jejich určité kombinace, jak uvidíme dále.

Omezme se v tomto okamžiku na teorie, jejichž kalibrační grupa obsahuje podgrupu $SU(2)\otimes U(1)$ (všechny teorie snažící se o popis elektroslabých interakcí tuto podmínku splňují). Z reprezentace grupy symetrie G na prostoru našeho skalárního multipletu vyberme operátory T_1, T_2, T_3 a Y tvořící generátory reprezentace podgrupy $SU(2)\otimes U(1)$; pro tyto operátory platí komutační relace tvaru

$$[T_i, T_j] = \epsilon_{ijk}T_k, \qquad [T_i, Y] = 0 \tag{69}$$

Dále například víme, že všechna T_i jsou antisymetrické matice.

Nyní přistupme k vyšetřování vztahu (66) pro konkrétní výběr operátorů θ^α z řad T_i. Jelikož se při konstrukci elektroslabých teorií požaduje narušení symetrie, pro něž bude operátor náboje anihilovat základní stav, tj. $Q\phi_0 = (T_3+Y)\phi_0 = 0$, znamená to splnit požadavek $T_3\phi_0 = -Y\phi_0$, navíc se Higgsovu multipletu připisuje nenulový slabý hypernáboj, tedy $T_3\phi_0 \neq 0$. To nám umožňuje definovat jednotkový vektor

$$z \equiv \frac{T_3\phi_0}{N}, \qquad \text{kde} \qquad N \equiv ||T_3\phi_0|| \tag{70}$$

Poznamenejme, že v důsledku rovnosti (60) vektor z splňuje $M^2z = 0$, což znamená, z je vlastní vektor matice kvadrátů hmotností náležející nulovému vlastnímu číslu, neboli z je stav odpovídající Goldstoneovu bosonu.

Zvolme v prvním případě $\theta^\alpha = \theta^\beta = \theta^\gamma = \theta^\delta = T_3/N$, tj. operátor třetí komponenty izospinu. Označme ještě $f_{ZZ} \equiv e_{ijkl}z_iz_jz_kz_l$. Dosazením těchto vztahů do (66) získáváme

$$3M_{ij}^2(T_3^2\phi_0)_i(T_3^2\phi_0)_j\frac{1}{N^4} = f_{ZZ} \tag{71}$$

Definujme pro přehlednost vektor $A \equiv (T_3^2\phi_0)/N^2$, pomocí něhož vztah (71) přejde na

$$3M_{ij}^2A_iA_j = f_{ZZ} \tag{72}$$

Matice M^2 je svázána ortogonální transformací $O\tilde{M}^2O^T$ s diagonální maticí $\tilde{M}^2$, neboli

$$\tilde{M}_{ij}^2A_i'A_j' = \tilde{M}_{jj}^2A_j'^2 = m_j^2A_j'^2 = f_{ZZ} \tag{73}$$

kde A_j' jsou souřadnice vektoru A v diagonální bázi $\{e_i\}$. Rádi bychom nyní zaměnili všechna m_j^2 za nejmenší nenulové a tím získali horní odhad na toto vlastní číslo. To však opět lze pouze tehdy, jestliže koeficienty A'_j stojící u nulových m_j^2 v tomto součtu jsou nulové, jinak bychom mohli levou stranu dokonce zvětšit. Podle definice je

$$A'_j = (e_j, A) = (e_j, T_3^2 \phi_0) \tag{74}$$

Nyní využijeme faktu, že vektor ϕ_0 musí splňovat podmínku, jež je ekvivalentní podmínce $\tau_3 \Phi_0 = -Y \Phi_0$, tj. je v komplexní parametrizaci vlastním vektorem operátoru třetí komponenty izospinu. Tedy platí též $\tau_3^2 \Phi_0 = Y^2 \Phi_0$. Pro naši potřebu přeformulujeme tuto skutečnost do reálné parametrizace ve tvaru

$$T_3^2 \phi_0 = {T_3}^2 \Psi(\Phi_0) = -\Psi(-\tau_3^2 \Phi_0) = -\Psi(-Y^2 \Phi_0) = Y^2 \Psi(\Phi_0) = Y^2 \phi_0 \tag{75}$$

(Zde využíváme vztahu (9) a homogenity Ψ vůči reálným číslům.) Dále poznamenejme,že v tomto vztahu je Y^2 obyčejné reálné číslo. To znamená, že vztah (74) je možno přepsat do tvaru

$$A'_j = (e_j, T_3^2 \phi_0) = Y^2 (e_j, \phi_0) \tag{76}$$

což opět diskusi nulovosti A'_j převádí na problém nulovosti výrazu (e_j, ϕ_0). (Opět lze formulovat dodatečné podmínky, za nichž je tato rovnost zaručena (stejně jako v paragrafu o polynomiálních potenciálech).)

Označíme-li opět symbolem $\tilde{m}_{min}^2$ nejmenší nenulové vlastní číslo M^2, lze tedy psát

$$3\tilde{m}_{min}^2 \sum_j A_j'^2 = 3\tilde{m}_{min}^2 ||A'||^2 = 3\tilde{m}_{min}^2 ||A||^2 \leq f_{ZZ} \tag{77}$$

Schwarzova nerovnost dává

$$|(A, \phi_0)|^2 \leq ||A||^2 ||\phi_0||^2 \quad \Leftrightarrow \quad ||A||^2 \geq \frac{|(A, \phi_0)|^2}{||\phi_0||^2} \tag{78}$$

A jelikož podle definice A platí $(A, \phi_0) = 1$, dostáváme omezení $||A|| \geq ||\phi_0||^{-1}$. V modelech elektroslabých interakcí lze ovšem omezit i výraz $||\phi_0||$ a to například následovně: Pro hmotnost intermediálního W-bosonu platí $m_W = g||\phi_0||/2$ a dále je též svázána s Fermiho vazbovou konstantou G_F, platí totiž $8G_F m_W^2 = \sqrt{2} g^2$ a z toho $||\phi_0||^{-1} = G_F \sqrt{2}$.Pro $||A||$ to znamená $||A|| \geq G_F \sqrt{2}$. Dosazením do (77) dostáváme omezení

$$\tilde{m}_{min}^2 \leq \frac{f_{ZZ}}{3||A||^2} \leq \frac{f_{ZZ}}{3\sqrt{2} G_F} \tag{79}$$

Odvodili jsme tak první omezení nejmenšího nenulového vlastního čísla matice kvadrátů hmotností, jež se interpretuje jako hmotnost nejlehčí skalární částice (na stromové úrovni) takovéto teorie.

Pro odvození další nerovnosti volme $\theta^\alpha = \theta^\beta = T_+/N'$, $\theta^\gamma = \theta^\delta = T_-/N'$, kde $T_\pm \equiv T_1 \pm iT_2$ a $N'^2 \equiv (\phi_0, \frac{1}{2}\{T_+, T_-\}\phi_0)$. Obdobně jako v předchozím případě definujme jednotkový vektor

$$w \equiv T_- \phi_0 / N' \tag{80}$$

(jenž je obecně komplexní a odpovídá nabitému goldstoneovu bosonu).
Označme navíc $f_{WW} \equiv e_{ijkl} w_i \overline{w}_j w_k \overline{w}_l$. Po dosazení do (66) dostáváme vztah

$$M_{ij}^2 \Big[\frac{(T_+^2 \phi_0)_i}{N'^2} \frac{(T_-^2 \phi_0)_j}{N'^2} + 2 \frac{(T_+ T_- \phi_0)_i}{N'^2} \frac{(T_+ T_- \phi_0)_j}{N'^2}\Big] = f_{WW} \tag{81}$$

Pro přehlednost zaveďme vektory

$$B \equiv \frac{(T_+T_- - T_3)\phi_0}{N'^2} \qquad D \equiv \frac{(T_-^2)\phi_0}{N'^2} \tag{82}$$

S pomocí této definice a (60) můžeme přepsat (81) do tvaru

$$M_{ij}[\overline{D_i}D_j + 2B_iB_j] = f_{WW} \tag{83}$$

kde jsme použili vztah $D = \frac{(T_+^2)\phi_0}{N'^2}$. Levou stranu této rovnosti zdiagonalizujeme opět pomocí ortogonální transformace $M^2 \to \tilde{M}^2$, dostaneme tedy

$$m_i^2[|D_i'|^2 + 2B_i'^2] = f_{WW} \quad \Rightarrow \quad 2m_i^2 B_i'^2 \leq f_{WW} \tag{84}$$

Poslední vztah jsme obdrželi vynecháním nezáporného faktoru $m_i^2|D_i|^2$. Užitím identity $T_+T_- = T(T+1) - T_3^2 - T_3$ můžeme definiční vztah (82) přepsat do tvaru

$$B = \frac{(T(T+1) - T_3^2)\phi_0}{N'^2} \tag{85}$$

To vzhledem k definici N'^2 znamená, že $(B, \phi_0) = 1$. Navíc můžeme obdobným způsobem jako v prvním případě oddiskutovat nulovost všech B_j' pro j číslující nulová vlastní čísla M^2. Tím nerovnost (84) přejde do tvaru

$$\tilde{m}_{min}^2 \sum_{i=1}^{K} B_i'^2 = \tilde{m}_{min}^2 ||B||^2 \leq \frac{f_{WW}}{2} \tag{86}$$

Dále opět použijeme Schwarzovu nerovnost:

$$||B'||^2 = ||B||^2 \geq \frac{|(B,\phi_0)|^2}{||\phi_0||^2} = \frac{1}{||\phi_0||^2} = \sqrt{2}G_F \tag{87}$$

a tím získáme konečnou podobu vztahu (86)

$$\tilde{m}_{min}^2 \leq \frac{f_{WW}}{2\sqrt{2}G_F} \tag{88}$$

Do třetice zvolme $\theta^\alpha = \theta^\beta = T_3/N$, $\theta^\gamma = T_+/N'$ a $\theta^\delta = T_-/N'$. Označme $f_{ZW} \equiv e_{ijkl}z_iz_jw_k\overline{w}_l$; význam symbolů z a w je stejný jako dříve, tj. (70) a (80). Po dosazení do (66) dostaneme

$$M_{ij}^2\Big[\frac{(T_3^2\phi_0)_i}{N^2}\frac{(T_+T_-\phi_0)_j}{N'^2} + 2\frac{(T_3T_+\phi_0)_i}{NN'}\frac{(T_3T_-\phi_0)_j}{NN'}\Big] = f_{ZW} \tag{89}$$

Ve shodě s konvencí užitou v [3] označme

$$C \equiv \frac{T_-T_3\phi_0}{NN'} - \frac{(T_-\phi_0)N}{N'^3} \quad \Rightarrow \quad \overline{C} = \frac{T_+T_3\phi_0}{NN'} - \frac{(T_+\phi_0)N}{N'^3} \tag{90}$$

což můžeme pomocí identit $T_-T_3 = T_3T_- + T_-$ a $T_+T_3 = T_3T_+ - T_+$ přepsat do tvaru

$$C = \frac{T_3T_-\phi_0}{NN'} + \frac{T_-\phi_0}{NN'} - \frac{(T_-\phi_0)N}{N'^3}, \quad \overline{C} = \frac{T_3T_+\phi_0}{NN'} - \frac{T_+\phi_0}{NN'} - \frac{(T_+\phi_0)N}{N'^3} \tag{91}$$

Navíc lze ve shodě s definicí B psát

$$\frac{T_+T_-\phi_0}{N'^2} = B + \frac{T_3\phi_0}{N'^2} \tag{92}$$

Pomocí těchto vztahů a využitím (60) můžeme přepsat výraz (89) do tvaru

$$M^2_{ij}(A_iB_j + 2C_i\overline{C}_j) = f_{ZW} \tag{93}$$

Přechodem k $\tilde{M}^2$ pomocí ortogonální transformace dostáváme

$$m_i^2(A'_iB'_i + 2C'_i\overline{C'}_i) = m_i^2(A'_iB'_i + 2|C'_i|^2) = f_{ZW} \tag{94}$$

Vynecháním nezáporných členů $m_i^2|C'_i|^2$ přejdeme k nerovnosti

$$\sum_{i=1}^{K} m_i^2 A'_iB'_i \leq f_{ZW} \tag{95}$$

Díky již známým vlastnostem A'_i jako obyčejně nahradíme všechna m_i^2 nejmenším nenulovým $\tilde{m}^2_{min}$, čímž získáme

$$\tilde{m}^2_{min}\sum_{i=1}^{K} A'_iB'_i = \tilde{m}^2_{min}(A', B') = \tilde{m}^2_{min}(A, B) \leq f_{ZW} \tag{96}$$

Nakonec ještě odvodíme vztah $(A, B) = ||C||^2 + \frac{\sqrt{2}G_F}{\rho^2}$. Konstanta ρ^2 je ve shodě s obvyklým značením

$$\rho^2 = \frac{m_W^2}{m_Z^2 cos^2\theta_W} \tag{97}$$

V modelech elektroslabých interakcí s rozšířeným Higgsovým sektorem lze odvodit vztahy pro hmoty intermediálních bosonů ve tvaru $m_W^2 = \frac{1}{2}g^2v^2[T(T+1) - Y^2]$ a $m_Z^2 = (g^2 + g'^2)v^2Y^2$, kde $v \equiv ||\phi_0||$, Y je tzv. slabý hypernáboj připisovaný Higgsovu multipletu v tomto modelu a T je jeho izospin. To znamená

$$\rho^2 = \frac{[T(T+1) - Y^2]}{2Y^2} \tag{98}$$

Jelikož $T_3\phi_0 = -Y\phi_0$, lze tento vztah přepsat do tvaru

$$\begin{aligned} \rho^2 &= \frac{(\phi_0, [T(T+1) - Y^2]\phi_0)^2 g^2}{2g^2[T(T+1) - Y^2]||\phi_0||^2(\phi_0, Y^2\phi_0)} = \frac{N'^4 g^2}{4\frac{1}{2}g^2v^2[T(T+1) - Y^2]N^2} = \\ &= \frac{g^2}{4m_W^2}\frac{N'^4}{N^2} = \sqrt{2}G_F\frac{N'^4}{N^2} \quad \Rightarrow \quad \frac{N^2}{N'^4} = \frac{\sqrt{2}G_F}{\rho^2} \end{aligned} \tag{99}$$

(Využili jsme vztahu $\frac{g^2}{8m_W} = \frac{G_F}{\sqrt{2}}$.) Podívejme se nyní, jak lze pomocí tohoto zjištění upravit výraz $||C||^2$:

$$\begin{aligned} ||C||^2 &= (\phi_0, [\frac{T_3T_+}{NN'} - \frac{T_+}{N'^3}N][\frac{T_-T_3}{NN'} - \frac{T_-}{N'^3}N]\phi_0) = \\ &= (\phi_0, [\frac{T_3T_+T_-T_3}{N^2N'^2} - \frac{(T_3T_+T_- + T_+T_-T_3)}{N'^4} + \frac{T_+T_-}{N'^6}N^2]\phi_0) = \end{aligned} \tag{100}$$

$$\begin{aligned} &= (\phi_0, [\frac{T_3^2(T(T+1) - T_3^2)}{N^2N'^2} + \frac{T_3^3}{N^2N'^2} - 2\frac{T_3(T(T+1) - T_3^2)}{N'^4} - 2\frac{T_3^2}{N'^4} + \\ &+ \frac{T(T+1) - T_3^2}{N'^6}N^2 + \frac{T_3}{N'^6}N^2]\phi_0) \end{aligned} \tag{101}$$

Operátory na druhém, třetím a šestém místě v tomto součtu jsou ovšem antisymetrické a tudíž do celkového maticového elementu nepřispějí, zbývá tedy

$$||C||^2 = \big(\phi_0, [\frac{T_3^2(T(T+1)-T_3^2)}{N^2 N'^2} - 2\frac{T_3^2}{N'^4} + \frac{T(T+1)-T_3^2}{N'^6} N^2]\phi_0\big)$$
$$= (A,B) - \frac{N^2}{N'^4} = (A,B) - \frac{\sqrt{2}G_F}{\rho^2} \tag{102}$$

kde jsme použili definice A a B a dále vztah (99). To je ale přesně tvrzení, jež jsme chtěli dokázat.

Dosazením do (96) tak dostáváme

$$\tilde{m}^2_{min}(||C||^2 + \frac{\sqrt{2}G_F}{\rho^2}) \leq f_{ZW} \tag{103}$$

a po odstranění nezáporného členu $\tilde{m}^2_{min}||C||^2$ nakonec

$$\tilde{m}^2_{min} \leq \frac{f_{ZW}\rho^2}{\sqrt{2}G_F} \tag{104}$$

což je třetí omezující podmínka.

Celkově jsme tedy ze vztahu (66) vhodnou volbou operátorů θ^α patřících do Lieovy algebry předpokládané grupy symetrie $SU(2)\otimes U(1)$ obecného modelu elektroslabých interakcí odvodili tři omezení pro hodnotu nejmenšího nenulového vlastního čísla matice M^2, pro přehlednost je zde zopakujme:

$$\tilde{m}^2_{min} \leq \frac{f_{ZZ}}{3\sqrt{2}G_F}, \qquad \tilde{m}^2_{min} \leq \frac{f_{WW}}{2\sqrt{2}G_F}, \qquad \tilde{m}^2_{min} \leq \frac{f_{ZW}\rho^2}{\sqrt{2}G_F} \tag{105}$$

Ve všech případech se jedná o vztahy svazující hmotnost nejlehčí hmotné Higgsovy částice s konstantami f_{ZZ},f_{WW} a f_{ZW}. To jsou tzv. kvartické vazbové konstanty (nefyzikálních) Goldstoneových bosonů. Podle [2] existuje způsob, jak lze z (technického) požadavku “stromové unitarity” (viz [5]) odvodit omezení pro konstanty f tvaru $f \leq 16\pi$. To by i pro nejhorší z odhadů (105) dávalo omezení

$$\tilde{m}_{min} \leq \sqrt{\frac{16\pi}{3\sqrt{2}G_F}} \approx 1\text{TeV} \tag{106}$$

5 Supersymetrické modely

Idea zavedení symetrie mezi fermiony a bosony - tzv. supersymetrie se objevila v polovině sedmdesátých let. Důvodů, proč se o něco takového začali lidé zajímat, bylo několik:

- Z filosofického hlediska neobyčejně lákavá koncepce sjednocení doposud naprosto odlišných kategorií částic; akce spočtené z lagrangiánů supersymetrických teorií jsou totiž invariantní vůči jistým třídám transformací “míchajících” mezi sebou členy popisující bosony a fermiony.

- Z technického hlediska např. likvidace kvadratických divergencí příspěvků jednosmyčkových grafů ke hmotě Higgsova bosonu od fermionové smyčky pomocí příspěvků od bosonové smyčky odpovídající superpartnerovi původního fermionu, podrobněji viz [7]

Nevýhodou je ovšem skutečnost, že exaktní supersymetrie si mimo jiné *vynucuje* existenci tzv. *superpartnerů*, částic, jež mají stejné hmotnosti jako jejich reálně existující "předlohy" a "komplementární" spinovou charakteristiku (ve smyslu k fermionu boson a naopak). Takovéto objekty však doposud nebyly pozorovány ani na největších urychlovačích schopných produkovat částice klidových energií řádu stovek GeV. Tedy supersymetrie musí být v jistém smyslu narušena, aby bylo možno hmoty všech superpartnerů poslat nad (prozatím) experimentálně dosažitelné meze. (Naděje na detekci takovýchto objektů v budoucnosti se vkládají zejména do projektu LHC (Large Hadron Collider) v CERNu).

5.1 Minimální supersymetrický standardní model

Minimálním supersymetrickým standardním modelem (dále jen MSSM) rozumíme teorii, jež je rozšířením původního Glashow-Weinberg-Salamova (GWS) modelu a to takovým, které vyhovuje základním požadavkům kladeným na jakoukoli supersymetrickou teorii, přičemž nutné obohacení částicového obsahu (tj. přidání superpartnerů popřípadě Higgsových částic nad rámec GWS modelu) je provedeno jistým minimálním způsobem.

Popis celé konstrukce MSSM od základů by zacházel daleko za rámec problémů, na jejichž řešení je tato práce zaměřena, proto se v dalším budeme věnovat pouze popisu odpovídajícího Higgsova sektoru a omezením, jež lze (na stromové úrovni) obdržet pro hmotnosti Higgsových částic (v úvahách o MSSM je lepší používat pojem *Higgsovy částice* než pouze *Higgsovy bosony* a to z toho důvodu, že tato teorie jsa supersymetrickou obsahuje vedle bosonových stupňů volnosti Higgsova pole též fermionové, zvané obvykle Higgsina.) Uvidíme, že odhad provedený pomocí sumačního pravidla pro polynomiální potenciály (49), tj. omezení $m_{min} \leq 2\sqrt{2}m_Z$ je možno výrazně zlepšit.

5.2 Higgsův sektor MSSM

Oproti původnímu GSW-modelu je Higgsův sektor MSSM tvořen namísto jednoho *dvěma* dublety. Je to proto, aby pomocí Higgsova mechanismu bylo možno správně generovat hmotnosti u i d kvarků. (Potenciál v supersymetrických teoriích totiž nemůže obsahovat nábojově sdružené členy, jež jsou ovšem nezbytné pro správnou strukturu členu generujícího hmoty kvarků; roli sdružených členů tady přebírá druhý dublet, blíže viz [7].) Zapišme Higgsovy dublety v reálné parametrizaci jako

$$H_1 = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} h_1 + ih_2 \\ h_3 + ih_4 \end{pmatrix}, \quad H_2 = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} h_5 + ih_6 \\ h_7 + ih_8 \end{pmatrix} \tag{107}$$

Samointerakční potenciál přepsaný pomocí h_i má (až na zmiňovanou normalizační konstantu) podle [6] tvar

$$V_{MSSM}(h_j) = \frac{m_1^2}{2} \sum_{i=1}^{4} h_i^2 + \frac{m_2^2}{2} \sum_{i=5}^{8} h_i^2 - m_3^2(h_1h_7 + h_4h_6 - h_3h_5 - h_2h_8) +$$

$$+\frac{1}{32}(g^2+g'^2)(\sum_{i=1}^{4}h_i^2-\sum_{i=5}^{8}h_i^2)^2+\frac{1}{8}g^2(h^1h_5+h_2h_6+h_3h_7+h_4h_8)^2+ \qquad (108)$$
$$+\frac{1}{8}g^2(h_1h_6+h_3h_8-h_2h_5-h_4h_7)^2$$

Tento potenciál je třeba zavedením vakuových středních hodnot minimalizovat. Jelikož je nutné "ochránit" zákon zachování elektrického náboje, mohou nenulových středních hodnot v minimu nabývat pouze neutrální komponenty obou dubletů, označme je

$$< H_1 >= \frac{1}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix} v_1 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad H_2 = \frac{1}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix} 0 \\ v_2 \end{pmatrix}, \qquad (109)$$

tj. jediné nenulové jsou složky $< h_1 >\equiv v_1$ a $< h_7 >\equiv v_2$. Spočítáme-li z těchto znalostí matici kvadrátů hmotností, obdržíme

$$M^2_{Higgs} = \begin{pmatrix} M_{11} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & M_{17} & 0 \\ 0 & M_{22} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & M_{28} \\ 0 & 0 & M_{33} & 0 & M_{35} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & M_{44} & 0 & M_{46} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & M_{53} & 0 & M_{55} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & M_{64} & 0 & M_{66} & 0 & 0 \\ M_{71} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & M_{77} & 0 \\ 0 & M_{82} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & M_{88} \end{pmatrix} \qquad (110)$$

z níž můžeme získat představu o rozmístění nenulových elementů. Jednotlivé nenulové prvky mají tvar:

$$\begin{aligned} M_{11} &\equiv m_1^2+\frac{1}{8}(g^2+g'^2)(3v_1^2-v_2^2) & M_{17} &\equiv -m_3^2-\tfrac{1}{4}(g^2+g'^2)v_1v_2 \\ M_{22} &\equiv m_1^2+\frac{1}{8}(g^2+g'^2)(v_1^2-v_2^2) & M_{28} &\equiv m_3^2 \\ M_{33} &\equiv m_1^2+\frac{1}{8}g^2(v_1^2+v_2^2)+\frac{1}{8}g'^2(v_1^2-v_2^2) & M_{35} &\equiv m_3^2+\tfrac{1}{4}g^2v_1v_2 \\ M_{44} &\equiv m_1^2+\frac{1}{8}g^2(v_1^2+v_2^2)+\frac{1}{8}g'^2(v_1^2-v_2^2) & M_{46} &\equiv -m_3^2-\tfrac{1}{4}g^2v_1v_2 \\ M_{55} &\equiv m_2^2+\frac{1}{8}g^2(v_1^2+v_2^2)+\frac{1}{8}g'^2(v_1^2-v_2^2) & M_{77} &\equiv m_2^2-\tfrac{1}{8}(g^2+g'^2)(v_1^2-3v_2^2) \\ M_{66} &\equiv m_2^2+\frac{1}{8}g^2(v_1^2+v_2^2)+\frac{1}{8}g'^2(v_1^2-v_2^2) & M_{88} &\equiv m_2^2-\tfrac{1}{8}(g^2+g'^2)(v_1^2-v_2^2) \end{aligned} \qquad (111)$$

(Ostatní prvky dostaneme z těchto použitím faktu, že M^2 definovaná jako Hessova matice polynomiální funkce je nutně symetrická.) Matici (110) snadno převedeme do blokově diagonálního tvaru a sice přechodem k bázi $\mathcal{H} \equiv (h_1, h_7, h_2, h_8, h_3, h_5, h_4, h_6)$, v níž získá tvar

$$(M^2_{Higgs})^{\mathcal{H}} = \begin{pmatrix} M_{11} & M_{17} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ M_{71} & M_{77} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & M_{22} & M_{28} & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & M_{82} & M_{88} & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & M_{33} & M_{35} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & M_{53} & M_{55} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & M_{44} & M_{46} \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & M_{64} & M_{66} \end{pmatrix} \tag{112}$$

Z tohoto vyjádření můžeme učinit první závěr: diagonalizaci matice M^2_{Higgs} lze provést v nabitém sektoru (jemuž odpovídá čtveřice vektorů (h_3, h_4, h_5, h_6)) a v neutrálním sektoru (vektory (h_1, h_2, h_7, h_8)) nezávisle a to vzhledem k faktu, že rozměr každého z diagonálních bloků je 2, půjde snadno.

Pro naše potřeby bude důležitější diagonalizace neutrální části, jež, jak uvidíme, právě bude mít jedno z vlastních čísel menší než je hmotnost Z-bosonu v této teorii.

Předtím ovšem bude velmi užitečné odvodit několik vztahů mezi parametry m_i^2 a v_j, které plynou z obecných požadavků kladených na potenciál V_{MSSM}. Především parciální derivace v minimech musí být nulové. Aby potenciál parametrizovaný těmito konstantami navíc umožňoval "správným způsobem" narušit symetrii, nesmí nabývat globálního minima v počátku, nýbrž na vektorech v, pro něž $||v|| \neq 0$. Podmínka $\frac{\partial V_{MSSM}}{\partial h_i}|_{min} = 0$ dává netriviální rovnosti pouze pro $i = 1$ a $i = 7$ a to ve tvaru

$$\frac{\partial V_{MSSM}}{\partial h_1}|_{min} = m_1^2 v_1 - m_3^2 v_2 + \frac{1}{8}(g^2 + g'^2)(v_1^2 - v_2^2)v_1 = 0 \tag{113}$$
$$\frac{\partial V_{MSSM}}{\partial h_7}|_{min} = m_2^2 v_2 - m_3^2 v_1 - \frac{1}{8}(g^2 + g'^2)(v_1^2 - v_2^2)v_2 = 0 \tag{114}$$

Z nich získáváme vztah

$$\frac{1}{8}(g^2 + g'^2)(v_1^2 - v_2^2) = m_3^2 \frac{v_2}{v_1} - m_1^2 = m_2^2 - m_3^2 \frac{v_1}{v_2}, \tag{115}$$

který podstatně přispívá ke zjednodušení tvaru elementů matice M^2_{Higgs}, zejména členů M_{22} a M_{88}.

Vezměme bázi neutrálního sektoru ve tvaru $\mathcal{H}' \equiv (h_1, h_7, h_2, h_8)$; pro "horní" blok matice (112) zaveďme označení

$$(M^2_{Higgs})^{\mathcal{H}'}_{neutr.} \equiv \begin{pmatrix} M_{11} & M_{17} & 0 & 0 \\ M_{71} & M_{77} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & M_{22} & M_{28} \\ 0 & 0 & M_{82} & M_{88} \end{pmatrix} \equiv \begin{pmatrix} M_A^2 & 0 \\ 0 & M_B^2 \end{pmatrix} \tag{116}$$

V explicitním tvaru (viz (111)) lze matice M_A^2 a M_B^2 vyjádřit vztahy

$$M_A^2 = \begin{pmatrix} m_1^2 + \frac{1}{8}(g^2 + g'^2)(3v_1^2 - v_2^2) & -m_3^2 - \frac{1}{4}(g^2 + g'^2)v_1 v_2 \\ -m_3^2 - \frac{1}{4}(g^2 + g'^2)v_1 v_2 & m_2^2 - \frac{1}{8}(g^2 + g'^2)(v_1^2 - 3v_2^2) \end{pmatrix} \tag{117}$$

$$M_B^2 = \begin{pmatrix} m_1^2 + \frac{1}{8}(g^2+g'^2)(v_1^2-v_2^2) & m_3^2 \\ m_3^2 & m_2^2 - \frac{1}{8}(g^2+g'^2)(v_1^2-v_2^2) \end{pmatrix} \tag{118}$$

Zabývejme se nejprve maticí M_B^2. Využitím vztahů (115) ji můžeme přepsat do jednoduššího tvaru

$$M_B^2 = \begin{pmatrix} m_3^2 \frac{v_2}{v_1} & m_3^2 \\ m_3^2 & m_3^2 \frac{v_1}{v_2} \end{pmatrix} = \frac{m_3^2}{v_1 v_2} \begin{pmatrix} v_2^2 & v_1 v_2 \\ v_1 v_2 & v_1^2 \end{pmatrix} \tag{119}$$

Tato matice je singulární, protože $\det M_B^2 = 0$. Její charakteristický polynom má tvar $\chi_B(t) = \det(M_B^2 - tI) = t^2 - t\frac{m_3^2}{v_1 v_2}(v_1^2 + v_2^2)$ a má tedy samozřejmě jeden kořen $t_1 = 0$ a druhý $t_2 = \frac{m_3^2}{v_1 v_2}(v_1^2 + v_2^2)$. To znamená, že v prostoru (h_2, h_8) lze volit bázi, jejíž vektory budou odpovídat neutrálnímu Goldstoneovu bosonu (vlastní vektor k t_1) a neutrálnímu Higgsovu bosonu (t_2), označme jej (z konvenčních důvodů) H_3^0. Pro jeho hmotnost platí $m_{H_3^0}^2 = \frac{m_3^2}{v_1 v_2}(v_1^2 + v_2^2) = m_3^2(\frac{v_2}{v_1} + \frac{v_1}{v_2})$.

Zabývejme se nyní z obdobného hlediska maticí M_A^2. Opět využijme vztahy (115) pro úpravu výrazů M_{11} a M_{77}. Tím získáváme vyjádření

$$M_A^2 = \begin{pmatrix} m_3^2 \frac{v_2}{v_1} + \frac{1}{4}(g^2+g'^2)v_1^2 & -m_3^2 - \frac{1}{4}(g^2+g'^2)v_1 v_2 \\ -m_3^2 - \frac{1}{4}(g^2+g'^2)v_1 v_2 & m_3^2 \frac{v_1}{v_2} + \frac{1}{4}(g^2+g'^2)v_2^2 \end{pmatrix} \equiv \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{12} & a_{22} \end{pmatrix} \tag{120}$$

Charakteristický polynom napišme pro jednoduchost pomocí konstant a_{ij} :

$$\chi_A(t) = \det(M_A^2 - tI) = (a_{11} - t)(a_{22} - t) - a_{12}^2 = t^2 - (a_{11} + a_{22})t + (a_{11}a_{22} - a_{12}^2) \tag{121}$$

Jeho kořeny (odpovídající kvadrátům hmotností Higgsových částic realizovaných vlastními vektory M_A^2 na prostoru (h_1, h_7)) jsou tedy (značení je ve shodě s konvencí užívanou např. v [6])

$$m_{H_1^0, H_2^0}^2 = \frac{a_{11} + a_{22} \pm \sqrt{(a_{11} + a_{22})^2 - 4(a_{11}a_{22} - a_{12}^2)}}{2} \tag{122}$$

Všimněme si dále, že platí

$$a_{11} + a_{22} = m_3^2(\frac{v_2}{v_1} + \frac{v_1}{v_2}) + \frac{1}{4}(g^2 + g'^2)(v_1^2 + v_2^2) = m_{H_3^0}^2 + \frac{1}{4}(g^2 + g'^2)(v_1^2 + v_2^2) \tag{123}$$

Výraz $\frac{1}{4}(g^2 + g'^2)(v_1^2 + v_2^2)$ ovšem úzce souvisí s hmotností intermediálního Z-bosonu. Tu obdržíme obdobně jako v paragrafu 2 vyšetřováním členu $\mathcal{L}_{IVB}^{mass} = (D_\mu H_0^1)^\dagger D^\mu H_0^1 + (D_\mu H_0^2)^\dagger D^\mu H_0^2$, v němž D_μ je $SU(2) \otimes U(1)$ kovariantní derivace a (H_0^i) je označení pro vektory minimalizující v komplexní parametrizaci potenciál V_{MSSM}, tedy $(H_0^1)^T = \frac{1}{\sqrt{2}}(v_1, 0)$ a $(H_0^2)^T = \frac{1}{\sqrt{2}}(0, v_2)$. Kovariantní derivaci lze explicitně vyjádřit jako

$$D^\mu = \partial^\mu - igA^{j\,\mu}T_j - ig'B^\mu Y \tag{124}$$

Část $\mathcal{L}_{IVB}^{mass}$ přispívající bezprostředně ke hmotám vektorových bosonů tak můžeme přepsat jako

$$H_0^{1\dagger}(igA_\mu^i T_i + ig'B_\mu Y)(-igA^{j\,\mu}T_j - ig'B^\mu Y)H_0^1 + \tag{125}$$

$$+H_0^{2\dagger}(igA_\mu^i T_i + ig'B_\mu Y)(-igA^{j\,\mu}T_j - ig'B^\mu Y)H_0^2 = \tag{126}$$

$$= \frac{1}{2}(v_1, 0)\Big[g^2[T(T+1) - Y^2]W_\mu^- W^{+\,\mu} + (g^2 + g'^2)Y^2 Z_\mu Z^\mu\Big] \begin{pmatrix} v_1 \\ 0 \end{pmatrix} + \tag{127}$$

$$+\frac{1}{2}(0,v_2)\Big[g^2[T(T+1)-Y^2]W_\mu^- W^{+\,\mu} + (g^2+g'^2)Y^2 Z_\mu Z^\mu\Big]\begin{pmatrix}0\\ v_2\end{pmatrix} = \tag{128}$$

$$= \frac{g^2}{4}(v_1^2+v_2^2)W_\mu^- W^{+\,\mu} + \frac{(g^2+g'^2)}{8}(v_1^2+v_2^2)Z_\mu Z^\mu \tag{129}$$

Koeficienty stojící před symboly $Z_\mu Z^\mu$ a $W_\mu^- W^{+\,\mu}$ souvisejí s hmotnostmi těchto částic vztahy

$$\frac{1}{2}m_Z^2 = \frac{1}{8}(g^2+g'^2)(v_1^2+v_2^2), \qquad m_W^2 = \frac{1}{4}g^2(v_1^2+v_2^2) \tag{130}$$

To tedy znamená, že v MSSM v naší parametrizaci je hmotnost intermediálního vektorového bosonu Z vyjádřitelná přímo jako $m_Z^2 = \frac{1}{4}(g^2+g'^2)(v_1^2+v_2^2)$, což využijeme ve vztahu (123). Přepíšeme-li pomocí tohoto zjištění vztah (122), dostaneme

$$m^2_{H_1^0,H_2^0} = \frac{m^2_{H_3^0} + m_Z^2 \pm \sqrt{(m^2_{H_3^0}+m_Z^2)^2 - 4(a_{11}a_{22}-a_{12}^2)}}{2} \tag{131}$$

Ještě je nutno odhadnout velikost výrazu $a_{11}a_{22}-a_{12}^2$. Dosadíme-li přímo z definice (120), dostáváme

$$a_{11}a_{22}-a_{12}^2 = \frac{m_3^2}{4v_1v_2}(g^2+g'^2)(v_1^2-v_2^2)^2 = \frac{1}{4}(g^2+g'^2)(v_1^2+v_2^2)\frac{m_3^2}{v_1v_2}(v_1^2+v_2^2)\frac{(v_1^2-v_2^2)^2}{(v_1^2+v_2^2)^2} \tag{132}$$

Užijeme-li vztahy pro $m^2_{H_3^0}$ a m_Z^2 a zavedeme-li obvyklé značení $\mathrm{tg}\beta \equiv \frac{v_1}{v_2}$, $\beta \in [0, \frac{\pi}{2})$, dospějeme ke vztahu

$$a_{11}a_{22}-a_{12}^2 = m^2_{H_3^0}m_Z^2\left(\frac{1-\mathrm{tg}^2\beta}{1+\mathrm{tg}^2\beta}\right)^2 = m^2_{H_3^0}m_Z^2\cos^2 2\beta \tag{133}$$

Pomocí této rovnosti můžeme konečně vyjádřit vztah (131) v explicitním tvaru

$$m^2_{H_1^0,H_2^0} = \frac{m^2_{H_3^0} + m_Z^2 \pm \sqrt{(m^2_{H_3^0}+m_Z^2)^2 - 4m^2_{H_3^0}m_Z^2\cos^2 2\beta}}{2}, \tag{134}$$

z něhož snadno dokážeme, že $m^2_{H_2^0} \le m_Z^2$. Odmocnina v (134) totiž nabývá svého minima a maxima pro hodnoty pro $\beta_{min}=0$ a $\beta_{max}=\frac{\pi}{4}$:

$$m^2_{H_3^0} - m_Z^2 \le \sqrt{(m^2_{H_3^0}+m_Z^2)^2 - 4m^2_{H_3^0}m_Z^2\cos^2 2\beta} \le m^2_{H_3^0} + m_Z^2 \tag{135}$$

Dolní odhad má ovšem za následek, že pro hmotnost H_2^0 platí

$$m^2_{H_2^0} \le \frac{1}{2}(m^2_{H_3^0} + m_Z^2 - (m^2_{H_3^0} - m_Z^2)) = m_Z^2 \tag{136}$$

To nás opravňuje k závěru, že v Minimálním supersymetrickém standardním modelu existuje neutrální Higgsův boson, jehož hmotnost je na stromové úrovni omezená hmotností intermediálního vektorového bosonu Z. Tento závěr je rovněž zlepšením původního odhadu hmotnosti nejlehčí Higgsovy částice provedeného pomocí úvah o obecných modelech s polynomiálními potenciály.

6 Značení

Konstanty :

G_F	Fermiho vazbová konstanta
f_{ZZ},f_{ZW},f_{WW}	"Goldstoneovské" kvartické vazbové konstanty
θ_W	Weinbergův směšovací úhel (weak mixing angle)
β	jeden z parametrů MSSM, platí tg$\beta \equiv \frac{v_1}{v_2}$
a,b_i,c_{ij},d_{ijk},e_{ijkl}	koeficienty polynomiálních potenciálů
g,g'	kalibrační konstanty grup symetrie $SU(2)$ a $U(1)$
$m_{W^\pm}$, m_{Z^0}	hmotnosti intermediálních bosonů
m_H,$m_{H_i^0}$	hmotnosti Higgsových bosonů
m_1^2,m_2^2,m_3^2	koeficienty polynomiálního potenciálu V_{MSSM}

Operátory a matice :

M_{ij}^2	matice kvadrátů hmotností (i,j-tý prvek)
θ^α	generátory symetrie
T_1, T_2, T_3	operátory (slabého) izospinu
T_+, T_-	jim odpovídající kreační a anihilační operátory
τ_1, τ_2, τ_3	reprezentace $su(2)$ na prostoru komplexního Higgsova multipletu
$\tilde{\tau}_1$, $\tilde{\tau}_2$, $\tilde{\tau}_3$	reprezentace $su(2)$ na prostoru jeho reálné parametrizace
Y	operátor slabého hypernáboje
T	(slabý) izospin daného multipletu (nezáporné polocelé číslo)

Ostatní :

V	samointerakční potenciál Higgsových polí
V_{MSSM}	samointerakční potenciál Higgsových polí (Minimální supersymetrický standardní model)
Ψ	zobrazení přechodu mezi reálnou a komplexní formulací
A_μ^i, B_μ	kalibrační pole náležející generátorům $SU(2)$ a $U(1)$
D_μ	$SU(2) \otimes U(1)$ kovariantní derivace
Φ, H_1, H_2	označení higgsovských multipletů v komplexní parametrizaci
ϕ_i, $h_1 \dots h_8$	jejich komponenty při přechodu k reálné parametrizaci
v, v_1, v_2	reálné konstanty parametrizující Φ_0, ϕ_0 a H_0^i
e_i	vlastní vektory matice kvadrátů hmotností M_{ij}^2
Φ_0, ϕ_0, H_0^i	vektory minimalizující Higgsův potenciál v dané parametrizaci konkrétních modelů

References

[1] P.Langacker, H.A.Weldon, Physical Review Letters 52 (1983),1377.

[2] H.A.Weldon, Physics Letters 146B (1984),59.

[3] D.Comelli, J.R.Espinoza, Physics Letters B388 (1996),793.

[4] L.H.Ryder: Quantum Field Theory (2^{nd}ed.),Cambridge Press 1996.

[5] J.Hořejší: Elektroslabé sjednocení a stromová unitarita, Karolinum, Praha 1993.

[6] I.Simonsen: A Review of Minimal Supersymmetric Elektroweak Theory, hep-ph 9506369.

[7] S.P.Martin: A Supersymmetry Primer, hep-ph/9709369

[8] M.S.Chanowitz,M.Golden, Physics Letters 165B (1985), footnote at p.105.

[9] D.Bailin, A.Love : Introduction to Gauge Field Theory, IOP Publishing 1993, Bristol.

[10] J.Hořejší: Introduction to Electroweak Interactions; Triangle Graduate Shool Prague 1993, NC internal report.