České vysoké učení technické
Fakulta jaderná a fyzikálně inženýrská

# Výzkumný úkol: Řešení systému Yang-Baxterových rovnic pro kvantový double

Libor Šnobl

Školitel: Doc. RNDr. Ladislav Hlavatý, DrSc.

10. srpna 1998

## Shrnutí

V předložené výzkumné práci jsou shrnuty výsledky mého úsilí o vyřešení systému Yang-Baxterových rovnic, který tvoří podmínku existence kvantového doublu. Na úvod jsou shrnuty známé vlastnosti Yang-Baxterovy rovnice. V dalších kapitolách jsou předvedeny symetrie systému pro kvantový double a vyložen postup použitý pro nalezení úplné množiny řešení daného systému. Následující, hlavní část této práce je věnována prezentaci výsledků, tj. seznamu nalezených invertibilních řešení systému pro kvantový double až na symetrie.

# 1 Úvod

Celá tato výzkumná práce je věnována systému rovnic

$$\begin{array}{rcl} [W,W,W]=0 & , & [W,X,X]=0 \\ [X,X,Z]=0 & , & [Z,Z,Z]=0 \end{array} \tag{1}$$

pro matice $W, X, Z$ rozměrů $n^2 \times n^2$, $n \in \mathcal{N}$ ( význam symbolů viz kapitola 2 ). Tento systém rovnic Yang-Baxterova typu označovaný jako systém pro kvantový double se, pokud je mi známo, objevil poprvé v článku [5]. V tomto článku byl předložen způsob, jak ze dvou Hopfových algeber daných vztahy:

$$W_{12}U_1U_2 = U_2U_1W_{12}$$

$$Z_{12}T_1T_2 = T_2T_1Z_{12},$$

kde $W$ a $Z$ vyhovují Yang-Baxterovým rovnicím

$$[W,W,W]=0, \quad [Z,Z,Z]=0,$$

sestavit novou quasitrojúhelníkovou Hopfovu algebru, nazývanou kvantový double. Tato algebra je definována jako tensorový součin daných algeber s tím, že je definováno párování

$$\langle U_1, T_2 \rangle = X_{12}, \; X \in \mathcal{C}^{n^2,n^2}.$$

Aby vzniklá struktura byla korektně definována, nemůže být matice $X$ libovolná, nýbrž musí vyhovovat rovnicím

$$[X,X,Z]=0, \quad [W,X,X]=0.$$

Celkem tedy matice $W, X, Z$ musí vyhovovat výše uvedenému systému (1).

Z algebraického hlediska systém (1) tvoří systém $4n^6$ kubických rovnic pro $3n^4$ neznámých. Jedná se tedy o velice složitý, silně přeurčený systém, jehož úplné řešení připadá v úvahu pouze pro nejnižší dimenze $n$. ( Naskýtá se otázka, zda tedy vůbec existují nějaká řešení. Odpověď je kladná, například je řešením libovolné $W = X = Z$ vyhovující Yang-Baxterově rovnici nebo $X = I^{(n^2 \times n^2)}$ a $W, Z$

libovolná řešení Yang-Baxterovy rovnice.) Nadále se budu zabývat pouze nejjednodušším netriviálním případem $n = 2$, který představuje systém 256 rovnic pro 48 neznámých. Mým cílem bude nalézt pokud možno úplný seznam invertibilních řešení daného systému. V této práci se nebudu zabývat použitím nalezených výsledků. ( Předpokládám, že tímto problémem se budu zabývat v diplomové práci. )

# 2 Značení, základní pojmy a vlastnosti

## 2.1 Značení a konvence

Libovolné velké písmeno latinské abecedy v matematických výrazech značí matici ( obecně s komplexními složkami), a to podle kontextu matici $4 \times 4$ nebo $2 \times 2$. Číselné maticové indexy psané nahoře značí komponenty matice ( nebo bloky, z nichž je matice složena - v tomto případě jest to explicitně řečeno), dolní indexy číslují matice v seznamech nebo mají význam tensorového součinu - viz dále.

Horní index T značí transpozici matice, horní index AT má význam transpozice podle vedlejší diagonály, jinak řečeno

$$A^{AT} = (S \otimes S)A^T(S \otimes S)^{-1}, \quad \text{kde } S = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \tag{2}$$

Dále používám dva zvláštní horní indexy, $+$ a $-$ s významem: $A^+ = PAP$,$A^- = A^{-1}$.

Speciální význam mají následující písmena označující matice:

- $I$ značí jednotkovou matici ( rozměru $4 \times 4$ nebo $2 \times 2$ podle kontextu, případně je rozměr vyznačen : $I^{(2\times2)}, I^{(4\times4)}$)
- $P = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$
- $R_j$ značí matice ze seznamu řešení Yang-Baxterovy rovnice uvedeného v kapitole 3.2
- $X$ (event. s indexy) značí matice, které mají význam matice $X$ v rovnicích (1) ( například v seznamech řešení)
- $W$ (event. s indexy) značí matice, které mají význam matice $W$ v rovnicích (1)
- $Z$ (event. s indexy) značí matice, které mají význam matice $Z$ v rovnicích (1)

Malá písmena latinské abecedy ( či písmeno následované číslem, např. $a4$ ), stejně jako řecká písmena, označují čísla. Podle situace to mohou být čísla komplexní, nebo čísla mající význam indexů, a tedy probíhající určitou podmnožinu přirozených čísel ( v takovém případě někdy konkrétně nevypisuji tuto množinu, pokud daný index probíhá všechny hodnoty, pro které mají smysl definice symbolů použitých ve výrazu). Speciální význam mají písmena:

- $i$ vyjadřující imaginární jednotku.
- $\delta$ značí Kroneckerův symbol $\delta^{j,k} = \begin{cases} 1 & j = k \\ 0 & j \neq k \end{cases}$
- $\epsilon$ vyjadřující zkrácený zápis dvou variant $\pm 1$ ( totéž platí i pro výrazy typu $\epsilon_j$ používané tehdy, jestliže v jednom matematickém výrazu potřebuji vyjádřit několik nezávislých variant $\pm$ ).

Písmeno $\mathcal{C}$ označuje těleso komplexních čísel, $\mathcal{C}^{j,j}, j \in \mathcal{N}$ má význam prostoru komplexních matic rozměru $j \times j$. Písmeno $\mathcal{N}$ označuje množinu přirozených čísel.

Symbol odmocniny má význam libovolné komplexní odmocniny daného argumentu. Pokud se odmocnina stejného čísla vyskytuje v jednom výrazu či matici vícekrát, označuje v rámci celého výrazu tutéž konkrétní hodnotu.

V kapitolách 2,4 mají dolní maticové indexy význam tensorových součinů:

$$A_1 = A \otimes I^{(4\times4)} \quad \forall A \in \mathcal{C}^{2,2} \tag{3}$$
$$A_2 = I^{(2\times2)} \otimes A \otimes I^{(2\times2)} \quad \forall A \in \mathcal{C}^{2,2} \tag{4}$$
$$A_3 = I^{(4\times4)} \otimes A \quad \forall A \in \mathcal{C}^{2,2} \tag{5}$$
$$A_{12} = A \otimes I^{(2\times2)} \quad \forall A \in \mathcal{C}^{4,4} \tag{6}$$
$$A_{23} = I^{(2\times2)} \otimes A \quad \forall A \in \mathcal{C}^{4,4} \tag{7}$$
$$A_{13} = P_{12} A_{23} P_{12} \quad \forall A \in \mathcal{C}^{4,4} \tag{8}$$

V ostatních kapitolách dolní maticové indexy číslují matice v seznamech ( např. seznam řešení Yang-Baxterovy rovnice 3.2 ).

Hranaté závorky [,] mají dva významy podle počtu argumentů mezi nimi:

- $[A, B]$ je obvyklý komutátor matic, tj. $[A, B] = AB - BA$
- $[A, B, C]$ je takzvaný Yang-Baxterův komutátor, tj.
  $[A, B, C] = A_{12}B_{13}C_{23} - C_{23}B_{13}A_{12}$

Složené závorky {,} používám při zápisu řešení a symetrií v rozporu s obvyklým matematickým značením pro označení uspořádaných množin.

Pod pojmem invertibilní řešení systému (1) rozumím takovou trojici matic $W, X, Z$, že ke každé z nich existuje inverzní matice.

Pod označením programy pro symbolické výpočty rozumím programy Maple V Release 3,4,5 [1] firmy Waterloo Maple Inc. a Reduce 3.6 firmy RAND, které byly použity pro část výpočtu (přesněji všechny výpočty na počítači byly prováděny pomocí programu Maple V, výpočet matic $X$ (1. krok použitého postupu, viz kapitola 5) a některé výpočty v následujících krocích byly pro kontrolu paralelně prováděny pomocí programu Reduce 3.6). Výpočty byly prováděny na osobním počítači a na pracovních stanicích Indy firmy Silicon Graphics.

## 2.2 Některé vlastnosti tensorových součinů matic

V tomto odstavci shrnuji některé snadno dokazatelné vlastnosti matic ( některé bez uvedení důkazu, pokud tvrzení plyne přímo z definice, jiné s uvedením náznaku důkazu či odkazu na místo, kde lze důkaz nalézt), které se ukazují být potřebné nebo užitečné v dalších odvozeních ( tvrzení často neuvádím v nejobecnější možné podobě, např. rozměry matic používám konkrétně $4 \times 4$ a $2 \times 2$, ačkoliv stejná tvrzení platí i pro matice $n^2 \times n^2$ a $n \times n$, $\forall n \in \mathcal{N}$).

$$[A_k, B_j] = 0 \quad \forall A, B \in \mathcal{C}^{2,2}, \forall k \neq j \tag{9}$$

$$[A_{kj}, B_l] = 0 \quad \forall A \in \mathcal{C}^{4,4}, B \in \mathcal{C}^2, \forall k \neq j \neq l, l \neq k \tag{10}$$

$$P_{jk} A_k \;= A_j P_{jk} \quad \forall A \in \mathcal{C}^{2,2}, \forall j \neq k \tag{11}$$

$$P_{jk} A_{kl} \;= A_{jl} P_{jk} \quad \forall A \in \mathcal{C}^{4,4}, \forall j \neq k \neq l, l \neq j \tag{12}$$

Vlastnosti Yang-Baxterova komutátoru [2] :

1. **Tvrzení**
$$[A^T, B^T, C^T] = -([A, B, C])^T \tag{13}$$
Důkaz:
$[A^T, B^T, C^T] = A^T_{12} B^T_{13} C^T_{23} - C^T_{23} B^T_{13} A^T_{12} =$
$= (C_{23} B_{13} A_{12} - A_{12} B_{13} C_{23})^T = -([A, B, C])^T$
Konec důkazu

2. **Tvrzení**
$$[A^+, B^+, C^+] = -P_{23} P_{13} P_{12} [C, B, A] P_{23} P_{13} P_{12} \tag{14}$$
Důkaz:
$[A^+, B^+, C^+] = P_{12} A_{12} P_{12} P_{13} B_{13} P_{13} P_{23} C_{23} P_{23} - P_{23} C_{23} P_{23} P_{13} B_{13} P_{13} P_{12} A_{12} P_{12}$
$= P_{23} P_{13} A_{13} P_{13} P_{12} B_{12} P_{12} C_{23} P_{23} - P_{23} P_{12} C_{13} P_{13} P_{23} B_{23} P_{23} A_{12} P_{12} = \ldots =$
$P_{23} P_{13} P_{12} (A_{23} B_{13} C_{12} - C_{12} B_{13} A_{23}) P_{23} P_{13} P_{12} = -P_{23} P_{13} P_{12} [C, B, A] P_{23} P_{13} P_{12}$
Konec důkazu

[1] Maple V je registrovaná ochranná známka firmy Waterloo Maple Inc.
[2] v důkazech je hojně využíváno (12)

3. **Tvrzení**
$$[A^-, B^-, C^-] = -([A, B, C])^{-1} \tag{15}$$
Důkaz:
$[A^-, B^-, C^-] = A_{12}^{-1}B_{13}^{-1}C_{23}^{-1} - C_{23}^{-1}B_{13}^{-1}A_{12}^{-1} = (C_{23}B_{13}A_{12} - A_{12}B_{13}C_{23})^{-1} = -([A, B, C])^{-1}$
Konec důkazu

4. **Tvrzení**
$$[A^+, B^-, C^-] = -P_{12}C_{13}^{-1}B_{23}^{-1}[A, C, B]B_{23}^{-1}C_{13}^{-1}P_{12} \tag{16}$$
Důkaz:
$[A^+, B^-, C^-] = P_{12}A_{12}B_{23}^{-1}C_{13}^{-1}P_{12} - P_{12}C_{13}^{-1}B_{23}^{-1}A_{12}P_{12} = P_{12}C_{13}^{-1}B_{23}^{-1}$
$(B_{23}C_{13}A_{12} - A_{12}C_{13}B_{23})B_{23}^{-1}C_{13}^{-1}P_{12} = -P_{12}C_{13}^{-1}B_{23}^{-1}[A, C, B]B_{23}^{-1}C_{13}^{-1}P_{12}$
Konec důkazu

5. **Tvrzení**
$$[A^-, B^-, C^+] = -P_{23}A_{13}^{-1}B_{12}^{-1}[B, A, C]B_{12}^{-1}A_{13}^{-1}P_{23} \tag{17}$$
Důkaz: analogicky jako (16)

6. **Tvrzení**
$$[A^-, B^+, C^+] = P_{23}P_{12}A_{23}^{-1}[B, C, A]A_{23}^{-1}P_{12}P_{23} \tag{18}$$
Důkaz:
$[A^-, B^+, C^+] = P_{23}P_{12}A_{23}^{-1}B_{12}C_{13}P_{12}P_{23} - P_{23}P_{12}C_{13}B_{12}A_{23}^{-1}P_{12}P_{23} = P_{23}P_{12}A_{23}^{-1}[B, C, A]A_{23}^{-1}P_{12}P_{23}$
Konec důkazu

7. **Tvrzení**
$$[A^+, B^+, C^-] = P_{12}P_{13}C_{12}^{-1}[C, A, B]C_{12}^{-1}P_{13}P_{12} \tag{19}$$
Důkaz: analogicky jako (18)

# 3 Yang-Baxterova rovnice

V své výzkumné práci jsem hojně využíval znalost vlastností a řešení Yang-Baxterovy rovnice [3]
$$[A, A, A] = 0 \tag{20}$$
Proto jsem v následujících odstavcích stručně shrnul některé poznatky o Yang-Baxterově rovnici, zvláště seznam invertibilních řešení Yang-Baxterovy rovnice dimenze 2.

[3]Nadále budu pod označením Yang-Baxterova rovnice ( či YBE ) rozumět výhradně zde uvedenou rovnici, v literatuře nazývanou obvykle konstatní kvantová Yang-Baxterova rovnice.

**Poznámka:** Historie Yang-Baxterovy rovnice
Pokud je mi známo, vyskytla se poprvé Yang-Baxterova rovnice ( v obecnějším, nekonstantním tvaru ) v souvislosti s řešením kvantověmechanické úlohy $N$ částic na kružnici s delta-interakcí v 60.letech ( např. v práci J.B. McGuira [7] nebo C.N.Yanga [6] ). Později ke obdobné rovnici dospěl R.J. Baxter ve svých pracích ze statistické fyziky. Ovšem zájem o konstantní verzi Yang-Baxterovy rovnice se zvýšil až v 80.letech s rozvojem teorie Hopfových algeber a kvantových grup. V té době byla také nalezena řada řešení konstantní Yang-Baxterovy rovnice, viz např. [3]. Avšak teprve s větším využitím počítačů a programů pro symbolické výpočty bylo možné nalézt úplnou množinu řešení konstantní Yang-Baxterovy rovnice v nejnižší netriviální dimenzi $n = 2$. Tuto úlohu vyřešil a klasifikaci nalezených řešení provedl J. Hietarinta a výsledky publikoval ve své práci [1] z roku 1995. Ve vyšších dimenzích zatím podle mých poznatků žádná úplná klasifikace řešení Yang-Baxterovy rovnice neexistuje, ačkoliv jsou známa některá speciální řešení.

## 3.1 Známé symetrie Yang-Baxterovy rovnice

Je známo, že Yang-Baxterova rovnice $[A, A, A] = 0$ má následující symetrie ( jejich důkazy jsou implicitně obsaženy v důkazech symetrií (27),(28),(29) v kapitole 4.1, proto je zde neuvádím ):[4]

$$
\begin{aligned}
A &\to A^T && (21)\\
A &\to A^+ = PAP && (22)\\
A &\to A^{-1} && (23)\\
A &\to \lambda(S \otimes S)A(S \otimes S)^{-1} && (24)\\
\text{kde} \quad & S \in \mathcal{C}^{2,2},\ \lambda \in \mathcal{C}
\end{aligned}
$$

## 3.2 Seznam invertibilních řešení Yang-Baxterovy rovnice dimenze 2

**Poznámka:**

> Řešení uvedená v seznamu tvoří úplný systém invertibilních řešení Yang-Baxterovy rovnice (20) až na symetrie (21),(22),(23),(24). Seznam byl převzat z [3] ( včetně značení - proto v seznamu vystupuje $R_4 = PR_3P$ ), zkontrolován a doplněn o matice $R_{10}, R_{11}$ podle [1]. Parametry $p, q, r, s, t$ mohou nabývat libovolných komplexních hodnot kromě hodnot vyloučených v definici dané matice ( tyto dodatečné podmínky slouží k vyloučení zbytečných případů, kdy by tatáž matice

[4] Definice matice $P$, kterou jsem definoval pouze jako matici $4 \times 4$, může být zobecněna i na vyšší dimenze, tj. symetrie $A \to A^+$ existuje nezávisle na dimenzi.

pro danou volbu parametrů patřila do více tříd ) , parametr $\epsilon$ nabývá hodnot $\pm 1$. Nejsou explicitně uváděny speciální hodnoty parametrů, pro něž uvedené matice nejsou invertibilní.

$$R_0 = P = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$R_1 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & i \\ 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & -1 & 0 \\ i & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$R_2(q) = \begin{pmatrix} q-q^{-1}+2 & 0 & 0 & q-q^{-1} \\ 0 & q+q^{-1} & q-q^{-1} & 0 \\ 0 & q-q^{-1} & q+q^{-1} & 0 \\ q-q^{-1} & 0 & 0 & q-q^{-1}-2 \end{pmatrix} \quad q^2 \neq 1$$

$$R_3(s,\epsilon) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \epsilon & 0 & 0 \\ 0 & 1-\epsilon\, s & s & 0 \\ 1 & 0 & 0 & -\epsilon\, s \end{pmatrix}$$

$$R_4(r,\epsilon) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & r & 1-\epsilon\, r & 0 \\ 0 & 0 & \epsilon & 0 \\ 1 & 0 & 0 & -\epsilon\, r \end{pmatrix}$$

$$R_5(r,s) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & r & 0 & 0 \\ 0 & 1-rs & s & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \quad rs \neq 1$$

$$R_6(r,s) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & r & 0 & 0 \\ 0 & 1-rs & s & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -rs \end{pmatrix} \quad rs \neq \pm 1$$

$$R_7 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$R_8(r,s,t) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & r & 0 & 0 \\ 0 & 0 & s & 0 \\ 0 & 0 & 0 & t \end{pmatrix}$$

$$R_9(t) = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & t & 0 \\ 0 & t & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$$R_{10}(p,q,r) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ p & 1 & 0 & 0 \\ q & 0 & 1 & 0 \\ r & q & p & 1 \end{pmatrix}$$

$$R_{11}(q,s) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ q & 1 & 0 & 0 \\ -q & 0 & 1 & 0 \\ -qs & -s & s & 1 \end{pmatrix} \quad q \neq s$$

## 3.3 Seznam 6- a 8-vertexových řešení Yang-Baxterovy rovnice

V řadě případů z rovnic $[X,X,Z] = 0 \wedge [Z,Z,Z] = 0$ při zadaném $X$ ( získaném v 1. kroku postupu uvedeného v kapitole 5 ) plyne pouze podmínka, že $Z$ má být 8- či 6-vertexové řešení Yang-Baxterovy rovnice (20). Tato řešení jsou sice již implicitně obsažena v seznamu 3.2, ale v řadě případů neexistuje transformace ( symetrie ) řešení systému (1), která by neměnila matici $X$ a současně matici $Z$ převedla na některou z matic v seznamu 3.2 ( obecně totiž lze matici $Z$ převést pomocí symetrií uvedených v kapitole 4.1 na některou z matic $R_0, \ldots, R_{11}$, ale touto symetrií obecně poruším tvar matice $X$). Proto se ukazuje být vhodné vypsat zvlášť všechna 6- a 8-vertexová řešení s minimálním využitím symetrií.

### 3.3.1 Seznam 6-vertexových řešení Yang-Baxterovy rovnice

Jedinými invertibilními řešeními $A$ Yang-Baxterovy rovnice $[A, A, A] = 0$ ve tvaru

$$A = \begin{pmatrix} a & 0 & 0 & 0 \\ 0 & c & d & 0 \\ 0 & e & f & 0 \\ 0 & 0 & 0 & h \end{pmatrix} \tag{25}$$

bez jakéhokoliv využití symetrií jsou matice:

$$R_0 = P,\ R_5(r,s),\ R_5^T(r,s),\ R_6(r,s),\ R_6^T(r,s),\ R_8(r,s,t)$$

pro takové hodnoty parametrů, pro něž jsou uvedené matice invertibilní.

### 3.3.2 Seznam 8-vertexových řešení Yang-Baxterovy rovnice

V následujícím seznamu jsou uvedena všechna invertibilní [5] řešení $A$ Yang-Baxterovy rovnice $[A, A, A] = 0$ ve tvaru

$$A = \begin{pmatrix} a & 0 & 0 & b \\ 0 & c & d & 0 \\ 0 & e & f & 0 \\ g & 0 & 0 & h \end{pmatrix} \tag{26}$$

až na symetrii $A \to (S \otimes S)A(S \otimes S)^{-1}$, $\quad S = \begin{pmatrix} x & 0 \\ 0 & y \end{pmatrix}$ ( tzv. škálování, mění hodnotu prvků $b$ a $g$, ostatní prvky v matici $A$ a součin $bg$ ponechává beze změny ).

**Seznam:**

$R_0,\ R_1,\ R_1^{AT},\ R_2(q),\ R_2^{AT}(q),\ R_3(s,\epsilon),\ R_3^T(s,\epsilon),\ R_4(r,\epsilon),\ R_4^T(r,\epsilon),$
$R_5(r,s),\ R_5^T(r,s),\ R_6(r,s),\ R_6^T(r,s), R_7,\ R_7^T,\ R_8(r,s,t),\ R_9(t),\ R_{10}(0,0,r),$
$R_{10}^T(0,0,r),\ \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & q \\ 0 & 1 & q & 0 \\ 0 & q & 1 & 0 \\ q & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$
$\left(= (1+q)(S \otimes S)R_8(\frac{1-q}{1+q}, \frac{1-q}{1+q}, 1)(S \otimes S)^{-1}, \text{kde } S = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}\right),$
$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & q \\ 0 & -1 & q & 0 \\ 0 & q & -1 & 0 \\ q & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \quad \left(= (1-q)(S \otimes S)R_9(\frac{1+q}{1-q})(S \otimes S)^{-1}, \text{kde } S = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -i & i \end{pmatrix}\right)$

[5] bez explicitního vyloučení speciálních hodnot parametrů v matici $A$, pro něž $A$ není invertibilní

# 4 Symetrie systému rovnic pro kvantový double a jejich použití k nalezení některých řešení

Vzhledem k tomu, že systém rovnic (1) má velmi mnoho řešení, je velmi důležitým nástrojem při jeho řešení studium symetrií těchto rovnic, tj. transformací, které z libovolného řešení $W, X, Z$ vytvoří nějaké jiné řešení $\tilde{W}, \tilde{X}, \tilde{Z}$. Znalost symetrií totiž umožňuje rovnou nalézt některá řešení ( a tedy posloužit jako určitá částečná kontrola, zda použitý algoritmus řešení umožňuje nalézt všechna řešení nebo zda dochází někde při výpočtu k vynechání řešení vlivem např. softwarové chyby), dále zkrátit výsledné seznamy řešení, a také umožňuje výpočty zjednodušit ( např. snížit počet neznámých ). Je pravděpodobné, že bez znalosti a využití symetrií ke zjednodušení rovnic by výpočet nebyl na v současnosti běžně dostupných počítačích vůbec proveditelný.

## 4.1 Známé symetrie

Nyní ukáži symetrie daného systému, které jsou mi známy a které jsou použity při výpočtu a zápisu seznamu řešení. Bohužel, dle mých znalostí neexistuje žádná metoda, jak nalézt všechny symetrie systému maticových rovnic, a proto uvedené symetrie byly nalezeny víceméně zkusmo ze znalosti některých symetrií Yang-Baxterovy rovnice (20) a z výsledků řešení systému (1).

1. **Symetrie**

$$\begin{aligned} W \to \tilde{W} &= \kappa(T \otimes T) W (T \otimes T)^{-1} \\ X \to \tilde{X} &= \lambda(T \otimes S) X (T \otimes S)^{-1} \\ Z \to \tilde{Z} &= \mu(S \otimes S) Z (S \otimes S)^{-1} \\ \forall S, T &\in \mathcal{C}^{2,2},\ \kappa, \lambda, \mu \in \mathcal{C} \end{aligned} \tag{27}$$

   Důkaz:
   $[W, W, W] = 0 \Rightarrow [\tilde{W}, \tilde{W}, \tilde{W}] = [\kappa(T \otimes T)W(T \otimes T)^{-1}, \kappa(T \otimes T)W(T \otimes T)^{-1},$
   $\kappa(T \otimes T)W(T \otimes T)^{-1}] = \kappa^3 T_1 T_2 T_3 [W, W, W] T_1^{-1} T_2^{-1} T_3^{-1} = 0$

   $[W, X, X] = 0 \Rightarrow [\tilde{W}, \tilde{X}, \tilde{X}] = [\kappa(T \otimes T)W(T \otimes T)^{-1}, \lambda(T \otimes S)X(T \otimes S)^{-1},$
   $\lambda(T \otimes S)X(T \otimes S)^{-1}] = \kappa\lambda^2 (T_1 T_2 W_{12} T_1^{-1} T_2^{-1} T_1 S_3 X_{13} T_1^{-1} S_3^{-1}$
   $T_2 S_3 X_{23} T_2^{-1} S_3^{-1} - T_2 S_3 X_{23} T_2^{-1} S_3^{-1} T_1 S_3 X_{13} T_1^{-1} S_3^{-1} T_1 T_2 W_{12} T_1^{-1} T_2^{-1}) =$
   $\kappa\lambda^2 T_1 T_2 S_3 (W_{12} X_{13} X_{23} - W_{23} X_{13} X_{12}) T_1^{-1} T_2^{-1} S_3^{-1} = \kappa\lambda^2 T_1 T_2 S_3 [W, X, X]$
   $T_1^{-1} T_2^{-1} S_3^{-1} = 0$

   $[X, X, Z] = 0 \Rightarrow [\tilde{X}, \tilde{X}, \tilde{Z}] = \lambda^2 \mu T_1 S_2 S_3 [X, X, Z] T_1^{-1} S_2^{-1} S_3^{-1} = 0$ ( kroky analogické jako pro $[\tilde{W}, \tilde{X}, \tilde{X}] = 0$)

   $[Z, Z, Z] = 0 \Rightarrow [\tilde{Z}, \tilde{Z}, \tilde{Z}] = [\mu(S \otimes S)Z(S \otimes S)^{-1}, \mu(S \otimes S)Z(S \otimes S)^{-1}, \mu(S \otimes$

$S)Z(S\otimes S)^{-1}] = \mu^3 S_1 S_2 S_3 [Z,Z,Z] S_1^{-1} S_2^{-1} S_3^{-1} = 0$
Konec důkazu

2. **Symetrie**

$$\begin{aligned} W \to \tilde{W} &= W^T \\ X \to \tilde{X} &= X^T \\ Z \to \tilde{Z} &= Z^T \end{aligned} \tag{28}$$

Důkaz: [6]
$[\tilde{W},\tilde{W},\tilde{W}] = -([W,W,W])^T = 0$

$[\tilde{W},\tilde{X},\tilde{X}] = -([W,X,X])^T = 0$

$[\tilde{X},\tilde{X},\tilde{Z}] = -([X,X,Z])^T = 0$

$[\tilde{Z},\tilde{Z},\tilde{Z}] = -([Z,Z,Z])^T = 0$
Konec důkazu

3. **Symetrie**

$$\begin{aligned} W \to \tilde{W} &= W^\pm \\ X \to \tilde{X} &= X^- \\ Z \to \tilde{Z} &= Z^\pm \end{aligned} \tag{29}$$

Důkaz: [7]
$[W^-,W^-,W^-] = -([W,W,W])^{-1} = 0,$
$[W^+,W^+,W^+] = -P_{23}P_{13}P_{12}[W,W,W]P_{23}P_{13}P_{12} = 0$
$[W^-,X^-,X^-] = -([W,X,X])^{-1} = 0,$
$[W^+,X^-,X^-] = -P_{12}X_{13}^{-1}X_{23}^{-1}[W,X,X]X_{23}^{-1}X_{13}^{-1}P_{12} = 0$
$[X^-,X^-,Z^-] = -([X,X,Z])^{-1} = 0,$
$[X^-,X^-,Z^+] = -P_{23}X_{13}^{-1}X_{12}^{-1}[X,X,Z]X_{12}^{-1}X_{13}^{-1}P_{23} = 0$
$[Z^\pm,Z^\pm,Z^\pm] = 0$ ( viz rovnice pro W výše )
Konec důkazu

4. **Symetrie**

$$\begin{aligned} W \to \tilde{W} &= Z^\pm \\ X \to \tilde{X} &= X^+ \\ Z \to \tilde{Z} &= W^\pm \end{aligned} \tag{30}$$

[6] Viz (13)
[7] Viz (14),(15),(16),(17)

Důkaz: [8]
$[W^{\pm},W^{\pm},W^{\pm}]=0$,$[Z^{\pm},Z^{\pm},Z^{\pm}]=0$ viz důkaz symetrie (29)
$[Z^+,X^+,X^+]=-P_{23}P_{13}P_{12}[X,X,Z]P_{23}P_{13}P_{12}=0$
$[Z^-,X^+,X^+]=P_{23}P_{12}Z_{23}^{-1}[X,X,Z]Z_{23}^{-1}P_{12}P_{23}=0$
$[X^+,X^+,W^+]=-P_{23}P_{13}P_{12}[W,X,X]P_{23}P_{13}P_{12}=0$
$[X^+,X^+,W^-]=P_{12}P_{13}W_{12}^{-1}[W,X,X]W_{12}^{-1}P_{13}P_{12}$
Konec důkazu

5. **Symetrie**
Nechť $W,X,Z$ je řešením systému (1) a nechť existují matice $S,T\in\mathcal{C}^{2,2}$ takové, že $[W,S\otimes S]=[W,T\otimes T]=0\wedge\exists A\in\mathcal{C}^{2,2}:\quad X(T\otimes I)(S\otimes I)=(A\otimes I)X$. Potom jest symetrií systému (1) následující transformace:

$$\begin{aligned} W\to\tilde{W} &= W\\ X\to\tilde{X} &= (S\otimes I)X(T\otimes I)\\ Z\to\tilde{Z} &= Z \end{aligned} \tag{31}$$

Důkaz:
$[\tilde{W},\tilde{X},\tilde{X}]=W_{12}S_1X_{13}T_1S_2X_{23}T_2-S_2X_{23}T_2S_1X_{13}T_1W_{12}=$
$S_1S_2(W_{12}X_{13}X_{23}-X_{23}X_{13}W_{12})T_1T_2=0$
$[\tilde{X},\tilde{X},\tilde{Z}]=S_1X_{12}T_1S_1X_{13}T_1Z_{23}-Z_{23}S_1X_{13}T_1S_1X_{12}T_1=$
$S_1A_1(X_{12}X_{13}Z_{23}-Z_{23}X_{13}X_{12})T_1=0$
Konec důkazu

## 4.2 Speciální řešení

Ze znalosti výše uvedených symetrií a působení matic $P,I$ lze přímo najít některá řešení systému (1). Například se naskýtá otázka, zda pro libovolnou dvojici matic $W,Z$ řešících (20), existuje matice $X$ taková, že $\{W,X,Z\}$ tvoří řešení (1). Odpověď je kladná, neboť volbou $X=I$ skutečně splním systém (1). Současně je vidět ( s ohledem na symetrie použité při klasifikaci řešení (20) v [1]), že toto řešení ( za předpokladu, že $W,Z$ jsou invertibilní ) lze převést na tvar, kdy $W,Z$ jsou ze seznamu 3.2. Analogicky k libovolné matici $X$ lze najít matice $X,Z$ takové, že $W,X,Z$ je řešením (1). Vskutku volbou $W=Z=P$ splním (1), neboť použitím (12) dostávám

$$[P,X,X]=P_{12}X_{13}X_{23}-X_{23}X_{13}P_{12}=X_{23}X_{13}P_{12}-X_{23}X_{13}P_{12}=0$$

a obdobně $[X,X,P]=0$. Jiné zřejmé řešení pro libovolné $W$ řešící $[W,W,W]=0$ je tvořeno maticemi $X=Z=W$.

Další skutečnost, kterou lze odvodit z vlastností Yang-Baxterova komutátoru je, že pro libovolnou matici $W$ takovou, že $W$ řeší $[W,W,W]=0$ a současně

[8] Viz (14),(15),(18),(19)

existuje matice $T \in \mathcal{C}^{2,2}$ splňující $[W, T \otimes T] = 0$, je matice tvaru $X = T \otimes A$ řešením rovnice $[W, X, X] = 0$ pro libovolné $A \in \mathcal{C}^{2,2}$. Tento fakt lze využít při kontrole, zda byla nalezena všechna řešení v prvním kroku algoritmu popsaného dále. Platí i analogické tvrzení :
$Z \in \mathcal{C}^{4,4}: \quad [Z, Z, Z] = 0 \wedge \exists S \in \mathcal{C}^{2,2}: \quad [Z, S \otimes S] = 0 \Rightarrow$
$\forall A \in \mathcal{C}^{2,2}: \quad [A \otimes S, A \otimes S, Z] = 0,$
leč v dalším postupu není nijak využíváno ( díky zvolenému algoritmu výpočtu ).

# 5 Použitý algoritmus výpočtu

Nyní stručně nastíním použitý postup při výpočtu matic $W, X, Z$, které jsou řešením rovnic (1). Postup vychází ze znalosti úplného řešení rovnice $[W, W, W] = 0$, které bylo publikováno v [1]. Vzhledem k symetriím (27), (28), (29) a (30) a postupu použitému Hietarintou v jeho klasifikaci [1] je snadné nahlédnout, že libovolné řešení (1) lze pomocí těchto symetrií převést na tvar, kdy matice W je jednou z matic v seznamu invertibilních řešení 3.2.

Z tohoto výchozího poznatku, že již známe řešení první rovnice v (1), tj. $[W, W, W] = 0$, vychází celý algoritmus, který se skládá z několika navazujících kroků.

## 5.1 Výpočet matic $X$, které jsou řešením $[W, X, X] = 0$

Při hledání matic $X$ byly vyzkoušeny dva přístupy. První, na pohled jednoduší, spočíval v řešení „hrubou silou“, tj. prostém použitím programů pro symbolické matematické výpočty pro výpočet řešení systému 64 kubických rovnic o $16 - 19$ neznámých. Tato metoda však nevedla k uspokojivým výsledkům, neboť pro některé matice W počítač nebyl schopen v rozumném čase ( cca několik hodin ) najít řešení, pro jiné matice W sice řešení nalezl, ale ve zbytečně složitém tvaru. Časté také byly výskyty řešení, které bylo možno pomocí známých symetrií převést z jednoho na druhé, což pro účel klasifikace řešení bylo též nepotřebné. Proto se jako vhodnější osvědčil druhý přístup, využívající symetrie (27) ve speciálním tvaru (32) a tedy částečně odstraňující problém výskytu ekvivalentních řešení. Kromě toho tento postup snižoval počet neznámých v matici X, a tedy zjednodušoval tvar rovnice $[W, X, X] = 0$ .

Symetrii (27) systému rovnic (1) lze speciální volbou matice $T = I$ převést na tvar, který nemění matici W:

$$\{W, X, Z\} \rightarrow \{W, (I \otimes S) X (I \otimes S)^{-1}, (S \otimes S) Z (S \otimes S)^{-1}\} \tag{32}$$

Použitím této symetrie a věty o Jordanovu tvaru matice lze libovolnou matici $X$ převést na jeden ze 14 tvarů ( viz příloha 8.1 ). Tímto způsobem zjednodušené matice $X$ pak byly dosazeny do rovnice $[W, X, X] = 0$ a tato rovnice řešena pomocí programů pro symbolické výpočty [9] vzhledem ke všem parametrům vystupujícím v maticích $W, X$ ( aby byla nalezena i řešení platná pouze pro speciální hodnoty parametrů v maticích $W$). Z výsledku pak byla automaticky vynechána řešení, která byla neinvertibilní pro všechny hodnoty parametrů ( byla testována nenulovost determinantů ). Dále byla řešení ještě ručně upravována pomocí zbývajících symetrií, aby bylo dosaženo co nejmenšího počtu matic $X$ .

## 5.2 Nalezení matic $Z$ vyhovujících rovnicím $[X, X, Z] = 0$, $[Z, Z, Z] = 0$

Po nalezení matic $X$ byly dále hledány matice $Z$ splňující rovnici $[X, X, Z] = 0$. V tomto případě již obecně nezbývají žádné symetrie použitelné pro zjednodušení výpočtu a proto řešení bylo provedeno pro obecný tvar matice $Z$. Výpočet byl opět prováděn na počítači analogicky jako výše, tj. byla hledána i řešení existující pouze pro speciální hodnoty parametrů v matici a byly vyloučeny neinvertibilní výsledky.

Navazující poslední část výpočtu, tj. vyřešení Yang-Baxterovy rovnice $[Z, Z, Z] = 0$ pro nalezená $Z$ vyhovující $[X, X, Z] = 0$, byl opět prováděn na počítači kromě speciálních případů :

- $Z$ zcela obecná matice $4 \times 4$
- $Z$ 8-vertexová matice, tj. tvaru $\begin{pmatrix} a & 0 & 0 & b \\ 0 & c & d & 0 \\ 0 & e & f & 0 \\ g & 0 & 0 & h \end{pmatrix}$
- $Z$ 6-vertexová matice, speciální případ 8-vertexové matice $\begin{pmatrix} a & 0 & 0 & 0 \\ 0 & c & d & 0 \\ 0 & e & f & 0 \\ 0 & 0 & 0 & h \end{pmatrix}$

[9] Při výpočtu byla využívána standartní procedura pro řešení rovnic „solve“. Tato procedura v programu Reduce 3.6 implicitně používá při řešení systémů polynomiálních rovnic algoritmus opírající se o použití tzv. Gröbnerových bazí na zjednodušení tvaru rovnic ( viz [8] ). Tento postup vede na systém ekvivalentních ( tj. se stejnými kořeny, ačkoliv nemusí být zachována násobnost kořenů ) polynomiálních rovnic ( obecně i vyššího stupně, než byly původní rovnice ), z nichž jedna obsahuje pouze jednu neznámou, a tedy je již „snadněji“ řešitelná. Bohužel není předem jasné, zda tato rovnice bude nižšího než pátého stupně, a tedy, zda bude obecně řešitelná. Naštěstí se zdá, že při řešení daného konkrétního systému rovnic tento případ nastává a že řešení je kompletní. V případě výpočtů prováděných v programu Maple V byla také používána procedura „solve“, o její implementaci mi však není nic známo, a tedy mi nezbývá než věřit, že při jejím použití na řešení systému polynomiálních rovnic dává kompletní seznam řešení daného systému. Tuto důvěru opodstatňuje to, že při porovnání výsledků výpočtů prováděných pomocí obou systémů ( zvláště kompletního výpočtu ( tj. nalezení $X, Z$ ) pro $W = R_5(r, s), W = R_6(r, s)$ ) nebyly nalezeny žádné neekvivalentní výsledky.

Tyto případy byly vyšetřovány zvlášť a uvedeny na zvláštních seznamech (3.2) a (3.3), protože takovéto podmínky na matici $Z$ se vyskytují poměrně často a bylo by tedy zbytečné tyto matice $Z$ vypisovat explicitně pro každé $X$. Místo toho bude uváděno například „ pro danou matici $X$ je řešením rovnic $[X, X, Z] = 0 \wedge [Z, Z, Z] = 0$ libovolné 8-vertexové řešení YBE“ a podobně.

Tyto speciální případy byly řešeny na základě dříve publikovaných výsledků [1] řešení Yang-Baxterovy rovnice.

# 6 Výsledky

V následujících kapitolách jsou shrnuty výsledky mé práce, tj. pokus o nalezení všech invertibilních řešení systému (1) ( modulo známé symetrie ). Bohužel, z časových důvodů nebylo možné sepsat kompletní seznam řešení, chybí seznam $X, Z$ pro $W = R_2(q)$. Kromě toho se obávám, že v ( nepublikovaném ) seznamu řešení pro $W = R_2(q)$ se mohly projevit mně známé chyby programu Maple a také proto jsem tuto část seznamu vynechal.

## 6.1 Nalezené matice $X$ příslušné maticím $W$, tj. řešení $[W, X, X] = 0$

**Poznámka:** V následujících seznamech explicitně nevylučuji speciální hodnoty parametrů v maticích $X$, pro něž matice $X$ není invertibilní ( a tedy matice uvedené v seznamu tvoří určitou nadmnožinu množiny všech invertibilních řešení rovnice $[W, X, X] = 0$ pro dané $W$ ). Matice $X_i$, pomocí kterých jsou řešení zapsána, jsou definovány v seznamu 6.2.

1. $W = R_0$
   V tomto případě rovnici $[R_0, X, X] = 0$ řeší libovolná matice $X$. Problém nalezení matic $Z$ lze pak řešit následujícím způsobem:

   > K libovolné matici $X$ existuje řešení rovnic $[X, X, Z] = 0 = [Z, Z, Z]$ tvaru $Z = P$. Všechny ostatní dvojice matic $X, Z$ řešící (1) pak lze získat pomocí symetrie
   >
   > $$W, X, Z \to Z, (X^+)^-, W$$
   >
   > ( vzniklé složením symetrií (30) a (29) ) z řešení pro $W = R_1, \dots, R_{11}(p, q)$.

2. $W = R_1$
   V tomto případě existují následující řešení rovnice $[R_1, X, X] = 0$:

   - $X = X_1(\epsilon_1 a, \epsilon_2, a) \quad \forall a$
   - $X = X_6(a, 0) \quad \forall a$

- $X = X_{10}(a, 0, 0) \quad \forall a$
- $X = X_{14}(a, b) \quad \forall a, b$
- $X = X_{15}(a, b) \quad \forall a, b$
- $X = X_{16}(a, b, i) \quad \forall a, b$

3. $W = R_3(s, \epsilon)$
   V tomto případě existují následující řešení rovnice $[R_3(s, \epsilon), X, X] = 0$:

   (a) Řešení pro obecné hodnoty parametrů $s, \epsilon$:
   - $X = X_1(\epsilon_1 a, \epsilon_2, a) \quad \forall a$
   - $X = X_4(a, \epsilon_1, \epsilon_1 a, 1) \quad \forall a$

   (b) Řešení pro speciální hodnoty parametrů $s, \epsilon$:
   - $\epsilon = 1 : \quad X = X_7(a, a, -a, a) \quad \forall a$
   - $\epsilon = 1 : \quad X = X_7(-a, -a, -a, a) \quad \forall a$
   - $\epsilon = -1 : \quad X = X_7(-a, a, a, a) \quad \forall a$
   - $\epsilon = -1 : \quad X = X_7(a, -a, a, a) \quad \forall a$
   - $\epsilon = 1 : \quad X = X_{16}(sa, a, \frac{1}{1-s}) \quad \forall a$
   - $\epsilon = 1 : \quad X = X_{17}(sa, a, -\frac{1}{1-s}) \quad \forall a$
   - $\epsilon = -1 : \quad X = X_{16}(sa, a, -\frac{1}{1+s}) \quad \forall a$
   - $\epsilon = -1 : \quad X = X_{16}(sa, a, \frac{1}{1+s}) \quad \forall a$
   - $\epsilon = 1 : \quad X = X_8(a, \sqrt{a^2 - s - 1}) \quad \forall a$
   - $\epsilon = -1 : \quad X = X_8^{AT}(a, i\sqrt{s - 1 - a^2}) \quad \forall a$

4. $W = R_4(r, \epsilon)$
   Tento případ je zbytečné rozebírat, neboť $R_4(r, \epsilon) = R_4^+(r, \epsilon)$ a tedy všechna řešení pro $W = R_4(r, \epsilon)$ lze získat z řešení pro $W = R_3(s, \epsilon)$ například symetrií (29) ve tvaru $\{W, X, Z\} \rightarrow \{W^+, X^-, Z^-\}$.

5. $W = R_5(r, s)$
   V tomto případě existují následující řešení rovnice $[R_5(r, s), X, X] = 0$:

   (a) Řešení pro obecné hodnoty parametrů $r, s$:
   - $X = X_1(a, b, c) \quad \forall a, b, c$
   - $X = X_4(a, b, c, d) \quad \forall a, b, c, d$
   - $X = X_7(ar, a, b, bs) \quad \forall a, b$

   (b) Řešení pro speciální hodnoty parametrů $r, s$:
   - $r = 1 \wedge s = -1 : \quad X = X_8(a, b) \quad \forall a, b$
   - $r = s = -i : \quad X = X_{27}(a, b) \quad \forall a, b$

6. $W = R_6(r, s)$
V tomto případě existují následující řešení rovnice $[R_6(r, s), X, X] = 0$ pro obecné hodnoty parametrů $r, s$ ( pro speciální hodnoty parametrů neexistují žádná další řešení ):

   - $X = X_1(a, b, c) \quad \forall a, b, c$
   - $X = X_4(a, b, c, d) \quad \forall a, b, c, d$
   - $X = X_7(ar, a, -br, b) \quad \forall a, b$

7. $W = R_7$
V tomto případě existují následující řešení rovnice $[R_7, X, X] = 0$:

   - $X = X_1(\epsilon_1 a, \epsilon_2, a) \quad \forall a$
   - $X = X_6(a, 0) \quad \forall a$
   - $X = X_{10}(a, 0, 0) \quad \forall a$
   - $X = X_7(-\epsilon a, \epsilon a, -a, a) \quad \forall a$
   - $X = X_9(a, \epsilon) \quad \forall a$

8. $W = R_8(r, s, t)$
V tomto případě existují následující řešení rovnice $[R_8(r, s, t), X, X] = 0$:

   (a) Řešení pro obecné hodnoty parametrů $r, s, t$:

   - $X = X_1(a, b, c) \quad \forall a, b, c$
   - $X = X_4(a, b, c, d) \quad \forall a, b, c$

   (b) Řešení pro speciální hodnoty parametrů $r, s, t$ :

   - $r = s \wedge t = 1 : \quad X = X_{19}(a, b, c) \quad \forall a, b, c$
   - $r = s \wedge t = 1 : \quad X = X_{20}(a, b, c) \quad \forall a, b, c$
   - $r = s \wedge t = 1 : \quad X = X_{21}(a, b, c) \quad \forall a, b, c$
   - $r = -s \wedge t = 1 : \quad X = X_{22}(a, b) \quad \forall a, b$
   - $r = 1/s \wedge t = -1 : \quad X = X_{23}(as, a, -bs, b) \quad \forall a, b$
   - $r = 1/s \wedge t = 1 : \quad X = X_7(a, as, b, bs) \quad \forall a, b$
   - $r = s = -t = 1 : \quad X = X_{28}(a, b, c) \quad \forall a, b, c$
   - $r = s = -t = -1 : \quad X = X_{29}(a, b, c) \quad \forall a, b, c$
   - $r = s = -t = -1 : \quad X = X_{30}(a, b, c, d) \quad \forall a, b, c, d$
   - $r = s = t = 1 : \quad X = X_{31}(a, b, c, d, e, f, g, h) \quad \forall a, b, c, d, e, f, g, h$
   - $r = s = t = 1 : \quad X = X_{32}(a, b, c, d, e, f, g, h) \quad \forall a, b, c, d, e, f, g, h$

9. $W = R_9(t)$
   V tomto případě existují následující řešení rovnice $[R_9(t), X, X] = 0$ pro obecné hodnoty parametru $t$ ( pro speciální hodnoty parametru $t$ neexistují žádná další řešení ):

   - $X = X_1(\epsilon_1 a, \epsilon_2, a) \quad \forall a$
   - $X = X_4(a, \epsilon, \epsilon a, 1) \quad \forall a$
   - $X = X_5(a, \epsilon) \quad \forall a$
   - $X = X_{18}(a, b) \quad \forall a, b$
   - $X = X_{19}(\epsilon_1 a, \epsilon_2, a) \quad \forall a$
   - $X = X_{20}(a, 1, -a) \quad \forall a$
   - $X = X_{24}(a) \quad \forall a$
   - $X = X_{25}(a) \quad \forall a$
   - $X = X_{26}(a, b) \quad \forall a, b$

10. $W = R_{10}(p, q, r)$
    V tomto případě existují následující řešení rovnice $[R_{10}(p, q, r), X, X] = 0$:

    (a) Řešení pro obecné hodnoty parametrů $p, q, r$:
      - $X = X_2(a, b, c) \quad \forall a, b, c$
      - $X = X_{12}(a, b, b, a) \quad \forall a, b$
      - $X = X_{10}(a, b, c) \quad \forall a, b, c$

    (b) Řešení pro speciální hodnoty parametrů $p, q, r$:
      - $p = q = 0: \quad X = X_3(a, b, c, d, \epsilon) \quad \forall a, b, c, d$
      - $p = q = 0: \quad X = X_6(a, b) \quad \forall a, b$
      - $p = q = 0: \quad X = X_{11}(a, b, c) \quad \forall a, b, c$

11. $W = R_{11}(q, s)$
    V tomto případě existují následující řešení rovnice $[R_{11}(q, s), X, X] = 0$:

    (a) Řešení pro obecné hodnoty parametrů $q, s$:
      - $X = X_2(a, b, c) \quad \forall a, b, c$
      - $X = X_{12}(a, b, b, a) \quad \forall a, b$
      - $X = X_{10}(a, b, c) \quad \forall a, b, c$
      - $X = X_{12}(eq/s, (s - q) + d, d, e) \quad \forall d, e$

    (b) Řešení pro speciální hodnoty parametrů $q, s$:
      - $q = -s: \quad X = X_{13}(a, b, a(s + b + e), a(-s + b + e), e) \quad \forall a, b, e$
      - $s = 0: \quad X = X_{12}(a, b - q, b, 0) \quad \forall a, b$

## 6.2 Seznam matic $X$

$$X_1(a,b,c) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & a & 0 & 0 \\ 0 & 0 & b & 0 \\ 0 & 0 & 0 & c \end{pmatrix}$$

$$X_2(a,b,c) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & a & 0 & 0 \\ b & 0 & 1 & 0 \\ 0 & c & 0 & a \end{pmatrix}$$

$$X_3(a,b,c,d,\epsilon) = \begin{pmatrix} \epsilon a & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -b & 0 & 0 \\ c & 0 & a & 0 \\ 0 & d & 0 & b \end{pmatrix}$$

$$X_4(a,b,c,d) = \begin{pmatrix} a & 0 & 0 & 0 \\ b & a & 0 & 0 \\ 0 & 0 & c & 0 \\ 0 & 0 & d & c \end{pmatrix}$$

$$X_5(a,\epsilon) = \begin{pmatrix} \epsilon & 0 & 0 & 0 \\ a & -\epsilon & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$X_6(a,b) = \begin{pmatrix} a & 0 & 0 & 0 \\ -1 & a & 0 & 0 \\ b & 0 & -a & 0 \\ 0 & b & 1 & -a \end{pmatrix}$$

$$X_7(a,b,c,d) = \begin{pmatrix} a & 0 & 0 & 0 \\ 0 & b & 0 & 0 \\ 0 & 0 & c & 0 \\ 1 & 0 & 0 & d \end{pmatrix}$$

$$X_8(a,b) = \begin{pmatrix} a & 0 & 0 & 0 \\ 0 & a & 0 & 0 \\ 0 & 1 & b & 0 \\ 1 & 0 & 0 & -b \end{pmatrix}$$

$$X_9(a,\epsilon) = \begin{pmatrix} -\epsilon a & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \epsilon a & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -a & 0 \\ 1 & 0 & 0 & a \end{pmatrix}$$

$$X_{10}(a,b,c) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ a & 1 & 0 & 0 \\ b & 0 & 1 & 0 \\ c & b & a & 1 \end{pmatrix}$$

$$X_{11}(a,b,c) = \begin{pmatrix} -a & 0 & 0 & 0 \\ -b & -a & 0 & 0 \\ c & 0 & a & 0 \\ 1 & c & b & a \end{pmatrix}$$

$$X_{12}(a,b,c,d) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ a & 1 & 0 & 0 \\ b & 0 & 1 & 0 \\ 0 & c & d & 1 \end{pmatrix}$$

$$X_{13}(a,b,c,d,e) = \begin{pmatrix} a & 0 & 0 & 0 \\ b & a & 1 & 0 \\ c & 0 & a & 0 \\ 0 & d & e & a \end{pmatrix}$$

$$X_{14}(a,b) = \begin{pmatrix} a & 0 & 0 & 1 \\ 0 & b & 1 & 0 \\ 0 & -i & -a & 0 \\ i & 0 & 0 & b \end{pmatrix}$$

$$X_{15}(a,b) = \begin{pmatrix} a & 0 & 0 & 0 \\ 0 & a & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -a & 0 \\ i & 0 & b & a \end{pmatrix}$$

$$X_{16}(a,b,c) = \begin{pmatrix} a & 0 & 0 & 0 \\ 0 & b & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -a & 0 \\ c & 0 & 0 & b \end{pmatrix}$$

$$X_{17}(a,b,c) = \begin{pmatrix} -a & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -b & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -a & 0 \\ c & 0 & 0 & b \end{pmatrix}$$

$$X_{18}(a,b) = \begin{pmatrix} -a & (b-a)(b+a) & 0 & 0 \\ 1 & a & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -b & 0 \\ 0 & 0 & 0 & b \end{pmatrix}$$

$$X_{19}(a,b,c) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & a \\ 0 & 0 & b & 0 \\ 0 & c & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$$X_{20}(a,b,c) = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & a \\ b & 0 & 0 & 0 \\ 0 & c & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$$X_{21}(a,b,c) = \begin{pmatrix} 0 & 0 & a & 0 \\ 0 & 0 & 1 & a \\ b & 0 & 0 & 0 \\ c & b & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$$X_{22}(a,b) = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & a & 0 & 0 \\ b & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$$X_{23}(a,b,c,d) = \begin{pmatrix} a & 0 & 0 & 0 \\ 0 & b & 1 & 0 \\ 0 & 0 & c & 0 \\ 0 & 0 & 0 & d \end{pmatrix}$$

$$X_{24}(a) = \begin{pmatrix} 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ -1 & 0 & 0 & 0 \\ a & 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$$X_{25}(a) = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \\ -1 & 0 & 0 & 0 \\ a & 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$$X_{26}(a,b) = \begin{pmatrix} 0 & 0 & -a & 0 \\ 0 & 0 & 0 & a \\ -b & 1 & 0 & 0 \\ (a-b)(a+b) & b & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$$X_{27}(a,b) = \begin{pmatrix} 0 & 0 & ia & 0 \\ 2iab & 0 & 0 & a \\ ib & 0 & 0 & 1 \\ 0 & b & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$$X_{28}(a,b,c) = \begin{pmatrix} a & 0 & 0 & 0 \\ 0 & a & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -b & 0 \\ c & 0 & 0 & b \end{pmatrix}$$

$$X_{29}(a,b,c) = \begin{pmatrix} -a & 0 & 0 & 0 \\ 0 & a & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -b & 0 \\ c & 0 & 0 & b \end{pmatrix}$$

$$X_{30}(a,b,c,d) = \begin{pmatrix} a & 0 & 0 & b \\ 0 & -a & b & 0 \\ 0 & c & d & 0 \\ c & 0 & 0 & -d \end{pmatrix}$$

$$X_{31}(a,b,c,d,e,f,g,h) = \begin{pmatrix} a & 0 & b & 0 \\ c & a & d & b \\ e & 0 & f & 0 \\ g & e & h & f \end{pmatrix}$$

$$X_{32}(a,b,c,d,e,f,g,h) = \begin{pmatrix} a & 0 & b & 0 \\ 0 & c & 0 & d \\ e & 0 & f & 0 \\ 0 & g & 0 & h \end{pmatrix}$$

## 6.3 Nalezené matice $Z$ příslušné maticím $X$, tj. řešení $[X,X,Z]=0 \wedge [Z,Z,Z]=0$

**Poznámka:** Použití symetrií

I v tomto seznamu bylo využíváno symetrií, tj. pokud byly nalezeny dvě trojice $\{W,X,Z\}$ a $\{\tilde{W},\tilde{X},\tilde{Z}\}$, kde $W,\tilde{W}$ jsou ze seznamu 3.2 a $X,\tilde{X}$ jsou ze seznamu 6.2, takové, že existuje symetrie převádějící $\{W,X,Z\} \to \{\tilde{W},\tilde{X},\tilde{Z}\}$, pak $\tilde{Z}$ je vynecháno. V případech, kdy byla využívána symetrie (30), která zaměňuje úlohu matic $W$ a $Z$, je to výslovně zmíněno.

**Značení:** Kromě značení zavedeného dříve používám v tomto seznamu ještě termín škálovaná matice $R_i(x,y,\ldots)$, který je souhrným označením množiny matic tvaru

$$(S\otimes S)R_i(x,y,\ldots)(S\otimes S)^{-1}, \text{ kde } S = \begin{pmatrix} \alpha & 0 \\ 0 & \beta \end{pmatrix} \quad \forall \alpha \neq 0, \beta \neq 0$$

1. $X = X_1(a,b,c)$
   (a) Řešení pro obecné hodnoty parametrů v matici $X_1(a,b,c)$:
      - $Z$ libovolné 6-vertexové řešení YBE

   (b) Řešení pro speciální hodnoty parametrů v matici $X_1(a,b,c)$:
      - $a=-1 \wedge b=\pm c:$ $Z$ libovolné 8-vertexové řešení YBE
      - $a=1 \wedge b=-c:$ $Z$ libovolné 8-vertexové řešení YBE
      - $a=1 \wedge b=c:$ $Z$ libovolné řešení YBE

2. $X = X_2(a,b,c)$

(a) Řešení pro obecné hodnoty parametrů v matici $X_2(a,b,c)$:

- $Z$ libovolné 6-vertexové řešení YBE

(b) Řešení pro speciální hodnoty parametrů v matici $X_2(a,b,c)$:

- $a=-1 \wedge b=-c:$ Z libovolné 8-vertexové řešení YBE
- $a=1 \wedge b=c:$ Z libovolné řešení YBE

3. $X = X_3(a,b,c,d,\epsilon)$

(a) Řešení pro obecné hodnoty parametrů v matici $X_3(a,b,c,d,\epsilon)$:

- $Z=P$

(b) Řešení pro speciální hodnoty parametrů v matici $X_3(a,b,c,d,\epsilon)$:

- $\epsilon=+1 \wedge c=0:$ $Z$ libovolné 6-vertexové řešení YBE
- $\epsilon=+1 \wedge c=0 \wedge a=\pm b:$ $Z$ libovolné 8-vertexové řešení YBE
- $\epsilon=-1 \wedge a=b:$ $Z=R_2(\pm i)$
- $\epsilon=-1 \wedge a=-b:$ $Z=R_2(\pm i)$
- $\epsilon=-1 \wedge c=ad/b:$ $Z$ libovolné 6-vertexové řešení YBE
- $\epsilon=-1 \wedge c=-d \wedge a=-b:$ $Z$ libovolné 8-vertexové řešení YBE
- $\epsilon=-1 \wedge c=d \wedge a=b:$ $Z$ libovolné řešení YBE

4. $X = X_4(a,b,c,d)$

(a) Řešení pro obecné hodnoty parametrů v matici $X_4(a,b,c,d)$:

- $Z=P$
- $Z=R_{10}(x,y,z) \quad \forall x,y,z$
- $Z=R_{11}(x,y) \quad \forall x,y$

(b) Řešení pro speciální hodnoty parametrů v matici $X_4(a,b,c,d)$:

- $b=d=0:$ $Z$ libovolné řešení YBE

5. $X = X_5(a,\epsilon)$

(a) Řešení pro obecné hodnoty parametrů v matici $X_5(a,\epsilon)$:

- $Z=P$
- $Z=R_{10}(0,0,x) \quad \forall x$

(b) Řešení pro speciální hodnoty parametrů v matici $X_5(a,\epsilon)$:

- $a=0:$ $Z$ libovolné 8-vertexové řešení YBE

6. $X = X_6(a,b)$

(a) Řešení pro obecné hodnoty parametrů v matici $X_6(a,b)$:

- $Z = P$

(b) Řešení pro speciální hodnoty parametrů v matici $X_6(a,b)$:

- $b = 0: \quad Z = R_{10}(x,y,z) \quad \forall x,y,z$
- $b = 0: \quad Z = R_{11}(x,y) \quad \forall x,y$

7. $X = X_7(a,b,c,d)$

(a) Řešení pro obecné hodnoty parametrů v matici $X_7(a,b,c,d)$:

- $Z = P$
- $Z = R_5(c/a, b/d)$

(b) Řešení pro speciální hodnoty parametrů v matici $X_7(a,b,c,d)$:

- $a = b = -c = d: \quad Z$ škálovaná $R_3(x,-1) \quad \forall x,y$
- $a = b = c = -d: \quad Z$ škálovaná $R_3(x,1) \quad \forall x,y$
- $c = -ad/b: \quad Z = R_6(-d/b, x) \quad \forall x$
- $a = b = -c = -d: \quad Z$ škálovaná $R_7$
- $a = -b = -c = d: \quad Z$ škálovaná $R_7$
- $a = b = c = d: \quad Z = (S \otimes S)^{-1} R_7 (S \otimes S) \quad \forall x,y,$ kde $S = \begin{pmatrix} \sqrt{y-x^2} & 0 \\ -x/2 & 1 \end{pmatrix}$
- $b = -a \wedge c = -d: \quad Z = R_8(d/a, a/d, 1)$
- $a = b \wedge c = d: \quad Z = R_8(c/a, a/c, 1)$
- $a = b \wedge c = d: \quad Z = (S(x) \otimes S(x)) R_8(d/b, b/d, 1)(S(x) \otimes S(x))^{-1} \quad \forall x,$ kde $S(x) = \begin{pmatrix} \frac{b-d}{d} & 0 \\ x & x \end{pmatrix}$
- $a = b = c = d: \quad Z = R_{10}(x,y) \quad \forall x,y$
- $a = b = c = d: \quad Z = R_{10}(0,0,x) \quad \forall x$
- $a = -b = c = -d: \quad Z = R_{10}(0,0,x) \quad \forall x$
- $a = b = c = d: \quad Z = R_{11}(x,y) \quad \forall x,y$

8. $X = X_8(a,b)$

Řešení pro obecné hodnoty parametrů v matici $X_8(a,b)$ ( pro speciální hodnoty parametrů v tomto případě neexistují žádná další řešení ):

- $Z = P$
- $Z = (S \otimes S) R_1 (S \otimes S)^{-1}$, kde $S = \begin{pmatrix} \sqrt{i} & 0 \\ 0 & \sqrt{a/c+1} \end{pmatrix}$
- $Z = R_2(a/c)$
- $Z = (S \otimes S) R_3(c/a, 1)(S \otimes S)^{-1}$, kde $S = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & \sqrt{1-a/c} \end{pmatrix}$

- $Z = (S \otimes S) R_3(c/a, -1)(S \otimes S)^{-1}$, kde $S = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & \sqrt{-1 - a/c} \end{pmatrix}$
- $Z = (S \otimes S) R_4(a/c, 1)(S \otimes S)^{-1}$, kde $S = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & \sqrt{a/c - 1} \end{pmatrix}$
- $Z = (S \otimes S) R_4(a/c, -1)(S \otimes S)^{-1}$, kde $S = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & \sqrt{a/c + 1} \end{pmatrix}$
- $Z = R_6(c/a, c/a)$

9. $X = X_9(a, \epsilon)$

   (a) Řešení pro obecné hodnoty parametrů v matici $X_9(a, \epsilon)$:

   - $Z = P$

   (b) Řešení pro speciální hodnoty parametrů v matici $X_9(a, \epsilon)$:

   - $\epsilon = 1 : \quad Z = (S \otimes S) R_8(x, x, 1)(S \otimes S)^{-1} \; \forall x$, kde $S = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ i & i \end{pmatrix}$
   - $\epsilon = -1 : \quad Z = (S \otimes S) R_9(x)(S \otimes S)^{-1} \; \forall x$, kde $S = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ i & i \end{pmatrix}$

10. $X = X_{10}(a, b, c)$
    Řešení pro obecné hodnoty parametrů v matici $X_{10}(a, b, c)$ ( pro speciální hodnoty parametrů v tomto případě neexistují žádná další řešení ):

    - $Z = P$
    - $Z = R_{10}(x, y, z) \quad \forall x, y, z$
    - $Z = R_{11}(x, y) \quad \forall x, y$

11. $X = X_{11}(a, b, c)$

    (a) Řešení pro obecné hodnoty parametrů v matici $X_{11}(a, b, c)$:

    - $Z = P$

    (b) Řešení pro speciální hodnoty parametrů v matici $X_{11}(a, b, c)$:

    - $b = 0 : \quad Z = (S \otimes S)^{-1} R_7 (S \otimes S) \quad \forall x, y$, kde $S = \begin{pmatrix} \sqrt{y - x^2} & 0 \\ -x/2 & 1 \end{pmatrix}$
    - $a = cb : \quad Z = R_{10}(x, y, z) \quad \forall x, y, z$
    - $a = cb : \quad Z = R_{11}(x, y) \quad \forall x, y$

12. $X = X_{12}(a, b, c, d)$

    (a) Řešení pro obecné hodnoty parametrů v matici $X_{12}(a, b, c, d)$:

- $Z = P$
- $Z = R_{11}(-b\frac{d-a}{b-c}, -c\frac{d-a}{b-c})$

(b) Řešení pro speciální hodnoty parametrů v matici $X_{12}(a,b,c,d)$:

- $a = d \wedge b = c: \quad Z = R_{10}(x,y,z) \quad \forall x,y,z$
- $a = d \wedge b = c: \quad Z = R_{11}(x,y) \quad \forall x,y$
- $c = b = 0: \quad Z = R_{10}(x,y,z) \quad \forall x,y,z$
- $c = b = 0: \quad Z = R_{11}(x,y) \quad \forall x,y$
- $a = d = 0: \quad Z$ libovolné 6-vertexové řešení YBE
- $a = d = 0 \wedge b = c: \quad Z$ libovolné řešení YBE

13. $X = X_{13}(a,b,c,d,e)$

(a) Řešení pro obecné hodnoty parametrů v matici $X_{13}(a,b,c,d,e)$:

- $Z = P$

(b) Řešení pro speciální hodnoty parametrů v matici $X_{13}(a,b,c,d,e)$:

- $c = d = 0: \quad Z = R_{10}(x,y,z) \quad \forall x,y,z$
- $c = d = 0: \quad Z = R_{11}(x,y) \quad \forall x,y$

14. $X = X_{14}(a,b)$

(a) Řešení pro obecné hodnoty parametrů v matici $X_{14}(a,b)$:

- $Z = P$

(b) Řešení pro speciální hodnoty parametrů v matici $X_{14}(a,b)$:

- $a = b: \quad Z = (S \otimes S)R_1(S \otimes S)^{-1}$, kde $S = \begin{pmatrix} \sqrt{-i} & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$
- $a = b: \quad Z = (S \otimes S)R_1^{AT}(S \otimes S)^{-1}$, kde $S = \begin{pmatrix} \sqrt{i} & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$
- $a = -b: \quad Z = (S \otimes S)R_1(S \otimes S)^{-1}$, kde $S = \begin{pmatrix} \sqrt{i} & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$
- $a = -b: \quad Z = (S \otimes S)R_1^{AT}(S \otimes S)^{-1}$, kde $S = \begin{pmatrix} \sqrt{-i} & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$
- $a = b = 0: \quad Z = R_8(x,-x,1) \quad \forall x$
- $a = b = 0: \quad Z = (S \otimes S)R_9(x)(S \otimes S)^{-1} \quad \forall x$, kde $S = \begin{pmatrix} \sqrt{-i} & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$

15. $X = X_{15}(a,b)$
Řešení pro obecné hodnoty parametrů v matici $X_{15}(a,b)$ ( pro speciální hodnoty parametrů v tomto případě neexistují žádná další řešení ):

- $Z = P$
- $Z = (S \otimes S) R_3(1,-1)(S \otimes S)^{-1}\ \forall x,$ kde $S = \begin{pmatrix} x^{-1/2} & 0 \\ -\frac{b}{2a} x^{-1/2} & 1 \end{pmatrix}$
- $Z = (S \otimes S) R_4(1,-1)(S \otimes S)^{-1}\ \forall x,$ kde $S = \begin{pmatrix} x^{-1/2} & 0 \\ -\frac{b}{2a} x^{-1/2} & 1 \end{pmatrix}$

16. $X = X_{16}(a,b,c)$

    (a) Řešení pro obecné hodnoty parametrů v matici $X_{16}(a,b,c)$:
    - $Z = P$
    - $Z = (S \otimes S) R_3(x,-1)(S \otimes S)^{-1} \quad \forall x,$ kde $S = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & \sqrt{\frac{c(x-1)}{b^2-a^2}} \end{pmatrix}$
    - $Z = (S \otimes S) R_4(x,-1)(S \otimes S)^{-1} \quad \forall x,$ kde $S = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & \sqrt{\frac{c(x-1)}{b^2-a^2}} \end{pmatrix}$
    - $Z = R_5(-1,1)$
    - $Z = R_5^T(1,-1)$

    (b) Řešení pro speciální hodnoty parametrů v matici $X_{16}(a,b,c)$:
    - $c = 0:$ tento případ viz $X_{23}(a,b,-a,b)$

17. $X = X_{17}(a,b,c)$

    (a) Řešení pro obecné hodnoty parametrů v matici $X_{17}(a,b,c)$:
    - $Z = P$
    - $Z = (S \otimes S) R_3(x,1)(S \otimes S)^{-1} \quad \forall x,$ kde $S = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & \sqrt{\frac{c(x+1)}{a^2-b^2}} \end{pmatrix}$
    - $Z = (S \otimes S) R_4(x,1)(S \otimes S)^{-1} \quad \forall x,$ kde $S = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & \sqrt{\frac{c(x+1)}{a^2-b^2}} \end{pmatrix}$
    - $Z = R_5(1,-1)$
    - $Z = R_5^T(-1,1)$

    (b) Řešení pro speciální hodnoty parametrů v matici $X_{17}(a,b,c)$:
    - $c = 0:$ tento případ viz $X_{23}(-a,-b,-a,b)$

18. $X = X_{18}(a,b)$

    (a) Řešení pro obecné hodnoty parametrů v matici $X_{18}(a,b)$:
    - $Z = P$
    - $Z = (S \otimes S) R_8(x,x,1)(S \otimes S)^{-1}\ \forall x,$ kde
      $S = \begin{pmatrix} -\sqrt{a^2-b^2} & \sqrt{a^2-b^2} \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$

(b) Řešení pro speciální hodnoty parametrů v matici $X_{18}(a,b)$:

- $a = b: \quad Z = R_{10}(0,0,x)\ \forall x$
- $a = -b: \quad Z = R_{10}(0,0,x)\ \forall x$
- $a = 0: \quad Z = R_8(x,x,1)\ \forall x$
- $a = 0: \quad Z = (S\otimes S)R_9(x)(S\otimes S)\ \forall x,\ \text{kde } S = \begin{pmatrix} b & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$
- $a = 0: \quad Z = (S\otimes S)R_8(x,x,1)(S\otimes S)^{-1}\ \forall x,\ \text{kde } S = \begin{pmatrix} -ib & ib \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$
- $a = 0: \quad Z = (S\otimes S)R_8(x,x,1)(S\otimes S)^{-1}\ \forall x,\ \text{kde } S = \begin{pmatrix} -b & b \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$
- $a = 0: \quad Z = (S\otimes S)R_9(x)(S\otimes S)^{-1}\ \forall x,\ \text{kde } S = \begin{pmatrix} -ib & ib \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$
- $a = 0: \quad Z = (S\otimes S)R_9(x)(S\otimes S)^{-1}\ \forall x,\ \text{kde } S = \begin{pmatrix} -b & b \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$

19. $X = X_{19}(a,b,c)$

(a) Řešení pro obecné hodnoty parametrů v matici $X_{19}(a,b,c)$:

- $Z = P$

(b) Řešení pro speciální hodnoty parametrů v matici $X_{19}(a,b,c)$:

- $b = -1 \wedge a = 1/c: \quad Z = R_2(\pm i)$
- $b = 1: \quad Z$ libovolné 6-vertexové řešení YBE
- $b = 1 \wedge a = 1/c: \quad Z$ libovolné 8-vertexové řešení YBE

20. $X = X_{20}(a,b,c)$

(a) Řešení pro obecné hodnoty parametrů v matici $X_{20}(a,b,c)$:

- $Z = P$

(b) Řešení pro speciální hodnoty parametrů v matici $X_{20}(a,b,c)$:

- $a = c/b: \quad Z$ libovolné 6-vertexové řešení YBE
- $a = b/c: \quad Z = R_2(\pm i)$
- $a = 1 \wedge b = c: \quad Z$ libovolné řešení YBE
- $a = -1 \wedge b = -c: \quad Z$ libovolné 8-vertexové řešení YBE

21. $X = X_{21}(a,b,c)$

(a) Řešení pro obecné hodnoty parametrů v matici $X_{21}(a,b,c)$:

- $Z = P$

(b) Řešení pro speciální hodnoty parametrů v matici $X_{21}(a,b,c)$:

- $a = b/c: \quad Z = R_{10}(x,y,z) \quad \forall x,y,z$
- $a = b/c: \quad Z = R_{11}(x,y) \quad \forall x,y$
- $a = -b/c: \quad Z = (S \otimes S)^{-1} R_7 (S \otimes S) \quad \forall x,y,$ kde $S = \begin{pmatrix} \sqrt{y-x^2} & 0 \\ -x/2 & 1 \end{pmatrix}$

22. $X = X_{22}(a,b)$
Řešení pro obecné hodnoty parametrů v matici $X_{22}(a,b)$ ( pro speciální hodnoty parametrů neexistují žádná další řešení ) :

- $Z = P$
- $Z = (S \otimes S R_1 (S \otimes S)^{-1},$ kde
$S = \begin{pmatrix} \frac{1-i}{\sqrt{2}}\sqrt{a/b} & -\sqrt{a/b} \\ \frac{1-i}{\sqrt{2}} i & i \end{pmatrix}$
- $Z = (S \otimes S) R_1 (S \otimes S)^{-1},$ kde
$S = \begin{pmatrix} \frac{1+i}{\sqrt{2}}\sqrt{a/b} & \sqrt{a/b} \\ -\frac{1+i}{\sqrt{2}} i & i \end{pmatrix}$
- $Z = (S \otimes S) R_8(x,-x,1) (S \otimes S)^{-1} \quad \forall x,$ kde
$S = \begin{pmatrix} -\sqrt{a/bi} & \sqrt{a/bi} \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$
- $Z = (S \otimes S) R_9(x) (S \otimes S)^{-1} \quad \forall x,$ kde
$S = \begin{pmatrix} \frac{1+i}{\sqrt{2}}\sqrt{a/b} & \sqrt{a/b} \\ \frac{1-i}{\sqrt{2}} & i \end{pmatrix}$

23. $X = X_{23}(a,b,c,d)$ Tento případ je díky symetriím totožný s případem $X = X_7(c,d,a,b)$ ( neboť :

$$X_{23}(a,b,c,d) \to (\sigma \otimes I) X_{23}(a,b,c,d) (\sigma \otimes I)^{-1} = X_7(c,d,a,b), \text{ kde } \sigma = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$$

a tedy všechna $Z$ vyhovující $[X_{23}, X_{23}, Z] = 0 \wedge [Z,Z,Z] = 0$ jsou totožná s řešeními $Z$ příslušnými $X = X_7(c,d,a,b)$).

24. $X = X_{24}(a)$

(a) Řešení pro obecné hodnoty parametrů v matici $X_{24}(a)$:

- $Z = P$
- $Z = (S \otimes S)^{-1} R_7 (S \otimes S) \quad \forall x,$ kde $S = \begin{pmatrix} \sqrt{x - \frac{a^2}{4}} & 0 \\ a/4 & 1 \end{pmatrix}$

(b) Řešení pro speciální hodnoty parametrů v matici $X_{24}(a)$:

- $a = 0$ : $\quad Z$ libovolné 8-vertexové řešení YBE

25. $X = X_{25}(a)$

(a) Řešení pro obecné hodnoty parametrů v matici $X_{25}(a)$:

- $Z = P$
- $Z = (S \otimes S)^{-1} R_7 (S \otimes S) \quad \forall x,$ kde $S = \begin{pmatrix} \sqrt{x - \frac{a^2}{4}} & 0 \\ a/4 & 1 \end{pmatrix}$

(b) Řešení pro speciální hodnoty parametrů v matici $X_{25}(a)$:

- $a = 0$ : $\quad Z$ libovolné 8-vertexové řešení YBE

26. $X = X_{26}(a, b)$

(a) Řešení pro obecné hodnoty parametrů v matici $X_{26}(a, b)$:

- $Z = P$
- $$Z = \begin{pmatrix} a^2 - b^2 + 2bx & -x & -x & 1 \\ -x(a^2 - b^2) & a^2 - b^2 - 2bx & a^2 - b^2 & x \\ -x(a^2 - b^2) & a^2 - b^2 & a^2 - b^2 - 2bx & x \\ (a^2 - b^2)^2 & x(a^2 - b^2) & x(a^2 - b^2) & a^2 - b^2 + 2bx \end{pmatrix}, \quad \forall x$$

  ( Tuto matici $Z$ lze v případě $a = b$ vyjádřit $Z = \lambda (S \otimes S) R_7 (S \otimes S)^{-1}$, kde $S = \begin{pmatrix} 1 & 2\sqrt{\frac{2b-x}{x}} \\ 4b & 0 \end{pmatrix}$, v případě $a \neq b$ lze $Z$ vyjádřit ve tvaru $Z = \lambda (S \otimes S) R_9(y) (S \otimes S)^{-1}$, ale tvar transformační matice $S$ a závislost $y$ na $x$ je velmi složitá a proto ji zde neuvádím. )

(b) Řešení pro speciální hodnoty parametrů v matici $X_{26}(a, b)$:

- $b = 0$ : $\quad Z = (S \otimes S) R_1 (S \otimes S)^{-1}$, kde $S = \begin{pmatrix} \frac{1-i}{\sqrt{2}} & -1 \\ \frac{1-i}{\sqrt{2}} ai & ai \end{pmatrix}$
- $b = 0$ : $\quad Z = (S \otimes S) R_1 (S \otimes S)^{-1}$, kde $S = \begin{pmatrix} \frac{1+i}{\sqrt{2}} & 1 \\ -\frac{1+i}{\sqrt{2}} ai & ai \end{pmatrix}$
- $b = 0$ : $\quad Z = (S \otimes S) R_8(x, -x, 1) (S \otimes S)^{-1} \quad \forall x,$ kde $S = \begin{pmatrix} -i & i \\ a & a \end{pmatrix}$
- $b = 0$ : $\quad Z = (S \otimes S) R_9(x) (S \otimes S)^{-1} \quad \forall x,$ kde $S = \begin{pmatrix} \frac{1+i}{\sqrt{2}} & 1 \\ \frac{1-i}{\sqrt{2}} a & ia \end{pmatrix}$

27. $X = X_{27}(a, b)$
Řešení pro obecné hodnoty parametrů v matici $X_{27}(a, b)$ ( pro speciální hodnoty parametrů v tomto případě neexistují žádná další řešení ):

- $Z = P$

28. $X = X_{28}(a, b, c)$

(a) Řešení pro obecné hodnoty parametrů v matici $X_{28}(a, b, c)$:

- $Z = P$

(b) Řešení pro speciální hodnoty parametrů v matici $X_{28}(a, b, c)$:

- $a = b :$ $Z$ škálovaná $R_3(1, -1)$
- $a = b :$ $Z$ škálovaná $R_4(1, -1)$
- $a = -b :$ $Z$ škálovaná $R_3(-1, 1)$
- $a = -b :$ $Z$ škálovaná $R_4(-1, 1)$
- $a = b :$ $Z = R_5(-1, 1)$
- $a = b :$ $Z = R_5^T(1, -1)$
- $a = -b :$ $Z = R_5(1, -1)$
- $a = -b :$ $Z = R_5^T(-1, 1)$
- $c = 0 :$ vix $X_{23}(a, a, -b, b)$

29. $X = X_{29}(a, b, c)$

(a) Řešení pro obecné hodnoty parametrů v matici $X_{29}(a, b, c)$:

- $Z = P$

(b) Řešení pro speciální hodnoty parametrů v matici $X_{29}(a, b, c)$:

- $a = -b :$ $Z$ škálovaná $R_7$
- $a = -b :$ $Z = R_8(1, -1, -1, 1)$
- $a = b :$ $Z = R_{10}(0, 0, x) \quad \forall x$
- $c = 0 :$ viz $X_{23}(-a, a, -b, b)$

30. $X = X_{30}(a, b, c, d)$
**Poznámka:** V tomto případě ( který odpovídá $W = R_8(-1, -1, 1)$ ) bylo u některých $Z$ využíváno symetrie $\{R_8(-1, -1, 1), X_{30}, Z\} \to \{Z^+, X_{30}^+, R_8(-1, -1, 1)\}$ a eventuelně ještě symetrie (27) k převedení matic na tvar, který je již uveden v seznamech výše a tedy tato řešení bylo možné zde vynechat.

(a) Řešení pro obecné hodnoty parametrů v matici $X_{30}(a, b, c, d)$:

- $Z = P$

(b) Řešení pro speciální hodnoty parametrů v matici $X_{30}(a, b, c, d)$:

- $a=-d\wedge b=-d^2/c \quad Z=R_8(-1,-1,1)$
- $a=d\wedge b=d^2/c: \quad Z=(S\otimes S)R_8(x,x,1)(S\otimes S)^{-1}\ \forall x,$ kde $S=\begin{pmatrix} 1 & -1 \\ \sqrt{2}-1 & \sqrt{2}+1 \end{pmatrix}$
- $a=d: \quad Z=(S\otimes S)R_8(x,x,1)(S\otimes S)^{-1}\ \forall x,$ kde $S=\begin{pmatrix} 1 & -1 \\ i & i \end{pmatrix}$
- $a=-d: \quad Z=R_9(1)$
- $a=-d: \quad Z=(S\otimes S)R_9x(S\otimes S)^{-1}\ \forall x,$ kde $S=\begin{pmatrix} 1 & -1 \\ i & i \end{pmatrix}$

(c) $a=d: \quad Z=R_9(-1)$

(d) $a=d=0: \quad Z=(S\otimes S)\tilde{Z}(S\otimes S)^{-1}$, kde $\tilde{Z}$ je libovolné 8-vertexové řešení YBE a $S=\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}$

31. $X=X_{31}(a,b,c,d,e,f,g,h),\ X=X_{32}(a,b,c,d,e,f,g,h)$
Nalezení řešení rovnice $[X,X,Z]=0$ je těchto případech obtížné, a proto bylo postupováno s použitím symetrií a faktu, že matice $I$ je invariantní vůči všem známým symetriím, následovně ( připomínám, že matice $X_{31}$ a $X_{32}$ přísluší $W=I$ ):
K nalezeným $X$ vždy existuje $Z=P$. Kromě tohoto triviálního případu může nastat případ, kdy pro nějakou volbu parametrů existuje $Z:\ Z\neq P\wedge Z\neq I$. Toto řešení lze převést symetrií (30) na řešení $\{Z^+,X^+,I\}$, kde $Z^+\neq I$. Eventuelním dalším použitím symetrií lze upravit $Z^+$ na tvar ze seznamu 3.2 a toto řešení je již v tomto seznamu řešení systému (1) obsaženo. Zbývá tedy vyšetřit možnost, že pro nějakou volbu parametrů existuje $Z=I$, tj. nalézt speciální hodnoty parametrů, pro něž výše uvedené matice $X_{31}(a,b,c,d,e,f,g,h), X_{32}(a,b,c,d,e,f,g,h)$ jsou současně řešením $[X,X,I]=0$. To nastává v těchto případech:

(a) $X=X_{31}(a,b,c,d,e,f,g,h)$
- $b=d=e=g=0$
- $d=g=0\wedge b=h$
- $b=de/g\wedge a=\frac{ce+fg-eh}{g}$
- $e=g=0\wedge a=\frac{bc+df-bh}{d}$

(b) $X=X_{32}(a,b,c,d,e,f,g,h)$
- $b=d=e=g=0$
- $d=g=0\wedge b=h$
- $b=de/g\wedge a=\frac{ce+fg-eh}{g}$
- $e=g=0\wedge a=\frac{bc+df-bh}{d}$

## 6.4 Otázka úplnosti nalezené množiny řešení

Rád bych se nyní zmínil o následujícím důležitém problému:

Většina výpočtů prováděných v průběhu řešení dané úlohy byla prováděna na počítači pomocí programů pro symbolické výpočty. Dá se odůvodněně předpokládat, že získané výsledky jsou skutečně ( až na eventuelní chyby vzniklé při přepisování, překlepy atd.) řešením daného systému. ( Bylo to ověřováno dosazením do systému (1), prováděném sice na počítači, ale v tak základních procedurách pro násobeních matic a úpravy algebraických výrazů těžko mohou zůstat u programů vyvíjených řadu let (pro názornost: Reduce byl vyvíjen od 60.let, Maple od začátku 80.let ) neodhalené a neodstraněné chyby.) Jinou otázkou, kterou chci nyní podrobněji rozebrat, je úplnost nalezeného systému řešení ( samozřejmě s tím omezením, že nebylo možné z časových důvodů zpracovat všechny případy, a tedy, jak jsem již dříve uvedl, chybí seznam řešení pro $W = R_2(q)$ ).

Problém úplnosti nalezené množiny řešení má dvě roviny. První, která se vyskytuje u všech podobných prací, je možnost lidské chyby: chyby při úpravách matic, přepisování výsledků a podobně. Eliminaci těchto chyb jsem věnoval velkou pozornost, ale vzhledem k rozsahu práce jejich existenci nelze zcela vyloučit. Druhý okruh možných opomenutí některých řešení souvisí s počítačovým zpracováním výpočtů. Použité programy Maple a Reduce jsou velice rozsáhlé a je známo, že obsahují chyby. Je otázkou, zda chyby těchto programů negativně ovlivnily prováděné výpočty. Na tuto otázku je možné dát pouze následující částečnou odpověď: V průběhu výpočtu byly prováděny dva druhy kontroly. První byl založen na paralelním provedení některých výpočtů pomocí obou programů a následném porovnání výsledků. V těchto případech bylo ověřeno, že oba programy dávají ne zcela shodné výsledky, ale bylo možné ukázat, že oba výsledky jsou ekvivalentní ( např. pokud řešením byla celá spojitě parametrizovaná třída matic, pak každý z programů zvolil jiné neznámé jako parametry, pomocí nichž vyjádřil zbylé neznámé ). Druhá kontrola vycházela ze znalostí symetrií. Tvar matice $X$ je totiž často invariantní vůči některé ze symetrií (27),(28),(29),(30). Následně by se mělo ve výpočtu, který tyto symetrie nijak nevyužívá, objevit několik matic $Z$, vzájemně sdružených uvedenými symetriemi. ( Například tvar matice $X_7(a, b, c, d)$ je invariantní ( až na substituci v proměnných $a, b, c, d$ ) vůči inverzi. Následně se ve výsledku objevily matice $R_3$ a $R_4$, které bylo možné převést jednu na druhou patřičnými substitucemi v parametrech a obkladem maticemi $P$.) V řadě případů byly tyto předpovědi kontrolovány a vždy se potvrdily. Na základě těchto kontrol se cítím oprávněn k domněnce, že nedošlo k vynechání žádných řešení vlivem chyb v použitých počítačových programech.

Dále bych se chtěl vyjádřit k velikosti nalezeného seznamu řešení. Je zřejmé, že použitím symetrií bylo možné seznamy výrazně zkrátit ( v řadě případů bylo možné šikovným využitím symetrií v mezikrocích zkrátit seznam získaný jako výsledek počítačového výpočtu až o 80 procent ). Přesto jsou výsledky velmi rozsáhlé, například v porovnání s výsledky jiného systému zkoumaného v [2]. Je možné, že někde nebylo využito všech použitelných symetrií a některé výsledky jsou tedy nadbytečné. Také nelze vyloučit existenci nějakých dalších symetrií, zvláště podmíněných symetrií tvaru obdobného (31). Bohužel nalezení symetrií k nalezení symetrií neexistuje žádný obecný postup, a tedy hledání symetrií je spíše dílem náhody, intuice a hledání zákonitostí v nalezených řešeních ( kromě symetrií odvoditelných ze známých symetrií Yang-Baxterovy rovnice ). Takto byla například nalezena symetrie (31).

# 7 Závěr

Hlavním úkolem předložené práce bylo nalézt úplnou množinu řešení systému rovnic pro kvantový double. Tato úloha představuje dosti složitý problém řešení systému 256 kubických rovnic pro 48 neznámých. Je zřejmé, že problém tohoto rozsahu by bylo možné jen velice obtížně řešit „v ruce“, bez použití počítačů, a v tom případě by to jistě zabralo mnoho let práce. Ukazuje se, že za pomoci počítačů lze tento úkol skutečně řešit ( a to v celkem rozumném čase, výpočty použité k řešení systému (1) podle popsaného algoritmu trvaly řádově několik desítek hodin strojového času na osobním počítači s procesorem Intel Pentium 100MHz a 32 MB operační paměti ) a značná část úlohy byla vyřešena. Již tento fakt může být překvapivý a vypovídá o schopnostech současných počítačů a programů pro symbolické výpočty.

Bohužel, i přes využití symetrií bylo nalezeno několik set typů ( tj. několikaparametrických množin ) řešení systému (1). Výsledné seznamy jsou proto dlouhé a tím pádem nepřehledné. Jsou možné dva způsoby, jak tyto seznamy zjednodušit a usnadnit tak jejich praktické použití. Jednak je možné hledat další symetrie systému (1), jejichž použitím by bylo možné seznam dále zkrátit. Druhou možností je položení dalších dodatečných podmínek na hledané matice kromě invertibility. Je totiž známo, že ne všechny Hopfovy algebry dané řešením Yang-Baxterovy rovnice mají „rozumné“ vlastnosti a bývá proto výhodné položit určité dodatečné podmínky na matice, pomocí nichž jsou tyto algebry definovány, které zaručí, že získané algebry jsou v tomto smyslu „rozumné“. Následně by bylo možné nalezený systém řešení omezit pouze na matice, splňující tyto dodatečné podmínky, a tím jej zkrátit a zpřehlednit. Tímto postupem a použitím nalezených výsledků ke konstrukci kvantových doublů jsem se zatím nezabýval, předpokládám, že se jím budu zabývat příští rok.

Na závěr bych chtěl vyjádřit poděkování svému školiteli, docentu L. Hlavatému, za jeho cenné rady a účinnou pomoc při řešení úlohy.

# 8 Přílohy

## 8.1 Seznam tříd matic $4 \times 4$ vzhledem k symetrii (32)

$$A_1 = \begin{pmatrix} a1 & a2 & a3 & 0 \\ b1 & b2 & 0 & b4 \\ c1 & c2 & c3 & c4 \\ d1 & d2 & d3 & d4 \end{pmatrix} \quad \wedge\, a3 \neq b4$$

$$A_2 = \begin{pmatrix} a1 & a2 & a3 & 0 \\ b1 & b2 & 1 & a3 \\ c1 & c2 & c3 & c4 \\ 0 & d2 & d3 & d4 \end{pmatrix} \quad \wedge\, c2 \neq 0$$

$$A_3 = \begin{pmatrix} a1 & a2 & a3 & 0 \\ b1 & b2 & 1 & a3 \\ c1 & 0 & c3 & c4 \\ d1 & c1 & d3 & d4 \end{pmatrix} \quad \wedge\, d1 \neq 0$$

$$A_4 = \begin{pmatrix} a1 & a2 & a3 & 0 \\ b1 & b2 & 0 & a3 \\ c1 & 0 & c3 & c4 \\ 0 & d2 & d3 & d4 \end{pmatrix} \quad \wedge\, c1 \neq d2$$

$$A_5 = \begin{pmatrix} a1 & a2 & a3 & 0 \\ b1 & b2 & 0 & a3 \\ c1 & 0 & c3 & c4 \\ 1 & c1 & 0 & d4 \end{pmatrix} \quad \wedge\, c4 \neq 0$$

$$A_6 = \begin{pmatrix} a1 & a2 & a3 & 0 \\ b1 & b2 & 0 & a3 \\ c1 & 0 & c3 & 0 \\ 1 & c1 & d3 & c3 \end{pmatrix} \quad \wedge\, d3 \neq 0$$

$$A_7 = \begin{pmatrix} a1 & a2 & a3 & 0 \\ b1 & b2 & 0 & a3 \\ c1 & 0 & c3 & 0 \\ 0 & c1 & 0 & d4 \end{pmatrix} \quad \wedge\, c3 \neq d4$$

$$A_8 = \begin{pmatrix} a1 & a2 & a3 & 0 \\ 0 & b2 & 0 & a3 \\ c1 & 0 & c3 & 0 \\ 0 & c1 & 1 & c3 \end{pmatrix} \quad \wedge\, a2 \neq 0$$

$$A_9 = \begin{pmatrix} a1 & 0 & a3 & 0 \\ b1 & a1 & 0 & a3 \\ c1 & 0 & c3 & 0 \\ 0 & c1 & 1 & c3 \end{pmatrix} \quad \wedge\, b1 \neq 0$$

$$A_{10} = \begin{pmatrix} a1 & 0 & a3 & 0 \\ 0 & b2 & 0 & a3 \\ c1 & 0 & c3 & 0 \\ 0 & c1 & 0 & c3 \end{pmatrix}$$

$$A_{11} = \begin{pmatrix} a1 & 0 & a3 & 0 \\ 1 & a1 & 0 & a3 \\ c1 & 0 & c3 & 0 \\ 0 & c1 & 0 & c3 \end{pmatrix}$$

$$A_{12} = \begin{pmatrix} a1 & a2 & a3 & 0 \\ b1 & b2 & 1 & a3 \\ c1 & 0 & c3 & c4 \\ 0 & d2 & d3 & d4 \end{pmatrix}$$

$$A_{13} = \begin{pmatrix} a1 & a2 & a3 & 0 \\ b1 & b2 & 0 & a3 \\ c1 & 0 & c3 & 0 \\ 1 & c1 & 0 & d4 \end{pmatrix}$$

$$A_{14} = \begin{pmatrix} a1 & 0 & a3 & 0 \\ 0 & b2 & 0 & a3 \\ c1 & 0 & c3 & 0 \\ 0 & c1 & 1 & c3 \end{pmatrix}$$

**Důkaz:** Při odvození tvrzení, že libovolnou matici $A$ $4 \times 4$ lze použitím transformace :

$$A \to (I \otimes S)A(I \otimes S)^{-1} \tag{33}$$

převést na jednu z matic v předcházejícím seznamu, se vychází z vlastnosti součinu matic:

> Jestliže $4 \times 4$ matici $A$ zapíši pomocí bloků velikosti $2 \times 2$ a $S$ je matice rozměru $2 \times 2$ , pak platí:
>
> $$(I \otimes S) \begin{pmatrix} A^{11} & A^{12} \\ A^{21} & A^{22} \end{pmatrix} (I \otimes S)^{-1} = \begin{pmatrix} SA^{11}S^{-1} & SA^{12}S^{-1} \\ SA^{21}S^{-1} & SA^{22}S^{-1} \end{pmatrix} \quad (34)$$

Dále vím, že každou matici $2 \times 2$ lze transformací $A \to SAS^{-1}$ převést buď na matici diagonální, nebo matici tvaru $\begin{pmatrix} a & 0 \\ 1 & a \end{pmatrix}$ ( Jordanova věta ). Použitím těchto vztahů již snadno naleznu výše uvedený seznam tříd. Nejprve se snažím upravit pravý horní roh, pak použitím zbývající volnosti ve volbě matice $S$ upravím levý dolní roh, následně pravý dolní a nakonec levý horní roh. Přitom využívám komutačních vlastností:

$$\left[ S, \begin{pmatrix} a & 0 \\ 0 & a \end{pmatrix} \right] = 0 \qquad \forall S \in \mathcal{C}^{2,2} \quad (35)$$

$$\left[ S, \begin{pmatrix} a & 0 \\ 1 & a \end{pmatrix} \right] = 0 \;\Leftrightarrow\; \exists r, s \in \mathcal{C} : S = \begin{pmatrix} r & 0 \\ s & r \end{pmatrix} \quad (36)$$

$$\left[ S, \begin{pmatrix} a & 0 \\ 0 & b \end{pmatrix} \right] = 0 \wedge a \neq b \;\Leftrightarrow\; \exists r, s \in \mathcal{C} : S = \begin{pmatrix} r & 0 \\ 0 & s \end{pmatrix} \quad (37)$$

**Konec důkazu**

## Odkazy


[1] J. Hietarinta: Solving the Two-Dimensional Constant Quantum Yang-Baxter Equation, J. Math. Phys. 34 (1995), 1725

[2] L. Hlavatý: Classification of Quantized Braided Groups in the Dimension 2, Int. J. of Modern Physics A 12 (1997), 5161

[3] L.Hlavatý: Unusual Solutions to the Yang-Baxter Equation, J. Phys. A 20 (1987), 1661

[4] S. Majid: Foundations of Quantum Group Theory, Cambridge University Press 1995

[5] A. A. Vladimirov: A Method for Obtaining Quantum Doubles from the Yang-Baxter R-Matrices, Modern Phys. Letters A 8 (1993), 1315

[6] C.N. Yang: Some Exact Results for Many-Body Problem in One Dimension with Repulsive Delta-Function Interaction, Phys. Rev. Lett. 19 (1967), 1312

[7] J.B. McGuire, J. Math. Phys. 5 (1964), 622

[8] A.C. Hearn & J.P. Fitch: Reduce User's Manual 3.6, Konrad-Zuse Zentrum Berlin 1996

# Obsah