České vysoké učení technické v Praze
Fakulta jaderná a fyzikálně inženýrská

Katedra fyziky
Obor: Experimentální jaderná a částicová fyzika

Experimentální studium náhodných procesů v mikroskopických kvantových hardwarových generátorech náhodných událostí

Experimental study of random processes in microscopic quantum hardware random event generator

BAKALÁŘSKÁ PRÁCE

Vypracoval:	Tomáš Novák
Vedoucí práce:	doc. RNDr. Vojtěch Petráček, CSc.
Rok:	2019

ČESKÉ VYSOKÉ UČENÍ TECHNICKÉ V PRAZE
FAKULTA JADERNÁ A FYZIKÁLNĚ INŽENÝRSKÁ
PRAHA 1 - STARÉ MĚSTO, BŘEHOVÁ 7 - PSČ 115 19

Katedra: fyziky *Akademický rok:* 2018/2019

ZADÁNÍ BAKALÁŘSKÉ PRÁCE

Student: Tomáš Novák

Studijní program: Aplikace přírodních věd

Obor: Experimentální jaderná a částicová fyzika

Název práce: (česky) Experimentální studium náhodných procesů v mikroskopických kvantových hardwarových generátorech náhodných událostí

Název práce: (anglicky) Experimental study of random processes in microscopic quantum hardware random event generators

Pokyny pro vypracování:

1. Seznámení se s používanými typy hardwarových generátorů náhodných událostí
2. Zprovoznění generátorů využívajících šum diody, jednofotonový proces odrazu na polopropustném děliči svazku a spřažené dvojice generátorů pracujících s párem provázaných fotonů
3. Seznámení se s nástroji pro analýzu chování časových řad (ROOT, TISEAN)
4. Studium a srovnání vlastností generovaných náhodných signálů

Doporučená literatura:

[1] H. Kantz and T. Schreiber: Nonlinear Time Series Analysis, Cambridge University Press, Cambridge, 1997

[2] T. Schreiber and A. Schmitz: Surrogate time series, Physica D 142 346–382 (2000)

[3] R. Hegger, H. Kantz and T. Schreiber: Practical Implementation of Nonlinear Time Series Methods: The TISEAN Package. Chaos, 9, 413-435 (1999)

Jméno a pracoviště vedoucího bakalářské práce:

doc. RNDr. Vojtěch Petráček, CSc., katedra fyziky, Fakulta jaderná a fyzikálně inženýrská v Praze

konzultant: Ing. Jan Korbel, Ph.D., katedra fyziky, Fakulta jaderná a fyzikálně inženýrská v Praze

Datum zadání bakalářské práce: 22.10.2018

Termín odevzdání bakalářské práce: 08.07.2019

Doba platnosti zadání je dva roky od data zadání.

....
garant oboru

ČESKÉ VYSOKÉ UČENÍ TECHNICKÉ V PRAZE
Fakulta jaderná a fyzikálně inženýrská
-1-

....
vedoucí katedry *děkan*

V Praze dne 22.10.2018

Prohlášení

Prohlašuji, že jsem svou bakalářskou práci vypracoval samostatně a použil jsem pouze podklady (literaturu, projekty, SW atd.) uvedené v přiloženém seznamu.

Nemám závažný důvod proti použití tohoto školního díla ve smyslu § 60 Zákona č. 121/2000 Sb., o právu autorském, o právech souvisejících s právem autorským a o změně některých zákonů (autorský zákon).

V Praze dne ....

Tomáš Novák

Poděkování

Děkuji panu doc. RNDr. Vojtěchu Petráčkovi, CSc. za cenné rady při budování této bakalářské práce v teoretické rovině i při přípravě experimentálního vybavení. Dále děkuji panu Ph.D. Janu Korbelovi, který mi i přes jeho zahraniční stáž ochotně, nadálku i osobně dopomohl k pochopení potřebných metod analýzy časových řad. V neposlední řadě však děkuji hlavně své rodině, která mě celé roky podporuje při studiu, tak krásného přírodovědného oboru jako je fyziky.

Tomáš Novák

Název práce:
Experimentální studium náhodných procesů v mikroskopických kvantových hardwarových generátorech náhodných událostí

Autor: Tomáš Novák

Studijní program: Aplikace přírodních věd
Obor: Experimentální jaderná a částicová fyzika
Druh práce: Bakalářská práce

Vedoucí práce: doc. RNDr. Vojtěch Petráček, CSc.
Katedra fyziky, Fakulta jaderná a fyzikálně inženýrská, České vysoké učení technické v Praze
Konzultant: Ph.D. Jan Korbel
Katedra fyziky, Fakulta jaderná a fyzikálně inženýrská, České vysoké učení technické v Praze

Abstrakt: Časové řady jsou generovány rozdílnými procesy, které si zaslouží klasifikaci dle svých vrozených vlastností. V reálných měřeních nacházíme tyto vlivy v korelacích, což může při citlivých měřeních utvářet netriviální struktury. Pomezí mezi kvantovými mikroskopickými ději, jejich stochastickými vlastnostmi a statistickými makroskopickými deterministickými procesy nemusí být vždy jasně dané a je stále prostorem pro studium. V této práci předvedeme sestavení a analýzu signálu chaotického Chuova obvodu a také měření fluktuací napětí na Zenerově tunelové diodě. Ukážeme si vhodnost dvou přístupů analýzy časových řad a to lineární a nelineární. Právě nelineární analýza časových řad, vhodná k analýze chaotických signálu, bude důkladněji využita. Signály budou navíc porovnány s komerečním kvantovým generátorem náhodných čísel Quantis, využívající odrazu jednotlivých fotonů na polopropustném děliči svazku a surovými daty z šumové diody od výrobce, který si nepřál být jmenován.

Klíčová slova: Náhodné procesy, generátory náhodných čísel, nelineární analýza časových řad, deterministický chaos

Title:
Experimental study of random processes in microscopic quantum hardware random event generator

Author: Tomáš Novák

Abstract: Time series are generated by many various processes, which deserves to be classified by their inherited features. In real measurements, we find their effects in correlations, which can lead to nontrivial structures in precise measurements. The border between quantum microscopic processes, their stochastic properties, and statistical macroscopic deterministic processes is not always clear and is still to be studied. In this thesis, we present building and analyzing Chua circuit, and also measuring voltage fluctuation of Zener tunneling diode. We will show the suitability of two approaches of time series analysis, linear and nonlinear one. Especially nonlinear time series analysis is suited for the analysis of chaotic signals and will be used more thoroughly. In addition, those two signals will be compared with the commercially used quantum random number generator Quantis, which exploits single photon reflection on a semipermeable beam splitter, and also we will analyze raw data from noise diode obtained from the manufacturer, who wants to stay anonymous.

Key words: Random processes, random number generators, nonlinear time series analysis, deterministic chaos

Obsah

Úvod

Časové řady mohou nabývat nejrůznějšího charakteru a být generovány širokou škálou rozdílných procesů. Každodenně jsme nuceni sledovat vývoj více či méně abstraktních veličin, a proto je naší potřebou vytvořit si nástroje k extrahaci relevantních informací z tohoto pozorování. Zejména některé metody *nelineární analýzy časových řad* jsou velice přirozené, jelikož jsou vybudovány pro porozumění měření *deterministického chaotického systému*. Takovéto chaotické systémy jsou právě nejblíže k modelování složitých reálných makroskopických procesů, při kterých je determinismus základním předpokladem. Jako si umíme představit, že malá změna v dnešním rozhodnutí jednotlivce může ovlivnit budoucnost skupiny, tak jsou náchylné chaotické systémy na změnu počátečního stavu určeného k další evoluci. Tento způsob náhledu skrze teorii chaosu zní adekvátně, avšak pouze nevezmeme-li v potaz rozdílný charakter mikrosvěta, který k úplnému popisu nemůžeme zanedbat.

Díky možnosti precizního měření jsme schopni sledovat nejen důsledky kvantově mechanického mikrosvěta, ale právě jednotlivé realizace statistiky z této teorie předpovězené. Jestliže hovoříme o četnosti jednotlivých naměřených možností v rámci experimentu, jsou histogramy s předpověďmi shodné. Otázkou však může být, zdali jsou jednotlivé realizace měření reprodukovatelně shodného kvantově mechanického systému opravdu nekorelované, tedy následující měření nezávisí nikterak na předešlých. Poté by takto získaná řada měla v rámci svého histogramu představovat skutečně náhodné výsledky.

Vzpomeneme-li na Heisenbergovy relace neurčitosti, tak má každý bod sestávající reálný systém chybu svého určení. Ve spojení s vysokou citlivostí na počátečních podmínkách chaotických makroskopických systémů, můžeme dojít k zavěru, že jakákoliv dlouhodobá předpověditelnost reality je v principu zcela nemožná. Může však být i možné, že zvolení konkrétní realizace mikroskopické části naruší makroskopický systém dostatečně tak, aby byl splněn například nějáky účel či zákonitost. Jakákoliv taková souhra by však byla velice složitě dohledatelná. Zákonitost by musela postihovat stupně volnosti, které jsme zatím neidentifikovali, nebo nemůžeme vůbec pozorovat. Ukazuje se, že i samotná hranice mezi klasickým a kvantovým chováním se zdá být široká a spojitě měnící. Již byli pozorovány molekuly skládající se ze sta atomů produkující důsledky z vlnového popisu při dvouštěrbinovém experimentu.

U časových řad je nezbytné rozlišovat jejich původ. U deterministických řad existuje zákonitost generující data a následným pozorováním zpřesňujeme odhad našeho modelu. Můžeme mluvit o měřeních dynamických deterministických systémů, nebo algoritmických generátorech. Na druhé straně časové řady získané měřením veličiny kvantového systému mají ryze stochastický charakter a proto by měli představovat zlatý standart pro produkci náhodných čísel. U systému s velkým počtem částí, kde je možné využít pouze přístupu statistické fyziky, hovoříme zejména o stochastických řadách, avšak takových, které mohou obsahovat korelace mezi členy nebo deterministické trendy.

Nejdříve se v této práci zaměřuji na možné způsoby generování stochastických řad a na modely používané k jejich popisu. Dále navazuji deterministickými řadami a konkrétně jejich spojitostí s *deterministickými dynamickými chaotickými systémy*. Jsou prezentovány dvě metody analýzy časových řad, a to lineární a nelineární, kde každá se vyznačuje rozdílným uplatněním. V rámci práce byl sestaven Chuoův chaotický oscilační obvod, na kterém je možné sledovat nepředpověditelné průběhy napětí a manifestaci tzv. *podivného atraktoru* při rekonstukci fázového portrétu. Bylo provedeno i měření šumu na rezistoru a na Zenerově tunelové diodě v blízkosti průrazného napětí. Navíc byli získany další časové řady z externích zdrojů – kvantový generátor náhodných čísel Quantis a surová data z komereční šumové diody využívaná pro produkci náhodných čísel. Nakonec jsou v praktické části použity metody lineární i nelineární analýzy časových řad na dostupná data a jednotlivé výsledky srovnány.

V rámci práce nebylo možné sestavit experimentální aparaturu pro generování jednotlivých fotonů, jejich následný odraz na polopropustném děliči svazku. Podobný experiment připravovala v době zadání práce kolegyně, ke které jsem se měl připojit, avšak zjistilo se, že není možné ve fakultních laboratořích s dostupnou technologií daný pokus provést. Nyní se na fakultě budují kvantově-optické laboratoře a nakupuje nová aparatura pro umožnění realizací podobných jednofotonových experimentů.

Kapitola 1

Časové řady

S časovými řadami se setkáváme denně, ať již v bežném nebo pracovním životě. Může se jednat o pohyb cen akcií, vývoj týdenní průměrné teploty, či průmět aktuální polohy smítka v turbulenci či difuzi. V textu se bude volně zaměňovat významu časové řady (č.ř.) a signálu. Důvodem pro analýzu č.ř. je zejména pochopení mechaniky modelu generujícího data, což posléze využíváme k předpovědím dalších členů, nebo přímo k poznání systému.

Časovou řadu definujeme jako uspořádanou řadu reálných hodnot $x_1, x_2, \ldots, x_N \in \mathbb{R}$, značíme ji

$$\{x_1, x_2, \ldots, x_N\}, \text{ nebo } \{x_i\}, \text{ kde } i \in 1, 2, \ldots, N, \tag{1.1}$$

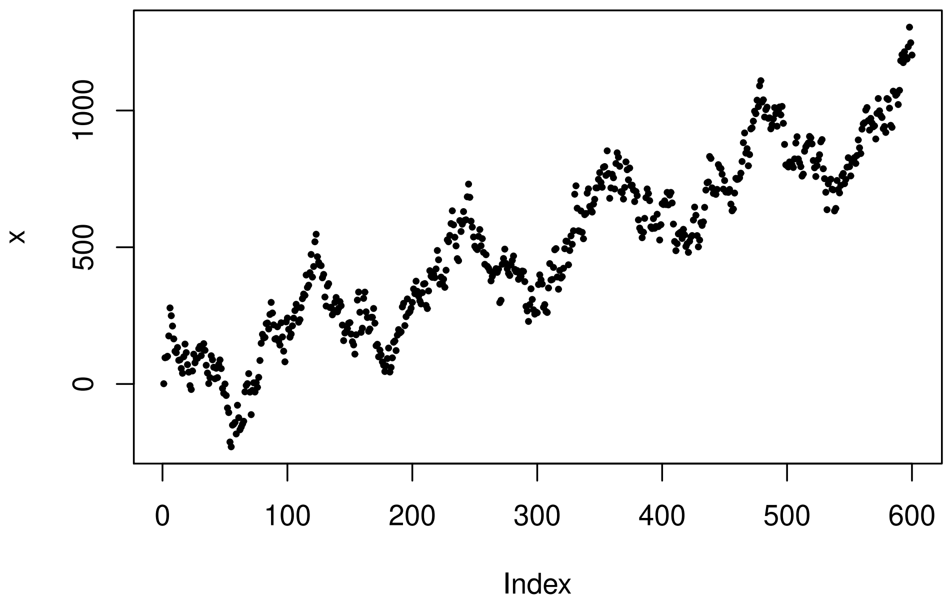
představující vývoj konkrétní veličiny v ekvidistatních časových rozestupech. V rámci této práce neuvažujeme č.ř. jiné než s ekvidistantními rozestupy, tedy pro nás index členů řady lineárně závislá na čase náběru, resp. zápisu dané hodnoty, tj. pro index $i \in 1, 2, \ldots, N$ platí $i = kt$, kde $k > 0$. Proto se i volně zaměňuje index i za čas t a tedy píšeme časovou řadu jako

$$\{x_t\}, \text{ kde } t \in 1, 2, \ldots, N. \tag{1.2}$$

Intuitivně reprezentujeme č.ř. grafem závislosti hodnoty na jejím indexu (např. Obr. 1.1), tj. x_i vůči i, kde $i \in 1, \ldots, N$. Tento způsob však není jediný a jak dále uvidíme, existují i možnosti, které pro určité č.ř. lépe odkrývají schované zákonitosti. Jelikož je lidský mozek vycvičen k hledání vzorů a struktur, lze samotnou grafickou reprezentaci považovat za metodu analýzy časových řad.

1.1 Základní pojmy analýzy časových řad

K popisu základních vlastností č.ř. využijeme následujících definic. Je důležité podotknout, že statistické veličiny (průměr, rozptyl) používané k popisu č.ř. jsou nestranné odhady statistických veličin procesu. Pokud tedy počítáme statistické veličiny č.ř., tak pouze při splnění podmínky nezávislosti členů, konverguje náš odhad ke skutečné hodnotě charakterizující proces.



Obrázek 1.1: Nagenerovaná č.ř. podle vztahu (1.9)

Průměr časové řady Mějme č.ř. $\{x_1, x_2, \dots, x_N\}$ poté průměrem našeho pozorování nazveme veličinu

$$\hat{x} = \frac{1}{N}\sum_{i=1}^{N} x_i. \tag{1.3}$$

Průměr určený z našeho pozorování se nemusí shodovat s dlouhodobým průměrem generovaných hodnot. Dostatečná délka časové řady k výpočtu dané statistiky je určena procesem generujícího data. Pozorovatel musí vybrat časový úsek delší, než je nejdelší perioda v datech, neučiní-li tak, dopouští se systematické chyby, která však může být v určitých případech zanedbatelná.

Rozptyl časové řady Rozptylem časové řady σ^2 rozumíme kvalitativně stejnou veličinu jako ve statistice, kde určuje střední hodnotu kvadrátů rozdílu realizací náhodné veličiny a její střední hodnoty. Pro její aproximaci u časových řad použijeme předpisu

$$\hat{\sigma}^2 = \frac{1}{N-1}\sum_{i=1}^{N}(x_i - \hat{x})^2 = \frac{1}{N-1}\left(\sum_{i=1}^{N} x_i^2 - N\hat{x}^2\right). \tag{1.4}$$

Veličinu σ nazýváme směrodatnou odchylkou, stejně jako ve statistice.

Aditivní model Většina reálných řad, lze v prvním příblížení zapsat jako superpozice minimálně dvou členů, a to deterministckého členu a šumu. Navíc se může objevovat i stochastický člen:

$$x_t = y_t + z_t + \sigma_t, \text{ pro } \forall t \tag{1.5}$$

y_t můžeme chápat jako deterministický signál v čase t, σ_t jako šum (zejména bílý šum, jehož původ může být různorodý) a stochastickou složku z_t, která se snaží vysvětlit lineární modely a obsahuje již závislost na předešlých členech $z_t = f(z_{t-1}, z_{t-2}, \dots, z_{t-k})$. Využití zápisu v superpozice jednotlivých složek musí být ideálně opodstatněné naší znalostí o původu signálu.

Multiplikativní model Druhý model, často využívaný k popisu časových řad, je multiplikativní model. Jak název napovídá, jednotlivé složky jsou spolu pronásobeny a podle předešlého značení:

$$x_t = y_t z_t \sigma_t, \text{ pro } \forall t. \tag{1.6}$$

Kvůli stejné rozměrnosti je deterministická složka y_t shodná rozměrem s č.ř. x_t a ostatní složky jsou bezrozměrné.

Sezónní trend Sezónnost charakterizuje opakující se struktury v datech s pevnou neměnnou frekvencí. Měl by podléhat deterministickému původu. Setkáváme se sním zejména u komerečních dat, pro fyzikální měření odpovída oscilacím systému.

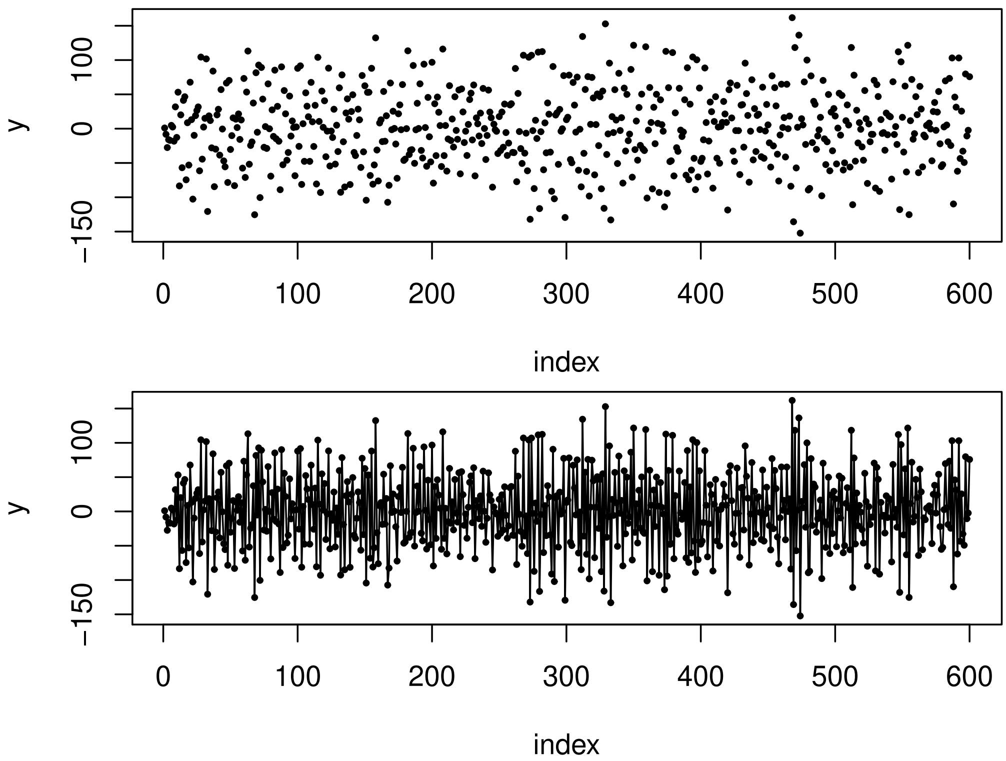
Deterministický a stochastický trend Trend existuje, pozorujeme-li nárůst či pokles v datech. Rozdíl mezi stochastickým a deterministickým trendem je zvláště dán dobou jejich trvání. Deterministický trend přetrvává dlouhodobě, zato stochastický trend může být dán aktuální fluktuací systému a v delším horizontu vymizí.

Stacionarita Jedním z nejdůležitějších pojmů analýzy časových řad je stacionarita. Stacionární nazveme časovou řadu, jejíž statistické veličiny jsou v čase neměnné, nebo pokud rozdělíme č. řadu na několik skupin, a pro každou z těchto skupin dostaneme stejné výsledky statistických veličin – průměru, směrodatné odchylky atd. Samozřejmě můžeme porovnávat pouze takové úseky řady, které jsou větší než maximální perioda systému. Pokud tak neučiníme, bude se nám jevit každá řada nestacionární.

U stacionární řady implicitně usuzujeme, že zákony genurující data jsou s časem neměnné. Časová řada se sezóními či stochastickými trendy by mohla být stále stacionární. Deterministický trend však stacionaritu narušuje, neboť nemůže být splněna konstantnost průměru č.ř.

Matematicky můžeme stacionaritu popsat následovně:
Mějme statistickou veličinu $A = A(a, b, \dots, k, t)$, kde $a, b, \dots, k$ jsou parametry, např. délka kroku mezi členy, délka časového okna, ve kterém počítáme danou statistiku apod. Tyto parametry nepleťme s časem t, který odpovídá zvolené pozici v č.ř., kde danou statistiku počítáme. Implicitně předpokládáme, že parametry $a, b, \dots, k$ nezávisejí na čase t. Č.ř. nazveme stacionární, pokud statistická veličina $A = A(a, b, \dots, k)$, a tedy časovou závislost můžeme zcela vynechat, jinými slovy $A(a, b, \dots, k, t) = A(a, b, \dots, k, t')$, pro $\forall t \neq t'$.

U grafických statistických nástrojů analýzy č.ř. stacionarita implikuje kvalitativně stejný charakter nezávislý na zvoleném čase t, který však analogicky může být závislý na ostatních parametrech dané metody.



Obrázek 1.2: Č.ř. vzniklá z modelu (1.9) (Obr. 1.1) pomocí procedůry diferencování dle (1.7). Č.ř. obou grafů je stejná, pouze ve spodním grafu je využito spojení sousedních bodů čarami, pro ilustraci je ukázán i tento způsob prezentace dat.

Diferencování řady Mnoho technik využívaných k předpovědím vynucují podmínku stacionarity, což není vlastností většiny reálných časových řad. Jeden z možných způsobů přetvoření nestacionární časové řady na stacionární je založen na metodě diferencování řad.

Máme-li časovou řadu $\{x_1, x_2, \ldots, x_n\}$, poté diferencovanou řadou nazveme časovou řadu $\{y_1, y_2, \ldots, y_{n-1}\}$ zadanou předpisem

$$y_t = x_t - x_{t-1}. \tag{1.7}$$

Diferencujeme-li například řadu generovanou modelem (1.9) z Obr. 1.1 získáme řadu na Obr. 1.2.

Integrální řada Inverzní transformací k diferencování řady je tzv. *integrování řady.* Vycházejme z č.ř. $\{x_1, x_2, \ldots, x_n\}$, integrální řadu $\{y_1, y_2, \ldots, y_{n-1}\}$ definujeme předpisem

$$y_t = \sum_{i=1}^{t} x_i. \tag{1.8}$$

Vzniklá č.ř. se také nazývá jako řada částečných součtů. Tímto způsobem lze například z náhodných alternací hodnot ± 1 získat difuzní graf, tzv. *Wienerovu procházku.* Pokud použijeme tuto proceduru na data z Obr. 1.2, získame graf z Obr. 1.1.

	H_0 je pravdivá	H_1 je pravdivá
Nezavržení H_0	Správné rozhodnutí	Chyba II. typu
Zavržení H_0	Chyba I. typu	Správné rozhodnutí

Tabulka 1.1: Možné kombinace výsledků statistického testu a pravdivostí hypotéz.

Testování statistických hypotéz Při testování příslušnosti časové řady k modelu generucího jej, používáme metod pro ověření statistických hypotéz.

Nejdříve je nutné stanovit nulovou hypotézu H_0, kterou se snažíme vyvrátit. Určíme si hranici signifikance označované α, obecně se používají dvě hodnoty, a to 1% a 5%. Poté generujeme různými procesy (modely) časové řady, jejiž statistické veličiny spočteme. Podle shody statistických veličin naší a uměle vytvořené č.ř. vytvoříme tzv. p-hodnotu, je-li p-hodnota menší než hranice signifikance α můžeme s největší pravděpodobností nulovou hypotézu zavrhnout. Problém nastává v určení p-hodnoty, protože souvisí s kritérii shody a obecně se mohou kritéria různých analitiků lišit.

Prakticky jsme schopni pouze odmítat různé procesy, které by se snažily vysvětlit naše data. Jedinečnost naší č.ř., jejíž původ zjištujeme, by měla být dána strukturami, které by se v uměle nagenerovaných datech neměly vyskytovat. Generují se data se stejnou konkrétní statistickou veličinou či charakteristikou, například shodným spektrem, avšak s rozdílnou fází oproti původní řadě. Poté se testuje shoda ostatních statistických veličin, pokud shoda nenastane, můžeme předpokládat netriviální struktury v naší č.ř.

Způsob potvrzení či vyvrácení nulové hypotézy H_0 je stejný jako v soudním procesu, kdy se nejdříve předpokládá nulová hypotéza – presumpce neviny a na nástrojích analýzy, státním obhájci, je úkol prokázat nepravdivost nulové hypotézy. Implikativně to odkazuje na tzv. alternativní hypotézu H_1, neboli vinu podezřelého. Alternativní hypotéza je doplňková k nulové hypotéze, tedy obě nemohou být současně pravdivé. V tab. 1.1 můžeme vidět případ, kdy je nulová, či alternativní hypotéza pravdivá v kombinaci s možnými výsledky statistického testu, tedy kdy jsme zavrhli nebo nezavrhli nulovou hypotézu H_0. Chybě I. typu se snažíme vyvarovat, jelikož například v analogu se soudním procesem by to znamenalo shledání viny nevinného(proto hranice 1% či 5%). Chyba II. typu je častá, ale přijatelnější, znamenalo by to propuštění vinného pachatele.

Ilustrativní příklad Pro ilustrativní účely jsem nageneroval řadu z Obr. 1. Řada $\{x_1, x_2, \dots, x_{500}\} = \{1, 2, \dots, 500\}$ byla transformována na časovou řadu $\{y_1, y_2, \dots, y_{500}\}$ pomocí předpisu

$$y_t = 125 \cos^3(\frac{\pi}{60} x_t) + x_t + y_{t-1} + \sigma_t, \tag{1.9}$$

kde σ_t je přidaný šum, jehož původ rozebereme později. První člen v rovnici (1.9) lze chápat jako sezonní trend, druhý člen odpovídá lineárnímu deterministickému trendu. Třetí rekurentní člen obsahuje stochastický, stejně tak jako deterministický charakter. Pokud by jsme analyzovali vzniklou řadu a předpokládali model v superpozici nezávislých složek podle (1.5), náš odhad by byl špatný, protože v rekurentní člen y_t v (1.9) nelze zapsat jako superpozici deterministické a stochastické složky. I když by se nám podařilo modelem (1.5) popsat data celkem dobře, pomocí statistických testů by jsme měli zamítnout hypotézu o shodnosti modelů (1.9) a (1.5).

1.2 Deterministické časové řady

Čistě deterministické časové řady se v přírodě vyskytují vzácně, protože každé reálné měření dynamických deterministických veličin zavádí různé druhy chyb, z nedokonalé znalosti systému, nebo i v důsledku kvantových fluktuacím. Nedokonalou znalostí systému myslíme počatečních a okrajových podmínek, což implikuje systematickou chybu. Jak si ukážeme v kapitole o *deterministických chaotických systémech*, jejich vysoká citlivost vůči počátečním podmínkám činí dané systémy prakticky nepředpověditelné. Stejně jako generované časové řady odovídající měření systému. Tyto řady se poté na první pohled mohou jevit jako stochastické, i když ve skutečnosti je celý proces deterministický.

Otázkou však zůstává jak velkou roli hrají kvantové fluktuace a kolapsy vlnových funkcí mikroskopických podsystému do konkrétních realizací u částí deterministického dynamického systému. Narušují determinismus každého procesu, navíc chaotické procesy by mohly být citlivé k těmto změnám. Striktně vzato kvůli fluktuacím mikrosvěta nelze brát časovou řadu získanou měřením vývoje dynamické deterministické veličiny za deterministickou. Pokud bychom definovali deterministickou č.ř. jako časovou řadu s jasně určenou evolucí, poté bychom to samé museli předpokládat o procesu generující ji, což není splněno. Jediné deterministické řady jsou poté ty, které jsou generovány algoritmicky.

S algoritmickými generátory se setkáváme zejména v digitální komunikaci a správě digitálních systémů. Analogová komunikace je již zatížena problémy zmíněnými výše. Důvody chyby analogového signálu jsou prozaičtější, jako šíření signálu přes překážky či prostředí, které neznáme. Navíc kvůli kvantovému charakteru interakce signálu s prostředím, nemůžem ovlivnění nikdy přesně určit či předurčit.

1.2.1 Chaotický generátor náhodných čísel

Potřeba opravdu náhodných čísel je značná, například při simulacích Monte Carlo, v kryptografii či v hazardních hrách. Náhodná čísla můžeme chápat jako sérii binárních dat bez korelací, nebo jako data s konstatním průměrem, rozptylem a stacionárním histogramem, která také neobsahují korelace. Je nutné dodat, že nelze říci, jak vypadá konkrétně řada náhodných čísel. Měla by například obsahovat i zdrojový kód našeho operačního systému, proto potřebujeme dostatečnou statistiku k ověření nulové *autokorelace* řady – viz 3.1.1 a popisovat ji pouze v rámci statistických veličin.

Využití chaotického procesu ke generování náhodných čísel je celkem výhodné. Chaotické procesy, nemusí být složité vytvořit, vezmeme-li v potaz elektrické chaotické obvody, lze navíc odečítat hodnoty stavových veličin elektronicky a tedy s vysokým datovým tokem. Jak bude ukázáno v kapitole o deterministických chaotických systémech, nepředpověditelnost vývoje takového systému, tedy i generované časové řady, je zejména kvůli velké citlivosti na počátečních podmínkách.

Naměřená data samozřejmě nelze využít přímo jako náhodná čísla, kvůli nenahodilým strukturám. Časové řady z měření chaotických veličiny se využívají jako tzv. slabý zdroj entropie, který přetransformujeme pomocí *extraktorů nahodilosti* v náhodnou časovou řadu s potřebnými vlastnostmi – průměr, rozptyl, histogram.

Jednoduchým příkladem chaotického systému jsou turbulence a některé proudění kapalin a plynů. Toho je využito například při losování sportky, kdy se několik pingpongových míčků zmítá v turbulentním proudění vzduchu. Analytické řešení této úlohy pomocí Newtonovského přístupu je nemožné. Navíc zjistíme, že numerické řešení je silně závislé na délce kroku iterací, či počátečních hodnotách a tedy nejednoznačnost výsledku je neuspokojivá.

Pro analýzu č.ř. získaných měřením chaotických systému se využívá *nelineární analýzy časových řad*. Tento druh analýzy vychází z topologických vlastností dynamických systémů ve fázovém prostoru a determinismu zastřešujícího vývoj stavového vektoru.

1.2.2 Generátor pseudonáhodných čísel

Tento příklad algoritmického generátoru čísel je celkem zajímavý z důvodu fundamentální neslučitelnosti prostředků, které máme, a cíle, který je třeba splnit. Požadujeme po ryze deterministickém procesu, aby produkoval náhodné výsledky–čísla.

Časová řada pseudonáhodných čísel obsahuje periody, kvůli rekurzivní povaze algoritmů. Vylepšení nastává, dovolíme-li vnějším vlivům vstupovat do algoritmu, jako doba operací CPU disku, nebo odečet času kliknutí na klávesnici apod. I když pseudonáhodná čísla z kvalitních generátorů splní statistické testy náhodnosti, jsou stále zranitelné k předpovědím.

Jako příklad uveďme lineární kongruentní generátor

$$x_{k+1} = (Ax_k + B)\mathrm{mod}M, \text{ kde } x_0 = Z \tag{1.10}$$

a A, B, M, Z jsou parametry. Zde parametr Z můžeme chápat jako tzv. *seed*, tvar výsledné řady s fixními parametry A, B, M záleží tedy pouze na Z.

1.2.3 Extraktory nahodilosti a Von Neumanův extraktor

U časových řad získaných z deterministických procesů se očekávaně objevují periody a nenahodilé struktury, proto k získání náhodné časové řady jsou výsledná data přetransformována pomocí extraktorů nahodilosti. S extrakcí nahodilosti se nesetkáváme pouze u deterministických dat, ale i u reálných dat se stochastickou i deterministickou složkou. U stochastických řad se využívá zejména k transformaci histogramu, průměru a rozptylu. Tvar extraktorů může být různý, právě i kvůli chtěným charakteristikám náhodných čísel. Obecně se míchají členy časové řady a provádí se kritéria jejich odstranění či nahrazení.

Jeden z prvních extraktorů nahodilosti vymyslel slavný John Von Neumann. Daný extraktor je vytvořený pro použití na binární data a metoda algoritmu je následující:

1. Vybere se sousední dvojice bitů.
2. Jsou-li bity stejné, jsou smazány.
3. Jsou-li bity rozdílné a začínají na 1, poté je dvojice nahrazena 1, analogicky začínají-li 0.

Výsledná řada je maximálně 25% délky původní. Samozřejmě takto zkonstruovaná transformace je zcela deterministická, avšak získaná časová řada je těžko rozlišitelná od náhodné časové řady.

1.3 Stochastické časové řady

Stochastické časové řady nazýváme č.ř., u kterých je nemožné nalézt deterministický model generující data. Je však možné nalézt deterministické korelace jednotlivých členů, které se snaží popsat lineární modely MA, AR, ARMA, atd. – podkapitola 3.1.

Ryze stochastickou č.ř. definujme jako č.ř. jejíž *autokorelační funkce* (viz 3.1.1) je nulovou funkcí, tedy nelze nalézt strukturu, či zavislosti jednotlivých členů řady. Jako příklad bychom poté mohli uvést řadu náhodných čísel, bílý šum. Tyto ryze stochastické č.ř. se využívají k modelovaní složitějších stochastických č.ř. (procesů), ve zmíněných lineárních modelech navržených zejména pro statistické systémy.

Stochastické č.ř. i ty ryze stochastické dále dělíme dle jejich původu – kvantového či statistického. Jak víme charakter kvantového procesu nebo procesu statistické fyziky je velice rozdílný i když produkované stochastické č.ř. nazýváme jednotně.

1.3.1 Časové řady kvantového původu

Dle Kondaňské interpretace kvantové mechaniky měřením systému kolabuje vlnová funkce do konkrétní realizace (stavu), z kterého se posléze dále rozvíjí. Takto získanému stavu odpovídá hodnota měřené veličiny. Výsledek jednoho konkrétního měření je fundamentálně nahodilý a řídí se pravděpodobnostním rozdělením dané veličiny. Pravděpodobnostní rozdělení pro pozorovatelné veličiny je základní měřitelný výsledek kvantové teorie. Nyní ilustrujme způsoby generace časových řad.

Kolaps vlnové funkce Stav systému popisujeme vlnovou funkcí $|\psi\rangle$ Akt měření lze vyjádřit jako působení hermitovski sdruženého operátoru $\hat{A} \neq \hat{A}(t)$, příslušný měřené veličině A, na stav $|\psi\rangle$, tj. $\hat{A}\,|\psi\rangle$. Nyní pravděpodobnost výsledků měření závisí na průmětech vlnové funkce $|\psi\rangle$ do vlastních stavů operátoru $\hat{A}$, což lze reprezentovat $\langle n|\psi\rangle$, kde $\langle n|$ jsou hermitovski sdružené vlastní stavy (vektory) operátoru $\hat{A}$. Rozepíšeme-li operátor $\hat{A}$ ve vlastních vektorech $|n\rangle$ (uvažujme diskrétní spektrum), lze působení na stav $|\psi\rangle$ zapsat jako

$$\hat{A}\,|\psi\rangle = \hat{A}\mathbb{1}\,|\psi\rangle = \hat{A}\sum_n |n\rangle\,\langle n|\psi\rangle = \sum_n \hat{A}\,|n\rangle\,\langle n|\psi\rangle = \sum_n \lambda_n\,\langle n|\psi\rangle\,|n\rangle\,, \tag{1.11}$$

kde jsme využili $\hat{A}|n\rangle = \lambda_n$ pro $\forall n$ a předpokládali normální bázi z $|n\rangle$. Nyní lze odvodit pravděpodobnosti naměření veličin λ_n jako $|\langle n|\psi\rangle|^2$.

Je-li $|\psi\rangle = |k\rangle$ pro $k \in 1,\dots,n$ poté opakovaným měřením získáme pouze hodnotu λ_k. Vytvoříme-li stav

$$|\psi\rangle = \sum_n a_n |n\rangle, \text{ kde } \sum_n |a_n|^2 = 1, \tag{1.12}$$

poté pravděpodobnost naměření hodnoty λ_k je $|a_k|^2$. Dodejme, že pokuď změříme hodnotu λ_k poté axiomaticky předpokládáme, že stav $|\psi\rangle$ přešel do stavu $|k\rangle$.

Měření reprodukovatelného stavu Dokážeme-li vytvořit shodné kvantové stavy $|\psi_1\rangle = |\psi_2\rangle = \dots = |\psi_k\rangle$ jako $|\psi_l\rangle = \sum_n a_n |n\rangle$ pro $l \in 1,\dots,k$ s normalizovanými amplitudami a_n, poté lze získat časovou řadu měření veličiny A pomocí působení $\hat{A}$ na $|\psi_1\rangle, |\psi_2\rangle, \dots, |\psi_k\rangle$, kde výsledky postupně ztotožníme jako členy č.ř $x_1, \dots, x_k$. Výsledná řada by měla být ryze stochastickou č.ř.

Měření nekomutujících veličin Mějme dvě veličiny A, B a k nim příslušné operátory $\hat{A}$, $\hat{B}$. Pokud spolu operátory nekomutují, tedy $\hat{A}\hat{B} \neq \hat{B}\hat{A}$, poté množiny vlastních vektorů jsou rozdílné. Nechť $|n\rangle$ pro $n \in 1,\dots,n_{max}$ je normální báze z vlastních vektorů operátoru $\hat{A}$ a $|m\rangle$ pro $m \in 1,\dots,m_{max}$ je normální báze z vlastních vektorů operátoru $\hat{B}$. Protože operátory nekomutují, platí že $\exists l \in 1,\dots,n_{max}$, takže $|l\rangle \neq |m\rangle$ pro $\forall m \in 1,\dots,m_{max}$. Jednotlivé stavy lze však zapsat jako lineární kombinace stavů z druhé báze, tj. $|n\rangle = \sum_m a_{n,m} |m\rangle$ a analogicky $|m\rangle = \sum_n b_{m,n} |n\rangle$ pro $\forall n, m$. Vlastní číslo přislušné vlastnímu stavu $|n\rangle$ označme λ_n a příslušné vlastnímu stavu $|m\rangle$ označme σ_m.

Nyní předpokládejme, že mamé stav $|\psi\rangle = |k\rangle$, kde $k \in 1,\dots,n_{max}$ a použijeme operátor $\hat{B}$ ke změření veličiny B, tedy

$$\hat{B}|k\rangle = \hat{B}\sum_m a_{k,m}|m\rangle = \sum_m a_{k,m}\hat{B}|m\rangle = \sum_m a_{k,m}\sigma_m|m\rangle, \tag{1.13}$$

poté $|a_{k,m}|^2$ je pravděpodobnost naměření vlastní hodnoty σ_m. Pokud získáme měřením hodnotu σ_l, tak systém zkolabuje do stavu $|l\rangle$, kde $l \in 1,\dots,m_{max}$. Proveďme měření veličiny A, tedy analogicky s předchozím vztahem

$$\hat{A}|l\rangle = \hat{A}\sum_n b_{l,n}|n\rangle = \sum_n b_{l,n}\hat{A}|n\rangle = \sum_n b_{l,n}\lambda_n|n\rangle, \tag{1.14}$$

kde opět $|b_{l,n}|^2$ je pravděpodobnost naměření hodnoty λ_n. Protože jsou jednotlivé vlastní vektory operátoru $\hat{A}$ rozepsatelné do báze vlastních vektorů $\hat{B}$ pouze jako superpozice a vice versa, tak jednotlivé alternace měření veličiny A a B budou vždy dávat nahodilé výsledky, řídící se pravděpodobnostním rozdělením. Jednotlivé pravděpodobnostní rozdělení postupných měření je určeno předešlým stavem a jeho amplitudami pravděpodobnosti, tj. $a_{n,m}$, resp. $b_{m,n}$.

Č.ř. lze získat zaznamenáváním pouze výsledku měření veličiny A nebo B. Při tomto měření by jsme narazili na korelace mezi členy stochastické č.ř. závislé na rozkladech vlastní vektorů z jedné báze do druhé. Zvolíme-li však takový systém vlastních stavů a měřitelných veličin, aby $n, m \in 1, 2$ (značme $|n\rangle$, kde $n = 1$ jako $|1\rangle_n$) a přitom

$$|1\rangle_n = a_{1,1}\,|1\rangle_m + a_{1,2}\,|2\rangle_m \tag{1.15}$$
$$|2\rangle_n = a_{2,1}\,|1\rangle_m + a_{2,2}\,|2\rangle_m \tag{1.16}$$
$$|1\rangle_m = b_{1,1}\,|1\rangle_n + b_{1,2}\,|2\rangle_n \tag{1.17}$$
$$|2\rangle_m = b_{2,1}\,|1\rangle_n + b_{2,2}\,|2\rangle_n\,, \tag{1.18}$$

kde všechny stavy jsou normalizované a tedy platí $\forall i, j \in 1, 2$ že $\sum_i |a_{j,i}|^2 = 1 = \sum_i |b_{j,i}|^2$. Poté při alternaci měření A a B máme vždy 50% pravděpodobnost naměření veličiny λ_1 nebo λ_2 resp. σ_1 nebo σ_2. Vezmeme-li tedy pouze č.ř. z měření jedné veličiny, tato č.ř. bude ryze stochastická. Poslední měření lze konkrétně realizovat měřením spinu částice, kde veličiny A odpovídá průmětu spinu do pravoúhlé báze a veličina B odpovídá průmětu spinu do pravoúhlé bázé ve stejné rovině, avšak pootočené o 45°.

Tunelový jev Tunelový jev se obecně děje v kvantových vázaných systémech. Typicky u částic uvězněných v potenciálu či za bariérou, kdy jejich vlnová funkce exponenciálně klesá v bariéře, avšak svou částí zasahuje i do klasicky zakázaných oblastí, jako je tomu v situaci na Obr. 1.3. Zde vlnová funkce ψ má část ψ_{III} za bariérou, využijme nyní prostorové reprezentace kvantových stavů, předpokládáme-li, že funkce ψ po částech odpovídající $\psi_I, \psi_{II}, \psi_{III}$ je normalizovaná, tj.

$$\int_V |\psi(x)|^2 d^3x = 1, \tag{1.19}$$

tak poté pravděpodobnost nalezení částice za bariérou, tj. v oblasti III je

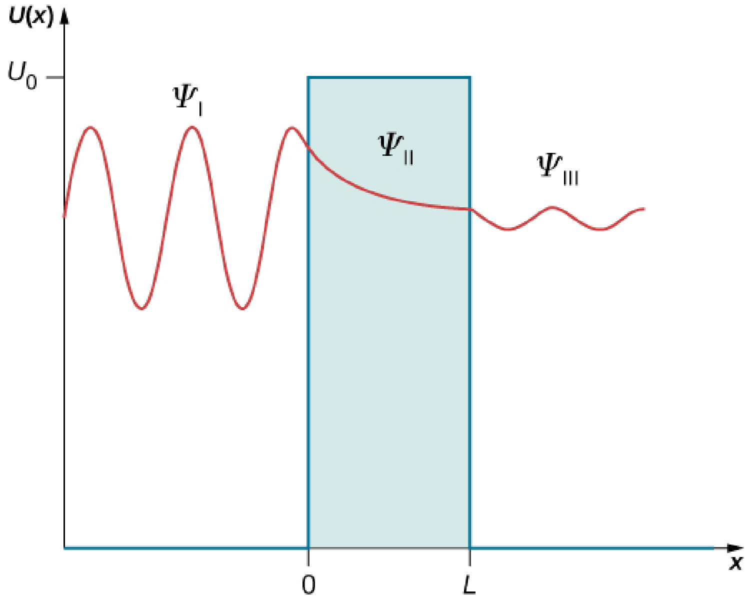
$$\int_{V_{III}} |\psi(x)|^2 d^3x. \tag{1.20}$$

Tím je nenulová šance kolapsu vlnové funkce do realizace za bariérou, což efektivně znamená tunelování částice skrze bariéru.

Jelikož každý elektron je popsaný vlnovou funkcí, a tedy může tunelovat i za bariéru vyprázdněné oblasti PN přechodu, pozorujeme v závěrném směru *Zenerovi diody* proud indukovaný tunelováním. Tento proud je však makroskopická střední hodnota náboje, který prošel PN přechodem. Navíc však neměříme pouze tunelový proud, ale i proud způsobený neideálností PN přechodu a např. *lavinovým jevem*, kdy při vyšších napětí mohou přiletuvší elektrony ionizovat vyprázdněnou oblast, a tím vytvářet nosiče náboje, které přispějí do proudu. Získanou řadu měřením fluktuací proudu na Zenerovi diodě nemůžeme brát jako čiště stochastickou.

Alfa rozpad je způsoben tunelovacím jevem, kdy si lze efektivně představit cluster dvou protonů a dvou neutronů v jádře atomu jako jednu částici α (jádro Hélia), tím i jednou vlnovou funkcí. Poté zjednodušeně Obr. 1.3 ilustruje rozložení takové vlnové funkce, kde poměr

$$\frac{\int_{V_{III}} |\psi(x)|^2 d^3x}{\int_V |\psi(x)|^2 d^3x} \tag{1.21}$$



Obrázek 1.3: Pro ilustrativní účely tunelového jevu, kdy vlnová funkce přesahuje i do klasicky zakázané oblasti. [7]

koresponduje se střední dobou života. Navíc to vysvětluje i mono energetické spektrum vyletujících α částic z konkrétní látky. Jelikož po protunelování α částice je urychlena pouze odpudivou Coulombickou interakcí s jádrem a ne na základě energie reakce. Rozptyl ve vzdálenosti α částice od jádra po protunelování má malý vliv vůči dosahu a síle Coulombické interakce. Měřením časových detekcí α radiace vhodně zvoleného vzorku lze získat ryze stochastickou č.ř.

Kvantový Zenónův jev Zajímavým jevem objevujícím se při měření kvantového systému je Turingův paradox, neboli kvantový Zenónův jev. Postihuje skutečnost, že častým měřením (interakcí) systému lze zpomalit, či dokonce zastavit jeho evoluci. Změříme-li kvantový systém, tak zkolabuje do konkrétní realizace, ze které se poté rozvíjí. Rozvojem myslíme rozšiřování prostorové, nebo hybnostní vlnové funkce či změny jejího tvaru. Pokud je však systém neustále měřen, kolabuje do stále stejného stavu.

Například budeme-li měřit pozici částice, zdali se nachází v nějákem ohraničeném prostoru, tak se při pozitivním i negativním výsledku změní vlnová funkce. Vlnová funkce se vynuluje všude kromě prostoru, ve kterém víme, že se po měření částice nachází. Zadetekujeme-li částici uvnitř citlivé oblasti detektoru, její vlnová funkce se vynuluju všude jinde. Naopak zjistíme-li, že se částice v době měření nenacházela v citlivé oblasti, část vlnové funkce ležící v citlivé oblasti detektoru se vynuluje. Transformovaná vlnová funkce se poté rozvíjí dle příslušné pohybové rovnice (Schrodingerovy, Diracovy,...). Vývoj je však závislý na čase a pokud budeme měřit vlnovou funkci dostatečně často, srovnatelně s rychlostí se kterou se rozpíná ven z detekční oblasti, tak limitně můžeme zafixovat vlnovou funci uvnitř detekční oblasti. Analogicky lze zafixovat funkci mimo detekční oblast. Tento efekt by mohl mít vliv na č.ř. získané častým opakováním měření konkrétní veličiny jednoho systému.

Objevuje se i tzv. anti-Zenonův jev, kdy častým měřením systému naopak uspíšíme jeho přechod, například při rozpadu. Anti-Zenonův jev však vymizí při limitě spojitého měření. Principiálně je opět závislý na kolapsu a vynulování vlnové funkce mimo oblast, kde byla částice naměřena, ale navíc zde hraje roli způsob vývoje vlnové funkce po měření a interval mezi měřeními. Vzhledem k časovému intervalu mezi měřeními se může vlnová funkce na chvíli vyvíjet, dokud není opět provedeno měření. Kvůli tvaru pohybových rovnic se však může vlnová funkce rozvíjet i do zakázaných oblastí a až poté se ustálit v klasickém statickém uspořádání($t \to +\infty$, také možný přesah do zakázaných oblastí). Pokud provedeme měření právě ve chvíli, kdy vlnová funkce stále zasahuje do zakázaných oblastí větší částí nežli u statického případu, máme větší pravděpodobnost přechodu. U zmíněného rozpadu, či deexcitace to znamená zkrácení střední doby života častým měřením systému.

1.3.2 Kvantový generátor náhodných čísel

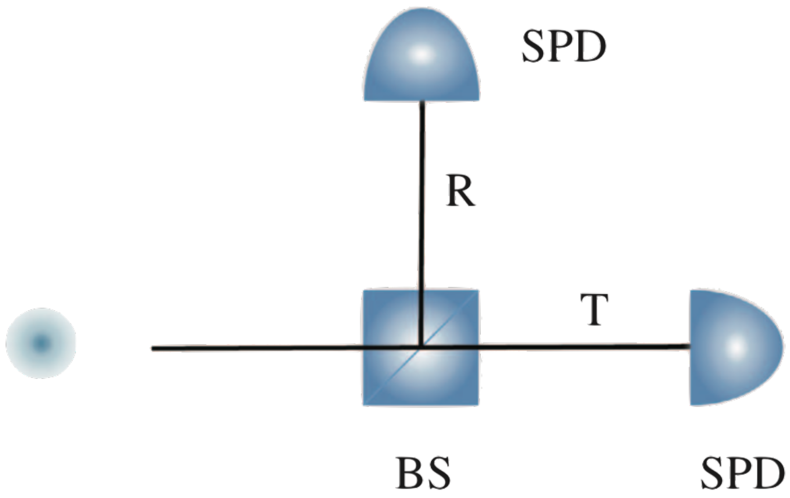
Kvantové generátory náhodných čísel (QRNG – *quantum random number generator*) by měli představovat zlatý standart pro generování náhodných čísel. Jak již bylo zmíněno výše, předpověditelnost konkrétního měření kvantového systému je nemožná, a proto s vhodně zvolenými kvantovými stavy a experimentální sestavou lze posléze generovat ryze stochastické č.ř. Nyní si uveďme dva příklady kvantových generátorů náhodných čísel.

Měření diferencí z radioaktivního rozpadu Mějme radioaktivní látku s poločasem rozpadu mnohem delším než časový úsek, kdy provádíme měření a Geigerův čítač, jehož mrtvý čas je mnohem kratší než střední doba mezi dvěma sousedními detekcemi radiace. Protože nemůžeme určit přesný okamžik, kdy radiaoktivní látka vyzáří radiaci, tak časové rozestupy mezi emisemi jsou nahodilé. Zapisujme čas jednotlivých detekcí, tj. $t_1, t_2, \ldots, t_n$, nyní lze generovat ryze stochastickou časovou řadu $x_1, x_2, \ldots, x_{n-3}$ například podle následujícího algoritmu:

- Vypočtěme $t_{k+2} - t_k$ a $t_{k+3} - t_{k+1}$.
- Je-li $t_{k+2} - t_k > t_{k+3} - t_{k+1}$ položme $x_k = 1$, v opačném případě položme $x_k = 0$.

Takto vzniklá binární č.ř. je principiálně ryze stochastická. V reálném měření však vyletující radiace může například excitovat ostatní atomy látky, což následuje vyzářením další radiace, což prináší netriviální korelace i do získané č.ř. Aby tyto struktury byly v č.ř. rozbourány, využívá se v praxi extraktoru nahodilosti.

Fotony naletující na polopropustný dělič svazku Experimenty s využitím jednotlivých fotonů jsou obecně velice využívanou platformou pro studium kvantových jevů. Jedním z těchto experimetů je vysílání jednotlivých fotonů na polopropustný dělič svazku a následná detekce. Využívá se děliče svazku s charakteristikou $50\% : 50\%$, což znamená, že přiletuvší foton má právě 50% pravděpodobnost, že se



Obrázek 1.4: Schéma kvantového generátoru využívajícího nahodilosti odrazu či prostupu fotonu na poloprospustném děliči svazku – BS(beamsplitter). R odpovída reflexi a T penetraci, SPD(single-photon detector) značí detektory jednotlivých fotonů, kdy se využívá lavinových fotodiod. [8]

odrazí či projde (viz Obr. 1.4). V experimentu je nutné mít v danou chvíli pouze jeden foton na dráze zdroj-detektor, pokud by tak nebylo, mohly by se fotony navzájem ovlivňovat.

Foton vyletující z prostoru dělení v polopropustném děliči svazku se nachází v superpozici dvou stavů, a to $|\psi\rangle = (|R\rangle + |T\rangle)/\sqrt{2}$, dopadem na detektory (SPD – single-photon detector), většinou lavinové fotodiody, vlnová funkce $|\psi\rangle$ kolabuje do jedné z možností $|R\rangle$ či $|T\rangle$. S kolapsem vlnové funkce je spojená detekce fotonu v jednom ze dvou detektorů. Nyní vytvořme č.ř. na základě výsledků průchodu či odrazu fotonu na děliči. Jestliže se foton odrazí zapišme do č.ř. 0, v druhém případě foton projde a zapišme do č.ř. 1. Získaná binární č.ř. byla měla být ryze stochastickou.

Zmiňme však problémy tohoto přístupu. Dělící poměr děliče svazku není stálý, navíc lavinové fotodiody mají maximálně 80% účinnost detekce. Datový tok náhodných čísel je omezený mrtvou dobou detektorů a dráhou, kterou musí foton urazit. V dnešní době se od toho kvantového generátoru náhodných čísel upouští.

1.3.3 Časové řady složitých statistických systémů

Většina systému, ze kterých získáváme č.ř. jsou systémy popsány statisticky, kam patří i systémy statistické fyziky. Narozdíl od kvantové teorie, kde je pravděpodobnostní popis jediný možný, u statistických systému se k němu uchylujeme zejména z důvodu nemožnosti popsat deterministickou mechaniku uvnitř systému, kvůli neznalosti systému, či kvůli vnějším vlivům, které bereme jako stochastické. Vnější stochastický vliv může být kvantového původu rozebraný výše, nebo šum. *Barevnému šumu* se věnujeme dále v textu, ač je superpozicí mnoha deterministických signálů, je nerozeznatelný od ryze stochastické č.ř.

U makroskopického systému bychom předpokládali malou citlivost vůči kvantovým fluktuacím, avšak u složitých makroskopických systém, kde deterministické zákony nabývají netriviálních tvarů, mohou tyto kvantové fluktuace hrát nezanedbatelnou roli. U *chaotických systému* právě zanedbáváme kvantové fluktuace a předpokládáme přístup klasické fyziky. Model statistického systému dává volnost jisté nepoznatelnosti, což je příhodná vlastnost. Tento popis je nejrozšířenějším aplikovaným modelem na reálné systémy (procesy), a proto i *lineární analýza časových řad* na reálné č.ř.

Jelikož statistického popisu využíváme i u mikroskopických složitých systému, setkáváme se s otázkou, kdy je daný systém ovlivněn zejména makroskopickým chaotických chováním a kdy naopak stochastickým mikroskopickým kvantovým charakterem. Tyto dvě složky jsou dozajista zastoupeny ve statistickém systému a stejně tak i v č.ř. Jako kritérium rozeznání míry vlivu jednotlivých složek můžeme v některých případech použít rozdíl mezi spojitými a diskretními výsledky měření. Pokud je množina výsledků diskrétní, může to poukazovat na převládající kvantový charakter. Dodejme však, že pro pozorování diskrétních hodnot je nutné zakomponovat precizní měřící aparaturu a také nesmíme diskrétnost výsledků automaticky ztotožnit s kvantovým charakterem procesu, jelikož každý přístroj má maximální rozlišitelnost. Jednotlivé úvahy je třeba provést pro každou konkrétní aplikaci.

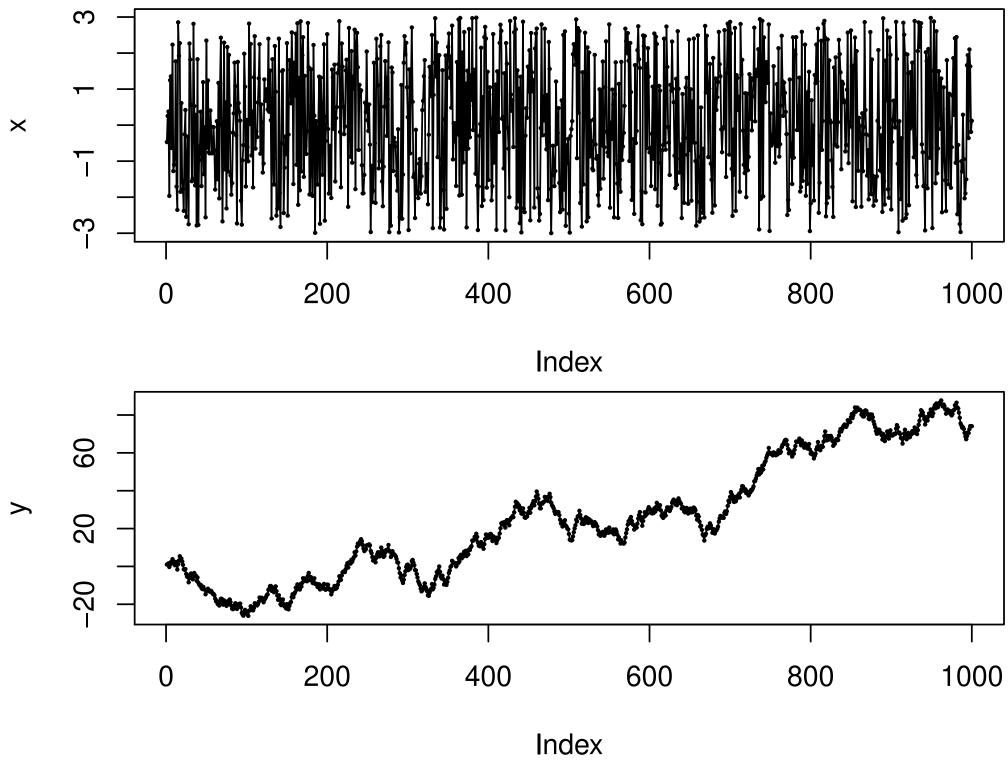
1.3.4 Barevný šum a difuzní procesy

Existuje více druhů šumu, základní vlastností je stacionarita a nulovost *autokorelační funkce*. Názvy šumů jsou inspirovány podobností výkonové spektrální hustoty šumu (viz kapitola 3.1) a výkonové spektrální hustoty viditelného světla. Odsud růžový šum, modrý šum a jiné. Pravděpodobnostní rozdělení nemusí být fixováno, neboť šum je klasifikován dle svého spektra.

Vyjímkou názvem je hnědý šum, který vznikl zkomolením z Brownova pohybu, který ve formě č.ř. představuje. Brownův pohyb je realizací *Lévyho stochastického procesu*, který má nulovou střední hodnotu, nezávislé přírůstky se stacionárním pravděpodobnostním rozdělením, navíc budeme-li zmenšovat časové rozestupy v č.ř. generované Lévyho procesem, tak limitně získáme spojitý proces. Takto zadefinovaný proces lze vytvořit ze zmíněných barev šumu pomocí řady částečných součtů (1.8). Pro srovnání jsou vykresleny grafy bílého šumu (uniformní rozdělení) na Obr. 1.5 a Gaussovského bílého šumu (Gaussovské rozdělení) na Obr. 1.6, navíc s příslušnou řadou částečných součtů. Oba bílé šumy mají stejný rozptyl. Hnědý šum – Brownův pohyb představuju řadu částečných součtů Gaussovského bílého šumu.

Všimněme si u řad částečných součtů Obr. 1.5 a Obr. 1.6 evidentně rozdílného charakteru, kde u integrovaného Guassovského šumu pozorujeme v jistém smyslu hrubší (špičatější) tvar než u řady částečných součtů uniformního bílého šumu. Tento rozdíl lze klasifikovat *Hurstovým exponentem*, který bude prezentován u lineárních metod analýzy č.ř., viz kapitola 3.1.

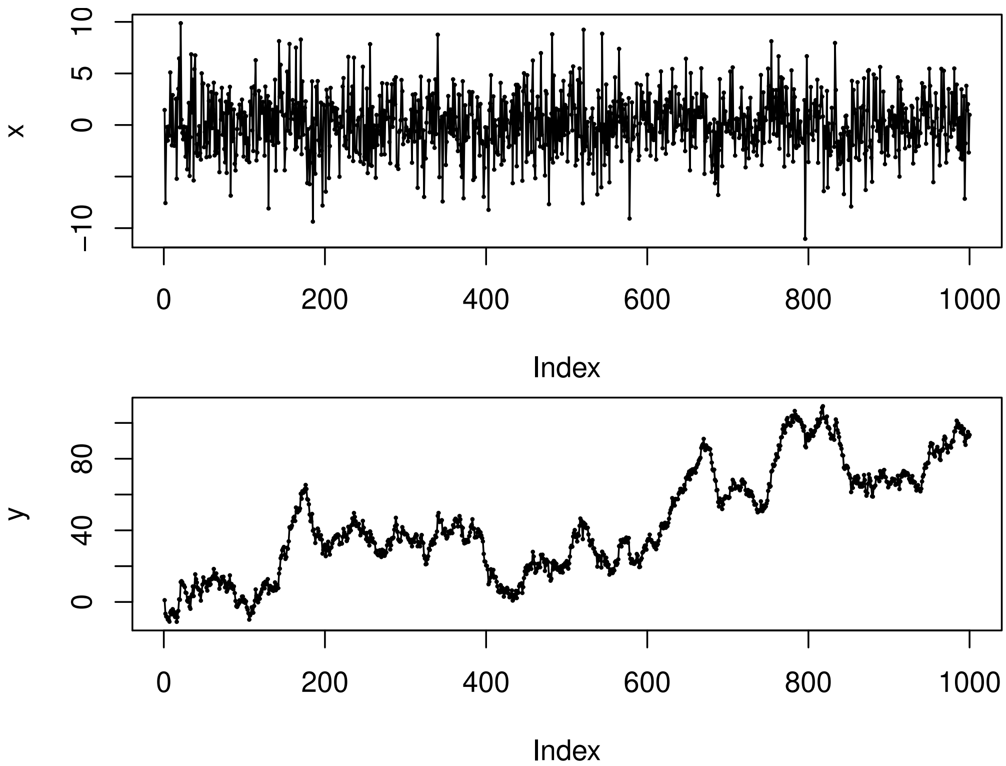
Gaussovský bílý šum se navíc uplatňuje v lineární analýze č.ř., kde se využívá v modelech klouzavých průměrů (AR, ARMA, atd.) jako zdrojový signál, na kterém se nastavují jednotlivé korelace.



Obrázek 1.5: Vrchní graf představuje bílý šum s uniformním pravděpodobnostním rozdělením, níže je příslušná řada částečných součtů dle vztahu (1.8).

Pokud budeme uvažovat model aspirující na popis č.ř., poté můžeme odečíst č.ř. generovanou modelem a skutečnou č.ř. Pokud výsledkem bude pouze bílý šum, můžeme předpokládat, že náš model postihl všechny deterministické složky v č.ř. a rozdíl je způsoben pouze nepostihnutelnou fluktuací.

Původ bílého šumu je zejména statistický, jako produkt velkého počtu superponovaných deterministických procesů. Šum lze chápat jako důsledek kvalitativně podobného procesu jako je Brownův pohyb.



Obrázek 1.6: Vrchní graf představuje Gaussovský bílý šum. Níže je příslušná řada částečných součtů dle (1.8), která představuje hnědý šum, nebo Brownův pohyb.

Kapitola 2

Deterministický chaos

V této kapitole nejdříve předestřeme základní pojmy teorie dynamických systémů. Představíme si řešení lineárních dynamických systémů v porovnání s rozdílnou metodikou pro řešení nelineárních dynamických systémů. Právě nelinearita je základním předpokladem pro vznik *deterministického chaosu*. Tento jev se objevuje u některých nelineárních dynamických systémů při příhodných nastaveních parametrů systému, či v určité oblastech fázového prostoru.

2.1 Dynamické systémy

Dynamické systémy popisují vývoj určitých veličin v čase, jsou zadány evoluční zákony a počáteční stav systému. Navíc existuje stavový prostor, jehož souřadnice popisují konkrétní stav systému a vývoj stavového vektoru v tomto prostoru popisuje dynamiku systému. Dynamické evoluční zákony mohou být deterministické i stochastické. Stochastické dynamické systémy se popisují zejména statisticky a řešení (vývoj systému) postrádá jednoznačnost. Zabývejme se nyní deterministickým případem.

Uvažujme dynamické stavové proměnné $\xi_1(t), \xi_2(t), \ldots, \xi_n(t)$, poté deterministické dynamické systémy mají nejčastěji evoluční zákony ve formě diferenciálních rovnic

$$\begin{aligned} \dot{\xi}_1 \equiv \frac{\mathrm{d}\xi_1}{\mathrm{d}t} &= f_1(t, \xi_1, \xi_2, \ldots, \xi_n), \\ \dot{\xi}_2 &= f_2(t, \xi_1, \xi_2, \ldots, \xi_n), \\ &\vdots \\ \dot{\xi}_n &= f_n(t, \xi_1, \xi_2, \ldots, \xi_n), \end{aligned} \tag{2.1}$$

tuto soustavu diferencíálních rovnic lze kompaktně zapsat jako vektorovou rovnici

$$\dot{\boldsymbol{\xi}} = \boldsymbol{f}(t, \boldsymbol{\xi}). \tag{2.2}$$

Uvažujme dále pouze soustavy, kde se v evolučních zákonech nevyskytuje explicitně čas, tj.

$$\dot{\boldsymbol{\xi}} = \boldsymbol{f}(\boldsymbol{\xi}), \tag{2.3}$$

takové soustavy rovnic nazýváme *autonomní*, $\boldsymbol{\xi} \in \mathbb{R}^n$ a $\boldsymbol{f} : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$, kde $\mathbb{R}^n$ je fázový prostor. Rovnice (2.3) představuje matematický model dynamického systému. Počáteční podmínky(p.p.) jsou v našem formalismu zadány tedy jako $\boldsymbol{\xi}(0)$.

Dodejme, že pro mechanické systémy platí $\boldsymbol{\xi} = \boldsymbol{\xi}(\boldsymbol{q}, \boldsymbol{p})$, kde $\boldsymbol{q}$, $\boldsymbol{p}$ je zobecněná poloha resp. hybnost a soustavu (2.3) lze ztotožnit s Hamiltonovými rovnicemi.

Naším úkolem je najít $\boldsymbol{\xi}(t)$ pro $\forall t$ ze zadaných p.p. a evolučních zákonů. V praxi to znamená řesit soustavu diferenciálních rovnic (2.3), kdy výsledek $\boldsymbol{\xi}(t)$ pro $\forall t$ představuje hledanou fázovou trajektorii dynamického systému ve fázovém prostoru $\mathbb{R}^n$. Řešení $\boldsymbol{\xi}(t)$ je jednoznačně zadáné deterministickými evolučními zákony a p.p. Fázový portrét systému chápejme jako soubor fázových trajektorií pro všechny možné p.p.

2.1.1 Lineární dynamické systémy

Názvem lineární dynamický systém míníme systém, kdy složky vektorová funkce $\boldsymbol{f}(\boldsymbol{\xi})$ v (2.3) obsahují závislost na $\xi_1(t), \xi_2(t), \ldots, \xi_n(t)$ maximálně v první mocnině, tedy

$$\dot{\xi}_1 = a_{1,1}\xi_1 + \cdots + a_{1,n}\xi_n, \tag{2.4}$$

$$\vdots \tag{2.5}$$

$$\dot{\xi}_n = a_{n,1}\xi_1 + \cdots + a_{n,n}\xi_n, \tag{2.6}$$

což lze opět kompaktně zapsat jako

$$\dot{\boldsymbol{\xi}} = \boldsymbol{A}\boldsymbol{\xi}, \tag{2.7}$$

kde $\boldsymbol{A} = (a_{k,l})$. Úlohu lze snadno vyřešit, nejdříve nalezneme vlastní vektory $\boldsymbol{\eta}^{(i)}$ a příslušná vlastní čísla λ_i matice $\boldsymbol{A}$:

$$\boldsymbol{A}\boldsymbol{\eta}^{(i)} = \lambda_i \boldsymbol{\eta}^{(i)}. \tag{2.8}$$

Vyřešíme novou úlohu (2.8) na vlastní čísla a vektory matice $\boldsymbol{A}$, tj. přepíšeme (2.8) do tvaru $(\boldsymbol{A} - \lambda_i \mathbb{1})\boldsymbol{\eta}^{(i)} = 0$, netriviální řešení $\boldsymbol{\eta}^{(i)} \neq \boldsymbol{0}$ existuje právě tehdy, jeli splněno

$$\det(\boldsymbol{A} - \lambda_i \mathbb{1}) = 0. \tag{2.9}$$

Výpočtem determinantu (2.9) získáme algebraickou rovnice pro vlastní čísla λ_i, ty poté využijeme dosazením do (2.8) a dopočteme vlastní vektory $\boldsymbol{\eta}^{(i)}$. Řešení (2.7) je každý výraz typu $\boldsymbol{\xi} = e^{\lambda_i t}\boldsymbol{\eta}^{(i)}$, pro $\forall i \in 1, \ldots, n$, odkud je obecné řešení

$$\boldsymbol{\xi} = c_1 e^{\lambda_1 t}\boldsymbol{\eta}^{(1)} + \cdots + c_n e^{\lambda_n t}\boldsymbol{\eta}^{(n)}. \tag{2.10}$$

Pokud je násobnost některého vlastního čísla λ_i rovna $k \neq 1$, pak odpovídající koeficient c_i lineární kombinace (2.10) je polynom $k-1$ stupně.

2.1.2 Nelineární dynamické systémy

Narozdíl o lineárního případu, zde nabývají diferenciální rovnice v evolučních zákonech (2.3) netriviálních forem a analytické řešení těchto úloh není zaručeno, navíc numerické řešení může být velice citlivé na zvolenou metodu, délku integračního kroku atd. Obecně neplatí oproti lineárním dynamickým systémům, že lineární kombinace řešení je také řešením (viz vztah (2.10)).

Abychom mohli odhadnout fázový portrét a nemuseli rovnou analyticky či numericky počítat dif. rovnice (2.3), využíváme tzv. stacionárních bodů $\boldsymbol{\xi}^S$ definovaných

$$\boldsymbol{f}(\boldsymbol{\xi}^S) = \mathbf{0}. \tag{2.11}$$

Připravíme-li systém s přesnými počátečními podmínkami $\boldsymbol{\xi}(0) = \boldsymbol{\xi}^S$, poté stavový vektor $\boldsymbol{\xi}(t) = \boldsymbol{\xi}^S$ pro $\forall t$, a tedy systém zůstane ve stavu daném stacionárním bodem.

Stabilita stacionárních bodů Zkoumejme nyní, jestli jsou stacionární body stabilní vůči malým poruchám. Pokud tedy vychýlíme systém ze stacionárního stavu $\boldsymbol{\xi}^S$ o poruchu $\boldsymbol{\delta\xi}$, zdali má systém tendenci navracet se do stacionárního bodu, nebo se vzdalovat a s jakou dynamikou.

Zaveďme nový vektor $\boldsymbol{\xi}' = \boldsymbol{\xi}^S + \boldsymbol{\delta\xi}$, vložme jej do (2.3), tj.

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}(\boldsymbol{\xi}^S + \boldsymbol{\delta\xi}) = \boldsymbol{f}(\boldsymbol{\xi}^S + \boldsymbol{\delta\xi}). \tag{2.12}$$

Dále zapisujme vektorovou rovnici po složkách, kde $k \in 1, \ldots, n$. Využijme linearity derivace a Taylorova rozvoje složek $f_k(\boldsymbol{x})$ vektorové funkce $\boldsymbol{f}(\boldsymbol{x})$ do prvního řádu okolo bodu $\boldsymbol{\xi}^S$, získáme

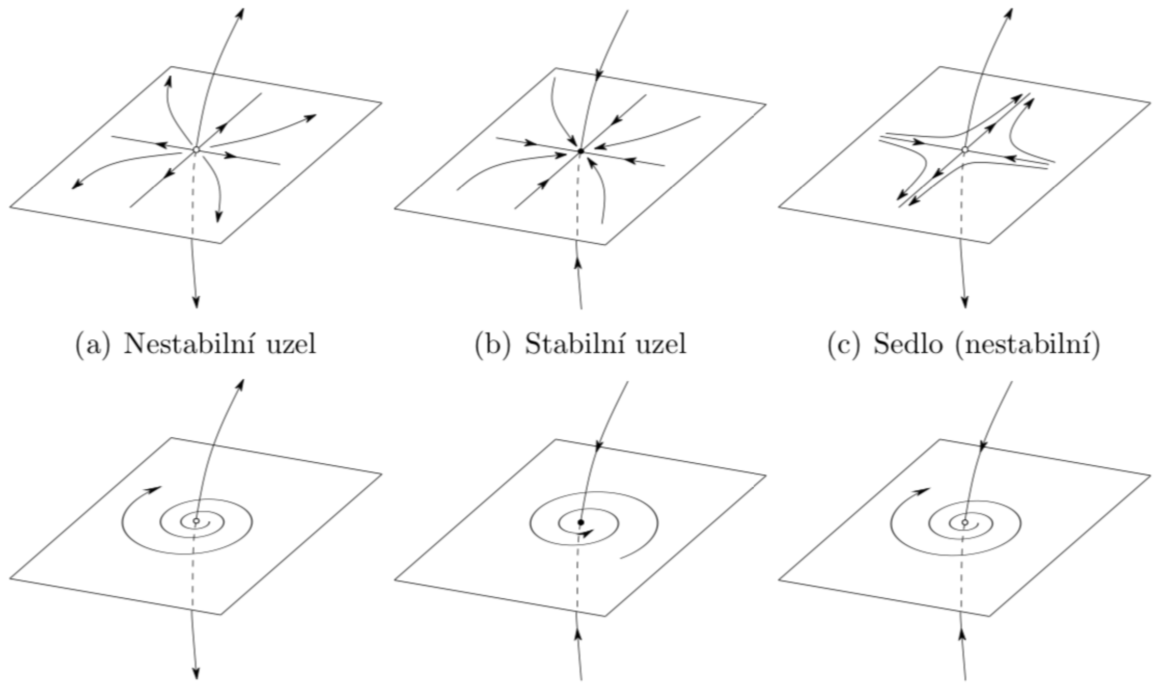
$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\xi_k^S + \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\delta\xi_k = f_k(\boldsymbol{\xi}^S) + \sum_{l=1}^{n} \left.\frac{\partial f_k}{\partial \xi_l}\right|_{\boldsymbol{\xi}^S} \delta\xi_l. \tag{2.13}$$

Protože $\boldsymbol{\xi}^S$ je stacionární bod splňující $\boldsymbol{f}(\boldsymbol{\xi}^S) = \mathbf{0}$ a členy $a_{k,l} \equiv \left.\frac{\partial f_k}{\partial \xi_i}\right|_{\boldsymbol{\xi}^S}$ jsou komplexní číselné faktory, lze (2.13) přepsat jako

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\begin{pmatrix}\delta\xi_1\\ \vdots\\ \delta\xi_n\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}a_{1,1} & \ldots & a_{1,n}\\ \vdots & \ddots & \vdots\\ a_{n,1} & \ldots & a_{n,n}\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}\delta\xi_1\\ \vdots\\ \delta\xi_n\end{pmatrix} \tag{2.14}$$

Komplexní matici $\boldsymbol{A} = (a_{k,l})$ (Jacobiho matici) nazýváme *maticí stability.* Nyní je úloha linearizovaná, řešit ji lze podobně jako u lineárních dynamických systému, nalezením vlastních čísel λ_m a vlastních vektorů $\boldsymbol{\eta}^{(m)}$ matice $\boldsymbol{A}$. Poté vlastní čísla $\lambda_m \in \mathbb{C}$ určují staibilitu ve směru příslušného vlastního vektoru $\boldsymbol{\eta}^{(m)}$. Nechť $\lambda_m = b_m + ic_m$ pro $m \in 1, \ldots, n$. Pro jednoduchost předpokládejme, že vlastní čísla λ_m jsou všechny navzájem rozdílná. Mohou nastat následující případy:

- Pokud $b_m < 0$, tak ve směru vektoru $\boldsymbol{\eta}^{(m)}$ je daný stacionární bod stabilní.
- Pokud $b_m > 0$, tak ve směru vektoru $\boldsymbol{\eta}^{(m)}$ je daný stacionární bod nestabilní.
- Jeli $c_m \neq 0$, tak ve směru vektoru $\boldsymbol{\eta}^{(m)}$ stavový vektor osciluje.



(a) Nestabilní uzel (b) Stabilní uzel (c) Sedlo (nestabilní)

(d) Nestabilní uzel–ohnisko (e) Stabilní uzel–ohnisko (f) Sedlo–ohnisko

Obrázek 2.1: Druhy stacionárních bodů ve fázovém prostoru. [10]

Některé kombinace jednotlivých složek vlastních čísel matice $\boldsymbol{A}$ si představíme pro fázový prostor $\mathbb{R}^3$. Na Obr. (2.1) lze vidět možné důsledky kombinací vlastních čísel $\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3$, resp. jejich složek $b_1, c_1, b_2, c_2, b_3, c_3$ a knim odpovídající druhy stacionárních bodů. Vlastní číslo λ_1 přísluší vektoru $\boldsymbol{\eta}^{(1)}$, který je v naznačené rovině a vertikálním směřem z pohledu pozorovatele. Dále λ_2 přísluší směru $\boldsymbol{\eta}^{(2)}$ ležícím v rovině a kolmém na $\boldsymbol{\eta}^{(1)}$. Vlastní vektor $\boldsymbol{\eta}^{(3)}$ příslušný vlastnímu číslu λ_3 je kolmý k $\boldsymbol{\eta}^{(1)}$ a $\boldsymbol{\eta}^{(2)}$. Kombinace složek vlastních čísel odpovídající druhům stabilních bodů na Obr. (2.1) jsou následující:

a) $b_1, b_2, b_3 > 0$ a $c_1, c_2, c_3 = 0$ – *nestabilní uzel.*

b) $b_1, b_2, b_3 < 0$ a $c_1, c_2, c_3 = 0$ – *stabilní uzel.*

c) $b_1, b_3 > 0$, $b_2 < 0$ a $c_1, c_2, c_3 = 0$ – *sedlo.*

d) $b_1, b_2, b_3 > 0$, $c_1 = -c_2 \neq 0$ a $c_3 = 0$ – *nestabilní uzel-ohnisko.*

e) $b_1, b_2, b_3 < 0$, $c_1 = -c_2 \neq 0$ a $c_3 = 0$ – *stabilní uzel-ohnisko.*

f) $b_1, b_2 > 0$, $b_3 < 0$, $c_1 = -c_2 \neq 0$ a $c_3 = 0$ – *sedlo-ohnisko.*

2.1.3 Měření dynamického systému

Měřením dynamického systému rozumíme akt odečítání pozorované veličiny $\boldsymbol{M}$, dimenze měřené velčiny může být obecně libovolná. Měřená veličina souvisí se stavovým vektorem $\boldsymbol{\xi}(t) \in \mathbb{R}^n$ skrze *měřící funkcí* $\boldsymbol{f} = \boldsymbol{f}(\boldsymbol{\xi}(t), \boldsymbol{\xi}(t'), t)$ jako

$$\boldsymbol{M}(t) = \boldsymbol{f}(\boldsymbol{\xi}(t), \boldsymbol{\xi}(t'), t), \tag{2.15}$$

kde t a t' jsou rozdílné časy. Struktura měřící funkce může být velice jednoduchá nebo naopak komplikovaná a analyticky nepopsatelná, její časová závislost na t odráží proměnnost samotného měření kvůli vnějším vlivům. Ve členu $\boldsymbol{\xi}(t')$ postihujeme hysterézní jevy, tedy závislosti na předešlých stavech, navíc tento člen zahrnuje i případ, kdyby čas odečítání veličiny $\boldsymbol{M}(t)$ nebyl shodným s časem, ve kterém se nachází stav systému $\boldsymbol{\xi}(t)$. Rozměrnost $\boldsymbol{M}$ je dána volenou metodou měření, kromě skalární veličiny můžeme měřit i soubor hodnot – vektor, nebo pole hodnot – matici atd.

Z veličiny $\boldsymbol{M}(t)$ chceme posléze odhadnout stavové veličiny systému $\boldsymbol{\xi}(t)$, náš odhad značme $\hat{\boldsymbol{\xi}}(t)$. Tedy potřebujeme novou *proceduru* – funkci $\boldsymbol{g} = \boldsymbol{g}(\boldsymbol{M}(t))$, poté jako odhad chápejme

$$\hat{\boldsymbol{\xi}}(t) = \boldsymbol{g}(\boldsymbol{M}), \tag{2.16}$$

dimenze funkce $\boldsymbol{g}$ je dána tím, kolik stavových proměnných jsem z veličiny $\boldsymbol{M}$ schopni odhadnout. Obecně je procedura $\boldsymbol{g}$ vektorovou funkcí, někdy jsme však schopni odhadnout pouze jednu stavovou proměnnou, poté je skalární funkcí. Dodejme, že v závislosti procedury na veličině $\boldsymbol{M}$, tj. v $\boldsymbol{g} = \boldsymbol{g}(\boldsymbol{M})$, nemá veličina $\boldsymbol{M}$ časový argument, neboť procedura může záviset i na předchozích pozorováních.

Statistická chyba Zdroj této chyby se nedá přesně určit, v našem modelu je postihnuta závislostí měřící funkce $\boldsymbol{f} = \boldsymbol{f}(\boldsymbol{\xi}(t), \boldsymbol{\xi}(t'), t)$ na čase t. Někdy je možné pomocí přípravy známých stavů a důkladným pozorovaním výsledků, tuto chybu odhadnout.

Hrubá chyba Lze jí charakterizovat jako nevhodnou volbu měřené veličiny $\boldsymbol{M}$, či procedury $\boldsymbol{g}$. Může být však způsobena i vnějšími vlivy v měřící funkci $\boldsymbol{f} = \boldsymbol{f}(\boldsymbol{\xi}(t), \boldsymbol{\xi}(t'), t)$ tedy časem t, nebo neadekvátní závislostí na předešlých stavech, tedy členem $\boldsymbol{\xi}(t')$.

Systematická chyba Postihuje míru vhodnosti volby měření $\boldsymbol{M}$, či procedury $\boldsymbol{g}$.

Časová řada Pro potřeby procedury $\boldsymbol{g}$ je možné využít časové řady, poté získáváme č.ř. z měření $\boldsymbol{M}(t)$. Předpokládejme, že $\boldsymbol{M} \in \mathbb{R}^{k,l}$ a $\boldsymbol{M} = (m_{i,j})$, poté č.ř. $x_1, \ldots, x_r$ získáme pro $\forall j \in 1, \ldots, r$ jako

$$x_j = m_{q,p}(t + j\Delta t), \text{ kde } p \in 1, \ldots, l, \text{ a } q \in 1, \ldots, l \tag{2.17}$$

krok $\Delta t > 0$ je pevný, stejně jako p, q. Č.ř. se poté využívá jako analytické metody v rámci procedury $\boldsymbol{g}$, resp. při odhadu (2.16).

Jinou možností je sledovat vývoj složky odhadu $\hat{\boldsymbol{\xi}}(t)$ z (2.16) a tedy vytvořit č.ř. $x_1, \ldots, x_r$ pro $\forall j \in 1, \ldots, r$ jako

$$x_j = \hat{\xi}_s(t + j\Delta t), \text{ kde } \ s \in 1, \ldots, n \tag{2.18}$$

a $\Delta t > 0$ je pevné, stejně jako s. Z této č.ř. můžeme usuzovat dynamiku celého systému, jak uvidíme v kapitole o analýze nelineárních č.ř., tak lze zrekonstruovat odhad fázové trajektorie $\hat{\boldsymbol{\xi}}(t)$, pouze ze znalosti vývoje jedné složky, tj. ze znalosti č.ř. (2.18).

2.2 Deterministické chaotické systémy

První motivací k vytvoření oboru *Teorie chaosu* byly výsledky numerických simulací vývoje počasí. Americký matematik a meteorolog Edward Lorenz vytvořil dynamický model atmosféry popisovaný dvanácti fázovými veličinami – teplotou, tlakem, rychlostí větru atd. Jednou po dopočítané simulaci chtěl řadu dat opět vidět, avšak p.p., které dříve do systému vložit, si nepamatoval. Ve svém programu je měl zapsané, ale zaokrouhlené s relativní chybou 0.0001%. Využil tedy zaokrouhlené hodnoty, protože neočekával velký rozdíl ve výsledku obou simulací. K jeho překvapení se však výsledky po nedlouhém čase již velice lišily. Tato skutečnost mimo jiné poukazuje na to, že zpřesňování atmosferických modelů stejně limitně nevede k předpověditelnosti počasí v delších časových horizontech.

U některých nelineárních dynamických systémů se stavovým prostorem větším než $\mathbb{R}^3$, se setkáváme s jevem zvaným *deterministický chaos*, ústředním pojmem Teorie chaosu. Tento jev charakterizuje zmíněnou praktickou nepředpověditelnost chování deterministického systému. Determinismus vyžaduje jednoznačnost řešení, tuto vlastnost chaotické systémy neztratily, avšak je prakticky nemožné ji u nich ověřit.

Chaotické systémy jsou speciálním případem nelineárních dynamických systémů, a proto vykazují nelineární závislost na poruše v p.p. Právě typicky exponenciální závislost na poruše charakterizuje chaotické systémy. Jelikož nikdy nejsme schopni přesně určit p.p., tak analytické řešení úlohy (2.3) se pro chaotické systémy bude od skutečnosti s časem exponenciálně vzdalovat (chápejme vzdálenost ve fáz. prostoru). Navíc většina chaotických systému je analyticky něřešitelná tzv. *neintegrabilní*, proto saháme k numerickým integracím. V numerických algoritmech však využíváme konečných kroků, což přinášíme každou iterací novou poruchu do výpočtu. Edward Lorenz citlivost na p.p. charakterizoval příměrem k mávnutí motýlího křídla, kdy tato porucha pozmění výsledek natolik, že oproti očekávané obloze bez mraků zuří hurikán.

Nejjednoduším chaotickým systémem je dvojité kyvadlo. Rozhoupeme-li ho, již za několik period se náš původní odhad bude diametrálně lišit od skutečného vývoje. Budeme však moct pozorovat určité cykly, například kvůli vlastním periodám jednotlivých kyvadel, či můžeme využít faktu, že kyvadlo osciluje okolo rovnovážného bodu. Z těchto pravidel můžeme vyvodit pravděpodobnější realizace nad jinými, či nějáké úplně vyloučit.

Oproti běžným nelineárním dynamickým systémům se u chaotických systémů setkáváme i s kvalitativně novou vlastností – *soběpodobností*, která odráží složitou strukturu fázového portrétu, resp. *atraktoru*. Právě pojem *atraktor* nabývá u chaotických systému netriviálního významu. Dodejme, že soběpodobné fraktální struktury se generují deterministicky, a proto nemusí být podivem, že systém s pravidly vykazuje fraktálový charakter svých řešení. Jako je složité, spíše nemožné deterministicky nagenerovat všechny hodnoty spojité veličiny, tak stejně složité je pro deterministický systém vlastnit spojitý fázový portrét. Právě fraktální struktury se vyznačují dimenzí menší než je dimenze prostoru, ve kterém žijí, ale dimenzí větší nežli dimenze nadroviny v tomto prostoru.

2.2.1 Ljapunova stabilita

Zaveďme nyní pojem využívaný k charakterizaci míry chaotičnosti chaotického systému.

Ljapunova stabilita popisuje způsob vývoje vzdálenosti trajektorií $\boldsymbol{\xi}'(t)$ a $\boldsymbol{\xi}(t)$, které mají blízké počáteční podmínky. Zaveďme vektor posunutí $\boldsymbol{\sigma}$ jako $\boldsymbol{\xi}'(0) = \boldsymbol{\xi}(0) + \boldsymbol{\sigma}$. Blízkými počátečními podmínkami máme na mysli

$$\varrho(\boldsymbol{\xi}'(0), \boldsymbol{\xi}(0)) = \|\boldsymbol{\xi}'(0) - \boldsymbol{\xi}(0)\| = \|\boldsymbol{\sigma}\| < \varepsilon, \tag{2.19}$$

kde $0 < \varepsilon << 1$ a využitá metrika $\varrho(.,.) : \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^+$, resp. norma $\|.\| : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^+$ je indukovaná standardním skalárním součinem na fázovém prostoru $\mathbb{R}^n$. Sledujme jak se s časem mění vzdálenost trajektorií

$$\varrho(\boldsymbol{\xi}'(t), \boldsymbol{\xi}(t)) = \|\boldsymbol{\xi}'(t) - \boldsymbol{\xi}'(t)\|. \tag{2.20}$$

Pozorujeme-li

$$\|\boldsymbol{\xi}'(t) - \boldsymbol{\xi}'(t)\| \sim e^{\lambda t}, \tag{2.21}$$

poté lze určit exponent λ jako limitu

$$\lim_{\substack{t\to\infty \\ \boldsymbol{\sigma}\to\mathbf{0}}} \frac{1}{t} \ln \|\boldsymbol{\xi}'(t) - \boldsymbol{\xi}'(t)\|. \tag{2.22}$$

Samozřejmě lze vybrat různé směry $\boldsymbol{\sigma}$, ve kterých jsou vůči sobě posunuty počáteční podmínky trajektorií $\boldsymbol{\xi}'(t)$ a $\boldsymbol{\xi}(t)$ i způsoby provedení limity $\boldsymbol{\sigma} \to \mathbf{0}$. Zvolme postupně směry příslušné souřadnicovým osám, tj. $\boldsymbol{\sigma_i}$ odpovídá posunutí ve směru osy ξ_i pro $i \in 1, \dots, n$. Limitu $\boldsymbol{\sigma}_i \to \mathbf{0}$ provádějme pouze v příslušné ose ξ_i. Procedurou (2.22) nyní získéme n ljapunových exponentů $\lambda_1, \dots, \lambda_n$ odpovídající rozbíhavosti, resp. zbíhavosti trajektorií při posuntí p.p. ve směrech jednotlivých os $\xi_1, \dots, \xi_n$.

- Jsou-li $\lambda_1, \dots, \lambda_n \geq 0$, poté o trajektorii $\boldsymbol{\xi}(t)$ resp. $\boldsymbol{\xi}'(t)$ hovoříme jako o ljapunovsky nestabilní.
- Jsou-li $\lambda_1, \dots, \lambda_n \leq 0$, poté o trajektorii $\boldsymbol{\xi}(t)$ resp. $\boldsymbol{\xi}'(t)$ hovoříme jako o ljapunovsky stabilní.
- Neplatí-li ani jedna zvýše zmíněných podmínek, nelze určit charakter ljapunovy stability.

2.2.2 Atraktor

Nejdříve zaveďme několik definic vztahujících se k řešení diferenciálních rovnic potřebných k objasnění pojmu *atraktor*, resp. *podivný atraktor*.

Invariantní množina O množině $\mathcal{J} \subset \mathbb{R}^n$ řekneme, že je invariantní, pokud jákákoliv trajektorie $\boldsymbol{\xi}(t)$ s p.p. uvnitř $\mathcal{J}$ celá také leží v $\mathcal{J}$, tj.

$$\mathcal{J} = \left\{ \boldsymbol{X} \in \mathbb{R}^n; \quad \boldsymbol{X}_0 = \boldsymbol{\xi}(0) \in \mathcal{J} \implies \boldsymbol{X} = \boldsymbol{\xi}(t) \in \mathcal{J} \right\}. \tag{2.23}$$

Hustě pokrytá množina Množinu $\mathcal{D}$ nazveme hustě pokrytou, pokud v libovolně malém okolí každého bodu z $\mathcal{D}$ leží nějáká fázová trajektorie $\boldsymbol{\xi}(t)$, tj.

$$\mathcal{D} = \left\{ \boldsymbol{X} \in \mathbb{R}^n; \quad \forall \varepsilon > 0,\ \exists \boldsymbol{\xi}(t),\ \varrho(\boldsymbol{\xi}(t), \boldsymbol{X}) < \varepsilon \right\}. \tag{2.24}$$

Chaotická množina Množinu $\mathcal{M}$ nazveme chaotickou pokuď splňuje následující podmínky

- $\mathcal{M}$ je invariantní množinou.
- Existuje trajektorie, která $\mathcal{M}$ hustě pokryje.
- Každá trajektorie v $\mathcal{M}$ je ljapunovsky nestabilní.

Atraktor Okolí množiny $\mathcal{A}$ značme $U_{\mathcal{A}}$. Množinu $\mathcal{A}$ nazveme atraktorem, splňuje-li

- Trajektorie z okolí množiny $\mathcal{A}$ jsou k $\mathcal{A}$ „přitahovány“, tj. $\exists U_{\mathcal{A}} \supset \mathcal{A}$, takže $\forall \boldsymbol{\xi}(t)$, pro které $\boldsymbol{\xi}(0) \in U_{\mathcal{A}}$, platí $\lim_{t\to\infty} \varrho(\boldsymbol{\xi}(t), \mathcal{A}) = 0$.
- Existuje trajektorie, která $\mathcal{A}$ hustě pokryje.
- $\mathcal{A}$ je invariantní množina.
- $\mathcal{A}$ je uzavřená množina.

Vzdáleností vektoru $\boldsymbol{y} \in \mathbb{R}^n$ od množiny $\mathcal{X} \subset \mathbb{R}^n$ rozumíme $\varrho(\boldsymbol{y}, \mathcal{X}) \equiv \min_{\forall \boldsymbol{x} \in \mathcal{X}} \varrho(\boldsymbol{y}, \boldsymbol{x})$.

Podivný atraktor Podivný atraktor je chaotický atraktor, neboli je atraktorem a zároveň chaotickou množinou.

Tyto objekty mohou navíc vykazovat *soběpodobnost*, což znamená, že trajektorie ve fázovém prostoru opisují podobné tvary při různých rozlišeních. Navíc v rámci fázového prostoru mohou být v určitých chaotických oblastech vnořeny regulární oblastí, které opět obsahují chaotické oblasti atd.

Limitní cyklus Uzavřenou trajektorii, která je zároveň atraktorem, nazýváme limitní cyklus.

Bifurkace *Bifurkace* charakterizuje jev, kdy se při spojité změně některého z parametrů dynamického systému náhle změní fázový portrét systému, resp. atraktoru, a tím i kvalitativní chování systému. Změnou myslíme *topologickou neekvivalentnost* fázového portrétu před a po bifurkaci, to znamená že neexistuje spojité, bijektivní zobrazení, jehož inverzní zobrazení je také spojité mezi oběmi fázovými přechody. Navíc je zachován tok času, viz [10]. Tento jev se objevuje u nelineárních dynamických systému, kdy systém přechází z chaotické do regulární fáze a vice versa.

2.2.3 Podivný atraktor typu „dvojitý svitek“

Jedním ze snáze reprodukovatelných podivných atraktorů chaotického systému je tzv. podivný atraktor typu „dvojitý svitek“. Tento atraktor lze pozorovat v *Chuově obvodu*, což je chaotický oscilační elektronický obvod obsahující jednu nelineární součástku a to *Chuovu diodu*. Tento obvod byl v rámci práce sestaven, a proto bude detailněji rozebrán v kapitole 4.

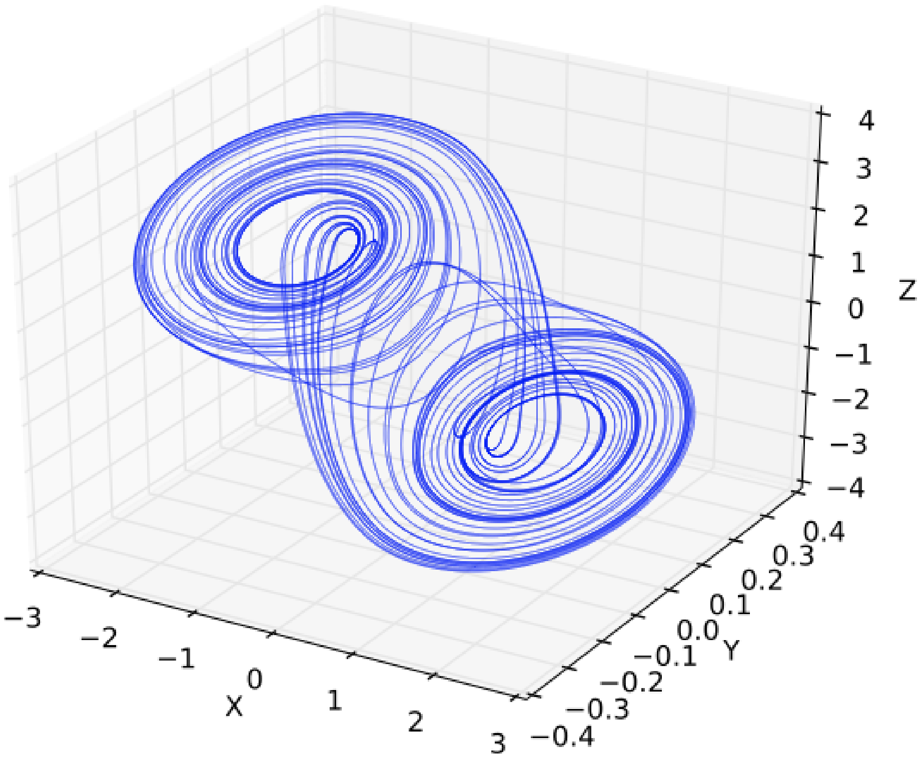
Chuoův oscilační obvod lze velice přesně popsat trojicí obyčejných nelineárních diferenciálních rovnic, které jsou ve tvaru (2.3). Tyto rovnice lze získat z Kirchhoffových zákonů pro Chuoův obvod. Ukažme si nyní pouze matematický model, konstanty a proměnné budou později ztotožněni s reálnými veličinami Chuova obvodu. Soustava rovnic

$$\begin{aligned} \dot{x} &= \alpha(y - x - g(x)), \\ \dot{y} &= x - y + z, \\ \dot{z} &= -\beta(y), \end{aligned} \tag{2.25}$$

má pouze jeden nelineární člen a to po částech lineární funkci $g(x)$, která je definovaná následovně

$$g(x) = bx + \frac{1}{2}(a - b)(|x - 1| - |x - 1|) \tag{2.26}$$

členy a, b, α, β jsou parametry systému. Numerické řešení soustavy (2.26) při chaotickém chování – odpovídající nastavení parametrů a, b, α, β, lze vidět na Obr. 2.2.



Obrázek 2.2: Podivný atraktor typu „dvojitý svitek“ získaný numerickým řešením soustavy diferenciálních rovnic (2.26). [17]

Kapitola 3

Analýza časových řad

Pro studiu č.ř. využíváme mnoho technik, jež nám sdělují relevantní informace. Zvolení metod by mělo být ideálně motivováno znalostí o procesu, který zkoumáme. Základním cílem analýzy č.ř. je sestavit model generující data, abychom mohli odhadovat budoucí členy č.ř. Pro většinu reálných č.ř. se využívá metody tzv. *lineární analýzy*, existují však č.ř., u kterých lineární metody přináší neuspokojivé výsledky, například u takových získaných měřením chaotického systému. Lineární předpovědi jsou zejména připraveny pro analýzu stochastických č.ř. Pro analýzu chaotických č.ř. byla na míru zkonstruována *nelineární analýza č.ř.*, která přináší již přijatelné výsledky. Jednotlivé přístupy budou představy, stejně jako jejich základní analytické metody.

3.1 Lineární analýza časových řad

Lineární metody jsou zejména využívány pro analýzu reálných č.ř., které jsou většinou stochastické s deterministickými trendy či cykly. Odtrendujeme-li č.ř., poté stacionární č.ř. můžeme modelovat podle technik nastavování korelací na bílý šum. Z uspěšně používaných modelů si představíme jen některé, avšak idea budování složitějších modelů bude zřejmá. Pro správnost volby modelu používáme lineární analytické metody č.ř. a srovnáváme jejich výsledky pro č.ř. a konkrétní lineární model. Nejdříve prezentujme vybrané lineární analytické metody a posléze ukážeme základní lineární modely.

3.1.1 Vybrané pokročilejší metody lineární analýzy

Kromě průměru a rozptylu definovaných v první kapitole mezi lineární analytické metody č.ř. patří ještě následující:

Autokorelace Průměr či rozptyl č.ř. neuvažuje časové uspořádání členů. Pro kvantifikování strukutury č.ř. $x_1, \ldots, x_n$ v čase se používá autokorelace, kde její odhad pro časové posunutí τ je definován

$$\hat{c}_\tau = \frac{1}{(n-\tau)\hat{\sigma}^2}\sum_{i=1}^{n-\tau}(x_i - \hat{x})(x_{i+\tau} - \hat{x}), \tag{3.1}$$

$\hat{\sigma}^2$, $\hat{x}$ představuje odhad rozptylu, resp. průměru č.ř. Autokorelaci $\hat{c}_\tau$ jako funkci τ, tj. $\hat{c}(\tau) = \hat{c}_\tau$, nazýváme *autokorelační funkcí* a její nulovost pro všechny $\forall\tau$ poukazuje na nahodilost č.ř. Graf závislosti autokorelační funkce na kroku τ nazýváme *korelogram.* Dodejme, že τ ve vztahu (3.1) může nabývat pouze diskrétních hodnot, u stochastického spojitého procesu, ze kterého náš odhad vyplývá, tomu tak není.

Fourierova transformace Pro č.ř. má Fourierova transformace jasnou interpretaci, postihuje cykly zachycené v dané řadě. Pro naše potřeby používáme odhad diskrétní Fourierovy transformace

$$\hat{s}_k = \frac{1}{\sqrt{n}}\sum_{j=1}^{n} x_j e^{2\pi ikj/n}, \tag{3.2}$$

kde $\hat{s}_k$ odpovídá odhadu průmětu deterministického signálu $e^{2\pi ikj/n}$ do č.ř., index $k \in -n, \ldots, +n$ je s frekvencí svázán jako $f_k = k/n\Delta t$ a Δt je časový rozestup členů č.ř. Odhad výkonové spektrální hustoty je poté funkce $r(k) = |\hat{s}_k|^2$.

Analýza fluktuací odtrendované č.ř. Touto metodou zkoumáme soběpodobnost č.ř. Je vhodná i pro nestacionární č.ř., protože během metody č.ř. tzv. odtrendujeme. Soběpodobností myslíme jaký charakter mají fluktuace a postihuje jejich korelace.

Nejdříve z řady $x_1, \ldots, x_{n+1}$ vytvořme řadu částečných součtů $y_1, \ldots, y_n$ dle (1.8). Takto z ohraničené č.ř. vznikne difuzní proces. Nyní č.ř. $y_1, \ldots, y_n$ rozdělme na k částí a na každém úseku proložme linearní funkcí pomocí metody nejmenších čtverců, tj. pro k částí získáme $Y_1, \ldots, Y_k$ lineárních funkcí proložení. Sestavme funkci $\tilde{Y}$, která je po částech spojitou lineární funkcí složenou z $Y_1, \ldots, Y_p$, argument těchto funkcí je index členu č.ř. Nyní střední odchylka č.ř. od trendu je

$$F(k) = \sqrt{\frac{1}{n}\sum_{j=1}^{n}(x_j - \tilde{Y}(j))^2}. \tag{3.3}$$

Vkládáme-li různé hodnoty dělení k, můžeme sledovat chování veličiny (3.3). Jestliže je závislost tvaru $F(k) \sim k^\alpha$, indikuje to soběpodobnost fluktuací. Exponent α je poté zobecněný *Hurstův exponent*, který klasifikuje dlouhodobou pamět fluktuací, tedy jejich charakter. Exponent α lze získat z grafu závislosti $F = F(k)$ při obou logaritmických osách proložením lineární funkcí a odpovídá směrnici přímky. Ukažme si klasifikace fluktuací dle exponentu α.

- $\alpha < 1/2$ odpovídá anti-korelovaným členů – po členu s vysokou hodnotou očekáváme naopak spíše člen s nízkou hodnotou.
- $\alpha \simeq 1/2$ odpovídá nekorelovaným členům, tj. bílému šumu.

- $\alpha > 1/2$ odpovídá korelovaným členů – *enhanced diffusion.*
- $\alpha \simeq /1$ odpovídá chování růžového šumu.
- $\alpha > 1$ odpovídá nestacionárnímu, neomezenému procesu.
- $\alpha \simeq 1$ odpovídá hnědému(Brownovu) šumu.

3.1.2 Entropie

Metoda určení entropie č.ř. prezentovaná v této sekci bude analogická Shannonově entropii mající tvar

$$H = -\sum_{p_\gamma} p_\gamma \log p_\gamma, \tag{3.4}$$

kde p_γ je pravděpobnost stavu γ a sčítá se přes všechny možné realizace.

Pro č.ř. $x_1, \ldots, x_n$ s nabývajícími hodnotami $h_1, \ldots, h_m$, $m \leq n$ sestavíme histogram $K(h_i)$, což je počet zastoupení hodnoty h_i v č.ř. $x_1, \ldots, x_n$, kterou lze interpretovat jako pravděpodobnost realizace hodnoty h_i. Nyní můžeme odhadnout entropii č.ř. jako

$$\hat{H} = -\sum_{i=1}^{m} K(h_i) \log K(h_i). \tag{3.5}$$

Problém nastává u č.ř. měření spojité veličiny, neboť díky časové diskrétnosti náběru dat, nikdy nenaměřím dvě stejné hodnoty. V histogramu pak musíme vybírat délku dílčích intervalů. Navíc takto zadefinovaná entropie nepočítá s časovým rozložením členů, tj. entropie, která vzniká složitějším uspořádáním v čase.

3.1.3 Lineární modely časových řad

Níže zmíněné lineární modely využívají bílého šumu jako zdrojového signálu. Jejich složitost se postupně zvětšuje zřejmým způsobem. Pro určení správnosti volené metody musíme porovnávat statistické veličiny č.ř. a modelu. Tyto modely vyžadují stacionaritu č.ř.

Model klouzavého průměru Tento přístup přináší lineární korelace bílého šumu $\sigma_1, \ldots, \sigma_m$, jež produkuje č.ř. $x_1, \ldots, x_n$. Nechť členy č.ř. jsou definovány jako

$$x_t = \sigma_t - \theta_1 \sigma_{t-1} - \theta_2 \sigma_{t-2} \ldots - \theta_q \sigma_{t-q}, \text{ pro } \forall t, \tag{3.6}$$

veličiny $\theta_1, \ldots, \theta_q$ jsou váhy. Model nazýváme klouzavý průměr q-řádu a značíme ho MA(q) z *moving avarage.*

Autoregresní model Nyní využíváme zejména lineárních korelací řady a přidáváme složku bílého šumu $\sigma_1, \ldots, \sigma_m$. Autoregresivní model p-řádu generuje č.ř. $x_1 \ldots, x_n$ jako

$$x_t = \phi_1 x_{t-1} + \phi_2 x_{t-2} + \cdots + \phi_p x_{t-p} + \sigma_t, \text{ pro } \forall t, \tag{3.7}$$

kde $\phi_1, \ldots, \phi_p$ jsou váhy, tento model značíme AR(p) z *autoregressive.*

Model ARMA Zde zakomponováváme oba přístupy předešlých modelů AR(p) a MA(q) odsud název ARMA(q, p). Tento model je pro řadu $x_1, \dots, x_n$ definován jako

$$x_t = \phi_1 x_{t-1} + \phi_2 x_{t-2} + \dots + \phi_p x_{t-p} + \sigma_t - \theta_1 \sigma_{t-1} - \theta_2 \sigma_{t-2} \dots - \theta_q \sigma_{t-q}, \tag{3.8}$$

kde $\phi_1, \dots, \phi_p$ a $\theta_1, \dots, \theta_q$ jsou opět váhy a $\sigma_1, \dots, \sigma_m$ bílý šum. Složitější modely lze konstruovat analogicky, například s exponenciálně se snižujícími váhami apod.

3.2 Nelineární analýza časových řad

Jestliže pomocí lineární analýzy č.ř. nenajdeme uspokojivý model odpovídající našim datům, je možné, že naše data obsahují chaotickou dynamikou, kterou lineární metody nedokážou vysvětlit. Právě na chaotické signály se zaměřuje nelineární analýza, která se opírá o zásadní větu umožňující tento přístup, a to *Takensův teorém*. Díky tomuto teorému má smysl budovat *vektory časového zpoždění*, které jak uvidíme, jsou ekvivalentní fázovým vektorům. Na základě tohoto teorému můžeme pouze z jednoho pozorování, myslíme tím č.ř., zkonstruovat fázovou trajektorii systému. Z této korespondence vychází většina později předvedených metod nelineární analýzy, kdy zakomponováváme vlastnosti fázového prostoru, pro vysvětlení pozorované č.ř. a vice versa.

3.2.1 Stroboskopický graf

Mějme č.ř. $x_1, \dots, x_n$, poté lze sestavit graf, kde na jedné ose budou hodnoty x_t a na druhé $x_{t+\tau}$, kde $n > \tau \in \mathbb{Z}^+$ a vykreslíme všechny body, tj. až na $x_{n+1-\tau}, \dots, x_n$.

Tato grafická metoda je jednoduchá, avšak pro chaotické signály velice výhodná. Lineární analýza využívá této metody pro zachycení závislostí mezi členy řady, jedná se vlastně i o grafickou korelaci. U stochastických č.ř. vidíme spíše roztroušené body, avšak i tak lze usuzovat možné závislosti. Chaotické signály však vykazují rozdílný charakter a to jasně viditelné struktury, které je možné vysvětlit díky existenci fázového portrétu. Graf může pro určité časové posunutí τ představovat průmět fázové trajektorie do dvoudimenzionální roviny.

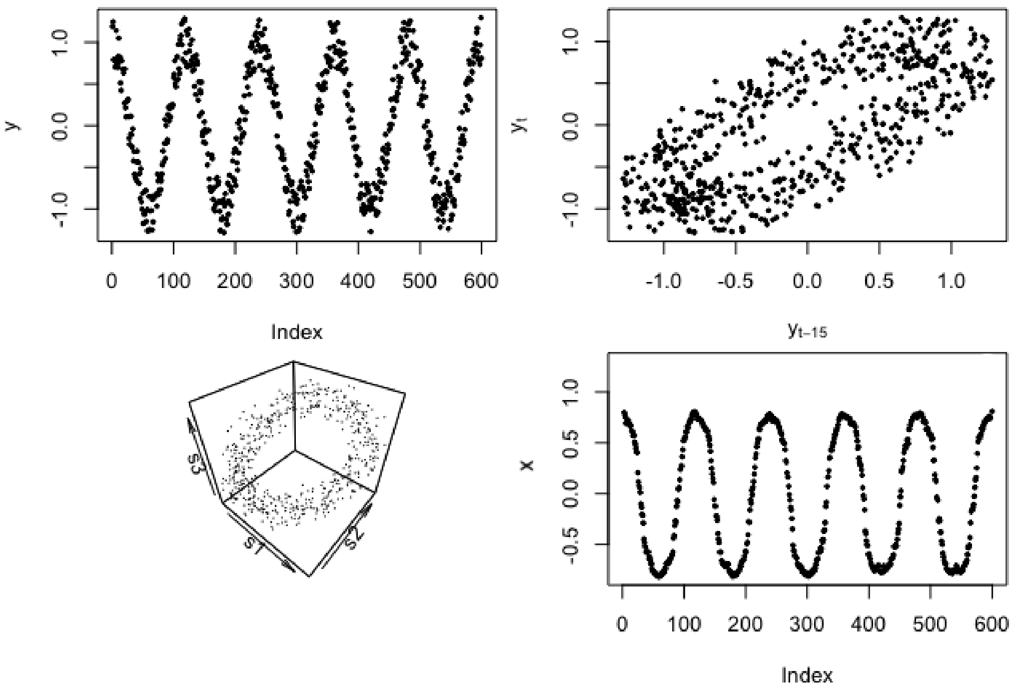
Na Obr. 3.1 lze vidět stroboskopický graf harmonického signálu s 30% šumem, je vidět zřejmá korelace. V závislosti na časovém rozdílu τ se mění tvar korelace, stejně jako průmět kruhu do roviny.

3.2.2 Metoda časových zpoždění a Takensův teorém

Nejdříve zkonstruujeme zpožděné vektory, pomocí metody časových zpoždění a následně představíme znění Takensova toerému, který je ztěžejním předpokladem nelineární analýzy č.ř.

Mějme č.ř. $x_1, \dots, x_n$, poté lze zkonstruovat vektory časového zpoždění $\boldsymbol{s}_1, \dots, \boldsymbol{s}_{n+1-m}$ jako

$$\boldsymbol{s}_t = (x_{t-(m-1)\tau}, x_{t-(m-2)\tau}, \dots, x_{t-\tau}, x_t), \text{ pro } \forall t, \tag{3.9}$$



Obrázek 3.1: Vlevo nahoře č.ř. $\{y_t\}$ nagenerovaná modelem (3.17), vpravo nahoře její stroboskopický graf s posunutím o 15 indexů, v levo dole rekonstrukce fázového portrétu vuyžitím zpožděných vektorů v dimenzi vnoření $m = 3$ s časem zpoždění $\tau = 15$ indexů. V pravo dole vyčištěná č.ř. $\{y_t\}$ pomocí nelineární redukce šumu se stejnými parametry $m = 3$, $\tau = 15$ indexů a $\varepsilon = 0,2$, značíme ji $\{x_t\}$.

kde $m, \tau \in \mathbb{Z}^{+}$ nazýváme *dimenzí vnoření* resp. *časovým zpožděním.* Je nutné nalézt vhodné parametry m a τ, dimenzi vnoření volíme větší nebo rovnu dimenzi fázového prostoru dynamického systému. Dostatečnou dimenzi lze odhadnout pomocí *metody nepravých sousedů*, níže. Jako vhodné časové zpoždění se uvažuje čas, při kterém v autokorelační funkci (3.1) získáme první nulu. Dalším dobrým odhadem je čtvrtina periody.

Pouze volně vyřkněme tvrzení Takensova teorému. Ten praví, že za dosti obecných podmínek je dynamika opisovaná vektorem (3.9) shodná s dynamikou stavového vektoru ve fázovém prostoru. Rekonstruovaný atraktor je topologicky ekvivalentní se skutečným atraktorem dynamického systému. Celé znění a důkaz věty může čtenář nalézt např. v [11]. Připomeňme, že topologická ekvivalentnost znamená, že existuje bijektivní spojitě invertibilní zobrazení, které zobrazuje jeden fázový portrét (atraktor) na druhý.

Využijeme-li metodu časového zpoždění na harmonický signál (3.17) s výsledkem na Obr. 3.1, můžeme vidět tórus, analogicky zkonstruovaný jako stroboskopický graf, který je právě průmět tohoto útvaru do roviny. Proto lze chápat metodu časového zpoždění jako zobecněním korelace – stroboskopického grafu.

3.2.3 Metoda nepravých blízkých sousedů

Tato metoda, volně přeložena z anglického *false nearest neighbours*, se zabývá výběrem dimenze vnoření při metodě časových zpoždění. Máme-li atraktor popisující dynamiku chaotického systému, poté existuje nejmenší dimenze, ve které lze stále kompletně popsat. Pro numerické výpočty je výhodné zvolit právě nejmenší dimenzi, na druhou stranu pro zajištění lepší funkce některých algoritmů se hodí vyšší dimenze proložení. V každém případě znalost dimenze dynamického systému je požadovanou informací pro ověření původu procesu.

Představme si situaci, kdy náš systém je stále relevantně popsán v nejmenší možné dimenzi m. Snížíme-li dimenzi pro popis a budeme rekonstruovat fázový portrét v dimenzi $m-1$, tak provádíme projekci do roviny dimenze $m-1$. Tedy body fázového prostoru jež byly v dimenzi m od sebe daleko, se mohou díky projekci objevit bezprostředně u sebe. Tohoto můžeme využít tak, že budeme sledovat vzdálenosti blízkých zpožděných vektorů $\boldsymbol{s}_k^{m-1}$ a $\boldsymbol{s}_{p(k)}^{m-1}$ v dimenzi $m-1$ a poté se koukneme na vzdálenost obou vektorů $\boldsymbol{s}_k^{m}$ a $\boldsymbol{s}_{p(k)}^{m}$ v dimenzi m. Pokud se ukáže, že vzdálenost se zvětšila, nasvědčuje to tomu, že dimenze $m-1$ byla nedostatečná pro popis dynamického systému. Tuto statistiku musíme spočítat pro velký počet zpožděných vektorů. Vektory, které byly blízké v dimenzi $m-1$, ale jsou dále v dimenzi m, označujeme jako *nepravé blízké sousedy.*

Nechť je č.ř. $x_1, \dots, x_n$ a proložíme ji zpožděnými vektory $\boldsymbol{s}_1, \dots, \boldsymbol{s}_{n+1-m}$. Mějme pro vektor $\boldsymbol{s}_k^{m-1}$ nejbližší vektor $\boldsymbol{s}_{p(k)}^{m-1}$, který je minimem $\|\boldsymbol{s}_k^{m-1} - \boldsymbol{s}_l^{m-1}\|$ pro $l \in \{1, \dots, n+1-m\} \setminus \{k\}$. Označme $\hat{\sigma}$ směrodatnou odchylku č.ř. x_t, poté lze zapsat veličinu zachycující procentuální počet nepravých sousedů při přechodu z dimenze

$m-1$ do dimenze m jako

$$X_{fnn}(r) = \frac{\sum_{k=1}^{n+1-m} \Theta\left(\frac{\|\boldsymbol{s}_k^m - \boldsymbol{s}_{p(k)}^m\|}{\|\boldsymbol{s}_k^{m-1} - \boldsymbol{s}_{p(k)}^{m-1}\|} - r \right) \Theta\left(\frac{\hat{\sigma}}{r} - \|\boldsymbol{s}_k^{m-1} - \boldsymbol{s}_{p(k)}^{m-1}\| \right)}{\Theta\left(\frac{\hat{\sigma}}{r} - \|\boldsymbol{s}_k^{m-1} - \boldsymbol{s}_{p(k)}^{m-1}\| \right)}, \tag{3.10}$$

kde r je parametr, na kterém je daná metoda závislá a $\|.\|$ je norma v $\mathbb{R}^m$, resp. $\mathbb{R}^{m-1}$. První Heavisideova funkce v čitateli postihuje, kolikrát jsou od sebe dál zpožděné vektory ve větší dimenzi než faktor r. Druhá Heavisideova funkce nuluje členy, které nejsou dostatečně blízko, tj. blíž než směrodatná odchylka škálována $\sim 1/r$. Když budeme zmenšovat parametr r, bude přibývat i nepravých blízkých sousedů, proto se zvětšuje $\frac{\hat{\sigma}}{r}$, aby byl tento efekt kompenzován. Člen ve jmenovateli (3.10) je normalizací.

Až se změnou dimenze bude procento nepravých blízkých sousedů malé, jsme si jisti, že daná dimenze je dostatečná. Pro účely snazšího určení minimální dimenze se znázorňuje graficky závislost (3.10) na dimenzi proložení m.

3.2.4 Rekurentní graf

Dalším graficky jednoduchým nástrojem je tzv. *rekurentní graf*. Mějme řadu zpožděných vektorů $\boldsymbol{s}_1, \ldots, \boldsymbol{s}_n$ z (3.9), poté můžeme definovat matici

$$\boldsymbol{M}_{i,j} = \Theta(\varepsilon - \|\boldsymbol{s}_i - \boldsymbol{s}_j\|), \tag{3.11}$$

kde $\Theta(x)$ je Heavisideova funkce, $\|.\|$ je použitá norma $\varepsilon > 0$ je parametr. Tuto symetrickou matici $\boldsymbol{M} = (m_{i,j})$ lze graficky znázornit, např. bude-li člen $m_{i,j} = 1$ poté v síti $n \times n$ na i, j souřadnici udělámé černý bod, bude-li $m_{i,j} = 0$ uděláme bílý bod. Poté vizuálně můžeme vidět struktury a například opakující se cykly, proto rekurentní graf. Navíc je možné vylepšit danou metodu tím, že spojitě bude souviset odstín v bodě s příslušnou vzdáleností daných zpožděných vektorů.

Právě vylepšenou variantu této metody lze vidět na Obr. 3.2, nebo 3.3, kde je rekurentní graf signálu z modelu (3.17), resp. rekurentní graf bílého šumu z modelu (3.17). Pokud by byl harmonický signál z daného modelu uplně bez šumu, viděli bychom v rekurentním grafu kosodelníkovou mříž. Vídíme, že bílý šum má při této reprezentaci podobnou formu jako šum v televizi, naopak oproti struktuře z modelu (3.17).

3.2.5 Předpovědi jednoduchým nelineárním algoritmem

Jeden ze základních cílů analýzy č.ř. jsou předpovědi. Zde využijeme předpokladu, že č.ř. je generována procesem řídící se chaotickou dynamikou a je platný Takensův teorém.

U č.ř. $x_1, \ldots, x_n$ tedy chceme předpovědět člen $x_{n+\Delta n}$, který je Δn realizací v budoucnosti. Sestavme příslušné zpožděné vektory $\boldsymbol{s}_1, \ldots, \boldsymbol{s}_{n+1-m} \in \mathbb{R}^m$ (značme $k = n+1-m$), zvolme časové zpoždění τ. Musíme sestrojit *ε-okolí bodu $\mathcal{U}_\varepsilon(\boldsymbol{s}_k)$*, definujme ho obecně jako

$$\mathcal{U}_\varepsilon(\boldsymbol{x}) = \left\{ \boldsymbol{y} \in \mathbb{R}^m; \quad \|\boldsymbol{x} - \boldsymbol{y}\| < \varepsilon \right\}, \tag{3.12}$$

kde $||.||$ je libovolná norma. Nyní máme všechny vektory $\boldsymbol{s}_l \in \mathcal{U}_\varepsilon(\boldsymbol{s}_k)$. Podívejme se, jak se vyvíjel jejich stav, a tím i složky x_l, jejichž vývoj $x_{l+\Delta n}$ zprůměrujeme. Náš odhad je

$$\hat{x}_{n+\Delta n} = \frac{1}{|\mathcal{U}_\varepsilon(\boldsymbol{s}_k)|} \sum_{\boldsymbol{s}_l \in \mathcal{U}_\varepsilon(\boldsymbol{s}_k)} x_{l+\Delta n}, \tag{3.13}$$

kde $|\mathcal{U}_\varepsilon(\boldsymbol{s}_k)|$ je počet vektorů $\boldsymbol{s}_l \in \mathcal{U}_\varepsilon(\boldsymbol{s}_k)$, parametr ε je volný parametr.

3.2.6 Jednoduchá nelineární redukce šumu

Všechny experimentální data obsahují vlivy šumu, předpokládejme, že měřený signál $y_1, \ldots, y_n$ je superpozicí

$$y_t = x_t + \sigma_t \text{ pro } \forall t \tag{3.14}$$

zdrojového signálu $\{x_t\}$ a slabého šumu $\{\sigma_t\}$. Chtěli bychom odhadnou z měřené č.ř. členy zdrojového signálu. Sestrojme vektory $\boldsymbol{s}_t = (y_{t-(m-1)\tau}, y_{t-(m-2)\tau}, \ldots, y_{t-\tau}, y_t)$, nyní pro každý vektor $\boldsymbol{s}_t$ sestavme ε-okolí $\mathcal{U}_\varepsilon(\boldsymbol{s}_t)$, všechny vektory $\boldsymbol{s}_l \in \mathcal{U}_\varepsilon(\boldsymbol{s}_t)$ využijeme jako platformu pro středování. Hodnotu

$$\hat{x}_{t-m/2} = \frac{1}{\mathcal{U}_\varepsilon(\boldsymbol{s}_t)} \sum_{\boldsymbol{s}_l \in \mathcal{U}_\varepsilon(\boldsymbol{s}_t)} y_{t-m/2} \tag{3.15}$$

chápeme jako odhad skutečného signálu, číslo $|\mathcal{U}_\varepsilon(\boldsymbol{s}_t)|$ je počet vektorů $\boldsymbol{s}_l \in \mathcal{U}(\boldsymbol{s}_t)$. Provedeme daný algoritmus, pro všechny $\forall t$. Tato metoda je opět netriviálně závislá na parametru ε.

Výsledek použití redukce šumu na č.ř. z modelu (3.17) je na Obr. 3.1, dimenze vnoření byla $m = 3$, čas zpoždění $\tau = 15$ a $\varepsilon = 0,2$.

3.2.7 Odhad Ljapunova exponentu

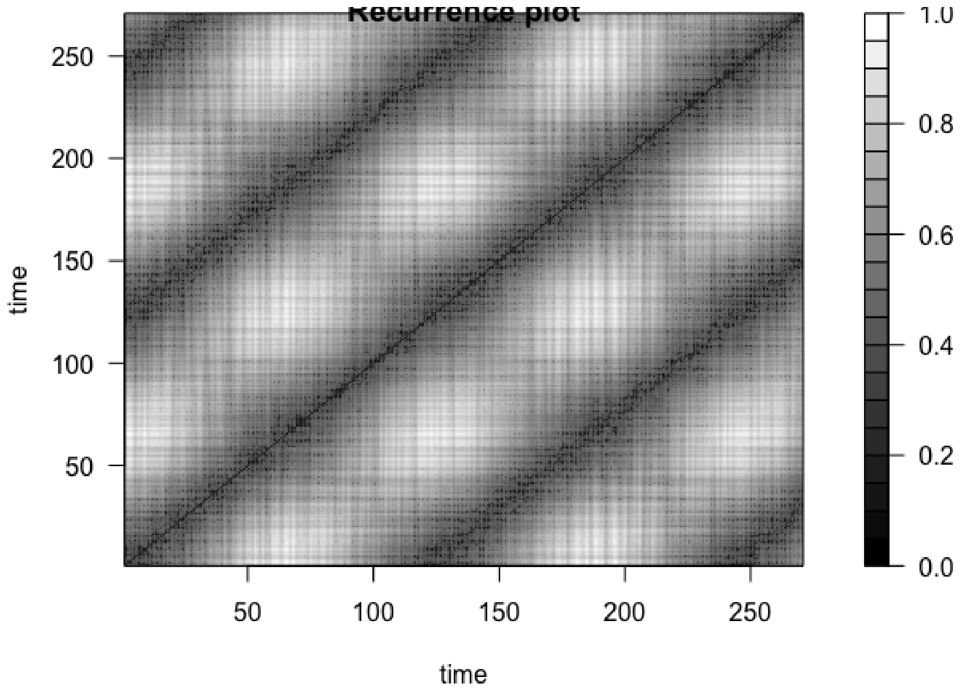
Jelikož je nelineární analýza koncipovaná pro použití na č.ř. z měření chaotických systému a z č.ř. lze sestavit fázovou trajektorii pomocí zpožděných vektorů, je možné odhadnout Ljapunovův exponent atraktoru.

Mějme č.ř. $x_1, \ldots, x_n$ a příslušné zpožděné vektory $\boldsymbol{s}_1, \ldots, \boldsymbol{s}_{n+1-m} \in \mathbb{R}^m$ se zvolenou dimenzí vnoření m a časovým zpoždění τ. Zvolme nyní část zpožděných vektorů $\boldsymbol{s}_{n_1}, \boldsymbol{s}_{n_2}, \ldots, \boldsymbol{s}_{n_l}$ a k jednotlivým vektorům jejich ε-okolí v $\mathbb{R}^m$, tj. máme navíc $\mathcal{U}_\varepsilon(\boldsymbol{s}_{n_1}), \mathcal{U}_\varepsilon(\boldsymbol{s}_{n_2}), \ldots, \mathcal{U}_\varepsilon(\boldsymbol{s}_{n_l})$. Poté lze získa funkci $S(\Delta n)$ postihující průměrný vývoj vzdáleností $\boldsymbol{s}_{n_1}, \boldsymbol{s}_{n_2}, \ldots, \boldsymbol{s}_{n_l}$ od vektorů z jejich ε-okolí jako

$$S(\Delta n) = \frac{1}{l} \sum_{\boldsymbol{s}_{n_i}} \ln\left(\frac{1}{|\mathcal{U}_\varepsilon(\boldsymbol{s}_{n_i})|} \sum_{\boldsymbol{s}_k \in \mathcal{U}_\varepsilon(\boldsymbol{s}_{n_i})} |x_{n_i+\Delta n} - x_{n+\Delta n}| \right), \tag{3.16}$$

kde $|\mathcal{U}_\varepsilon(\boldsymbol{s}_{n_i})|$ je počet vektorů v ε-okolí bodu $\boldsymbol{s}_{n_i}$.

Proložením závislosti funkce $S(\Delta n)$ na Δn lineární funkcí $\hat{\lambda}\Delta n$ lze získat odhad Ljapunova exponentu $\hat{\lambda}$.



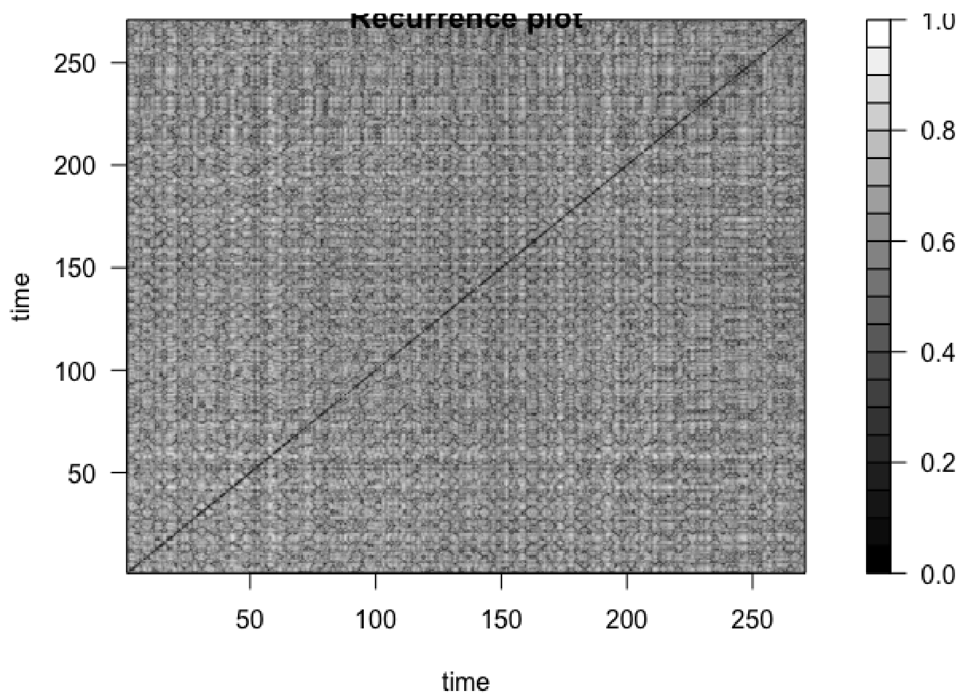
Obrázek 3.2: Rekurentní graf č.ř. z modelu (3.17) pro vektory s indexi 0-300 v dimenzi vnoření $m = 3$ a časem zpoždění $\tau = 15$ indexů.

3.2.8 Ilustrativní příklad

Pro ilustrativní účely jsem nageneroval č.ř. $y_1, \ldots, y_{600}$, pro $\forall t \in 1, \ldots, 600$ jako

$$y_t = \cos\left(\frac{\pi t}{80}\right) + \sigma_t, \tag{3.17}$$

kde $\sigma_t \in (-0,3; 0,3)$ je bílý unifromní šum. Tuto č.ř. lze vidět na Obr. 3.1.



Obrázek 3.3: Rekurentní graf bílého šumu z modelu (3.17) pro vektory s indexi 0-300 v dimenzi vnoření $m = 3$ a časem zpoždění $\tau = 15$ indexů.

Kapitola 4

Použitá aparatura a vzorky pro analýzu

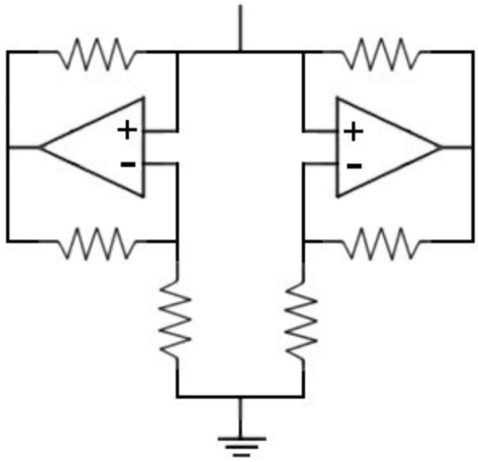
V rámci práce byl sestrojen chaotický oscilační *Chuoův obvod*. Díky odečítání osciloskopem jsme schopni získat chaotický signál resp. č.ř. Dále bylo provedeno měření šumu na Zenerově tunelové diodě a odporu pro pozdější srovnání obou signálů. Byla také vygenerována náhodná čísla z kvantového generátoru náhodných čísel – Quantis. Od výrobce šumových diodových generátorů náhodných čísel, byla poskytnuty surová data, tj. data bez dalšího zpracování. Všechny signály budou srovnány v praktické části této práce.

4.1 Chuoův chaotický oscilační obvod

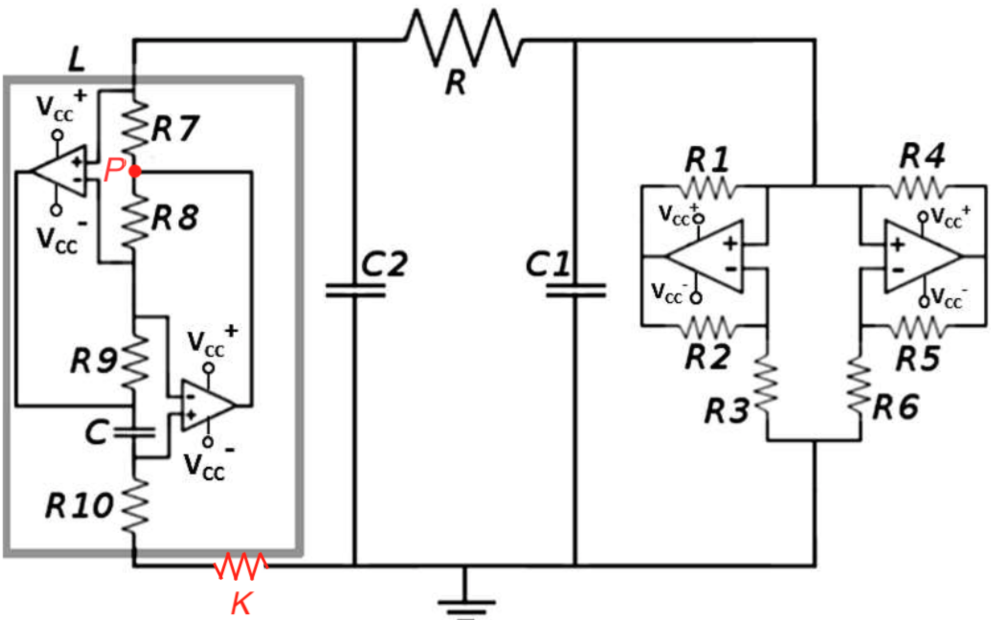
Tento obvod nese jméno svého vynálezce Leona O. Chua, který ho sestrojil v roce 1983, za účelem propagace Teorie chaosu a jedná se o jeden z nejjednodušších chaotických obvodů. Skládá se pouze z jednoho nelineárního prvku, a to *Chuovi diody*.

4.1.1 Chuova dioda

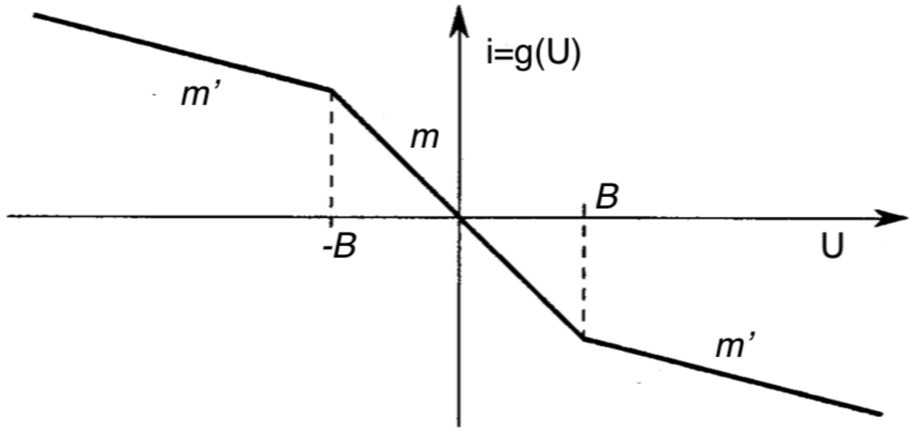
Schéma diody je na Obr. 4.1, kde můžeme vidět šest odporů a dva operační zesilovače – aktivní prvky. Součástky diody zatím nejsou specifikovány, protože se volí v závislosti na celkovém obvodu. Volt-ampérová charakteristika Chuovi diody je na Obr. 4.3, kde můžeme vidět po částech lineární funkci $g = g(U)$, kterou ztotožníme s funkcí (2.26). Z obrázku lze vidět, že m' resp. m je směrnice závislosti $i = g(U)$ na příslušných intervalech funkce a $\pm B$ jsou tzv. zlomové body. Korespondence konstant bude vysvětlena dále.



Obrázek 4.1: Schéma Chuovi diody s šesti odpory a dvěma operačními zesilovači. [12]



Obrázek 4.2: Schéma Chuova obvodu, L značí tzv. *gyrátor*, tuto část jsme nahradily cívkami v sérii z Tab. 4.3. Použité rezistivity R, kondenzátory C jsou v Tab. 4.1 resp. Tab. 4.2, P značí bod ve kterém se měří proud I, K značí přidaný potenciometr oproti původnímu návrhu ze zdroje [12].



Obrázek 4.3: Volt-ampérová charakteristika Chuovi diody, m, m' jsou příslušné směrnice a $\pm B$ jsou zlomové body. [13]

Rezistor	R [Ω]
R	0-2500
R_1	220
R_2	220
R_3	2200
R_4	22000
R_5	22000
R_6	3300
K	0-2500

Tabulka 4.1: Odpory z Chuova obvodu Obr. 4.2, rozsah hodnot značí, že daný odpor je potenciometrem.

Kondenzátor	C [nF]
C	100
C_1	10
C_2	100

Tabulka 4.2: Kondenzátory z Chuova obvodu z Obr. 4.2.

4.1.2 Chuoův obvod

Schéma celého obvodu i s diodou je na Obr. 4.2 a parametry jednotlivých elektronických komponentů v Tab. 4.1 a 4.2, namísto *gyrátoru* jsem použil tři cívky v sérii z Tab. 4.3, operační zesilovače jsou TL082. Tento obvod vykazuje chaotické chování, protože fázové přoměnné U_1 – napětí na kondenzátoru C_1, U_2 – napětí na kondenzátoru C_2 a I – proud v bodě P (Obr. 4.2) lze modelovat pomocí diferenciáních rovnic (2.25). Fázové proměnné souvisejí s proměnnými modelu (2.25) jako

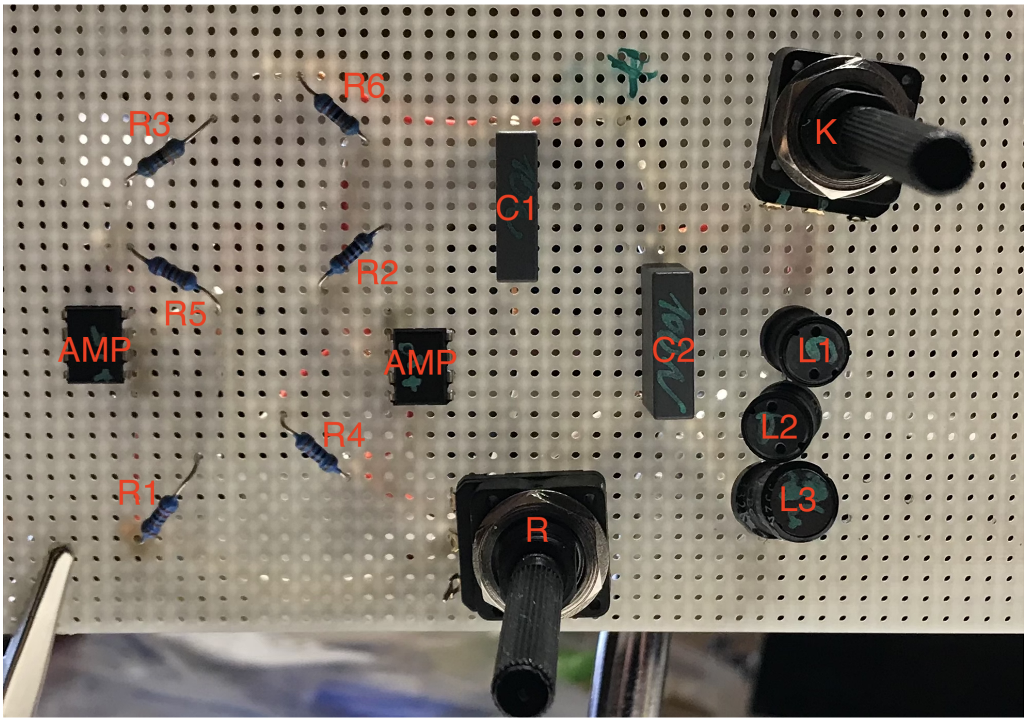
$$x = \tfrac{U_1}{B}, \;\; y = \tfrac{U_2}{B}, \;\; z = \tfrac{R}{B} I \tag{4.1}$$

$$\alpha = \tfrac{C_2}{C_1}, \;\; ,\beta = \tfrac{R^2 C_2}{L}, \;\; a = Rm', \;\; b = Rm, \tag{4.2}$$

kde navíc konstanty B, m, m' charakterizují chování Chuovy diody, jehož volt-ampérová charakteristika je na Obr. 4.3.

Cívka	L [mH]	R [Ω]
L_1	6,8	9,0
L_2	6,8	9,0
L_3	3,3	5,7

Tabulka 4.3: Cívky použité v sérii v Chuově obvodu namísto *gyrátoru* z Obr. 4.2.

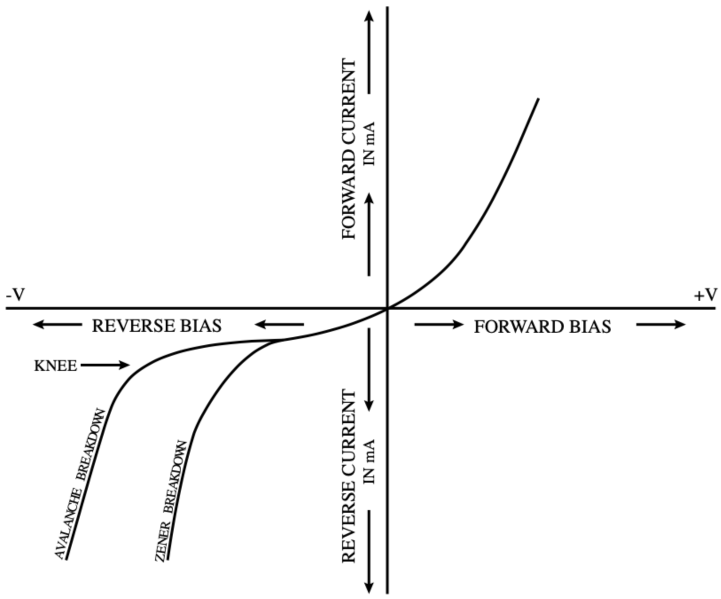


Obrázek 4.4: Sestavený Chuoův obvod.

4.1.3 Sestavení obvodu

Součástky z Tab. 4.1, 4.2 a 4.3 jsem napájel na pájivé pole podle schématu z Obr. 4.2, výsledek lze vidět na Obr. 4.4. Oproti návrhu ze zdroje [12] jsem připojil navíc potenciometr K, a to zdůvodu větší variability parametrů při produkci č.ř. Měřil jsem osciloskopem RIGOL DS1102D napětí na kondezátoru C_1 a C_2 zároveň.

Dále jsem oproti návrhu nesestavoval tzv. *gyrátor*, který se doporučuje sestavit, pokud nejsme schopni zakoupit cívku s parametry indukčnosti okolo 18 mH a odporem menším než 30Ω. Avšak sériově zapojené cívky z Tab. 4.3 takové parametry splňují, tudíž nebylo nutné *gyrátor* stavět. Jako stejnosměrný zdroj jsem použil GETI PS3003. Produkované č.ř. a z nich zrekonstruovaný podivný atraktor typu „dvojitý svitek“ lze vidět v praktické části této práce.



Obrázek 4.5: Volt-ampérová charakteristika Zenerovi diody. [14]

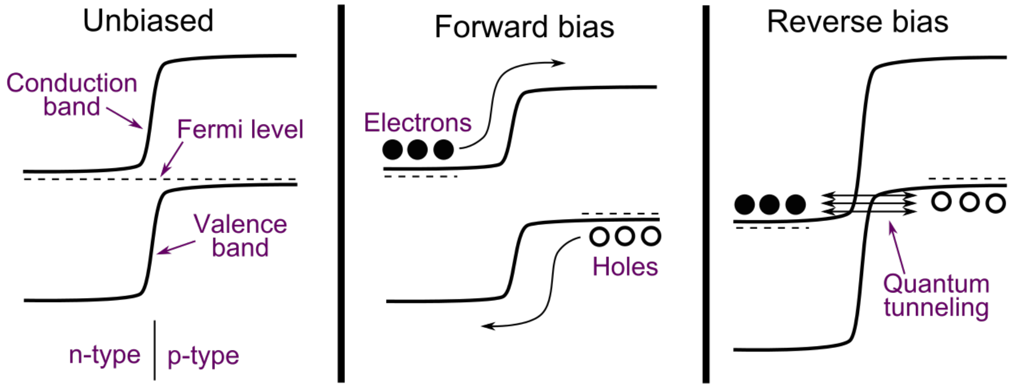
4.2 Zenerova dioda

Nejdříve si popišme základní vlastnosti Zenerovi tunelové diody a poté představím obvod, kterým byl měřen šum na této diodě v závěrném směru a na odporu. Srovnání obou šumů by mělo poukázat na rozdílný charakter, neboť dochází k tunelovému jevu nábojů v závěrném směru Zenerovi diody. Tunelový jev viz. podkapitola 1.3.1.

Zenerova dioda je silně dopovaný PN přechod, který je konstruovaný především ke stabilizaci napětí s použití v závěrném směru blízko průrazného napětí, neboť průraz nepoškozuje diodu. Díky silnému dopování je vyprázdněná oblast úzká, což umožňuje elektronům tunelovat skrze vyprázdněnou oblast diody i do klasicky zakázaných oblastí.

Volt-ampérová charakteristika Zenerovy diody Na Obr. 4.5 můžeme v závěrném směru vidět dva typy průrazu Zenerovi diody. *Avalanche breakdown*, neboli lavinový průraz, souvisí s rozdílem napětí takovým, že elektrony získají dostatečnou energii k vytvoření páru elektron-díra ve vyprázdněné oblasti. Tyto nové nosiče náboje jsou opět urychlovány napětím a tvoří další páry, což způsobuje náhly nárůst proudu.

Zener breakdown, tedy Zenerův průraz, je způsoben tunelováním velkého počtu nosičů náboje. Jak lze vidět na Obr. 4.6, kde na vertikální ose je energie nosičů náboje (energie elektronu roste směrem nahoru, díry naopak) a na horizontální ose je pozice v PN přechodu. V prvním případě, při nulovém napětí – *unbiased*, je viditelný rozdíl v energiích vodivostních pásů, kvůli rekombinace nábojů na hranici polovodičů typu P a N. Pokud zapojíme diodu v propustném směru – *forward bias*, tento rozdíl se zmenší, a o to více elektronů projde i s nižšími kinetickými energiemi než v prvním případě. V závěrném směru – *reverse bias* se však objevu nový jev, a to tunelování elektronů. Čím se zvětšuje napětí v závěrném směru, tím se vzdalují vo-



Obrázek 4.6: Diagram znázorňující vodivostní pásy elektronů resp. děr v Zenerově diodě, při nulové napětí – *unbiased*, při napětí v propustném směru – *forward bias* a v závěrném směru – *reverse bias*. Horizontální osa znázorňuje energii nosičů náboje, kdy energie děr roste směrem dolů, elektronů naopak. Horizontální osa odpovídá prostorové souřadnici v PN přechodu. [18]

divostní pásy částí polovodičů typu P a N ve vertikálním směru pro elektrony, resp. díry, avšak efektivně se tím zmenšuje bariéra v horizontálním směru. To dovoluje vlnové funkci elektronů zasahovat do zakázaných oblastí vázaných děr v polovodiči typu P, a tím posléze statisticky tunelovat. Tento jev se nazývá *Zenerův jev.*

V Zenerově diodě přispívají k proudu v závěrném směru oba jevy, tedy Zenerův jev a ionizace vyprázdněné oblasti, tedy jev principiálně zodpovědný za lavinový průraz. Zapojením Zenerovy diody v závěrném směru blízko *Zenerova napětí* (hranice, od které nastává Zenerův průraz) můžeme měřit fluktuace proudu způsobeného zejména tunelovým jevem.

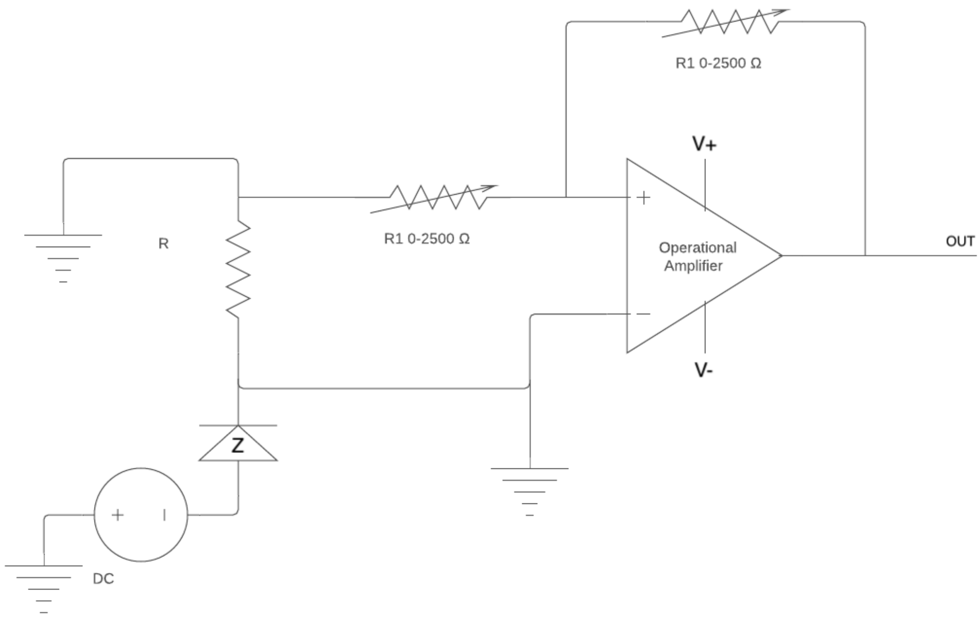
4.2.1 Sestavení měřícího obvodu

Pro měření zesílených fluktuací proudu na Zenerově diodě jsem ji spojil s odporem R podle Obr. 4.7. Jelikož proud je svázán s napětím na odporu podle Ohmova zákona, měříme na Obr. 4.7 napětí, které se však liší oproti proudu pouze škálováním. Zapojil jsem potenciometry pro lepší adjustaci obvodu v závislosti na získaných datech z osciloskopu. Optimální velikost odporu R bude také experimentálně zjištěna.

4.3 Kvantový generátor náhodných čísel – Quantis

Kompaktní kvantový generátor Quantis od společnosti ID Quantique v usb provedení lze vidět na Obr. 4.8. Tento generátor zakoupený fakultou využívá principu odrazu fotonů na polopropustném děliči svazku, viz podkapitola 1.3.2.

Produkovaná č.ř. kvantovým procesem dělení fotonů není již dále postprocesována, až na fakt, že po každé jedné nagenerované hodnotě se události průchodu – ztotožněné s "1"a odrazu – ztotožněné s "0"prohodí. Tato deterministická variace by však neměla mít vliv na ryzost stochastické č.ř.



Obrázek 4.7: Obvod použitý pro měření fluktuací napětí na Zenerově diodě Z, výstup OUT značí místo, kde se odečítalo napětí vůči zemi.

Obrázek 4.8: Kompaktní kvantový generátor náhodných čísel – Quantis.

4.4 Data z šumové diody

Od výrobce, který nechce být jmenován, jsem získal surová data z měření šumu na diodě, komerečně prodávané jako generátor náhodných čísel. Tyto surová data jsou tedy ne-postprocesovaná extraktory nahodilosti apod., oproti výrobku, který postprocesing vyžaduje. Mě poskytnutá data mají milion hodnot časově uspořádaných měření šumu, odpovídající bílému Gaussovskému šumu s jemnými korelacemi. Hodnoty jsou celočíselné v rozmezí 0 až 1023.

Kapitola 5

Praktická část

V této části použijeme lineární i nelineární metody analýzy časových řad na získané signály, viz předešlá kapitola. Srovnáme jejich charakteristiky a okomentujeme experimentální aparaturu. Analýza č.ř. byla provedena ve statistickém programu R project, využívaný zejména pro statistické výpočty a grafické vykreslování.

5.1 Časové řady z měření Chuova obvodu

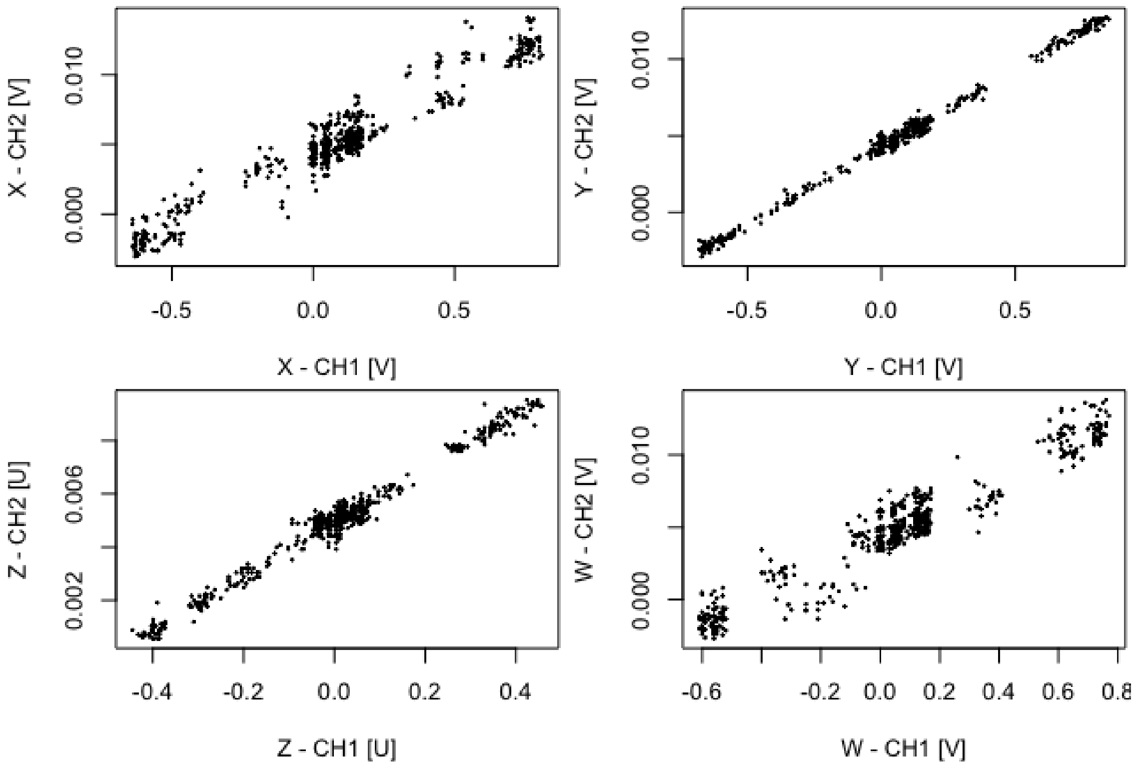
Měření bylo prováděno dvěma sondami připojených k osciloskopu RIGOL DS1102D. První sonda (CH1) však měla nastavenou 10x atenuaci signálu, která nešla přepnout, proto je signál slabý. Tyto sondy měřily napětí U_1 a U_2 na kondenzátorech C_1 a C_2.

Nejdříve srovnámé čtyři signály a poté z nich vybereme jeden, na kterém provedeme důkladnější analýzu. Nejsou prezentovány závěry všech metod pro čtyři signály, neboť ve většině případů nešlo metodami tyto signály rozlišit.

5.1.1 Srovnání čtyř signálu pro různá nastavení parametrů

Po mnoha nastaveních parametrů Chuova obvodu, tj. odpor potenciometrů R, K a napětí na operačních zesilovačích, jsem vybral čtyři zajímavé případy pro srovnání vlastností generovaných signálů. Tyto vybraná měření jsou následující:

- X – ideální parametry dle zdroje [12], tj. R = 2,5 kΩ, K= 0 Ω a napětí na oper. zesilovačích 9 V.
- Y – narušené nastavení, R = 0 Ω, K= 0 Ω a napětí na oper. zesilovačích 9 V.
- Z – narušené nastavení, R = 0 Ω, K= 2,5 kΩ a napětí na oper. zesilovačích 7,5 V.
- W – narušené nastavení pouze v příkonu oper. zesilovačů, tj. R = 2,5 kΩ, K= 0 Ω a napětí na oper. zesilovačích 7 V.



Obrázek 5.1: Korelace kanálů CH1 a CH2 při měření Chuova obvodu X, Y, Z, W.

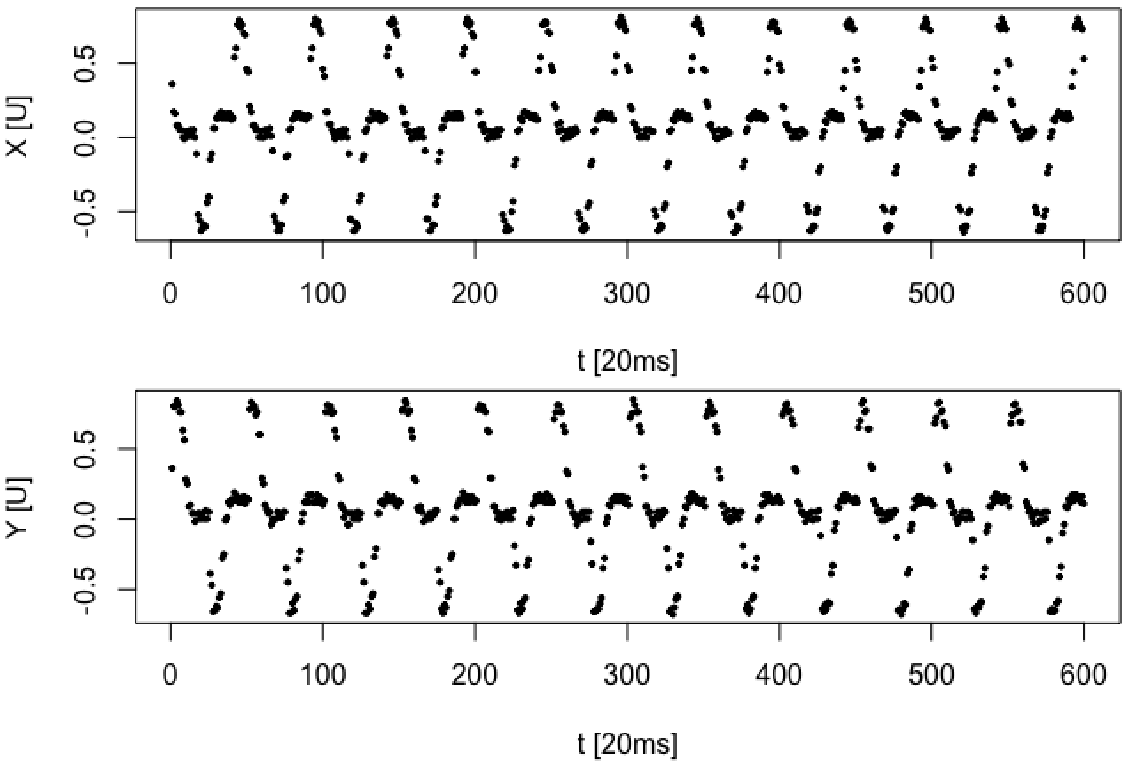
Všechny připady byly samplovány s 20 ms rozestupy po 600 hodnotách. Na Obr. 5.1 lze vidět měření na prvním kanálu CH1 vůči druhému kanálu CH2 pro všechny čtyři měření X, Y, Z, W. Je možné vidět problémy s rozlišením, kdy vznikají rastrovací struktury.

Jelikož obě napětí mají být popsány dif. rovnicemi (2.26), které dávájí vzniku podivného atraktoru typu „dvojitý svitek“ ve třech dimenzích, tak jsou příslušné grafy na Obr. 5.1 projekcí tohoto atraktoru do roviny $U_1 \times U_2$. U měření X a W vidíme prostorovou rozložitost korelací obou kanálů, tedy napětích na kondenzátorech, avšak u měření Y, Z vidíme spíše lineární závislost s určitými výnamnými oblastmi na krajích a uprostřed.

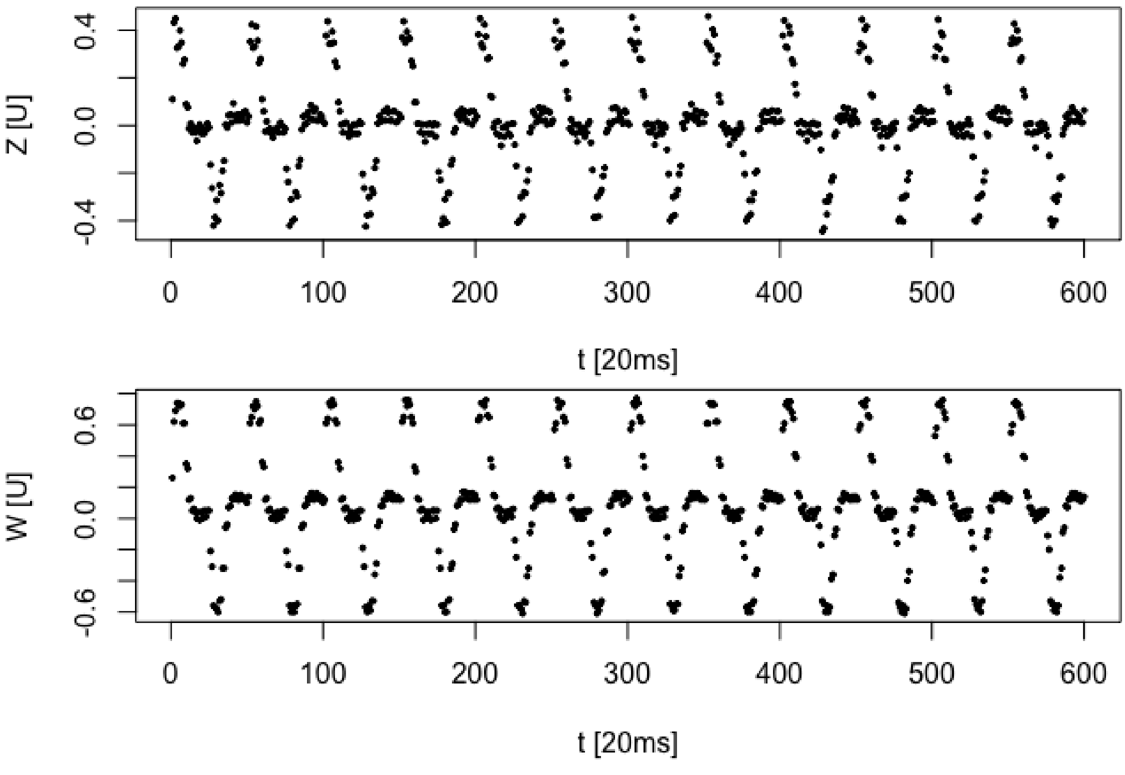
Pro naše další potřeby nám však stačí pouze jedna č.ř. Vybral jsem tedy signál z druhého kanálu (CH2) pro měření X, Y, Z, W a tyto č.ř. jsem označil x_t, y_t, z_t, w_t. Č.ř. můžeme vidět na Obr. 5.2 a 5.3, přislušné histogramy s 70 intervaly jsou v příloze na Obr. A.1.

V Tab. 5.1 můžeme vidět vypočtené hodnoty amplitudy A, průměru $\hat{x}$, rozptylu $\hat{\sigma}^2$ a entropie $\hat{H}$, která byla dopočtena pomocí histogramů. Amplitudou A myslíme poloviční vzdálenost maximální a minimální hodnoty signálu.

Pro č.ř. $\{x_t\}$, $\{y_t\}$, $\{z_t\}$, $\{w_t\}$ nyní ukažme stroboskopické grafy na Obr. 5.4 s časovým posunutím o 5 indexu, tj. o 100 ms. Je zajímavé, že pro všechny nastavení parametrů stále vidíme obrazec připomínající průmět atraktoru, i když tomu tak není při korelaci signálů z kanálu CH1 a CH2 na Obr. 5.1. Variací posunutí ve stroboskopickém grafu můžeme generovat různé struktury, které se periodicky opakují, tento princip bude ukázán u tří-dimenzionálních grafů zpožděných vektorů jednoho ze signálů v následující podkapitole.



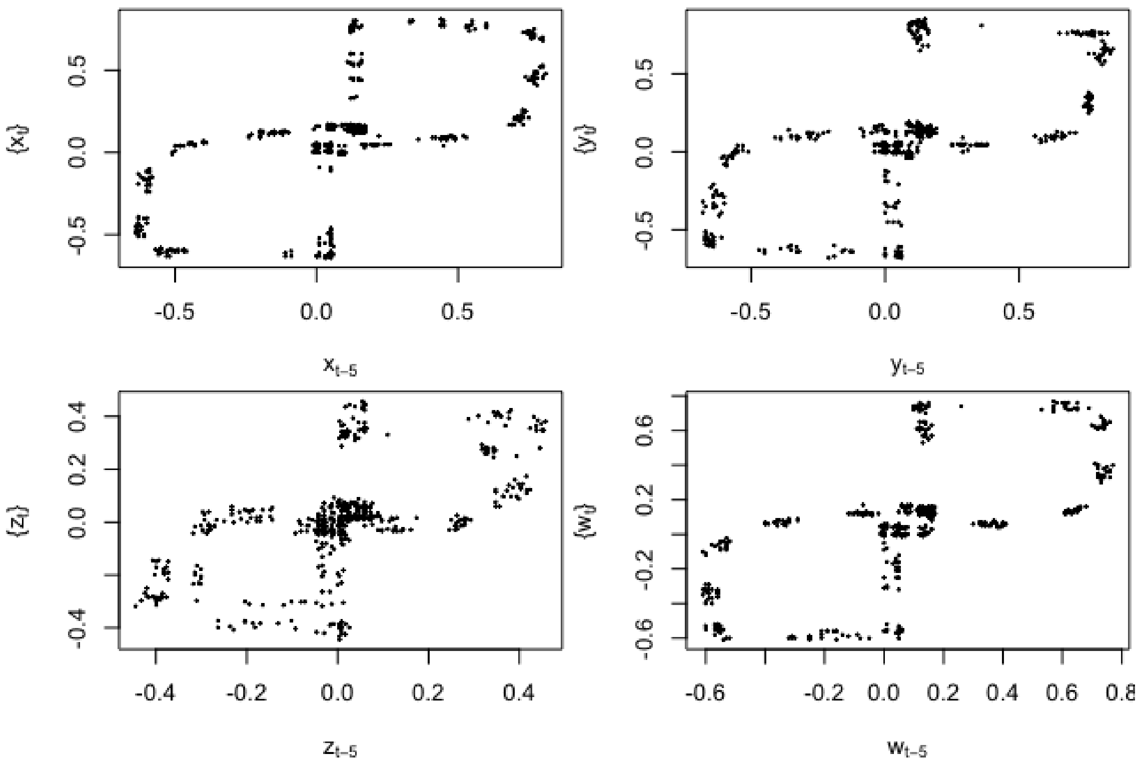
Obrázek 5.2: Č.ř. $\{x_t\}$, $\{y_t\}$ z druhého kanálu měření X resp. Y Chuova obvodu.



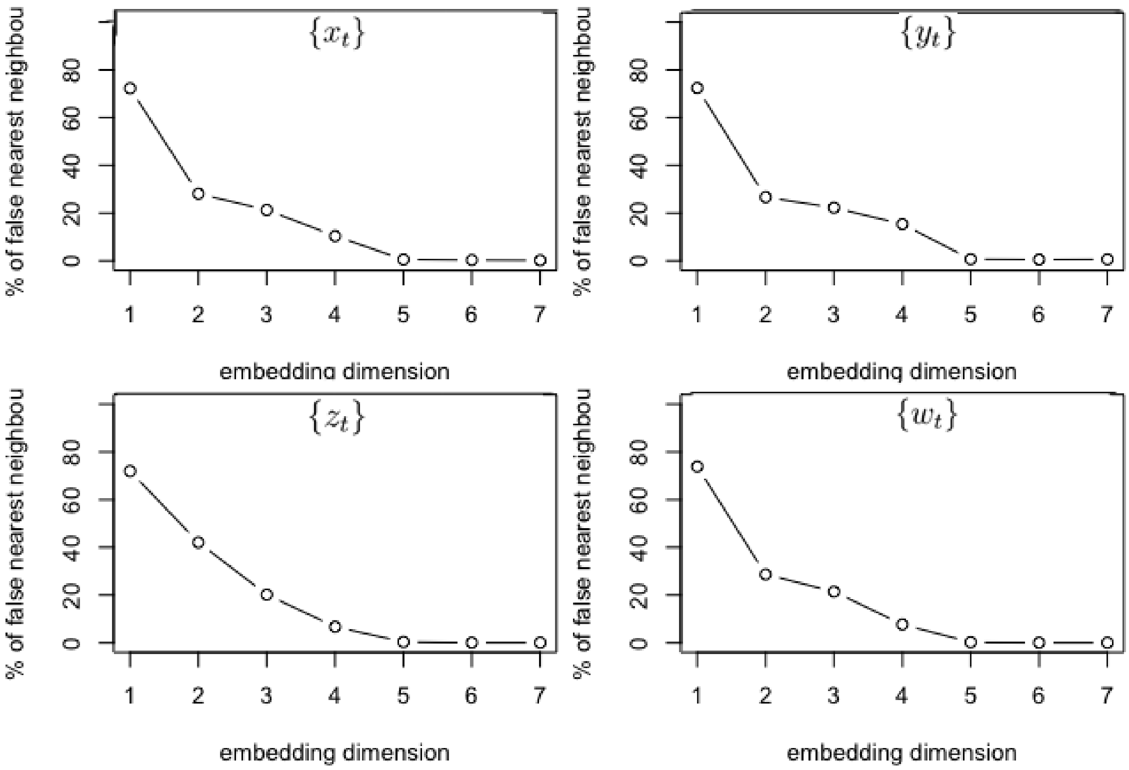
Obrázek 5.3: Č.ř. $\{z_t\}$, $\{w_t\}$ z druhého kanálu měření Z resp. W Chuova obvodu.

	A [V]	$\hat{x}$ [V]	$\hat{\sigma}^2$ [V]	$\hat{H}$ [-]
$\{x_t\}$	0,725	0,686	0,137	3,410
$\{y_t\}$	0,765	0,081	0,146	3,426
$\{z_t\}$	0,452	0,011	0,039	3,549
$\{w_t\}$	0,690	0,079	0,125	3,356

Tabulka 5.1: Dopočtená amplituda A a odhadnutý průměr $\hat{x}$, rozptyl $\hat{\sigma}^2$ a entropie $\hat{H}$ signálů $\{x_t\}$, $\{y_t\}$, $\{z_t\}$, $\{w_t\}$.



Obrázek 5.4: Stroboskopický graf pro č.ř. $\{x_t\}$, $\{y_t\}$, $\{z_t\}$, $\{w_t\}$ s časovým posunutím 5 členů, což odpovídá 100 ms.



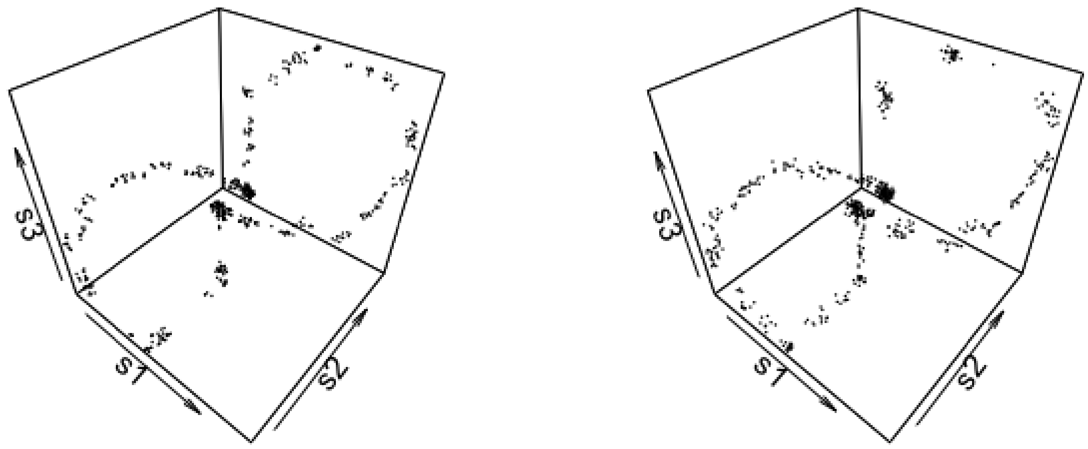
Obrázek 5.5: Vyobrazení statistiky (3.10) v závislost na dimenzi m – *embedding dimension* pro č.ř. $\{x_t\}$, $\{y_t\}$, $\{z_t\}$, $\{w_t\}$, kdy $r = 0,2$.

Pro zjištění vhodné dimenze proložení jsem využil metody určení nepravých blízkých sousedů statistiky (3.10) s parametrem $r = 0,2$, výsledek lze vidět na Obr. 5.5. Pro větší rozsah parametru r dávala metoda podobné výsledky. Pro všechny č.ř. lze vidět klesající poměr nepravých blízkých sousedů. Dostatečnou dimenzí bychom zajisté mohli prohlásit $m = 5$, avšak z teorie víme, že by pro popsání našeho systému měly stačit pouze tři dimenze. Větší dimenzionalita by naznačovala složitější dynamiku systému.

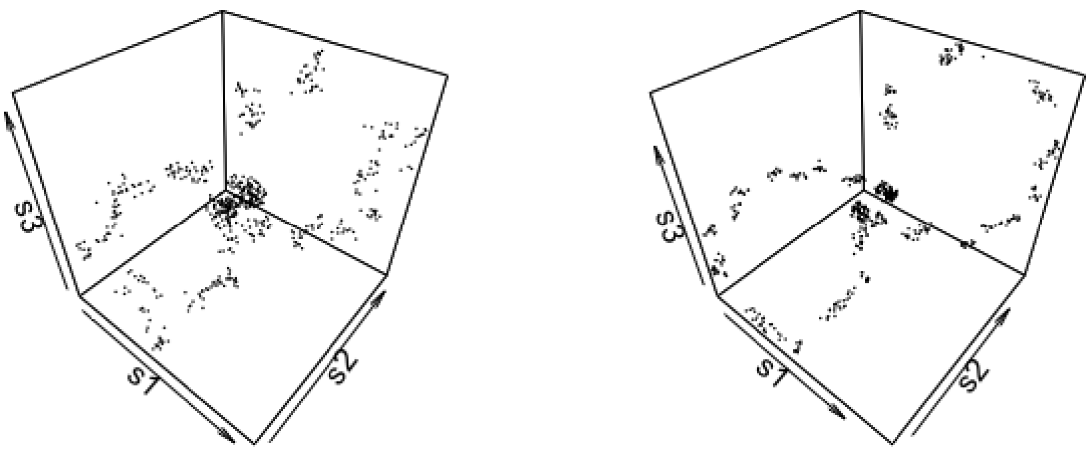
Nyní proveďme metodu časového zpoždění ve třech dimenzích, abychom výsledky mohli graficky prezentovat. Zvolil jsme časové zpoždění $\tau = 3$, tedy 60 ms pro všechny signály a to zdůvodu podobnosti struktury s podivným atraktorem typu „dvojitý svitek“. Jiné volby časového zpoždění τ budou ukázány v další podkapitole. Vyobrazení zpožděných vektorů v prostoru $\mathbb{R}^3$ časové řady $\{x_t\}$, $\{y_t\}$ je na Obr. 5.6 a pro č.ř. $\{z_t\}$, $\{w_t\}$ na Obr. 5.7. Stejně jako je č.ř. $\{z_t\}$ více rozptýlena než např. řada $\{x_t\}$, lze porovnat na Obr. 5.2 a 5.3, tak jsou i grafy zpožděných vektorů.

5.1.2 Signál při základních parametrech

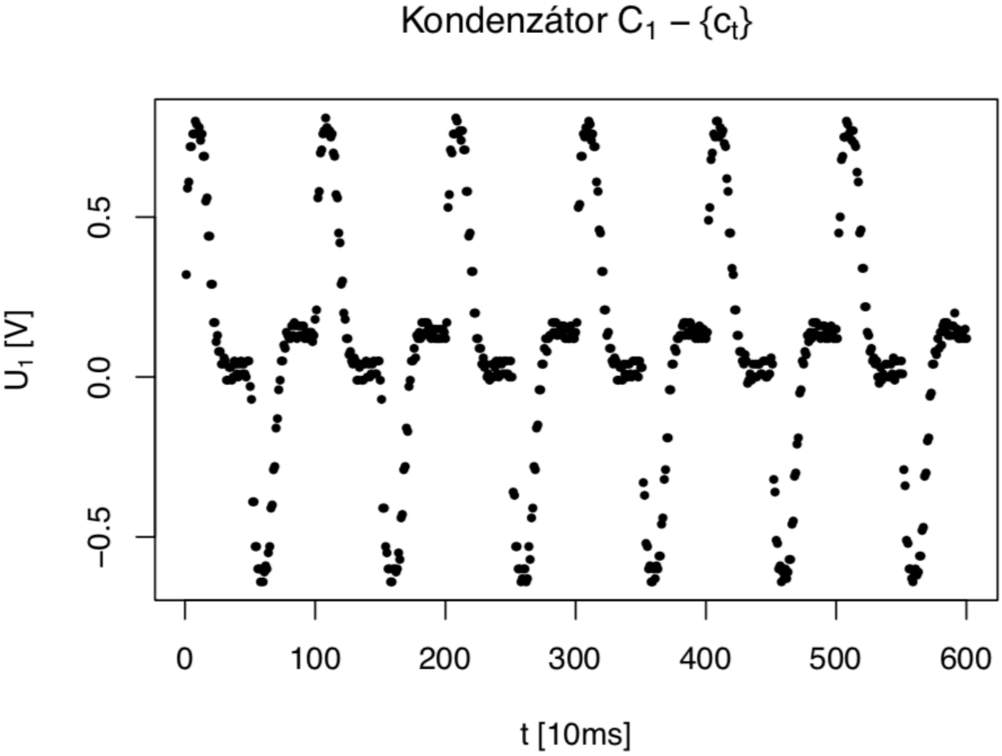
Pro důkladnější analýzu jsem vybral č.ř. z měření Chuova obvodu při parametrech $R = 2,5$ kΩ, $K = 0$ Ω a napětí na operačních zesilovačích 9 V. Tedy shodné nastavení jako při měření X v předešlé podkapitole, avšak nyní s lepším časovým rozlišením, a to dobou mezi jednotlivými samplováními 10 ms, opět při 600 hodnotách. Rovnou představme č.ř. $\{c_t\}$ z měření druhého kanálu na Obr. 5.8, která je měřením napětí



Obrázek 5.6: Zpožděné třidimenzionální vektory č.ř. $\{x_t\}$ vlevo a č.ř. $\{y_t\}$ vpravo, čas zpoždění činil 3 indexi, tedy 60 ms.



Obrázek 5.7: Zpožděné třidimenzionální vektory č.ř. $\{z_t\}$ vlevo a č.ř. $\{w_t\}$ vpravo,čas zpoždění činil 3 indexi, tedy 60 ms.



Obrázek 5.8: Č.ř. $\{c_t\}$ z měření napětí U_2 na kondenzátoru C_2.

	A [V]	$\hat{x}$ [V]	$\hat{\sigma}^2$ [V]	$\hat{H}$ [-]
$\{c_t\}$	0,725	0,0809	0,137	3,484

Tabulka 5.2: Dopočtená amplituda A a odhadnutý průměr $\hat{x}$, rozptyl σ^2, entropie $\hat{H}$ signálu $\{c_t\}$.

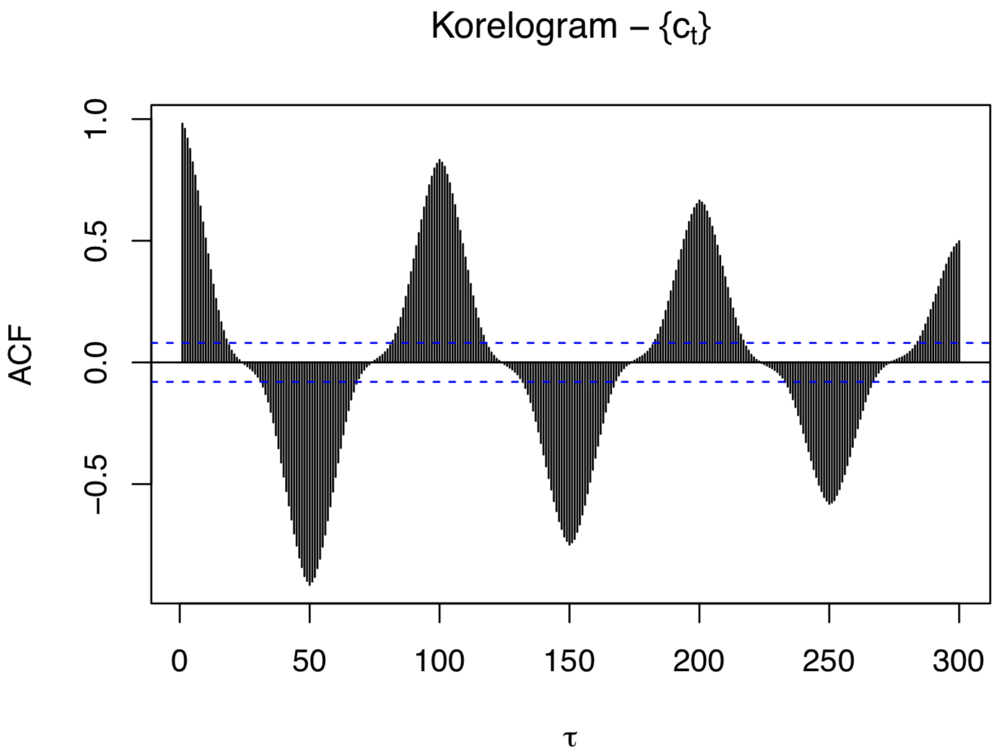
U_2 na kondenzátoru C_2.

Nejdříve si předveďme lineární nástroje, tj. autokorelační funkci, spektrum a analýzu fluktuací odtrendované řady, dále již DFA. V Tab. 5.2 lze vidět dopočtené hodnoty amplitudy A, průměru $\hat{x}$, odchylky $\hat{\sigma}^2$ a entropie $\hat{H}$, získané z histogramu na Obr. A.2 v příloze. Na Obr. 5.9 je korelogram č.ř. $\{c_t\}$, ve které vidíme zřetelné vztahy negativní korelace členů posunuté o 50 indexů a pozitivní korelace členů posunuté o 100 indexů, což právě odpovídá periodě v průběhu napětí na Obr. 5.8. Modré přerušované čáry určují hranice, odkud není možné rozeznat korelovaný signál od nekorelovaného, v tomto případě vydíme jasné korelace.

Spektrum č.ř. na Obr. 5.10 vykazuje zřetelnou hlavní frekvenci okolo $k \simeq 0,01$ a poté vyšší harmonické frekvence, které jsou jejím celočíselným násobkem.

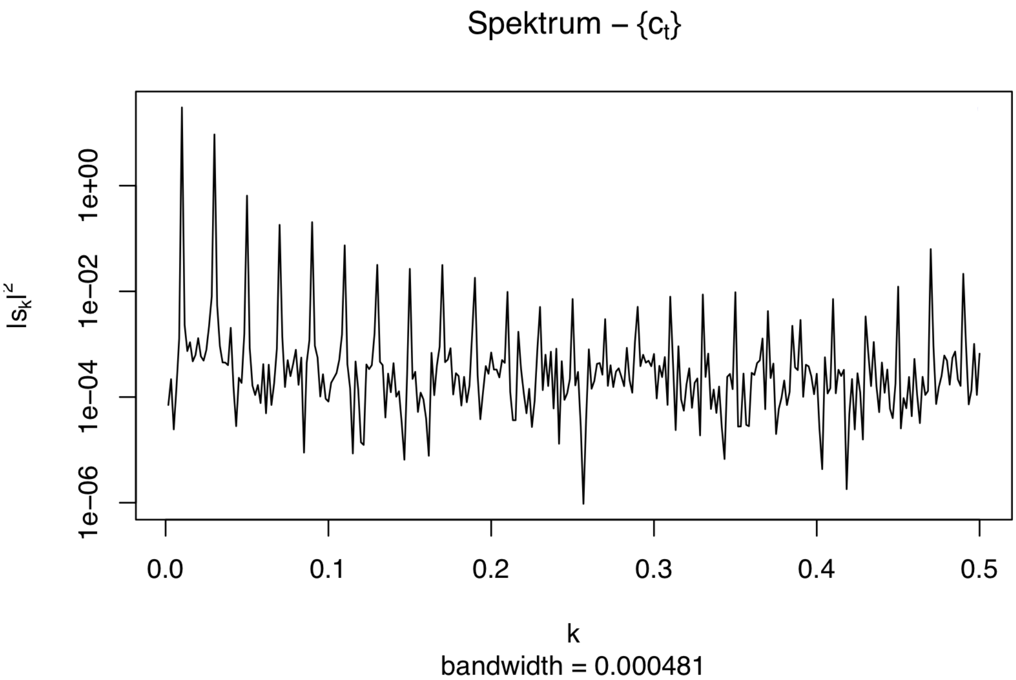
Pro tento signál jsem provedl i DFA analýzu, kterou můžeme vidět na Obr. 5.11. Získaný exponent $\alpha = 1,47$ odpovídá nestacionárnímu šumu a proto jeho původ nejspíše není pouze z elektronického šumu v měřící aparatuře.

Nyní přistupme k nelineární analýze č.ř. V příloze na Obr. A.3 lze vidět stroboskopický graf č.r. $\{c_t\}$ s posuntím o 5 členů. Je znatelné, že graf je čistější oproti předchozím stroboskopickým grafům č.ř. $\{x_t\}$, $\{y_t\}$, $\{z_t\}$, $\{w_t\}$ na Obr. 5.4, jelikož

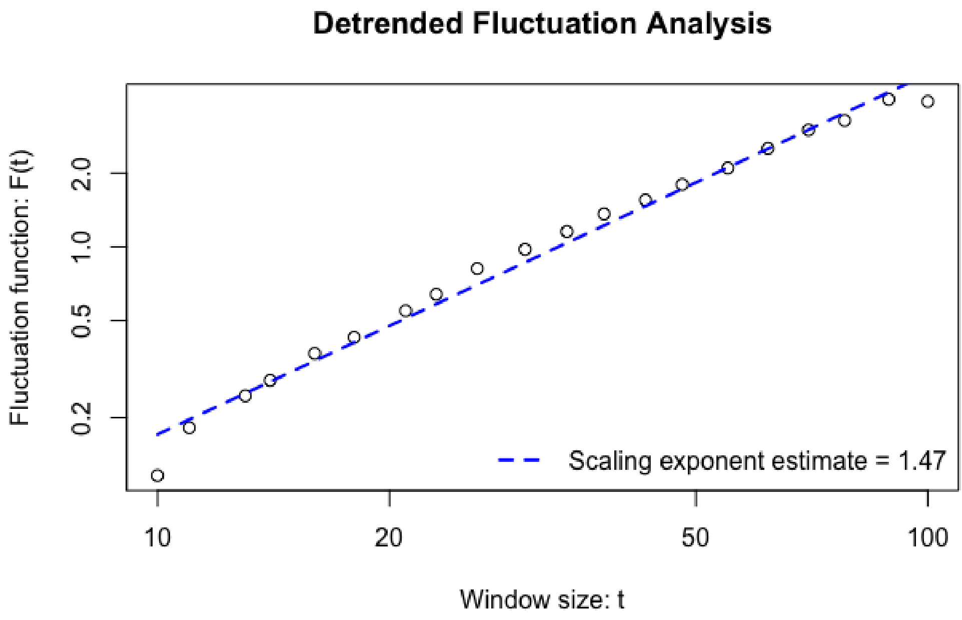


)

Obrázek 5.9: Autokorelační funkce signálu $\{c_t\}$, jsou zřetelné znaky periodicity.



Obrázek 5.10: Spektrum č.ř. $\{c_t\}$ se zřetelnými píky v celočíselných násobcích vlastní frekvence.



Obrázek 5.11: DFA analýza č.ř. $\{c_t\}$ s lineární funkcí proložení a tím dopočtený koeficientem α. Obě osy jsou v tomto případě logaritmické.

se trajektorie nemohou tolik rozbíhat, kvůli menšímu časovému oknu měření.

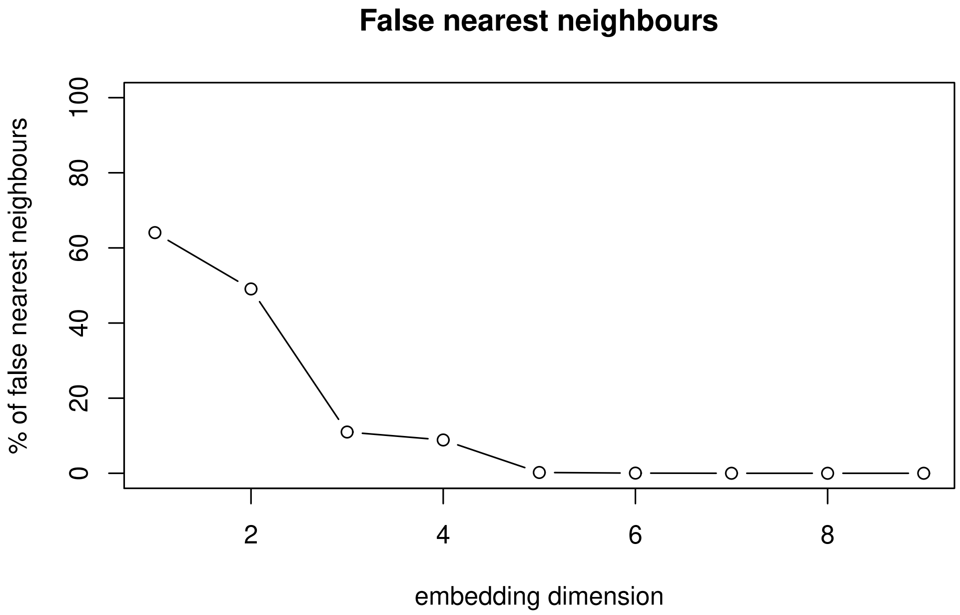
Nyní nalezněme vhodnou dimenzi vnoření pomocí metody nepravých blízkých sousedů. Nagenerovaný graf lze vidět na Obr. 5.12, nyní průběh nasvědčuje tomu, že dimenze vnoření $m = 3$ je mnohem vhodnější, než dimenze $m = 1, 2$, tento průběh statistiky (3.10) není stejný jako pro ostatní č.ř. Obr. 5.5. Důvod bude nejspíše vhodnějším samplováním.

Nyní vyčistěme č.r. $\{c_t\}$ pomocí nelineární redukce šumu (3.14). Provedli jsme tak v dimenzi proložení $m = 3$ a časovým zpožděním $\tau = 6$. Vyhlazená č.ř. je na Obr. 5.13. Je viditelná jasná změna oproti původní č.ř. na Obr. 5.8.

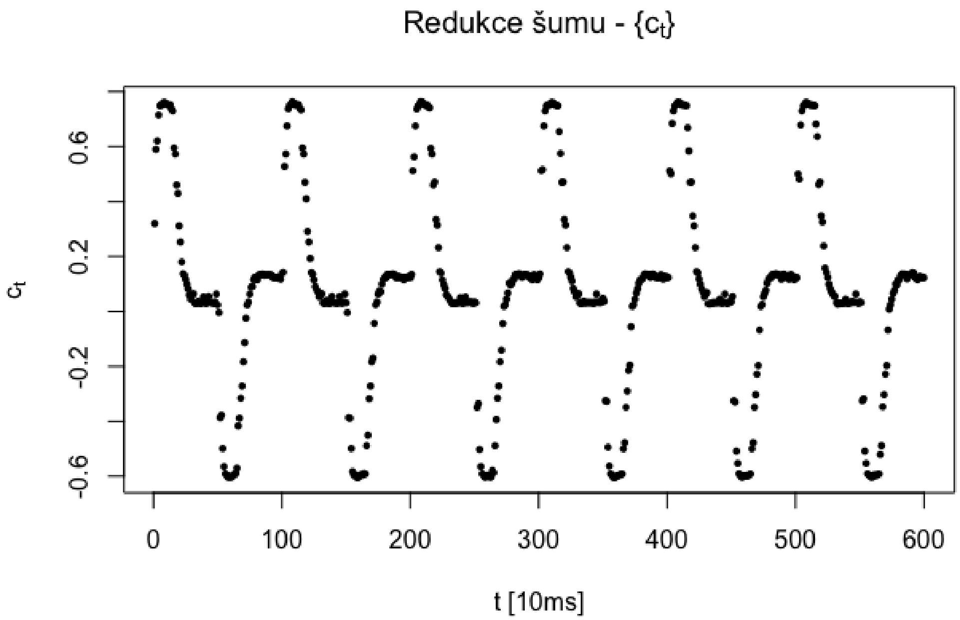
Vytvořme nyní z č.ř. $\{c_t\}$ a její vyčištěné verze z Obr. 5.13 zpožděné vektory dle (3.9) v dimenzi vnoření $m = 3$, s časem zpoždění $\tau = 6$. Výsledek je v příloze na Obr. A.4. Lze vidět, že vektory ve vyčistěné verzi jsou blíže u sebe, což by znamenalo přesnější určení trajektorie. Otázkou je, nakolik byla tato procedura potřeba a jak moc pozměnila reálnou vzdálenost zpožděných vektorů. Na Obr. A.5 v příloze, můžeme vidět zpožděné vektory č.ř. $\{c_t\}$ pro různé zpožděné časy a to $\tau = 15$ a $\tau = 24$, vidíme nové struktury, které se opakují po periodě systému.

Pro předpovědi algoritmem (3.12) jsem zvolil dimenzi proložení $m = 3$, výsledky pro vyšší dimenze se znatelně nelišily, zato pro malé dimenze $m = 1, 2$ algoritmus nefungoval. Časové zpoždění bylo opět zvoleno $\tau = 6$. Na Obr. 5.14 lze vidět úsek č.ř. $\{c_t\}$ pro indexi 0-600 a předpovězené budoucí hodnoty pro indexi 600-900. Vidíme, že předpovězené hodnoty jsou čistější, ale stále zachycují předchozí charakter.

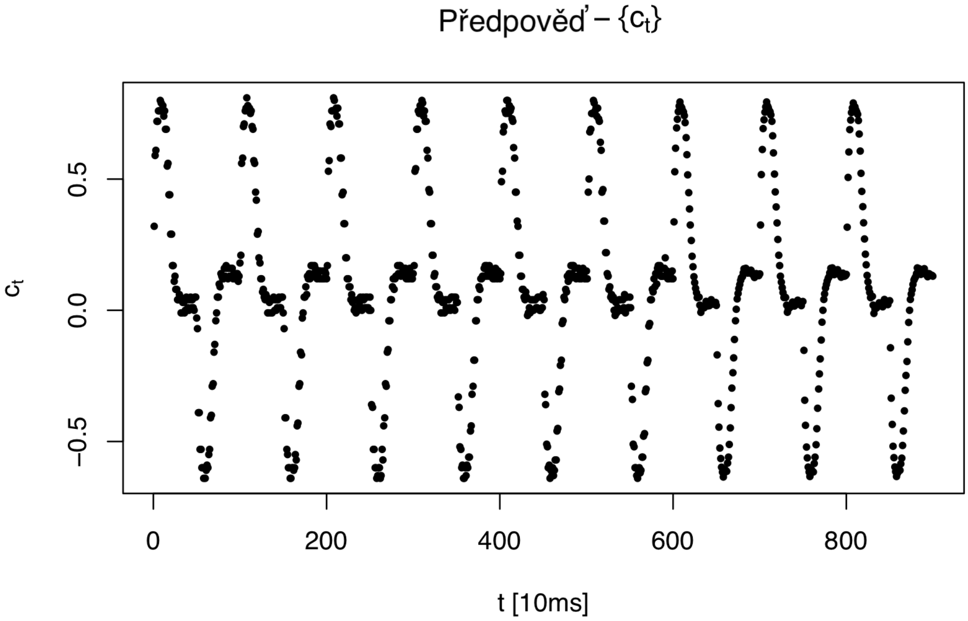
Jedna z metod hledání deterministických struktur v č.ř. je rekurentní graf. Pro naši č.ř. $\{c_t\}$ jsem ho vytvořil na Obr. 5.15, podle vztahu (3.11). Tento graf je vylepšený tak, že odstín odpovídá vzdálenosti členů a tedy není pouze prahová hod-



Obrázek 5.12: Statistika (3.10) v závislosti na dimenzi m – *embedding dimension* pro č.ř. $\{c_t\}$, kdy $r = 0.2$.



Obrázek 5.13: Redukce šumu č.ř. $\{y_t\}$ pomocí vztahu (3.14).



Obrázek 5.14: Předopovědi nelineárním algoritmem (3.12) pro č.ř. $\{c_t\}$ jsou členy s indexem 600-900, původní č.ř. je s indexem 0-600.

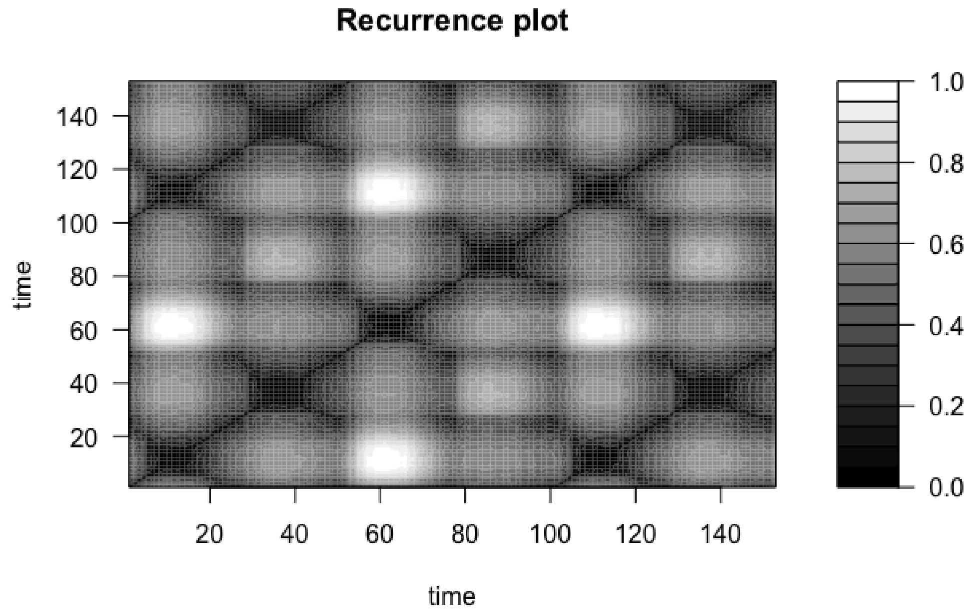
nota ε, od které kreslíme světlý, či tmavý bod do čtvercové sítě. Pro metodu jsme zvolili dimenzi vnoření $m = 3$ a čas zpoždění $\tau = 24$, pro různé časy zpoždění byly stále vidět deterministické struktury. Uvidíme, že tomu tak není pro stochastické signály.

5.2 Stochastické časové řady ze Zenerovy diody, QRNG Quantis a šumové diody

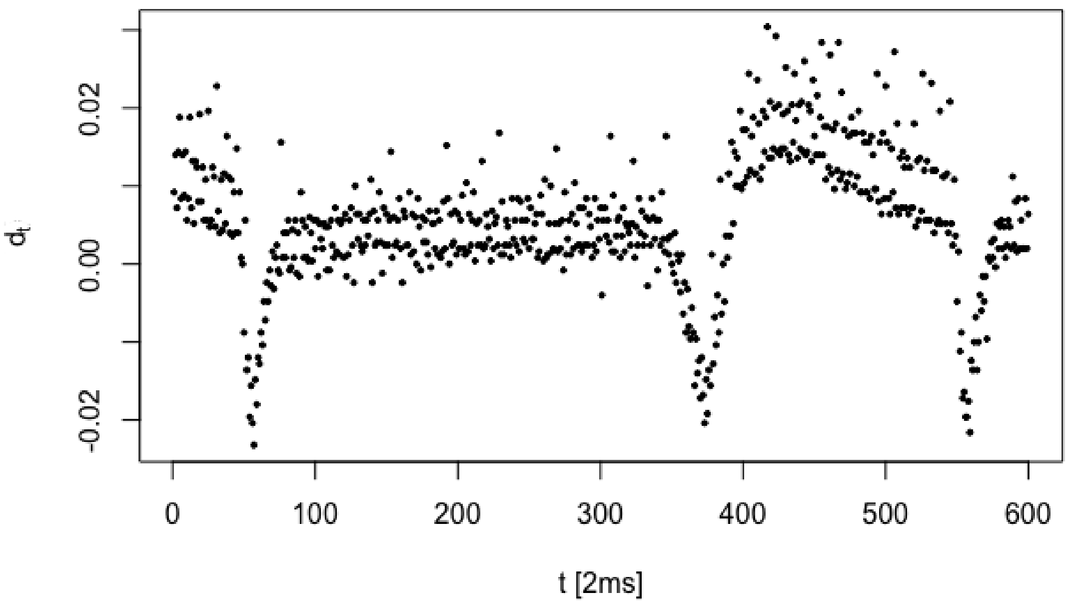
Nejdříve zanalyzujeme signál ze Zenerovy diody, pro několik různých nastavení měření. Poté vyberem pouze dva signály z měření, tak aby jsme s dalšími č.ř. z QRNG Quantis a šumové diody měli čtveřici pro hlubší porovnání.

5.2.1 Měření šumu na Zenerově diodě a odporu

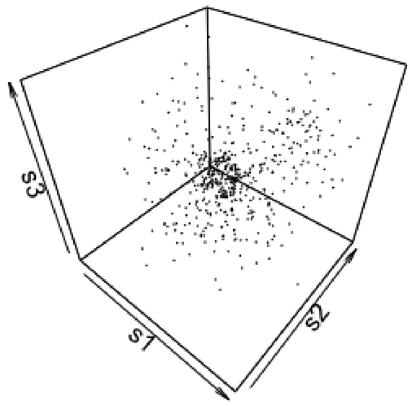
Měřil jsem šum na Zenerově diodě pomocí měřícího obvodu z Obr. 4.7, daná řada $\{d_t\}$ je na Obr. 5.16. Měření proběhlo při 9 V, Zenerovým napětím 9,2 V a samplovacím časem 2 ms. Můžeme však vidět, že v dané řadě je superponovaný signál, nejspiše ze sítě skrze zemnění, které je původem ze středního vodiče, z „nuláku“. Ukazuje to, jak toto zemnění není ideání pro měření malých napětí. Na obrázku můžeme vidět nesymetričnost vůči x-ose, z důvodu efektivní propustnosti diody pouze v jednom směru. Na zdeformovaném sinusovém signálu ze sítě vidíme superponovaný šum, jehož velikost se však nezvětšila, což byl však tížený cíl. Proto jsem se rozhodl provést další dvě měření, které rozeberu později. Nyní si ukažme pár analytických



Obrázek 5.15: Rekurentní graf prvních 150 členů č.ř. $\{c_t\}$ ze vztahu 3.11 s vylepšením, kdy odstín odpovídá vzdálenosti zpožděných vektorů, dimenze vnoření byla zvolena $m = 3$ a čas zpoždění $\tau = 24$.



Obrázek 5.16: Č.ř. $\{d_t\}$ z měření šumu na Zenerově diodě podle schématu na Obr. 4.7.



Obrázek 5.17: Vnoření č.ř. $\{d_t\}$ do zpožděných vektorů v dimenzi vnoření $m = 3$ a s časem zpoždění $\tau = 50$.

metod pro č.ř. $\{d_t\}$.

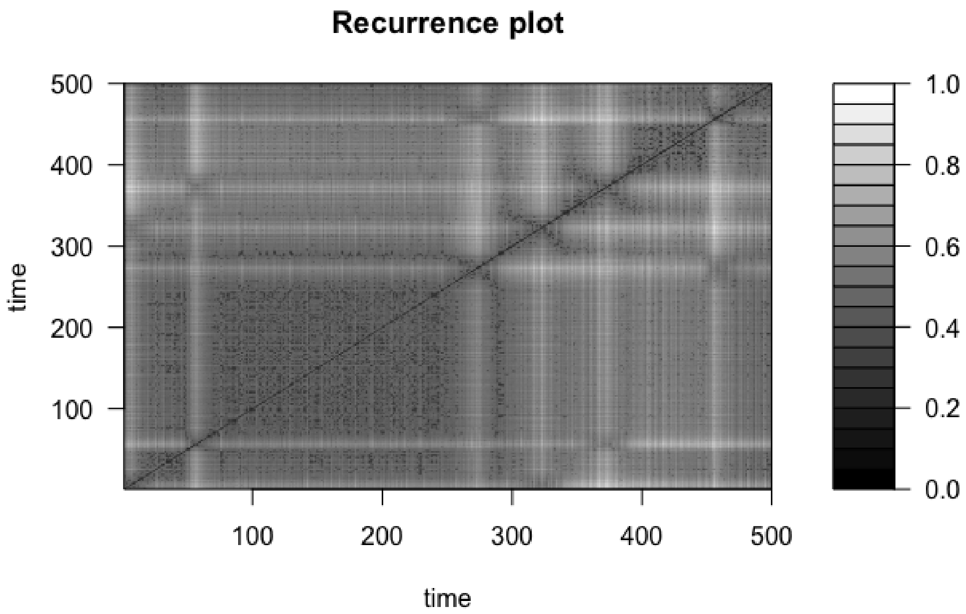
V příloze lze nalézt korelogram č.ř. $\{d_t\}$ i DFA analýzu na Obr. A.6, resp. A.7. Korelogram poukazuje na jasné korelace s periodou okolo 200 indexů, což odpovídá 400 ms a frekvenci 2,5 Hz, avšak síť má frekvenci 50 Hz. Neshoda frekvení byl mohla být odůvodněna celočíselnou dělitelností $50/2,5$, tedy vyššími harmonickými frekvencemi a možnými rezonancemi v měřícím obvodu. Z DFA analýzy jsem zjistil exponent $\alpha = 1,35$, který odpovídá nestacionárním fluktuacím.

Nyní si ukažme, jak by vypadalo vnoření č.ř. $\{d_t\}$ do zpožděných vektorů. Volil jsem dimenzi vnoření $m = 3$ a čas $\tau = 50$ (první nula v korelogramu), tento signál nejeví evidentní známky deterministického chaosu, jak lze vidět na Obr. 5.17. Body vypadají rozesety v prostoru náhodně, avšak rekurentní graf na Obr. 5.18 poukazuje na deterministické struktury. V rozmezí indexů 100-250 lze vidět tmavou oblast, která odpovídá plateu v časové řadě Obr. 5.16 pro stejné indexi. Právě plateu je náhodný signál, který by jsme chtěli zkoumat. Proto jsem měřil v jednoduchém provedení a to přiložení napětí v závěrném směru na Zenerovu diodu a odečítání osciloskopem přímo napětí na svorkách diody v 1 ms intervalech. To samé jsem provedl pro měření 100 Ω odporu. Vzniklé řady jsem pojmenoval $\{e_t\}$ a $\{f_t\}$, jejich vlastnosti v porovnání s dalšími dvěmi č.ř. budou představeny v další kapitole.

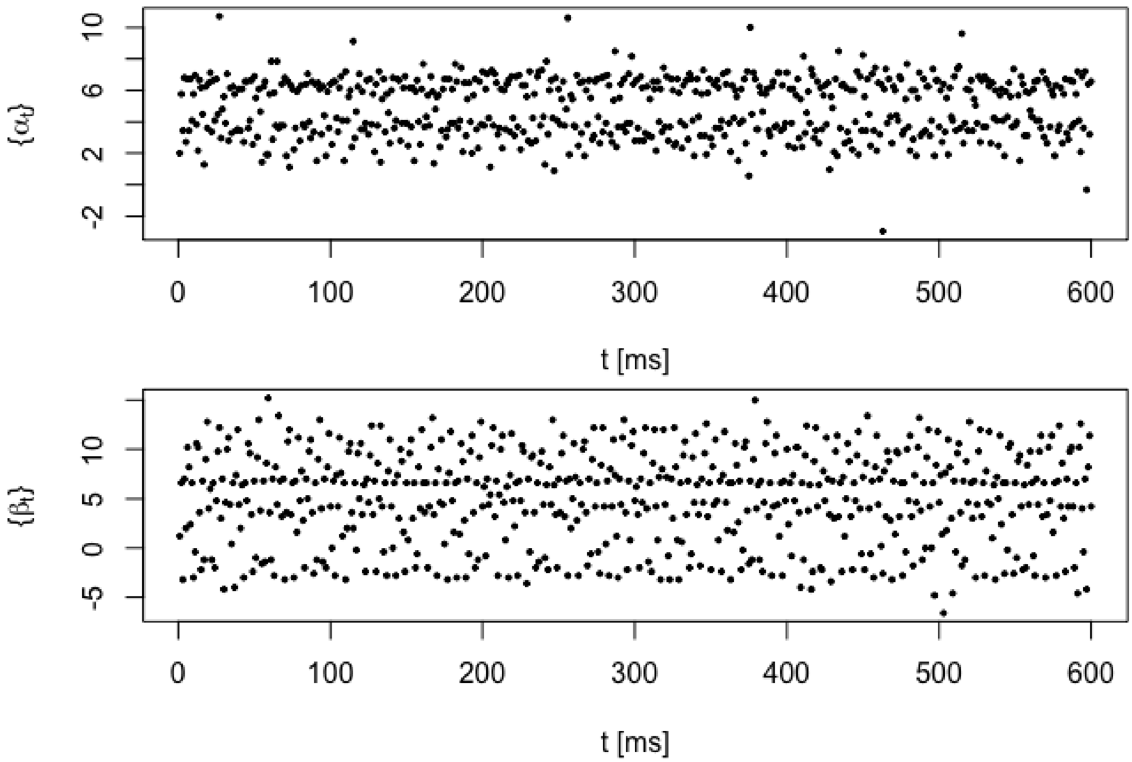
5.2.2 Srovnání čtyř stochastických signálů

Porovnejme čtyři stochastické č.ř.

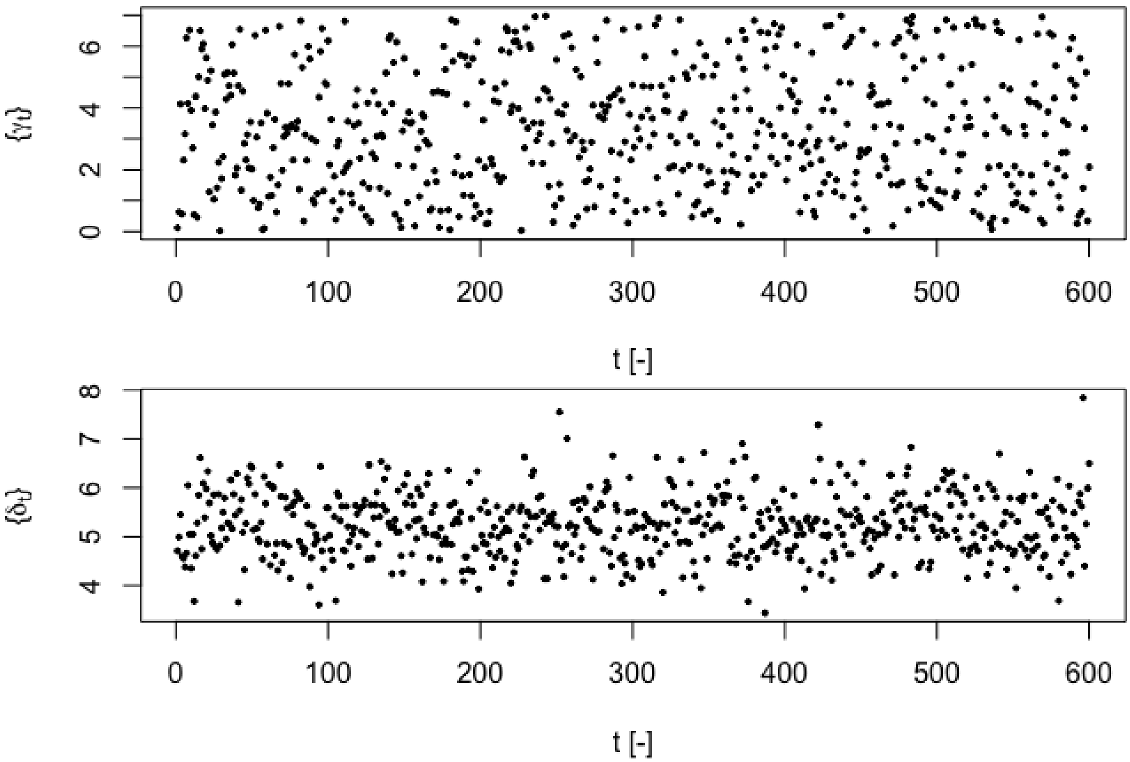
- Č.ř. $\{\alpha_t\}$ – získaná zmíněným měřením Zenerovy diody v závěrném směru, při 9 V. Dioda má Zenerovo napětí na 9,2 V. Bylo pouze přiloženo napětí na vývody diody a stejně tak i obě svorky napěťové sondy osciloskopu. Samplováno po 1 ms. Data jsem přeškáloval faktorem 1000 pro přehlednější zápis.
- Č.ř. $\{\beta_t\}$ – získaná měřením 100 Ω odporu při 9 V. Bylo pouze přiloženo napětí na odpor, stejně tak i obě svorky napěťové sondy osciloskopu. Samplováno po 1 ms. Data jsem přeškáloval faktorem 1000.



Obrázek 5.18: Rekurentní graf vnoření č.ř. $\{d_t\}$ do zpožděných vektorů v dimenzi vnoření $m = 3$ a s čase zpoždění $\tau = 50$.



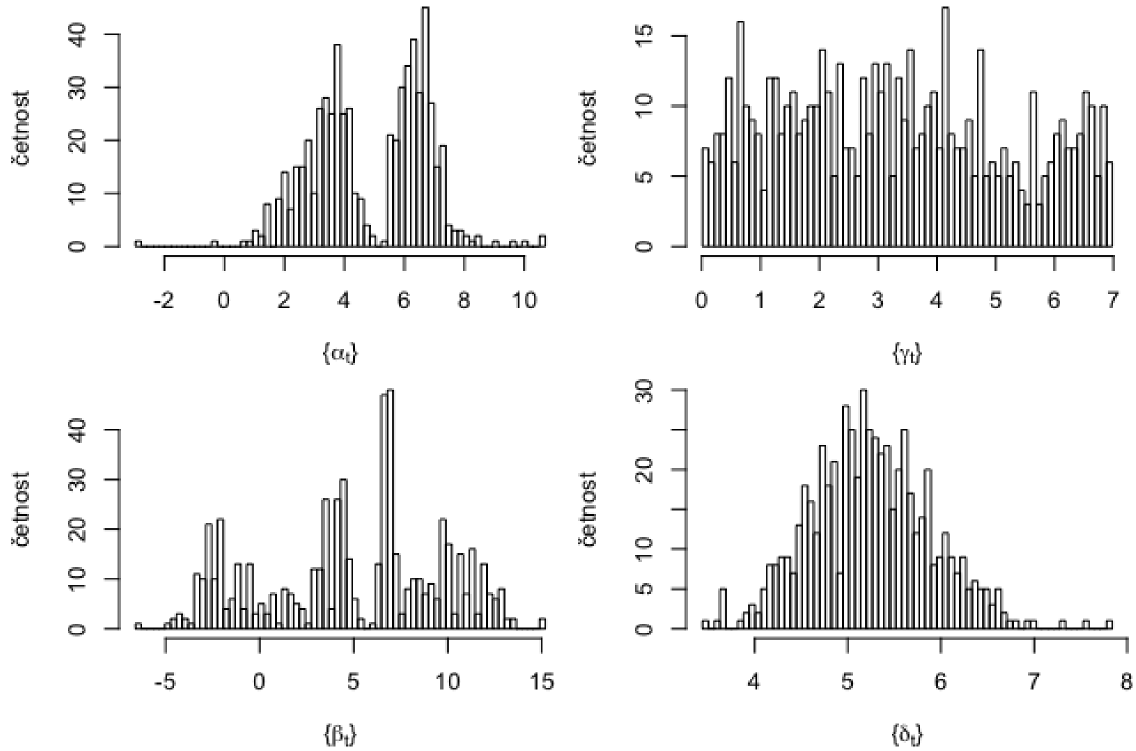
Obrázek 5.19: Č.ř. $\{\alpha_t\}$ a $\{\beta_t\}$.



Obrázek 5.20: Č.ř. $\{\gamma_t\}$ a $\{\delta_t\}$.

	A [-]	$\hat{x}$ [-]	$\hat{\sigma}^2$ [-]	$\hat{H}$ [-]
$\{\alpha_t\}$	6,830	4,871	3,451	3,352
$\{\beta_t\}$	10,900	4,945	22,400	3,718
$\{\gamma_t\}$	3,485	3,304	3,830	4,184
$\{\delta_t\}$	2,200	5,247	0,428	3,694

Tabulka 5.3: Dopočtená amplituda A a odhadnutý průměr $\hat{x}$, rozptyl $\hat{\sigma}^2$ a entropie $\hat{H}$ signálů $\{\alpha_t\}$, $\{\beta_t\}$, $\{\gamma_t\}$, $\{\delta_t\}$, dané statistiky jsou bez jednotek, neboť nyní zanedbáváme původ č.ř.



Obrázek 5.21: Histogramy č.ř. $\{\alpha_t\}$, $\{\beta_t\}$, $\{\gamma_t\}$ a $\{\delta_t\}$.

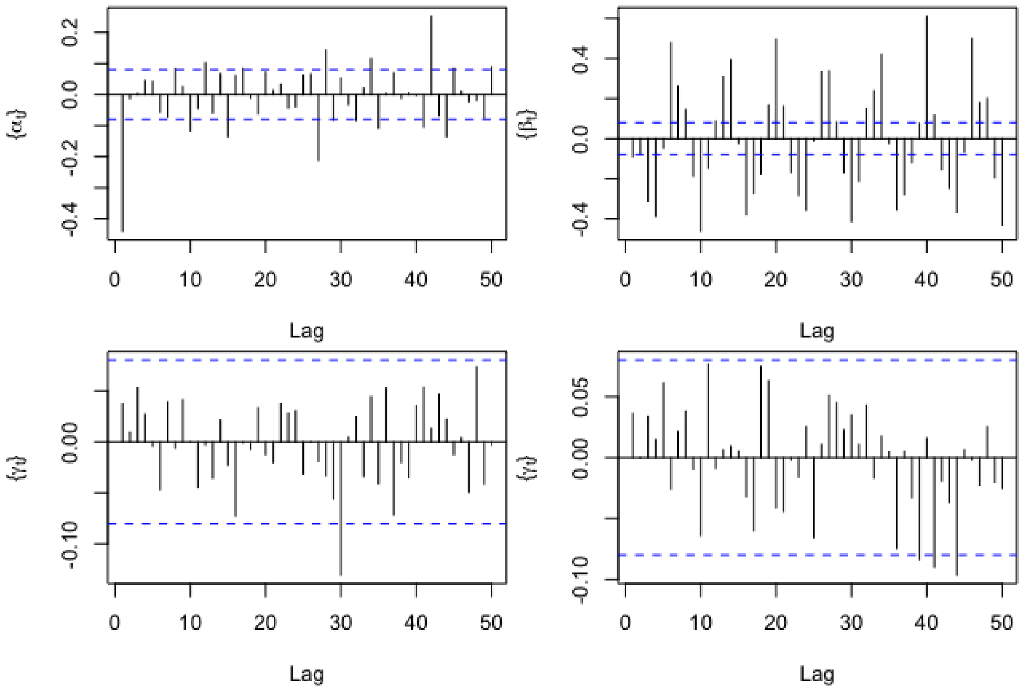
	α
$\{\alpha_t\}$	0,27
$\{\beta_t\}$	0,14
$\{\gamma_t\}$	0,57
$\{\delta_t\}$	0,58

Tabulka 5.4: Exponent α pro č.ř. $\{\alpha_t\}$, $\{\beta_t\}$, $\{\gamma_t\}$ a $\{\delta_t\}$.

- Č.ř. $\{\gamma_t\}$ – získaná z kvantového generátoru nahodných čísel Quantis. Hodnoty jsou v rozmezí 1-7 v 1000 binech.
- Č.ř. $\{\delta_t\}$ – surová data ze šumové diody od komerečního výrobce. Data jsme přeškáloval faktorem 1/100.

Všechny č.ř. mají vždy 600 hodnot a jsou vyobrazeny na Obr. 5.19 a 5.20. Amplitudy jednotlivých signálů, odhad průměru, rozptylu a entropie jsou v Tab. 5.3. Histogramy č.ř. jsou na Obr. 5.21, zde můžeme pozorovat jasné rozdíly, i když jsou data nedostatečně zastoupena. Pro č.ř. $\{\gamma_t\}$ vidíme rozložení blízko uniformního, tedy jako bílý šum, u č.ř. $\{\delta_t\}$ vidíme Gaussovské rozdělení, jako Gaussovský bílý šum.

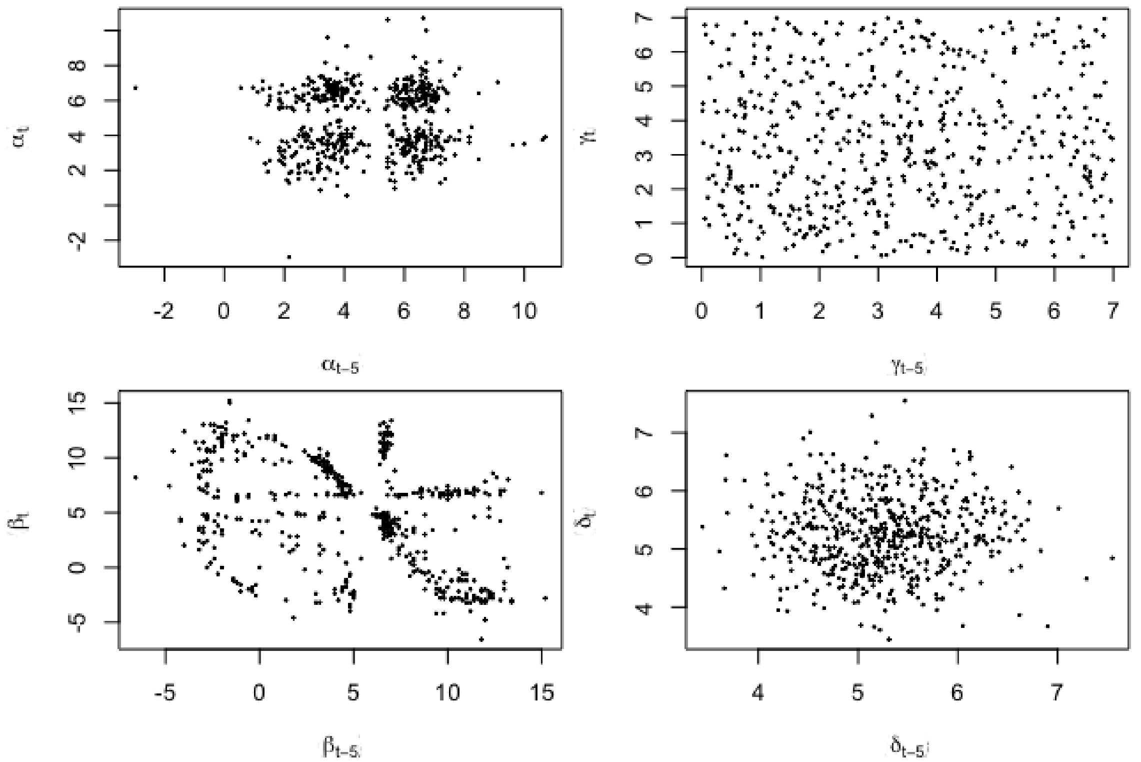
Spektra č.ř. i jejich DFA analýzu najdeme v příloze na Obr. A.8, resp. Obr. A.9, A.10, A.11 a A.12. Jednotlivé vypočtené exponenty α jsou v Tab. 5.4. U spekter vidíme rozdíl akorát mezi prvními dvěmi č.ř. $\{\alpha_t\}$, $\{\beta_t\}$, oproti č.ř. $\{\gamma_t\}$ a $\{\delta_t\}$, jejiž spektrum se jeví konstantní. Pro exponenty je situace podobná pro první dvě č.ř. a



Obrázek 5.22: Autokorelační funkce signálu $\{\alpha_t\}$, $\{\beta_t\}$, $\{\gamma_t\}$, $\{\delta_t\}$.

poslední dvě, kdy č.ř. $\{\alpha_t\}$, $\{\beta_t\}$ odpovídají korelovanému šumu, zato č.ř. $\{\gamma_t\}$, $\{\delta_t\}$ mají podobný charakter jako bílý šum, což jsme očekávali.

Nyní se podíváme na autokorelace dat, korelogramy všech čtyřech č.ř. $\{\alpha_t\}$, $\{\beta_t\}$, $\{\gamma_t\}$ a $\{\delta_t\}$ jsou na Obr. 5.22. Je patrné, že vzorek $\{\beta_t\}$ vykazuje korelace, malé korelace má $\{\alpha_t\}$, zato $\{\gamma_t\}$ a $\{\delta_t\}$ mají všechny autokorelace téměř pod přerušovanou modrou čarou, což by znamenalo, že jsou nerozeznatelné od náhodného, nekorelovaného signálu. Navíc se podívejme ještě na stroboskopické grafy na Obr. 5.23, je patrné, že signál $\{\gamma_t\}$ a $\{\delta_t\}$ odpovídá uniformnímu, resp. Gaussovskému bílému šumu, naopak signál $\{\alpha_t\}$ a $\{\beta_t\}$ vykazuje silné korelace.



Obrázek 5.23: Stroboskopický graf č.ř. $\{\alpha_t\}$, $\{\beta_t\}$, $\{\gamma_t\}$ a $\{\delta_t\}$ s časovým posunutím o 5 členů.

Závěr

V této práci jsme se seznámili se základním popisem časových řad a rozeznatelností chaotických a statistických systémů. Jako kritérium klasifikace jsem zvolil zejména původ č.ř. a byli představeny typy procesů a systémů, které mohou tyto č.ř. generovat. Reálné č.ř. představují superpozici všech typů procesů a proto jsem se pokoušel postihnut jejich jednotlivé rysy. Toho lze posléze využít pro budování modelu, který daná data generuje.

Experimentální rozměr této práce zajistilo sestavení Chuova obvodu, který představuje jeden z nejjednoduších chaotických elektronických systémů. Několik problémů se však naskytlo při nabírání dat, jako malá síla signálu, či nevhodný zdroj. I tak byla č.ř. získaná pozorováním chování chaotického obvodu zpracována s uspokojivými výsledky. Podivný atraktor typu „dvojitý svitek“, který je předpovězen z teorie o elektrických obvodech, byl zrekonstruován pomocí metody časového zpoždění.

Dalším provedeným měřením a to měření šumu na tunelové Zenerově diodě ukázalo ve smyslu stochastičnosti kvalitativně lepší výsledky, než měření šumu na bežném odporu. Tato skutečnost může nasvedčovat tomu, že oproti šumu na odporu, který je spíše statistického charakteru, než kvantového, jsem měřil na Zenerově diodě důsledky kvantového tunelování elektronů. V této formě z makroskopického hlediska, nežli mikroskopického.

Ukázalo se, že vytvořit věrohodný zdroj stochastického signálu není jednoduché. Na Obr. 5.23 lze vidět srovnání korelací více zdrojů, kdy mnou produkované č.ř. jeví strukturu, kterou by ryze stochastické č.ř. neměli vykazovat. Ryze stochastické č.ř. mi byli poskytnuty z externích komerečních zdrojů. Kvalita těchto generátorů náhodných čísel je značně větší, než mnou měřený šum.

Mým dalším cílem by mohlo být sestavení ryze kvantového generátoru náhodných událostí pomocí jedno-fotonových optických technologií, či zkoumání hranice mezi statistickými a chaotickými systémy, pomocí časových řad a jejich analýzy. Využití znalosti generování náhodných čísel, klasifikace systémů i analytických metod č.ř. mi jsou cenou zkušeností.

Literatura

[1] KANTZ, H., T. SCHREIBER. *Nonlinear Time Series Analysis*. Cambridge. Cambridge University Press. 2004.

[2] SCHREIBER, T., A. SCHMITZ. *Surrogate time series*. Physica D 142 346–382. 2000.

[3] HEGGER, R., H. KANTZ, T. SCHREIBER. *Practical Implementation of Nonlinear Time Series Methods: The TISEAN package*. Chaos, 9, 413–435. 1999.

[4] CRYER, J. D., K. S. CHAN. *Time Series Analysis With Applications in R*. New York. Springer Science+Business Media. 2008.

[5] HORÁK, J., L. KRLÍN, A. RAIDL. *Deterministický chaos a jeho fyzikální aplikace*. Praha. Academia. 2003.

[6] KULHÁNEK, P. *Vybrané kapitoly z teoretické fyziky*. Praha. AGA. 2019.

[7] URONE, P. P. *Quantum Tunneling of Particles through Potential Barriers*. [online] [11.6.2019] Dostupné z: `https://phys.libretexts.org/Bookshelves/University_Physics/Book%3A_University_Physics_(OpenStax)`

[8] MA, X., X. YUAN, Z. CAO, B. QI, Z. ZHANG. *Quantom random number generation*. Nature. 2016.

[9] KŘIVÝ, I. *Analýza časových řad*. [online] [17.6.2019] Dostupné z: `https://www.google.com/url?sa=t&rct=j&q=&esrc=s&source=web&cd=5&ved=2ahUKEwj538CWo4LjAhUEKVAKHTdcBboQFjAEegQIBhAC&url=https%3A%2F%2Fpubli.cz%2Fdownload%2Fpublication%2F20%3Fpc%3D1&usg=AOvVaw2aIwfmYJzHz-08OW_4tvrV`

[10] TANCJUROVÁ, J. *Analýza nelineárních dynamických systémů vykazujících chaotické chování s atraktorem typu „dvojitý svitek“*. [online] [15.6.2019] Dostupné z: `https://www.vutbr.cz/www_base/zav_prace_soubor_verejne.php?file_id=148629`

[11] HUKE, J. P. *Emmbeding Nonlinear Dynamical Systems: A Guide to Takens' Theorem*. [online] [15.6.2019] Dostupné z: `http://eprints.maths.manchester.ac.uk/175/1/embed.pdf`

[12] SIDERSKIY, V. *Chua circuits*. [online] [17.6.2019] Dostupné z: `chuacircuits.com/research.php`

[13] BIEY, M., F. BONANI, M. GILLI. *Qualitative analysis of the dynamics of the time-delayed Chua's circuit.* [online] [17.6.2019] Dostupné z: https://www.researchgate.net/figure/Piecewise-linear-characteristic-of-the-Chuas-diode_fig2_3322946

[14] ONSEMI *Zener Theory and Design Considerations.* [online] [17.6.2019] Dostupné z: https://www.onsemi.cn/PowerSolutions/document/HBD854-D.PDF

[15] LAMICH, T. *Deterministický chaos v elektrických obvodech.* [online] [15.6.2019] Dostupné z: https://theses.cz/id/x3mzr9/bp_lamich.pdf

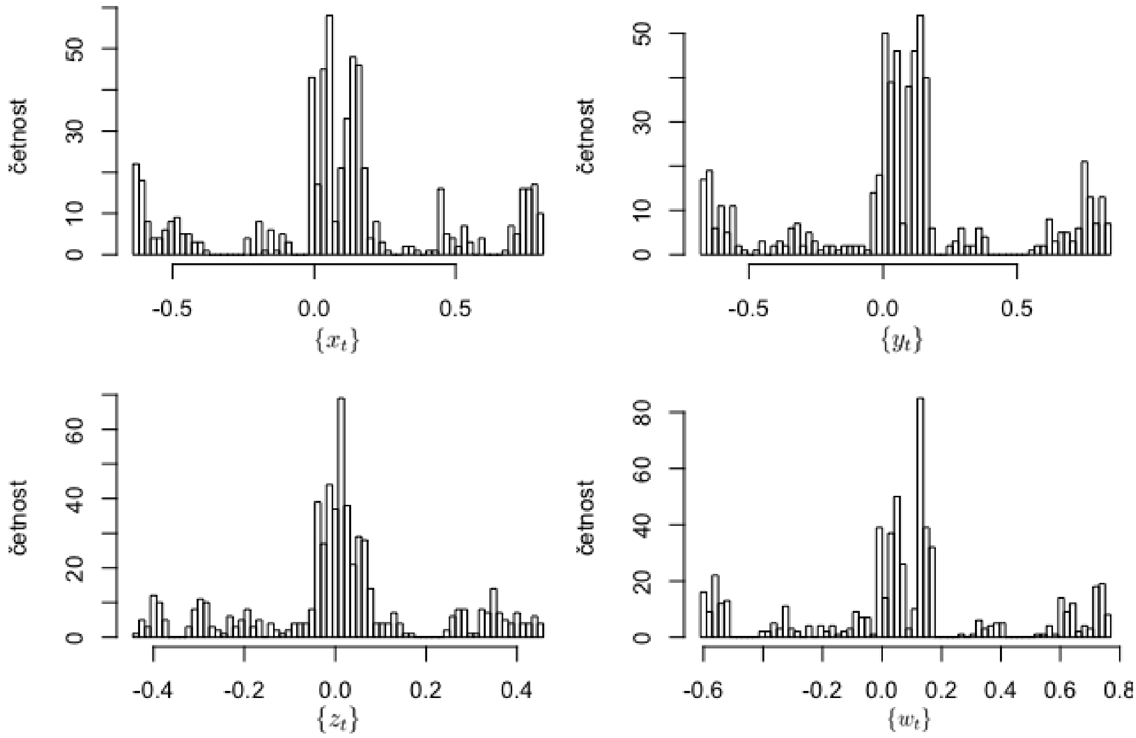
[16] ID QUANTIQUE *White paper – Quantis.* [online] [17.6.2019] Dostupné z: https://pdfs.semanticscholar.org/7340/622a77cab3f72d3e00fdbe4101f38f2383d9.pdf

[17] Wikimedia, obrázek *Double scroll attractor.* [online] [15.6.2019] Dostupné z: https://upload.wikimedia.org/wikipedia/commons/7/7e/ChuaAttractor3D.svg

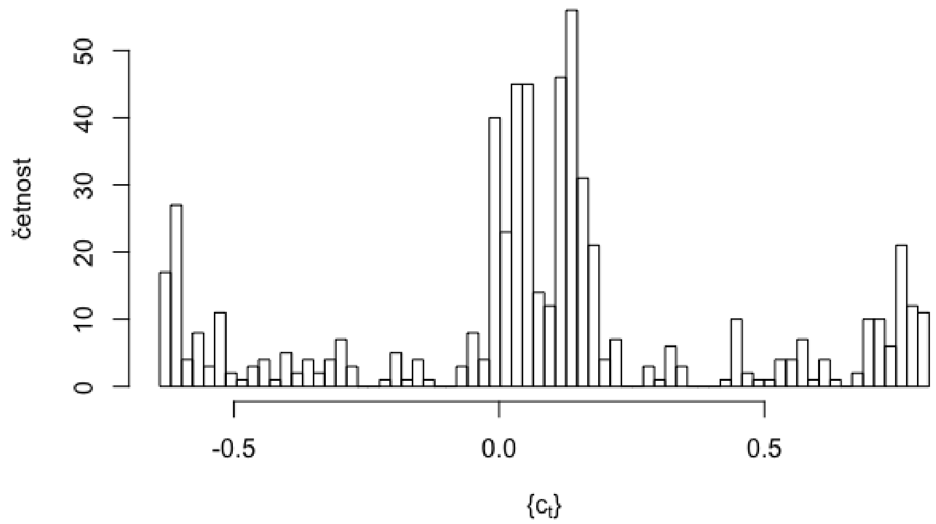
[18] Wikimedia, obrázek *Backward diode band diagram.* [online] [15.6.2019] Dostupné z: https://upload.wikimedia.org/wikipedia/commons/9/9f/Backward_Diode_Band_Diagram.svg

Příloha A

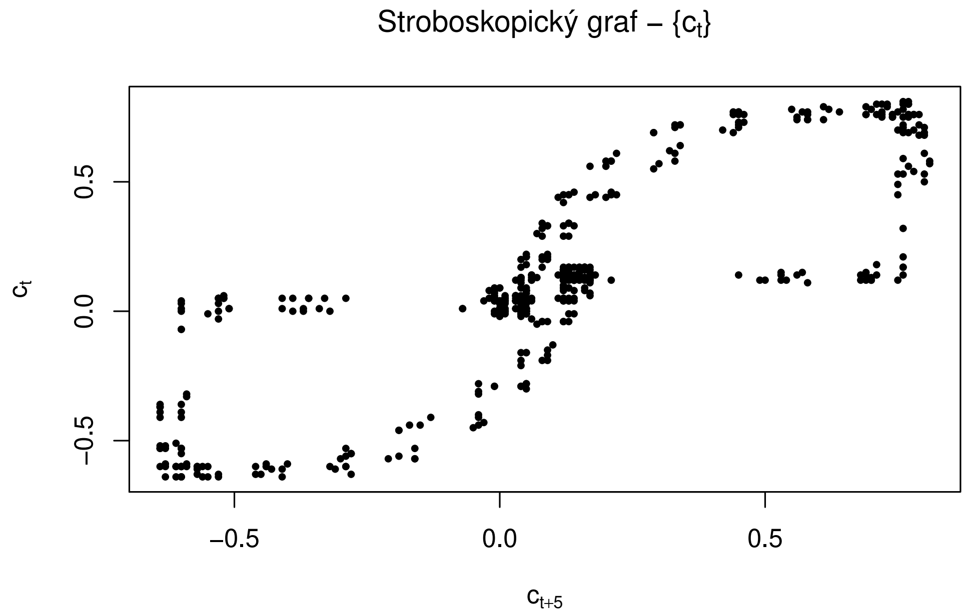
Některé grafy z analýzy časových řad



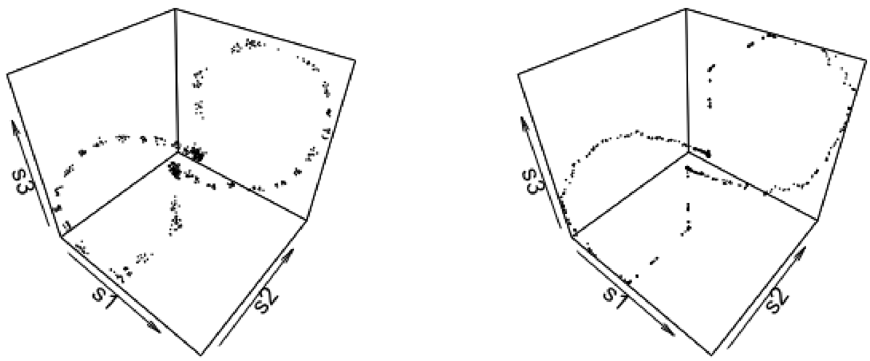
Obrázek A.1: Histogramy č.ř. $\{x_t\}$, $\{y_t\}$, $\{z_t\}$, $\{w_t\}$ pro 70 intervalů.



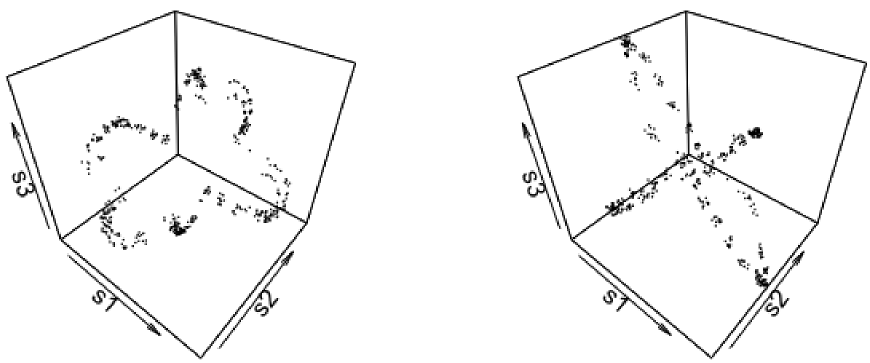
Obrázek A.2: Histogram č.ř. $\{c_t\}$ pro 70 intervalů.



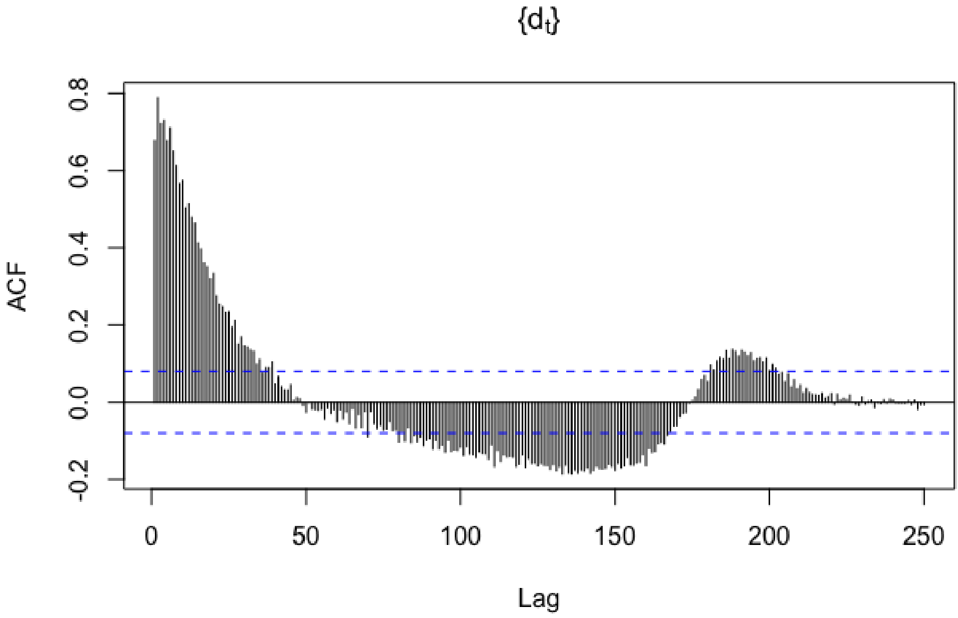
Obrázek A.3: Autokorelační funkce signálu $\{c_t\}$, jsou zřetelné znaky periodicity.



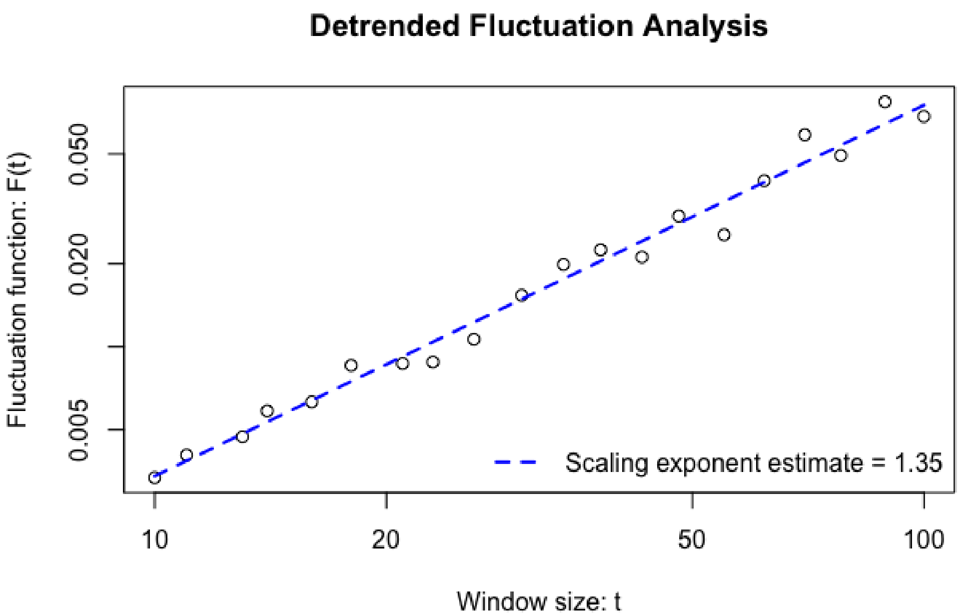
Obrázek A.4: Č.ř. $\{c_t\}$ v dimenzi vnoření $m = 3$ a časem zpoždění $\tau = 6$ vlevo, napravo je stejně vnořená řada, akorát po redukci šumu, z Obr. 5.13.



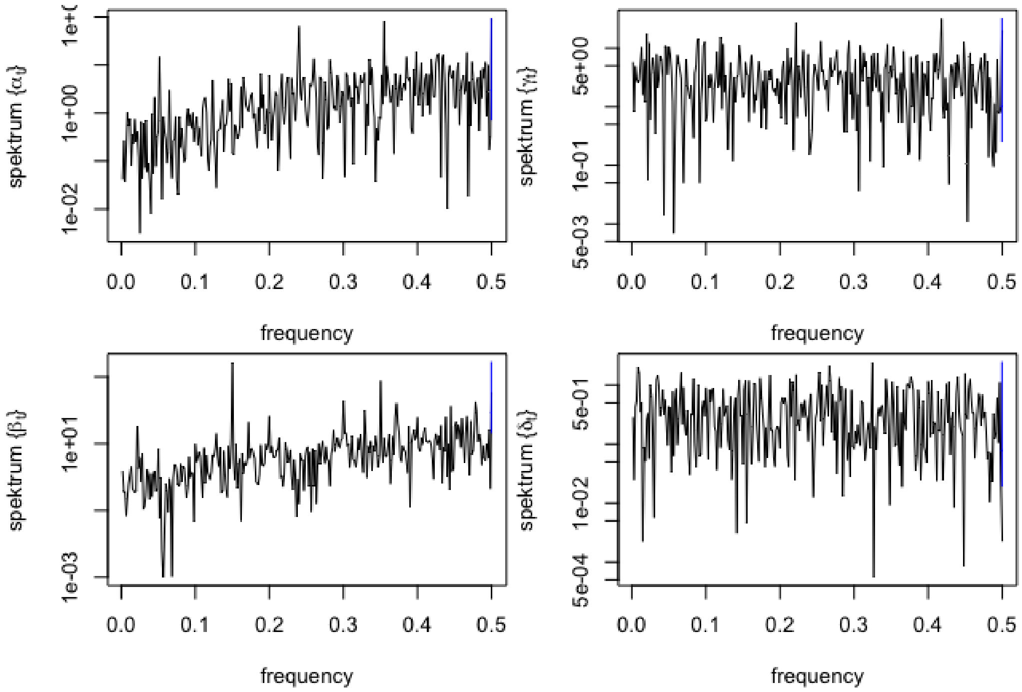
Obrázek A.5: Č.ř. $\{c_t\}$ v dimenzi vnoření $m = 3$ a časem zpoždění $\tau = 15$ vlevo, napravo stejná č.ř. s časovým zpožděním $\tau = 24$.



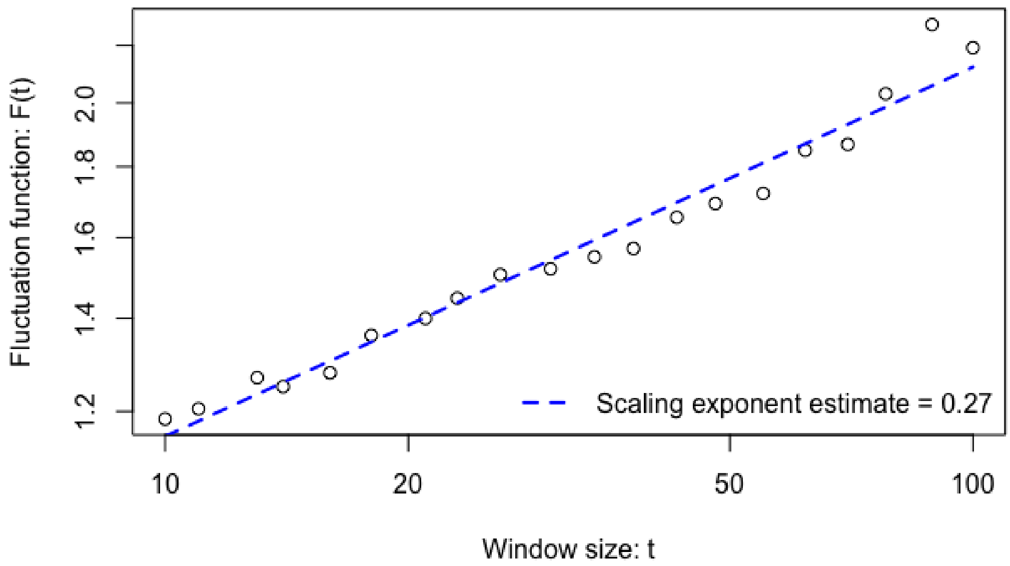
Obrázek A.6: Korelogram č.ř. $\{d_t\}$.



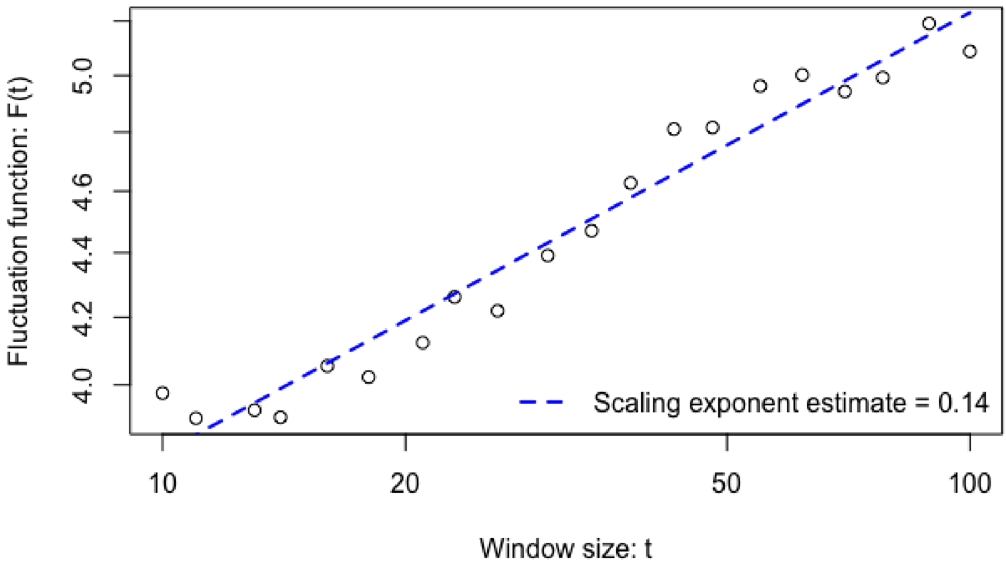
Obrázek A.7: DFA analýza č.ř. $\{d_t\}$.



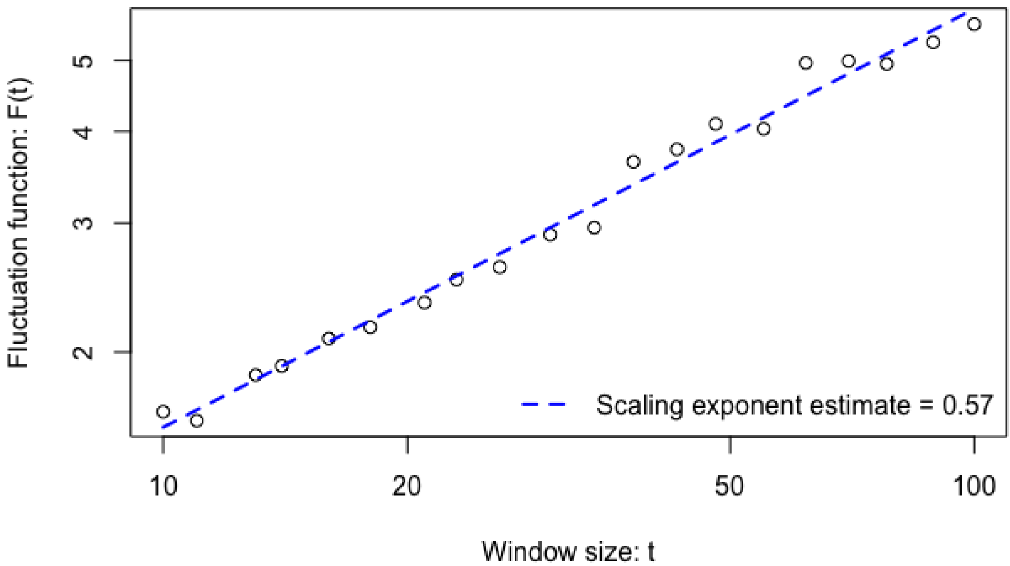
Obrázek A.8: Spektrální analýza č.ř. $\{\alpha_t\}$, $\{\beta_t\}$, $\{\gamma_t\}$ a $\{\delta_t\}$.



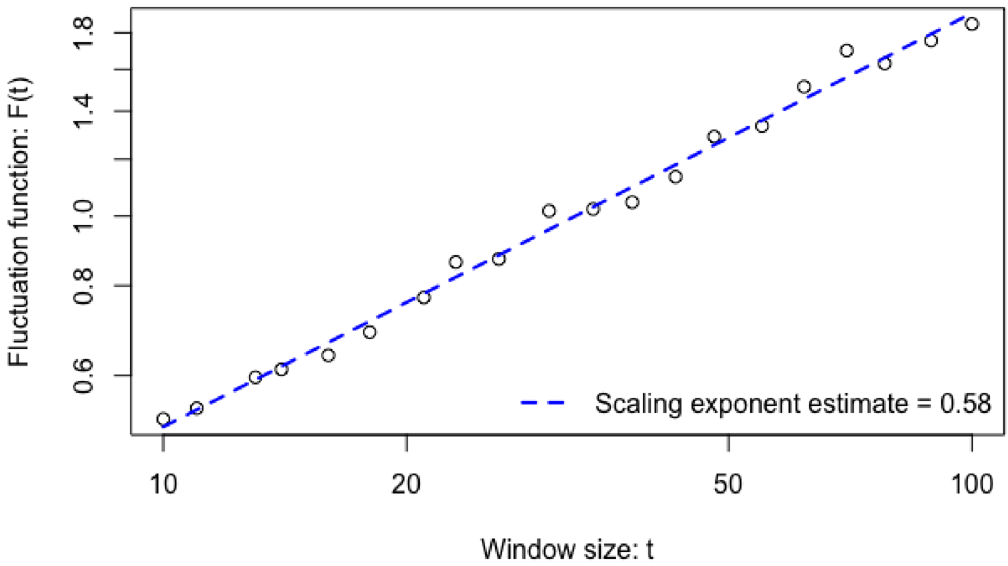
Obrázek A.9: DFA analýza č.ř. $\{\alpha_t\}$.



Obrázek A.10: DFA analýza č.ř. $\{\beta_t\}$.



Obrázek A.11: DFA analýza č.ř. $\{\gamma_t\}$.



Obrázek A.12: DFA analýza č.ř. $\{\delta_t\}$.