

ČESKÉ VYSOKÉ UČENÍ TECHNICKÉ
V PRAZE

Fakulta Jaderná a Fyzikálně Inženýrská
Katedra Fyziky



Bakalářská práce

Stanovení luminozity v experimentu
ALICE

Jan Půček

Školitel: doc. Jesús Guillermo Contreras Nuño, PhD.

Praha, 2017

CZECH TECHNICAL UNIVERSITY IN
PRAGUE

Faculty of Nuclear Sciences and Physical
Engineering

Department of Physics



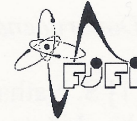
Bachelor thesis

Luminosity determination in the ALICE
experiment

Jan Půček

Supervisor: doc. Jesús Guillermo Contreras Nuño, PhD.

Prague, 2017



Katedra: fyziky

Akademický rok: 2016/2017

ZADÁNÍ BAKALÁŘSKÉ PRÁCE

Student: Jan Půček

Studijní program: Aplikace přírodních věd

Obor: Experimentální jaderná a částicová fyzika

Název práce: Stanovení luminozity v experimentu ALICE
(česky)

Název práce: Luminosity determination in the ALICE experiment
(anglicky)

Pokyny pro vypracování:

1. Zpracujte rešerši těchto témat:
 - a) Luminozita a van der Meer kalibrace
 - b) Experimenty LHC a ALICE
 - c) Stanovení luminozity v experimentu ALICE
2. Simulujte luminozitu pomocí modelu dvojně Gaussovy distribuce.

Doporučená literatura:

- [1] S. Nathan Webb, Factorisation of beams in van der Meer scans and measurements of the ϕ *eta distribution of Z to e+e- events in pp collisions at $\sqrt{s}=8$ TeV with the ATLAS detector, Ph.D. Thesis, School of Physics and Astronomy, University of Manchester, 2015
- [2] G. Anders, Absolute luminosity determination for the ATLAS experiment, Ph.D. Thesis, Ruprecht-Karl University Heidelberg, Kirhhof Institut für Physik, 2013
- [3] P. Grafström and W. Kozanecki, Luminosity determination at proton colliders, Prog. Part. Nucl. Phys. 81 (2015) 97-148


Jméno a pracoviště vedoucího bakalářské práce:

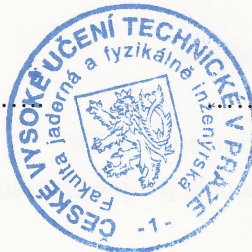
doc. Jesús Guillermo Contreras Nuño, Ph.D., Katedra fyziky, Fakulta jaderná a fyzikálně inženýrská, ČVUT v Praze

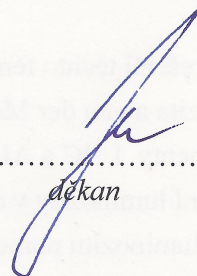
Datum zadání bakalářské práce: 20.10.2016

Termín odevzdání bakalářské práce: 10.07.2017

Doba platnosti zadání je dva roky od data zadání.


.....
vedoucí katedry




.....
děkan

V Praze dne 20.10.2016

Prohlášení:

Prohlašuji, že jsem svou bakalářskou práci vypracoval samostatně a použil jsem pouze podklady (literaturu, software, atd.) uvedené v příloženém seznamu.

Nemám závažný důvod proti užití tohoto školního díla ve smyslu § 60 Zákona č. 121/2000 Sb., o právu autorském, o právech souvisejících s právem autorským a o změně některých zákonů (autorský zákon).

V Praze dne 10.6.2017

Jan Půček

Název práce:

Stanovení luminozity v experimentu ALICE

Autor: Jan Půček

Obor: Experimentální jaderná a částicová fyzika

Druh práce: Bakalářská práce

Vedoucí práce: doc. Jesús Guillermo Contreras Nuño, PhD., Katedra fyziky, Fakulta jaderná a fyzikálně inženýrská, České vysoké učení technické v Praze

Abstrakt: Tato bakalářská práce se zaměřuje na studium efektů při nesplnění podmínky faktorizovatelnosti svazku v průběhu VdM skenu. V úvodu této práce byly vysvětleny srážky na urychlovačích a byly přidány detaily o CERNu i experimentu ALICE. Rovnice týkající se luminozity pro různé podmínky srážek (čelní, pod úhlem, s posuvem) byly znovu odvozeny a později byly využity při popisu Van der Meer skenů. V praktické části byl testován generátor náhodných čísel podle vícedimenzionální Gaussovy distribuce. Takto vygenerovaná rozdělení byla dále použita k simulování VdM skenu, u kterého bylo možné porovnat výsledek simulace s analytickou předpovědí. Simulace hrají stěžejní roli v pochopení faktorizovatelnosti a pochopení vlivu vstupních parametrů projevujících se na výsledné odchylce měření. A tím lépe určit nejistotu stanovení luminozity.

Klíčová slova: Luminozita, LHC, ALICE, VdM kalibrace

Title:

Luminosity determination in the ALICE experiment

Author: Jan Půček

Supervisor: doc. Jesús Guillermo Contreras Nuño, PhD.

Abstract: This bachelor thesis is focused on studying effects of non-factorisation assumption during VdM scan. First, collisions at particle accelerators were introduced with details about CERN and ALICE. Equations concerning luminosity for different collision parameters (head-on, collision angle, offset) were re-derived and later used to explain the Van der Meer scan procedure. The practical part started by benchmarking a generator of random numbers according to a multivariate Gaussian distribution. Generated distributions were used to simulate VdM scans, which allowed to compare results with analytic predictions. The simulations play an important part in understanding factorisation and its dependence on input parameters, which will help to assess better the uncertainty on the luminosity determination.

Key words: Luminosity, LHC, ALICE, VdM calibration

Poděkování

Děkuji vedoucímu mé práce za trpělivost i ochotu vysvětlovat věci znovu a znovu. Také za jeho skvělé komentáře, které značně vylepšily tuto práci. Dále chci poděkovat panu doktoru Chaloupkovi za pomoc s překladem záludných fyzikálních pojmů. A v neposlední řadě mé rodině za veškerou pomoc v průběhu psaní práce.

Obsah

1	Úvod	13
1.1	Srážky na urychlovačích částic	13
1.2	Motivace	15
1.3	Struktura	16
2	Velký hadronový urychlovač	17
2.1	CERN	17
2.2	ALICE	19
2.2.1	Detektor V0	22
2.2.2	Detektor T0	22
3	Luminozita z parametrů urychlovače	24
3.1	Čelní srážky	24
3.2	Srážky s posunutím	26
3.2.1	Odvození rovnic pro posunuté středy svazků	26
3.2.2	Vztah k VdM skenu	27
3.3	Kolize svazků pod úhlem	27
3.3.1	Situace na LHC	29
4	Van der Meer sken	30
4.1	Simon van der Meer	30
4.2	Matematická formulace	31
4.2.1	Fitovací funkce	33
4.3	Průběh skenu na ALICE	34
4.4	Další metody určení luminozity	38
4.4.1	Pomocí známého účinného průřezu	38
4.4.2	Optický teorém a Coulombův rozptyl	39
5	Simulace určení luminozity	40
5.1	ROOT- použité součásti	41
5.2	Benchmarking	41
5.3	Určení faktorizace	47
5.3.1	Jednoduchá 2D Gaussova distribuce	47
5.3.2	Dvojitá 2D Gaussova distribuce	48

5.4	VdM sken	49
5.4.1	Jednoduchá 2D Gaussova distribuce	49
5.4.2	Dvojitá 2D Gaussova distribuce	53
6	Závěr	57
	Přílohy	61

Seznam obrázků

1.1	Znázornění integrované luminozity pro LHC v letech od 2011 do 2016. Převzato z [1]	15
2.1	Mapa světa, graficky odlišující členské státy (modře), pozorovatele (zeleně), přidružené státy (bledě modře), státy usilující o vstup žlutě a ostatní státy podílející se na výzkumu (červeně). Zároveň je zobrazen počet uživatelů z daných zemí. Převzato z [2].	18
2.2	Schématické zakreslení urychlovačů v CERNu. Z PS jsou částice o energii 25 GeV posílány do SPS a urychleny na energii 450 GeV. Z SPS putují částice do LHC, kde jsou urychleny na 6,5 TeV. Převzato z [3].	18
2.3	Schématický náčrt experimentu ALICE s popisem jednotlivých částí. Převzato z [4].	21
3.1	Zobrazení rotace souřadnic pro každý ze svazků (balíků). Převzato z [5].	28
4.1	Měření frekvence srážek jednoho kroku x -ového skenu reprezentováno černými body, které se následně nafitují vhodnou křivkou (zde Gaus) červeně, a nakonec se pomocí fitu vypočte plocha pod křivkou šrafovaně.	32
4.2	Zobrazení dvojnásobného Gaussova rozdělení pro různé parametry.	34
4.3	Měření frekvence srážek pro typický pár balíků (bez použití korekce). První pík zobrazuje horizontální sken, druhý vertikální a další dva se opakují (horizontální, vertikální) ve stejném pořadí ale s opačným průběhem (od kladných hodnot do záporných). Levý (pravý) graf zobrazuje průběh měření detektorem T0 (V0).	35
4.4	Výsledky fitování frekvence interakcí v závislosti na separaci svazků pro jeden průměrný pár balíků při prvním horizontálním skenu. Vlevo pro detektor T0 a vpravo pro detektor V0. Převzato z [6].	37
4.5	Uvádění chyby při určování luminozity VdM kalibrací v roce 2013. Převzato z [6].	38

5.1	Závislost výstupní hodnoty fitu na vstupní hodnotě středu μ_x zadané do generátoru náhodných bodů pomocí dvou-dimenzionální Gaussovy distribuce. Jednotlivé chyby bodů jsou moc malé na to, aby byly viditelné.	42
5.2	Závislost hodnoty fitu na vstupní hodnotě rozptylu σ_x zadané do generátoru náhodných bodů pomocí dvou-dimenzionální Gaussovy distribuce.	43
5.3	Závislost hodnoty fitu na vstupní hodnotě korelačního faktoru ρ zadané do generátoru náhodných bodů pomocí dvou-dimenzionální Gaussovy distribuce.	44
5.4	Porovnání modelu s analytickým řešením. Zleva doprava se zvyšuje korelační faktor ρ . První řada zobrazuje dvou-dimenzionální histogramy, druhá grafy s hodnotami středů a třetí řada zobrazuje hodnoty rozptylu pro různé řezy.	46
5.5	Závislost poměru R určení skutečného regionu luminozity vůči regionu určenému VdM metodou na korelačním faktoru ρ . Jedná se o případ, kdy k popisu obou balíků byla použita jednoduchá 2D Gaussova distribuce, kde pouze jeden ze svazků je korelovaný.	48
5.6	Závislost poměru R určení skutečného regionu luminozity vůči regionu určenému VdM metodou na korelačním faktoru ρ . Zobrazeno pro numerickou (černé body) i analytickou metodu (červená čára). Balíky byly modelovány jednoduchou 2D Gaussovou distribucí.	50
5.7	Histogramy, v prvním řádku jsou vytvořeny z korelované distribuce ($\rho = 0.4$), je statická. V druhém řádku jsou histogramy s různým středem měnicím se pouze v x -ovém směru. Výsledný překryv (vynásobení) prvního a druhého řádku je zobrazen v řádku třetím. Výsledek x -ového skenu je na Obrázku 5.8.	51
5.8	Výsledek x -ového skenu pro korelaci $\rho = 0.4$, která je nařizována Gaussovou křivkou potřebnou k určení luminozity VdM metodou.	52
5.9	Výsledek y -ového skenu pro korelaci $\rho = 0.4$, která je nařizována Gaussovou křivkou. Ta je dále integrována k určení luminozity z rovnice (4.6).	52
5.10	Závislost poměru R na korelačním faktoru ρ jednoduchého Gaussova rozdělení při použití dvojitého Gaussova rozdělení k reprezentaci balíků. Důvody závažného rozdílu je diskutovány dále.	53
5.11	Ukázka histogramů z x -ového skenu pro dvojité Gaussovo rozdělení.	54
5.12	Výsledný fit nasimulovaných hodnot v x -ovém směru.	55
5.13	Výsledný fit nasimulovaných hodnot v y -ovém směru.	55

Kapitola 1

Úvod

1.1 Srážky na urychlovačích částic

Fyzika studuje přírodní procesy pomocí pozorování. V dobách minulých stačily lidem jejich oči, později využívali k pozorování nástroje, které jim umožňovaly sledovat procesy na menších nebo naopak mnohem větších škálách (mikroskop, dalekohled). Prvními objekty, které lidé pozorovali pomocí mikroskopu, byl hmyz, později buňky. Od určité úrovně zvětšení optického mikroskopu však nebylo možné rozlišit od sebe dva body blíže než je použitá vlnová délka dopadajícího světla. Tento problém byl vyřešen vynálezem elektronového mikroskopu, kde urychlené elektrony procházejí skrz vzorek na fluorescenční desku, která mění tok elektronů na fotony. Po zdokonalení je možné spatřit struktury o velikosti několika nanometrů. Velikost atomu je jen o řád menší. Ale jak studovat strukturu hmoty menší než atom?

Ke studiu vnitřní struktury atomu je potřeba jiný přístup. Velmi známý je experiment provedený E. Rutherfordem, který ostřeloval zlatou folii α -částicemi a z úhlového rozdělení vylétajících částic došel k závěru, že v atomu je velmi hmotný střed (atomové jádro). Jenže ke studiu struktury jádra či dokonce protonů byla potřeba větší energie než poskytovaly přírodní zdroje radioaktivity. K dosažení vyšších energií je zapotřebí použít urychlovače částic. První urychlovač byl postaven v Německu v roce 1928 na Cášské univerzitě. Jednalo se o lineární urychlovač, který jako první potvrdil možnost urychlovat částice elektrostatickým polem. V dalších letech byly vynalezeny nové typy urychlovačů jako například kruhový urychlovač. Zprvu sloužily urychlovače pro vědecké účely, studium izotopů, elementárních částic, ale následně našly uplatnění i v mnoha dalších oblastech. V dnešní době se uplatňují v medicíně (pomáhají léčit rakovinové nádory), v průmyslu (vývoj materiálů), ale také ve fyzice vysokých energií.

Aktuálně největší soustava urychlovačů se nachází na švýcarsko-francouzské hranici ve výzkumném zařízení CERN. Urychlovací soustava je zakončena velkým hadronovým srážecem (LHC), jehož nejvyšší dosažená energie srážek protonů je 13 TeV. Kromě protonů se na LHC sráží také jádra olova s maximální

energií srážky 5.02 TeV na nukleon. Jelikož produkty částicových srážek nejsou lidským okem pozorovatelné, je potřeba kolem místa srážek postavit detektory. Na LHC se jedná o 4 velké soustavy detektorů (ALICE, ATLAS, CMS, LHCb), kde každá soustava je uzpůsobena na detekci mírně odlišných jevů. Podrobněji je na experimenty na LHC zaměřena Kapitola 2. Zároveň všechny urychlovače a detektory mají jisté základní parametry, o kterých je pojednáno v dalším odstavci.

Kromě studia samotných částic, které jsou při srážkách produkovány, jsou na urychlovačích studovány i fyzikální procesy a interakce. Pomocí detektoru lze měřit frekvenci (angl. rate) interakce při daných srážkách počítáním událostí, pro které byla splněna trigovací podmínka za jednotku času. Tato frekvence samozřejmě souvisí s pravděpodobností, že daná interakce proběhne. Účinný průřez tuto pravděpodobnost reprezentuje.

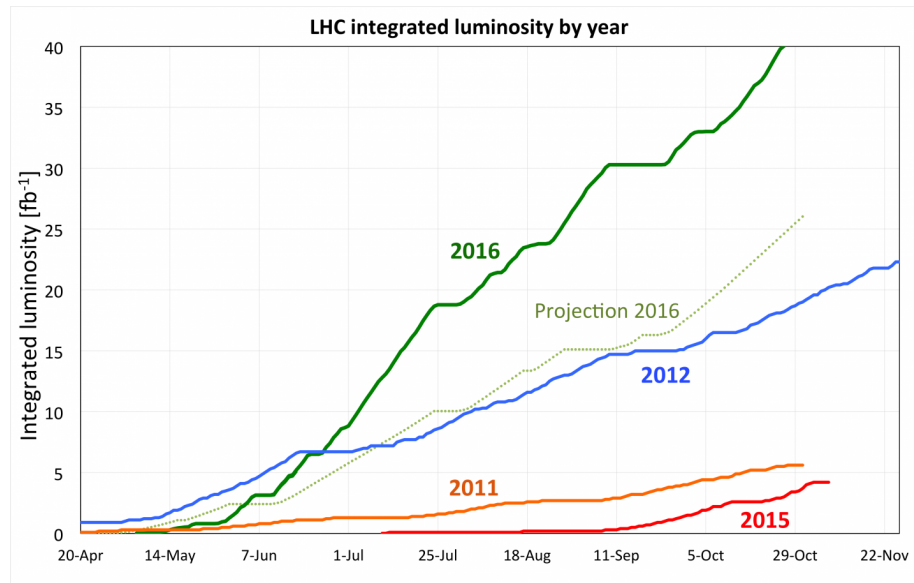
Parametr, který spojuje účinný průřez a frekvenci interakce, se nazývá luminozita. Pokud je detekován proces p s frekvencí R_p a účinným průřezem σ_p , tak rovnice (1.1) je dává do souvislosti s luminozitou L .

$$R_p = L\sigma_p. \quad (1.1)$$

Jinak řečeno luminozita je mírou počtu částic, které jsme schopni vtěsnat do daného prostoru v daném čase. V případě, že je znám celkový účinný průřez, lze za pomoci luminozity vypočítat počet předpokládaných srážek, které by se měly v daném čase odehrát. Pokud se luminozita zintegruje přes časový úsek, získáme tzv. integrovanou luminozitu, která se často používá jako míra výkonosti urychlovače, protože po vynásobení celkovým účinným průřezem se získá celkový počet interakcí. V jednotkách SI je jednotkou luminozity $\text{m}^{-2}\text{s}^{-1}$ a integrované luminozity m^{-2} . V částicové fyzice se častěji používá jednotka barn

$$1\text{b} = 10^{-28}\text{m}^2.$$

Pro lepší představu je na Obrázku 1.1 zobrazen vývoj integrované luminozity pro několik let provozu LHC.



Obrázek 1.1: Znázornění integrované luminozity pro LHC v letech od 2011 do 2016. Převzato z [1]

1.2 Motivace

Z rovnice (1.1) plyne, že chyba měření účinného průřezu závisí nejen na chybě určení frekvence srážek, ale také na chybě měření luminozity. Jelikož LHC stále nabírá více a více dat, je možné snížit chybu určení frekvence srážek. V jisté chvíli bude hlavní příspěvek chyby určení účinného průřezu tvořen převážně chybou měření luminozity. V současnosti tento stav již nastal pro několik důležitých měření na LHC, a proto je velmi důležité prohloubit znalosti stanovení luminozity z důvodu následného snížení dané chyby.

V Kapitole (4) jsou popsány Van der Meer (VdM) skeny, pomocí kterých se kalibruje absolutní hodnota luminozity. Na LHC se urychlují částice v tzv. balících (angl. bunch). V průběhu VdM skenu se měří geometrický překryv srážejících se balíků a to za předpokladu, že jejich tvar je geometricky faktorizovatelný do dvou nezávislých distribucí v průmětu kolmém na směr rychlosti. Tato práce je zaměřena na studium efektu daného předpokladu při použití Gaussovy distribuce pro reprezentaci balíku částic, protože bylo zjištěno, že předpoklad faktorizovatelnosti není vždy splněn a odchylka měření se pak pohybuje v řádech několika procent, což se přímo projevuje do nejistoty stanovení luminozity.

V literatuře [7, kap. 4.3] jsou popsány matematické metody, které se k výpočtu používají. Z nich například vyplývá, že pro balíky popsané Gaussovou distribucí se střed luminozitivního regionu může pohybovat pouze lineárně. Po-

kud při měření dojde k odchylce, vyplývá z toho, že je potřeba použít jinou distribuci k popisu balíků. K těmto typům měření již došlo, na experimentu ATLAS v roce 2012 a na experimentu ALICE v roce 2013. Vyplynulo z nich, že svazky nejsou faktorizovatelné. Proto je jedním z cílů odhadnout chybu při nesplnění předpokladu faktorizovatelnosti. V současnosti se používá na LHC metoda, která není optimální, jelikož má vlastní předpoklady (tvar svazku popisuje dvojitým Gaussovým rozdělením). Proto se zabýváme odhadem přesnosti a výkonnosti této současné metody pro případy, kdy je předpoklad splněn.

1.3 Struktura

Záměrem bakalářské práce je prohloubit znalosti o stanovení luminozity pomocí metody Van der Meer skenu, která je používána na LHC, konkrétně na experimentu ALICE. Práce je strukturována tak, že nejdříve jsou popsány důvody použití urychlovačů v částicové fyzice (Sekce 1.1) se zmínkou potřeby měřit luminozity. Dále je nastíněna motivace této práce (Sekce 1.2). Následuje popis urychlovače LHC (Kapitola 2), který se zabývá jeho vznikem i technologickým vylepšením. Kapitola také zahrnuje popis experimentu ALICE (Sekce 2.2), který je stěžejní pro správné pochopení Kapitoly 4, obzvláště pak pro pochopení Sekce 4.3. Dále je uvedena matematická formulace měření luminozity (Kapitola 3), která je využita v Kapitole následující (4), zabývá se nejen průběhem VdM skenu, ale i informacemi o životě tvůrce této metody. Detailněji je pak popsán průběh metody přímo na experimentu ALICE (Sekce 4.3). Na konci kapitoly o luminozitě jsou uvedeny alternativní metody k jejímu stanovení (Sekce 4.4). Tímto končí literární rešerše a pokračuje praktická část práce. Jako první jsou představeny metody a nástroje – simulace k určení integrálů překryvu (luminozitivního regionu), které byly vytvořeny v programu ROOT [8]. Také je představena metoda určení faktorizace a srovnání numerického modelu s analytickým řešením. Poté následuje předvedení výsledků simulace VdM skenu (Sekce 5.4). Závěrem je vše shrnuto (Kapitola 6).

Kapitola 2

Velký hadronový urychlovač

Tato kapitola stručně představuje CERN a projekt LHC s experimentem ALICE. Zahrnuje informace vhodné k pochopení průběhu VdM skenu na ALICE (Sekce 4.3). Jedná se především o popis detektorů T0 a V0, které slouží k určování luminozity.

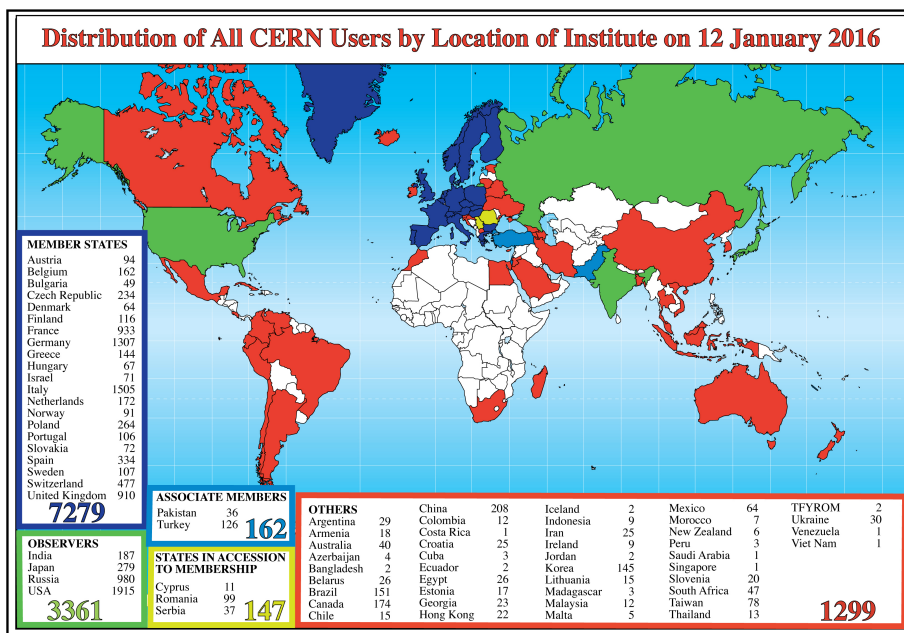
2.1 CERN

V roce 1954 byla založena evropská laboratoř CERN (angl. European Organization for Nuclear Research) s cílem studovat hmotu, ze které se skládá vesmír. Jedná se o veřejnou instituci na jejíž provoz přispívají členské státy a všechny dosažené výsledky přístupné veřejnosti.

Kromě stálých zaměstnanců pracují v laboratořích CERN také tzv. uživatelé, což jsou vědečtí pracovníci zaměstnaní v domovských institucích. Stálých zaměstnanců je 2500 a uživatelů je přes 10000. Přehledně vše zobrazeno na Obrázku 2.1.

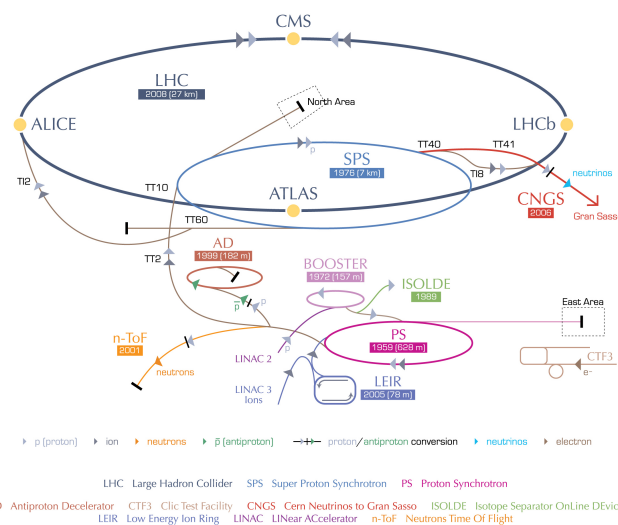
V průběhu let byly v CERNu postaveny urychlovače nabitých částic. První spuštěný urychlovač byl Protonový Synchrotron (PS), který byl dostavěn v roce 1959. V dnešní době je stále používán jako před-urychlovač dalších urychlovacích stupňů. Na něj navazuje SPS (Super Proton Synchrotron) a dále LHC (angl. Large Hadron Collider). Schématické zakreslení urychlovacích stupňů je na Obrázku 2.2.

LHC byl spuštěn v roce 2008 jako nástupce urychlovače LEP (angl. Large Electron-Positron Collider), který místo srážek elektronů s pozitrony (v případě LEP), používá protony, případně jádra olova. Použitím těžších částic (protonů místo elektronů) je možné dosáhnout vyšších energií a to z důvodu nižšího synchrotronového záření, které vzniká při zakřívování dráhy nabitých částic.



Obrázek 2.1: Mapa světa, graficky odlišující členské státy (modře), pozorovatele (zeleně), přidružené státy (bledě modře), státy usilující o vstup žlutě a ostatní státy podílející se na výzkumu (červeně). Zároveň je zobrazen počet uživatelů z daných zemí. Převzato z [2].

CERN's accelerator complex



Obrázek 2.2: Schématické zakreslení urychlovačů v CERNu. Z PS jsou částice o energii 25 GeV poslány do SPS a urychleny na energii 450 GeV. Z SPS putují částice do LHC, kde jsou urychleny na 6,5 TeV. Převzato z [3].

V současnosti po zdokonalení během technologické přestávky je LHC schopen urychlit protony na energii 6,5 TeV. Při porovnání s předchůdcem, který měl stejné rozměry (LHC používá stejný tunel jako LEP), je dosažitelná energie vyšší přibližně 30-ti násobně (základní údaje jsou v Tabulce 2.1). Částečně je to z důvodu zvýšení hmotnosti částic, ale také z důvodu použití supravodivých magnetů, které generují magnetické pole o síle 8 T. Proto je možné zakřivit dráhu i vysokoenergetickým protonům/jádrům olova. K tomu, aby se magnety staly supravodivé, se musí ochladit na teplotu nižší než 10 K a pro generování dostatečně silného magnetického pole dokonce na 1,9 K. Udržení takto nízkých teplot je extrémně energeticky náročné. V případě, že by se teplota zvýšila nad kritickou úroveň, mohlo by dojít k výbuchu, jelikož magnety prochází 11400 A. Stalo se tak při prvním spuštění LHC. Část supravodivých magnetů přestala být supravodivá, magnety se zahřály, čímž se zvýšil tlak v chladicím ústrojí a došlo k výbuchu. Po opravách byl znovu spuštěn v roce 2009 a od té doby funguje bez podobného incidentu.

Samotný urychlovač LHC by bez detektorů částic neměl vědecké využití. Proto je několik experimentálních míst, kde se svazky srážejí a detekují se produkty srážek. Jedná se o experimenty ALICE (angl. A Large Ion Collider Experiment), ATLAS (angl. A Toroidal LHC ApparatuS), CMS (angl. Compact Muon Solenoid) a LHCb (angl. Large Hadron Collider beauty). ATLAS a CMS potvrdily existenci Higgsova bosonu v roce 2012, dále zkoumají jeho vlastnosti a hledají známky supersymetrie. Kdežto ALICE je zaměřená na srážky iontů olova, případně proton-olovo. Popis součástí detektoru ALICE je v následující sekci.

Tabulka 2.1: Základní údaje LHC. Přeloženo z [9].

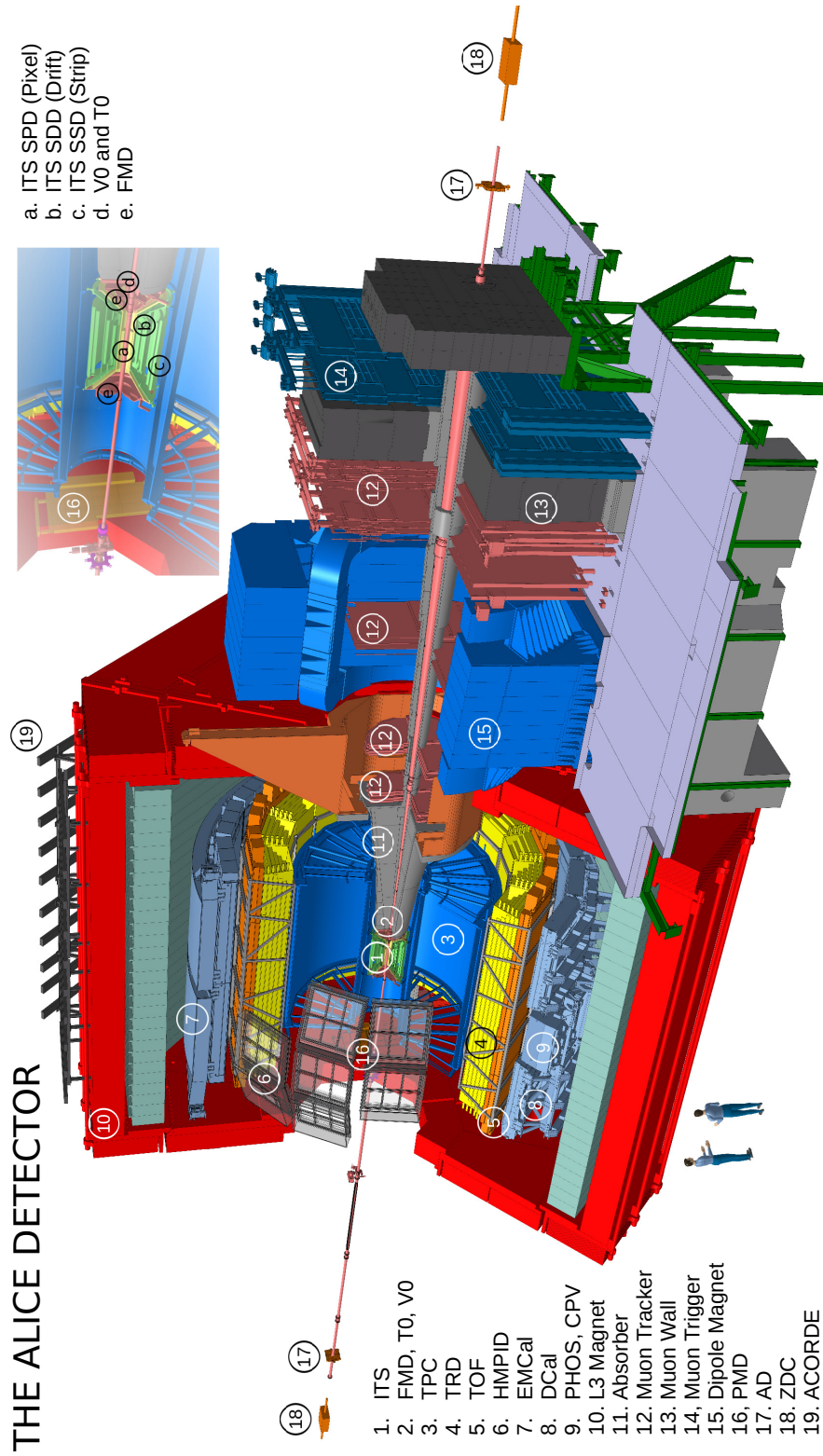
Obvod	26 659 m
Operační teplota supravodivých magnetů	1,9 K
Celkový počet magnetů	9593
Maximální energie protonů	6,5 TeV
Maximální energie nukleonů (v Pb)	2,56 TeV
Maximální magnetické pole dipólů	7,74 T
Počet balíků/shluků v protonovém svazku	2808

2.2 ALICE

Experiment ALICE je soubor detektorů těžkých iontů primárně zaměřených na studium silné interakce. Celková velikost je 16m×16m×26m a přibližná hmotnost 10000 tun. Nejblíže svazku se nachází vnitřní dráhový detektor ITS (angl. Inner Tracking System), dále cylindrická časově projekční komora TPC (angl. Time-Projection Chamber), detektor doby letu TOF (angl. Time-of-Flight), Čerenkův detektor HMPID (angl. High Momentum particle identification detector) a detektor přechodového záření TRD (angl. Transition Radiation Detector).

V dopředném směru se nachází mionový spektrometr. Kromě těchto vyjmenovaných dílů je součástí i pár menších detektorů, ze kterých jsou pro stanovení luminozity nejdůležitější dopředné detektory T0 a V0.

Nákres ALICE je zobrazen na Obrázku 2.2. Dokumentace experimentu [10] je velmi rozsáhlá a v této práci nelze obsáhnout všechny detektory podrobně. Proto bude dále pojednáno pouze o detektorech přímo použitých při VdM skenu, který popisuje článek [6] a při kterém byly použity detektory T0 a V0.



Obrázek 2.3: Schématický náčrt experimentu ALICE s popisem jednotlivých částí. Převzato z [4].

2.2.1 Detektor V0

Scintilační detektor V0 se skládá ze dvou scintilačních polí V0A a V0C, které mají malý úhlový rozsah a jsou připevněny na opačných stranách experimentu ALICE. V0 slouží k několika účelům:

- Udává tzv. minimum-bias trigger pro centrální detektory při srážkách proton-proton nebo olovo-olovo.
- Udává centralitu srážek pomocí zaznamenané multiplicity při srážce.
- Je používán při měření luminozity.

Detektor V0A je nainstalován 329 cm od interakčního bodu na straně opačné k mionovému spektrometru, kdežto V0C je 88 cm od interakčního bodu na přední straně hadronového absorberu. Každý se skládá z 32 samostatných scintilátorů, které jsou uspořádány do 4 kruhů po 8 elementech, kde každý element zabírá 45°. Pro V0A je tloušťka jednoho segmentu 2,5 cm a pro V0C 2,0 cm. Další odlišností mezi V0A a V0C je uspořádání vláken měničů vlnové délky WLS fibres (angl. Wave-length shifting fibres). Pro V0A jsou rozložena ve vzdálenosti 1 cm od sebe na každé straně scintilátoru a následně sdružena a vyvedena do fotonásobiče. U V0C je situace jiná. Všechny WLS vlákna jsou sdružena na straně scintilátoru a vyvedena jsou pouze dvě vlákna, která jsou následně připojena na optické kabely, jež vedou do fotonásobiče [10, str. 133].

Důležitým faktorem je rychlost, se kterou detektor V0 pracuje. Časové rozlišení je lepší než 1 ns, a proto jej lze použít pro trigrování dalších komponent. Mezi další důležité aspekty se řadí radiační odolnost. Veškerá elektronika je oddělena od samotného detektoru, tudíž se nepředpokládá jakékoliv poškození.

Kromě vysoké rychlosti vyčítání je u detektoru V0 důležitá citlivost na jednotlivé částice a také pokrytí velkého regionu pseudorapidity. Proto je jeho efektivita trigrování přibližně 75% při nepružných proton-protonových srážkách. Tyto parametry umožňují snímat vysokou frekvenci srážek a zachovávat nízkou nejistotu měření.

2.2.2 Detektor T0

Čerenkův detektor T0 se skládá ze dvou polí, v každém poli je 12 elementárních detektorů, které jsou stejně jako pole V0 připevněny na opačných stranách interakčního bodu. Princip činnosti je založen na jevu Čerenkova záření: částice, která prolétá prostředím rychleji než světlo, vyzařuje elektromagnetické vlny. Účelem detektoru T0 je:

- Určit čas srážky pro detektor TOF, kde je požadovaná přesnost 50 ps.
- S přesností ± 1.5 cm určit polohu ve směru rychlosti primárního vertexu každé interakce a sloužit tak jako trigger.
- Sloužit jako redundantní detektor k detektoru V0 (centralita srážek a minimum-bias trigger).

Detektor T0A se nachází 370 cm od interakčního bodu na stejné straně jako V0A a T0C je lokalizován na opačné straně ve vzdálenosti 70 cm od interakčního bodu. Každý element je sestaven z fotonásobičové trubice PMT (angl. photomultiplier tube) (30 mm v průměru, 45 mm na délku) opticky spojené s křemenným blokem (20 mm v průměru, tloušťka 20 mm). Veškerá použitá elektronika pro okamžité vyčtení detektoru je vysokorychlostní s mrtvou dobou nižší než 25 ns.

Výhodou detektoru T0 je nízký poměr pozadí vůči signálu a také velká časová stabilita. Tato stabilita umožňuje extrapolovat výsledky VdM skenu do zbytku pracovního období s nízkou chybou. Dále akceptance T0 překrývá kompletně akceptanci V0, takže je možné sledovat časovou stabilitu detektoru V0.

Kapitola 3

Luminozita z parametrů urychlovače

V této kapitole je prezentována matematická formulace výpočtu relativní hodnoty luminozity. Kapitola je stavěna v pořadí od čelních srážek (Sekce 3.1), přes srážky s posunutím (Sekce 3.2), které se používají při VdM skenu, až po srážky pod úhlem (Sekce 3.3).

3.1 Čelní srážky

V případě, že svazky mají podélnou strukturu a srážejí se čelně, tedy bez posunutí nebo srážkového úhlu, lze luminozitu určit pomocí rovnice (3.1).

$$L = Kn_b f N_1 N_2 \int_{-\infty}^{\infty} S_1(x, y, z, t) S_2(x, y, z, t) dx dy dz dt. \quad (3.1)$$

K vypočtení její hodnoty je třeba znát parametry: počet částic v balíku N_1 a N_2 , frekvence srážek f , počet balíků ve svazku n_b , kinematický faktor K a především distribuci rozdělení částic v každém svazku S_1 a S_2 . Ty udávají pravděpodobnost nalezení částice v daném místě a čase. Jedním z předpokladů, které jsou použity je časová nezávislost rozložení částic v balíku (až na pohyb v z -ové ose). K odhadu rozdělení částic se používá tzv. VdM sken, o kterém bude pojednáno později.

Kinematický faktor závisí na úhlu pod kterým se svazky srážejí a je definován rovnicí (3.2),

$$K = \sqrt{(v_1 - v_2)^2 - \frac{(v_1 \times v_2)^2}{c^2}}, \quad (3.2)$$

kde v_1 a v_2 jsou vektory rychlosti balíků (pro čelní srážky $K = 2c$). Čelní srážky umožňují rovnici (3.1) zjednodušit a to tak, že se distribuční funkce $S(x, y, z, t)$ přepíše do tvaru $S(x, y, z \pm ct)$. Pro Gaussovy distribuce (bez korelací)

lze dokonce celý proces zjednodušit, díky faktorizaci do kolmých směrů, zapsáno následovně: $S(x, y, z \pm ct) = S_x(x)S_y(y)S_z(z \pm ct)$. V této části předpokládáme, že svazek je tvořen 3D Gaussovou distribucí s rozptylem σ_x^2 v ose x , σ_y^2 v ose y a σ_z^2 v ose z (což je i směr pohybu). V praxi je časté, že $\sigma_z \gg \sigma_x, \sigma_y$. Tudíž i pro svazky, které nejsou dostatečně dobře popsány Gaussovou distribucí v rovině kolmé ke směru pohybu, je možné popsat rozložení částic v z -ové ose pomocí Gaussovy distribuce s dostatečnou přesností. Pro ilustraci je uveden výpočet $\int_{-\infty}^{\infty} S_1(z + ct)S_2(z - ct) dz dt$, kde pro jednoduchost se předpokládá, že oba svazky mají stejnou hodnotu rozptylu σ^2 .

$$L_{zt} = \int_{-\infty}^{\infty} S_1(z + ct)S_2(z - ct) dz dt \quad (3.3)$$

$$= \left(\frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma} \right)^2 \int_{-\infty}^{\infty} \exp\left(-\frac{(z + ct)^2}{2\sigma^2}\right) \exp\left(-\frac{(z - ct)^2}{2\sigma^2}\right) dz dt \quad (3.4)$$

$$= \frac{1}{2\pi\sigma^2} \int_{-\infty}^{\infty} \exp\left(-\frac{(z^2 + 2zct + c^2t^2) + (z^2 - 2zct + c^2t^2)}{2\sigma^2}\right) dz dt \quad (3.5)$$

$$= \frac{1}{2\pi\sigma^2} \int_{-\infty}^{\infty} \exp\left(-\frac{(z^2 + c^2t^2)}{\sigma^2}\right) dz dt, \quad (3.6)$$

což lze jednoduše separovat a pomocí standardního integrálu (3.7) vypočítat,

$$\int_{-\infty}^{\infty} \exp(-ax^2 - bx) = \sqrt{\frac{\pi}{a}} \exp\left(\frac{b^2}{4a}\right). \quad (3.7)$$

$$\begin{aligned} L_{zt} &= \frac{1}{2\pi\sigma^2} \int_{-\infty}^{\infty} \exp\left(-\frac{z^2}{\sigma^2}\right) dz \int_{-\infty}^{\infty} \exp\left(-\frac{c^2t^2}{\sigma^2}\right) dt \\ &= \frac{1}{2\pi\sigma^2} \sqrt{\pi\sigma^2} \sqrt{\frac{\pi\sigma^2}{c^2}} = \frac{1}{2c}. \end{aligned} \quad (3.8)$$

Tímto je zjednodušena rovnice luminozity na (3.9), která ale platí pouze v případě čelních srážek. Dále bude předveden výpočet luminozity pro Gaussovou distribuční funkci v rovině x, y .

$$L_{\text{Head}} = n_b f N_1 N_2 \int_{-\infty}^{\infty} S_1(x, y) S_2(x, y) dx dy. \quad (3.9)$$

Vychází se z již známé rovnice (3.9), do které je dosazeno za S_i .

$$\begin{aligned}
L_{\text{HeadGauss}} &= n_b f N_1 N_2 \int_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{2\pi\sigma_{1x}\sigma_{1y}} \exp\left(-\frac{x^2}{2\sigma_{1x}^2} - \frac{y^2}{2\sigma_{1y}^2}\right) \\
&\quad \frac{1}{2\pi\sigma_{2x}\sigma_{2y}} \exp\left(-\frac{x^2}{2\sigma_{2x}^2} - \frac{y^2}{2\sigma_{2y}^2}\right) dx dy \quad (3.10) \\
&= \frac{n_b f N_1 N_2}{4\pi^2\sigma_{1x}\sigma_{1y}\sigma_{2x}\sigma_{2y}} \int_{-\infty}^{\infty} \exp\left(-x^2 \frac{(\sigma_{1x}^2 + \sigma_{2x}^2)}{2\sigma_{1x}^2\sigma_{2x}^2}\right) \\
&\quad \exp\left(-y^2 \frac{(\sigma_{1y}^2 + \sigma_{2y}^2)}{2\sigma_{1y}^2\sigma_{2y}^2}\right) dx dy \\
&= \frac{n_b f N_1 N_2}{4\pi^2\sigma_{1x}\sigma_{1y}\sigma_{2x}\sigma_{2y}} \sqrt{\frac{2\pi\sigma_{1x}^2\sigma_{2x}^2}{(\sigma_{1x}^2 + \sigma_{2x}^2)}} \sqrt{\frac{2\pi\sigma_{1y}^2\sigma_{2y}^2}{(\sigma_{1y}^2 + \sigma_{2y}^2)}} \\
&= \frac{n_b f N_1 N_2}{2\pi\sqrt{(\sigma_{1x}^2 + \sigma_{2x}^2)(\sigma_{1y}^2 + \sigma_{2y}^2)}} \quad (3.11)
\end{aligned}$$

Luminozita čelních kolíží pro svazky s Gaussovou distribucí částic je tedy určena rovnicí (3.11). Ta je explicitně určena pomocí rozptylu obou rozdělení a to jak ve směru x , tak ve směru y a parametrů urychlovače.

V praxi je chyba určení rozptylu distribucí částic jedním z hlavních zdrojů chyby určení luminozity. Přesnější, nejen z důvodu určení rozptylu, ale i z důvodu odhadu distribuce, je tzv. Van der Meer sken, který umožňuje změřit hodnotu integrálu součinu distribucí svazků. Tato metoda je založena převážně na vzájemném posuvu svazků. Matematický popis posuvu svazků je v následujícím oddíle.

3.2 Srážky s posunutím

3.2.1 Odvození rovnic pro posunuté středy svazků

Důvodů k využití srážky svazků, které jsou v rovině kolmé k vektoru rychlosti posunuté, může být několik. Jedním z faktů je, že tím lze efektivně snížit luminozitu. V řeči matematiky to znamená, že pro separaci svazků v ose y , ozn. Δy pak platí, že $y'_1 = y_1 + \frac{\Delta y}{2}$ a $y'_2 = y_2 - \frac{\Delta y}{2}$. Tyto y' stačí dosadit do známé rovnice (3.9)¹. Jelikož Δy je nezávislé na y , lze v případě předpokladu normálního rozdělení člen (viz níže)

$$S_{iy} = \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma_y} \exp\left(-\frac{\left(y \pm \frac{\Delta y}{2}\right)^2}{2\sigma_y^2}\right) \quad (3.12)$$

¹Dále pro zjednodušení předpokládáme, že $\sigma_{1y} = \sigma_{2y}$

rozdělit na součin, a následně integrovat, jako v případě (3.11). Výsledkem je rovnice (3.13),

$$L_{\text{OffsetGauss}} = \frac{n_b f N_1 N_2}{2\pi \sqrt{\sigma_{1x}^2 + \sigma_{2x}^2} \sqrt{2\sigma_y^2}} \exp\left(-\frac{(\Delta y)^2}{4\sigma_y^2}\right). \quad (3.13)$$

Označme si pro jednoduchost

$$C_{\text{off}}(\Delta y) = \exp\left(-\frac{(\Delta y)^2}{4\sigma_y^2}\right). \quad (3.14)$$

Z rovnice (3.13) je patrné, že dochází ke snížení luminozity, jelikož funkce C_{off} má globální maximum pro $\Delta y = 0$. Stejným postupem lze získat rovnici pro posunutí v libovolném směru,

$$L_{\text{OffsetGauss}} = \frac{n_b f N_1 N_2}{4\pi \sigma_x \sigma_y} C_{\text{off}}(\Delta x, \Delta y). \quad (3.15)$$

Člen $C_{\text{off}}(\Delta x, \Delta y)$ vychází z rovnice (3.14) a je popsán následovně

$$C_{\text{off}}(\Delta x, \Delta y) = \exp\left(-\frac{(\Delta x)^2}{4\sigma_x^2}\right) \exp\left(-\frac{(\Delta y)^2}{4\sigma_y^2}\right). \quad (3.16)$$

3.2.2 Vztah k VdM skenu

Jak bylo avizováno na konci Sekce 3.1, srážky s posunutím jsou primárním zdrojem při určování rozptylu distribuce částic ve svazcích. Luminozita je pro různá posunutí pouze funkcí $L = L(\Delta x, \Delta y, \sigma_x, \sigma_y)$. Pro posunutí, kde jedna ze souřadnic zůstává konstantní, je možné přímo získat hodnotu rozptylu ve směru posunu. Přesný popis průběhu VdM skenu, včetně odkazu na původní článek je v Kapitole 4.

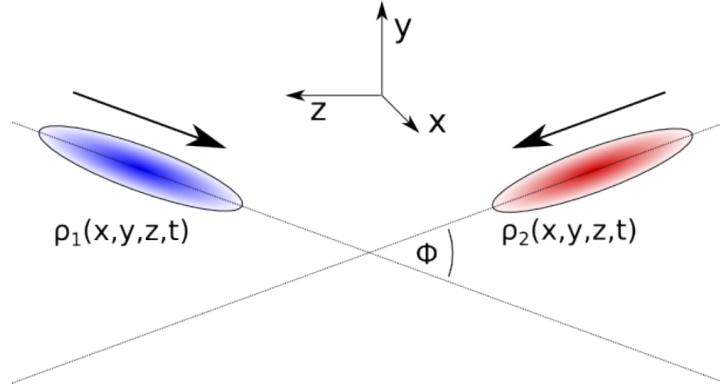
Kromě posuvu se v praxi srážejí svazky také pod úhlem, ale z jiného důvodu, než je tomu u srážek s posuvem. O tom pojednává následující sekce, která kromě matematické formulace vysvětlí i praktické využití na LHC.

3.3 Kolize svazků pod úhlem

Důvody k využití těchto srážek budou ponechány na konec této sekce a pozornost je nyní zaměřena na změnu luminozity v případě, že svazky svírají vůči sobě úhel θ – viz Obrázek 3.1.

Rotací souřadnic jsou získány transformační vztahy,

$$\begin{aligned} x'_1 &= x \cos\left(\frac{\theta}{2}\right) - z \sin\left(\frac{\theta}{2}\right), & z'_1 &= z \cos\left(\frac{\theta}{2}\right) + x \sin\left(\frac{\theta}{2}\right), \\ x'_2 &= x \cos\left(\frac{\theta}{2}\right) + z \sin\left(\frac{\theta}{2}\right), & z'_2 &= z \cos\left(\frac{\theta}{2}\right) - x \sin\left(\frac{\theta}{2}\right). \end{aligned} \quad (3.17)$$



Obrázek 3.1: Zobrazení rotace souřadnic pro každý ze svazků (balíků). Převzato z [5].

Jelikož nelze nejprve zintegrovat distribuce přes z , t je potřeba použít rovnici (3.1). Pro ilustraci je provedena integrace pro normální rozdělení. Do rovnice (3.1) je tedy dosazeno (3.17),

$$L_{\text{Angle}} = K n_b f N_1 N_2 \int_{-\infty}^{\infty} S_1(x'_1, y, z'_1, t) S_2(x'_2, y, z'_2, t) dx dy dz dt. \quad (3.18)$$

Kinematický faktor již není roven $2c$, protože vektory rychlostí svazků již neleží na přímce. Úpravou rovnice (3.2) získáme $K = 2 \cos^2(\frac{\theta}{2})$. Dále pro jednoduchost označme $\phi = \theta/2$, integrály jako G a pokusme se je spočítat:

$$\begin{aligned} G &= \int_{-\infty}^{\infty} S_1(x'_1, y, z'_1, t) S_2(x'_2, y, z'_2, t) dx dy dz dt \\ &= \frac{1}{2\pi\sigma_y^2} \sqrt{\pi\sigma_y^2} \frac{1}{2\pi\sigma_x^2} \frac{1}{2\pi\sigma_z^2} \int_{-\infty}^{\infty} \exp\left(-\frac{x_1'^2 + x_2'^2}{2\sigma_x^2}\right) \\ &\quad \exp\left(-\frac{(z_1' - t)^2}{2\sigma_z^2}\right) \exp\left(-\frac{(z_2' + t)^2}{2\sigma_z^2}\right) dx dz dt \\ &= \frac{\sqrt{\pi}}{8\pi^3\sigma_x^2\sigma_y\sigma_z^2} \int_{-\infty}^{\infty} \exp\left(-\frac{x^2 \cos^2(\phi) + z^2 \sin^2(\phi)}{\sigma_x^2}\right) \\ &\quad \exp\left(-\frac{z_1'^2 + z_2'^2}{2\sigma_z^2}\right) \exp\left(-\frac{t^2 + t(z_2' - z_1')}{\sigma_z^2}\right) \\ &= \frac{\sqrt{\pi}\sqrt{\pi\sigma_z^2}}{8\pi^3\sigma_x^2\sigma_y\sigma_z^2} \int_{-\infty}^{\infty} \exp\left(-\frac{x^2 \cos^2(\phi) + z^2 \sin^2(\phi)}{\sigma_x^2}\right) \\ &\quad \exp\left(-\frac{z^2 \cos^2(\phi) + x^2 \sin^2(\phi)}{\sigma_z^2}\right) \exp\left(-\frac{x^2 \sin^2(\phi)}{\sigma_z^2}\right) dx dz \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
G &= \frac{1}{8\pi^2\sigma_x^2\sigma_y\sigma_z} \int_{-\infty}^{\infty} \exp\left(-\frac{x^2\cos^2(\phi) + z^2\sin^2(\phi)}{\sigma_x^2}\right) \exp\left(-\frac{z^2\cos^2(\phi)}{\sigma_z^2}\right) dx dz \\
&= \frac{\sqrt{\pi\sigma_x^2}}{8\pi^2\sigma_x^2\sigma_y\sigma_z\cos(\phi)} \int_{-\infty}^{\infty} \exp\left(-\frac{z^2\sin^2(\phi)}{\sigma_x^2}\right) \exp\left(-\frac{z^2\cos^2(\phi)}{\sigma_z^2}\right) dz \\
&= \frac{\sqrt{\pi\sigma_x^2} \sqrt{\frac{\pi\sigma_x^2\sigma_z^2}{\sigma_x^2\cos^2(\phi) + \sigma_z^2\sin^2(\phi)}}}{8\pi^2\sigma_x^2\sigma_y\sigma_z\cos(\phi)} \\
&= \frac{1}{8\pi\sigma_y\cos(\phi)\sqrt{\sigma_x^2\cos^2(\phi) + \sigma_z^2\sin^2(\phi)}} \tag{3.19}
\end{aligned}$$

V rovnici (3.19) byla vypočítána hodnota integrálu a je možno ji tedy dosadit do rovnice (3.18) pro luminozitu. K získání elegantnějšího tvaru je vhodné pro malé úhly ϕ aproximovat $\tan(\phi) \approx \phi$. Po všech nutných úpravách lze z rovnice (3.20) vypočítat korekci pro srážky svazků pod úhlem θ .

$$L_{\text{AngleGauss}} = \frac{fn_b N_1 N_2}{4\pi\sigma_x\sigma_y} C_{\text{Angle}}(\theta), \quad C_{\text{Angle}}(\theta) = \frac{1}{\sqrt{1 + \left(\frac{\theta\sigma_z}{2\sigma_x}\right)^2}}. \tag{3.20}$$

3.3.1 Situace na LHC

Jak je uvedeno v úvodu počet balíků při plném naplnění LHC je 2808 [9] a vzájemně jsou si vzdáleny pouze 7,5 metrů (vyjádřeno v čase – 25 ns). Mohlo by se tedy stát, že se po srážce v interakčním bodě (tam, kde jsme na kolizi připraveni), srazí o kus dále balík následující s balíkem z minulé kolize nebo se satelitními buckety ². A to je přesně proces, kterému chceme zabránit (náhodným srážkám balíků v detektoru). Navíc by se balíky mohly navzájem ovlivňovat a tím snižovat kvalitu svazku.

Z toho důvodu je na LHC nastaven úhel srážky na $\approx 300 \mu\text{rad}$. Zároveň je ale luminozita snížena faktorem $C_{\text{Angle}} \approx 0.82$ (pro $\sigma_x = 16 \mu\text{m}$ a $\sigma_z = 7,7 \text{ cm}$). Existují také urychlovače, které srážkový úhel nemají (RHIC) nebo jej mají mnohonásobně větší (ISR – $\theta \approx 18 \text{ deg}$)[11, str. 365].

²Každý balík náleží virtuální obálce nazývané anglicky bucket. Bucket reflektuje parametry urychlovací radiofrekvenční dutiny. Na LHC je bucket "dlouhý" 2,5 ns. Může se stát, že z bucketu ve kterém je balík přejdou částice do prázdného bucketu, který pak bývá označován jako satelitní bucket a jakékoliv interakce s tímto bucketem označovány jako satelitní.

Kapitola 4

Van der Meer sken

Metoda, která se řadí mezi nejpoužívanější k určení luminozity na hadronových urychlovačích, je pojmenována po nizozemském fyzikovi a laureátu nobelovy ceny Simonu van der Meerovi. První článek, který popisuje tuto metodu byl publikován v roce 1968 [12]. Do té doby byl nejčastěji, k určení luminozity, používán rozptyl na vlákně. Navrhovaná metoda v uvedeném článku měla z teoretické předpovědi být méně přesná, a tak pouze sloužit jako doplňková na urychlovači ISR. Výhodou je, že k měření není potřeba speciální vybavení. Metoda je založena na vzájemném posuvu svazků a měřením počtu interakcí mezi nimi.

Před matematickým popisem bude stručně představen profesní život Simona van der Meera. Dále bude blíže popsán průběh skenu na experimentu ALICE (Sekce 4.3) a nakonec budou popsány další možné metody určení absolutní hodnoty luminozity (Sekce 4.4).

4.1 Simon van der Meer

Narozen v roce 1925 v Haagu jako třetí dítě v rodině van der Meerových. Jeho otec byl učitel a matka z učitelské rodiny, tudíž vzdělání dětí bylo v jejich rodině hlavní prioritou. Vystudoval střední školu v roce 1943, v době, kdy bylo Nizozemí okupováno Německem a kdy byly vysoké školy zavřené. Proto začal studovat Technickou univerzitu v Delftu až v roce 1945. Po získání inženýrského titulu pracoval ve výzkumných laboratořích Philips, převážně na vysokonapěťovém zařízení a elektronice pro elektronovou mikroskopii. Do Ženevy se přestěhoval v roce 1956 a začal pracovat pro CERN. Zpočátku byl pověřen technickým designem. Zároveň se ale zlepšovala jeho orientace ve fyzice urychlovačů a již v roce 1960 navrhl fokusovací zařízení svazku neutrin. Až o sedm let později se vrátil, podle svých slov, k více technické práci, když zajišťoval napájení magnetů a pracoval na metodě kalibrace luminozity. Je překvapivé, jakým způsobem na svůj objev nahlížel. Nejlépe to vystihuje citace z jeho autobiografie: *"I kept up with accelerator ideas, however, and worked (during my ISR period) on a*

method for the luminosity calibration of storage rings and on stochastic cooling. The latter was, of course, aimed at increasing the ISR luminosity, but practical application seemed difficult at the time, mainly because the high beam intensity in the ISR would have made the cooling very slow. After developing a primitive theory (1968) I therefore did not pursue this subject. However, the work was taken up by others and in 1974 the first experiments were done in the ISR."[13] Další z jeho úspěchů byl vynález způsobu akumulace velkého počtu antiprotonů v urychlovači, za což mu byla udělena Nobelova cena za fyziku v roce 1984. Do konce své kariéry působil v CERNu a v roce 1990 odešel do důchodu. Zemřel v roce 2011.

4.2 Matematická formulace

Tato část bude zaměřena na získání matematického popisu, který umožní naka-librovat detektor tak, že výsledkem bude získání hodnoty luminozity pro srážky svazků. Nebude vycházet z původního článku [12], ale bude využito odvození z článku [5], jelikož lépe znázorňuje, jak se měření provádí. V Sekci 3.2 byla zmíněna potřeba zavést luminozitu pro srážky s posunutím. Zde bude postup podobný, nicméně nebude za distribuce svazků (S_1, S_2) dosazeno. Pro jednoduchost se bude pohybovat pouze jeden svazek. Tedy luminozita pro svazky s posuvem o $(\Delta x_0, \Delta y_0)$ je

$$L_{\text{VdM}}(\Delta x_0, \Delta y_0) = f n_b N_1 N_2 \int_{-\infty}^{\infty} S_{1x}(x) S_{2x}(x + \Delta x_0) dx \int_{-\infty}^{\infty} S_{1y}(y) S_{2y}(y + \Delta y_0) dy. \quad (4.1)$$

Možnost rozdělit distribuce na dvě nezávislé složky je **jeden z předpokladů** pro správnou funkci této metody. V Sekci 5.3 se tento předpoklad bude řešit podrobněji. Pro zvolenou separaci Δy_0 , která je momentálně ponechána fixní, bude získána závislost luminozity pouze na Δx ,

$$L_{\text{VdM}}(\Delta x, \Delta y_0) = C_y \int_{-\infty}^{\infty} S_{1x}(x) S_{2x}(x + \Delta x) dx, \quad (4.2)$$

kde C_y je konstanta, kterou je potřeba určit. Jelikož luminozita není přímo měřitelná, rovnice (4.2) bude změněna za použití vztahu mezi luminozitou a účinným průřezem (1.1). Jedinou měřitelnou veličinou v rovnici (4.3) je právě $R(\Delta x, \Delta y_0)$ a σ_{vis} je neznámý účinný průřez srážky.

$$R(\Delta x, \Delta y_0) = \sigma_{\text{vis}} C_y \int_{-\infty}^{\infty} S_{1x}(x) S_{2x}(x + \Delta x) dx. \quad (4.3)$$

V případě zintegrování rovnice (4.3) se při využití toho, že distribuce jsou normalizované, získá přímo

$$\int_{-\infty}^{\infty} R(\Delta x, \Delta y_0) d\Delta x = \sigma_{\text{vis}} C_y. \quad (4.4)$$

Po zpětném dosazení (4.4) do rovnice (4.3) je získáno vyjádření integrálu součinu distribucí,

$$\int_{-\infty}^{\infty} S_{1x}(x)S_{2x}(x + \Delta x_0) dx = \frac{R(\Delta x_0, \Delta y_0)}{\int_{-\infty}^{\infty} R(\Delta x, \Delta y_0) d\Delta x}. \quad (4.5)$$

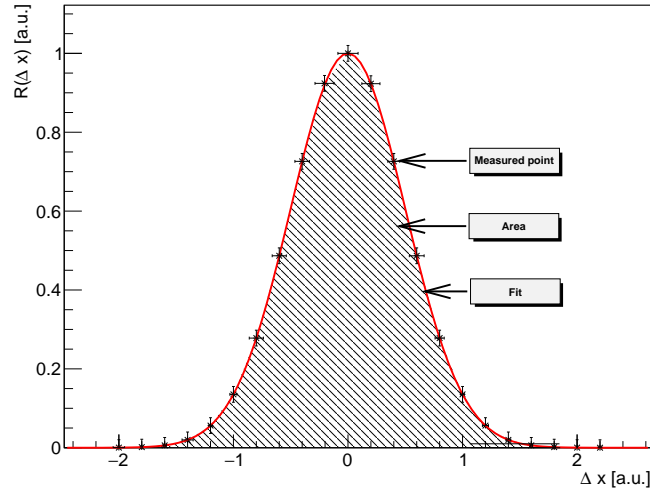
To je velmi důležitý výsledek, protože stačí proměřit závislost počtu interakcí na posunutí a tím získat odhad součinu integrálů, který je nutný pro výpočet luminozity. Konečná rovnice pro luminozitu tedy vypadá následovně

$$L_{\text{VdM}}(\Delta x_0, \Delta y_0) = f n_b N_1 N_2 \frac{R(\Delta x_0, \Delta y_0)}{\int_{-\infty}^{\infty} R(\Delta x, \Delta y_0) d\Delta x} \frac{R(\Delta x_0, \Delta y_0)}{\int_{-\infty}^{\infty} R(\Delta x_0, \Delta y) d\Delta y}. \quad (4.6)$$

V literatuře se pak často zavádí efektivní výška svazku $h_{x,y}$, která pro jakýkoliv tvar balíku značí

$$h_x = \frac{\int_{-\infty}^{\infty} R(\Delta x, \Delta y_0) d\Delta x}{R(\Delta x_0, \Delta y_0)}. \quad (4.7)$$

Pravděpodobně z rovnice (4.6) není jasné jak přesně vypadá výstup VdM skenu. Ten je patrný na Obrázku 4.1, kde vyšrafovaná část je právě plocha pod naměřenou křivkou (tedy $\int_{-\infty}^{\infty} R(\Delta x, \Delta y_0) d\Delta x$). V tomto exemplárním případě se jedná o Gaussovo rozložení, ale nemusí to vždy platit. Existují další funkce, kterými lze průběh počtu interakcí nafitovat, což je tématem Sekce 4.2.1.



Obrázek 4.1: Měření frekvence srážek jednoho kroku x -ového skenu reprezentováno černými body, které se následně nafitují vhodnou křivkou (zde Gaus) červeně, a nakonec se pomocí fitu vypočte plocha pod křivkou šrafovaně.

Než budou zmiňovány funkce, které se používají nejčastěji, je nutné poukázat na jistá fakta ohledně měření závislosti frekvence interakcí na separaci svazků. Jedná se totiž o kompromis mezi dobou trvání měření, což umožňuje skenovat více bodů a z toho vyplývající přesnější fit, a zároveň mezi tím, že se v průběhu snižuje počet částic v balíku. Také nemá smysl zvyšovat počet skenovaných bodů do nekonečna, protože celková chyba měření je dána více složkami než jen chybou určení plochy pod křivkou skenu. Skenovat více bodů tudíž nemá smysl.

4.2.1 Fitovací funkce

Tato část pojednává o nejčastěji používaných funkcích k fitování VdM skenů. Některé jsou podloženy fundamentálními poznatky, jiné dobře popisují průběh skenu. Víceméně nezáleží na tom jaká funkce je použita, dokud dostatečně dobře popisuje změřenou závislost.

Gaussovo rozdělení

Jehož křivka se použije pro fit, je vůbec nejjednodušší možností fitu. Ten se zároveň opírá o fundamentální znalost toho, že konvolucí dvou Gaussových rozdělení je zase Gaussovo rozdělení. Graf, který zobrazuje takovouto křivku, je na Obrázku 4.1. Křivka frekvence interakcí R pro x -ovou separaci je dána rovnicí (4.8), kde K je pouze škálovací konstanta a σ je rozptyl.

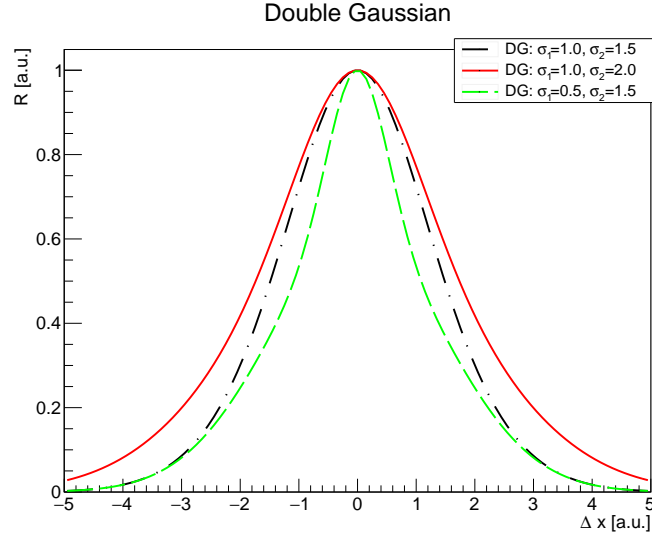
$$R(\Delta x) = \frac{K}{2\pi\sigma} \exp\left(-\frac{\Delta x}{2\sigma^2}\right). \quad (4.8)$$

Dvojitě Gaussovo rozdělení

je součtem dvou Gaussových rozdělení, které mají stejnou hodnotu středu, ale rozdílnou hodnotu rozptylu. Kromě toho obsahují navíc faktor "váhy" w , který má hodnoty v rozmezí $[0, 1]$ (Pro mezní hodnoty se jedná o jednoduché Gaussovo rozdělení) a který je použit v rovnici (4.9). Tato rovnice určuje frekvenci interakcí v závislosti na separaci (ostatní parametry jsou stejné jako u Gaussova rozdělení).

$$R(\Delta x) = K \left[w \frac{1}{2\pi\sigma_1} \exp\left(-\frac{\Delta x}{2\sigma_1^2}\right) + (1-w) \frac{1}{2\pi\sigma_2} \exp\left(-\frac{\Delta x}{2\sigma_2^2}\right) \right]. \quad (4.9)$$

Na grafu Obrázek 4.2 je zobrazeno několik dvojných Gaussových distribucí s rozdílnými hodnotami $\sigma_{1,2}$ a hodnotou váhy $w = 0.4$.



Obrázek 4.2: Zobrazení dvojného Gaussova rozdělení pro různé parametry.

Kromě těchto dvou rozdělení lze použít i tzv. Super Gaussovo rozdělení a v publikaci [14] je dokonce dokázáno, že je možné využít jakékoliv distribuce pro VdM sken.

4.3 Průběh skenu na ALICE

Z matematického popisu stále nemusí být zřejmý reálný průběh měření. Nejprve jsou zopakovány rovnice, kterými je luminozita určena. Také jsou předvedena nastavení triggerů pro jednotlivé detektory. Poté je diskutován článek zaměřený na měření luminozity na ALICE. Z něj je převzata část o potřebných korekcích výstupních dat a jsou ukázána reálná data z měření v roce 2013. Dále je pojednáno o určení počtu částic v balíku a nakonec je uvedena tabulka statistických a systematických chyb měření.

Sekce 2.2 se věnuje detektorům, T0 a V0, které se používají na ALICE při VdM kalibraci. Popis celé kalibrace a výsledků je k nalezení v [6]. Jak bylo uvedeno v Sekcích 3.1 a 4.2, lze určit luminozitu L s počtem částic N_1 v prvním balíku a N_2 v druhém balíku, při znalosti efektivní výšky svazku a parametrů urychlovače (viz Sekce 3.1) pomocí rovnice (4.10).

$$L = \frac{N_1 N_2 f n_b}{h_x h_y}. \quad (4.10)$$

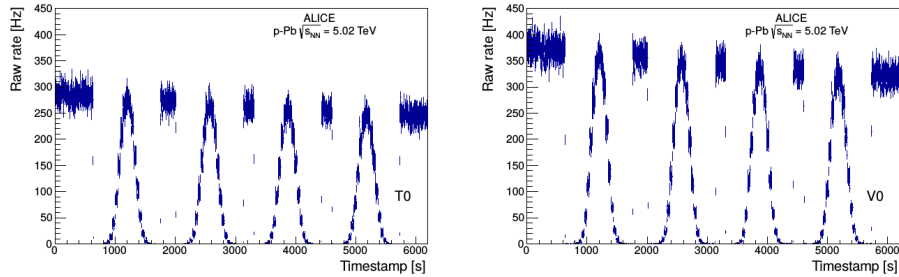
Frekvence srážek měřená danou konfigurací detektorů je nazývána viditelná frekvence R_{vis} , které přísluší viditelný účinný průřez σ_{vis} ,

$$\sigma_{vis} = \frac{R_{vis}}{L}. \quad (4.11)$$

Měření probíhá tak, že se posune svazek ve dvou kolmých směrech při zaznamenávání frekvence interakcí R . Poté, tak jak je napsáno v Sekci 4.2, se vypočítá efektivní výška svazku $h_{x,y}$. Pro skeny na experimentu ALICE platí, že změny posunutí se provádějí nejdříve v horizontální a poté ve vertikální ose a celé měření se opakuje vícekrát. Počet bodů v každé ose je zvolen na 25 a doba měření každého bodu je 30 sekund. Krajní pozice jsou zvoleny na přibližně 6σ (rozptyl svazku v rovinně kolmé na směr rychlosti).

Jak již bylo napsáno v Sekci 2.2, při VdM kalibraci jsou používány detektory T0 a V0. Trigger je nastavený na logické AND. To znamená, že jedna interakce je zaregistrována pouze v případě, že je zachycen produkt v obou částech detektoru (V0A i V0C, a stejně tak pro detektor T0). Pro detektor T0 existuje ještě další podmínka, která povoluje zaznamenání. Primární vertex se musí nacházet ve vzdálenosti menší než 30 cm ve směru pohybu svazků od středu detektoru. To pomáhá odfiltrout pozadí, které vzniká především srážkami balíku s plynem, případně satelitních interakcí.

Článek [6] popisuje VdM skeny provedené v roce 2013 pro svazky proton-olovo a olovo-proton. Jelikož je ALICE nesymetrická, nelze výsledky zkombinovat a je nutné je popisovat odděleně. Pro srážky p-Pb bylo sráženo 264 párů balíků a pro Pb-p 244 párů s energií srážky $\sqrt{s_{NN}} = 5.02$ TeV. Pro každý srážení pár je měřena frekvence srážek v závislosti na separaci svazků. Z článku [6] je převzat obrázek 4.3, který zachycuje průběh skenu pro typický pár srážených balíků bez jakékoliv korekce a pro oba typy detektorů T0 (vlevo) a V0 (vpravo).



Obrázek 4.3: Měření frekvence srážek pro typický pár balíků (bez použití korekce). První pík zobrazuje horizontální sken, druhý vertikální a další dva se opakují (horizontální, vertikální) ve stejném pořadí ale s opačným průběhem (od kladných hodnot do záporných). Levý (pravý) graf zobrazuje průběh měření detektorem T0 (V0).

Před samotnou analýzou výsledků skenu je potřeba aplikovat určité korekce, které kompenzují nechtěné jevy. Jako první se odstraňují zaznamenané kolize se zbytkovými atomy plynu nebo satelitními balíky. Pro korekci se u V0 používají časy doletu částic, které musí být v rozmezí ± 4 ns v předpokládaném čase srážky. A u T0 se používá ke korekci, jak již bylo zmíněno, poloha primárního vertexu, který musí být v rozmezí ± 30 cm od očekávaného bodu srážky ve směru rychlosti balíků.

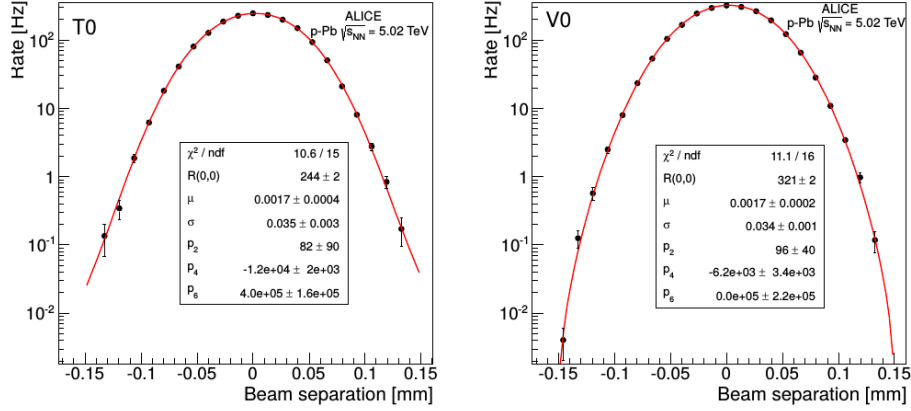
Dále byl měřen signál bez přítomnosti svazků, který se ukázal být roven nule pro oba detektory. Na rozdíl od toho při jednostranné srážce (pouze z jednoho směru je balík naplněn) se u V0 naměřila nenulová frekvence interakcí (nula pro T0) a to až do doby 4 nenaplněných balíků po jednom naplněném. Tato skutečnost není pro VdM skeny rozhodující, jelikož srážku balíků následuje 8 nenaplněných.

Další korekcí je započítání vícenásobných srážek při jednom průchodu balíků (angl. pileup). K tomu se používá Poissonova statistika, která je schopná určit nejpravděpodobnější hodnotu skutečné frekvence interakcí R_{pu} , ze známosti frekvence interakcí R_{nb} , jež byla naměřena a ze které byly odfiltrovány nechtěné interakce. Vztah mezi těmito hodnotami udává rovnice (4.12), ze které plyne maximální korekce o 2,5% pro V0 a 1,5% pro T0, kde $f_{rev} = c/26659\text{Hz}$.

$$R_{pu} = -f_{rev} \ln(1 - R_{nb}/f_{rev}). \quad (4.12)$$

V neposlední řadě se při probíhajících srážkách mění počet částic v balíku. K tomu se mezi horizontálními a vertikálními skeny ponechává čas na měření frekvence interakcí v čelních srážkách, která se následně nafituje exponenciálou. Ze znalosti parametrů fitu je možné normalizovat všechny provedené skeny.

K fitování reálných dat z VdM skenu se nepoužívají pouze funkce zmíněné v Sekci 4.2.1. K obdržení vhodných hodnot χ^2 se používá upravená Gaussova distribuce, která je vynásobená sudými mocninami polynomu 6-tého stupně. Výsledky fitování reálných dat s aplikovanou korekcí jsou na Obrázku 4.4.



Obrázek 4.4: Výsledky fitování frekvence interakcí v závislosti na separaci svazků pro jeden průměrný pár balíků při prvním horizontálním skenu. Vlevo pro detektor T0 a vpravo pro detektor V0. Převzato z [6].

Před finálním shrnutím je vhodné ukázat, jak se určují počty částic ve svazku, což popisují články [15] a [16]. Na LHC se používají dva typy zařízení k určování počtu částic v urychlovači. Prvním je DCCT (angl. DC current transformer) a druhým typem je FBCT (angl. Fast beam current transformer). Za pomoci DCCT se měří střední hodnota proudu procházejícího svazku. FBCT měří počet částic v každém balíku zvláště. Oba typy zařízení fungují na stejném principu, pouze se liší použitá elektronika. Kolem trubice, která vede svazek je namotána cívka, která generuje proud při průchodu nabitých částic. Tento proud je registrován elektronikou a převeden na počet částic v urychlovači (pro DCCT) a nebo v balíku (pro FBCT).

Na závěr celé sekce jsou v Tabulce 4.5 uvedeny chyby měření při určování luminozity pomocí VdM kalibrace pro oba detektory T0 i V0. Z této tabulky vyplývá, že největší příspěvek je z korelace částic v balíku, kterou se zabývá tato práce a je simulována v Kapitole 5.

Uncertainty	p-Pp	Pb-p	Correlated between p-Pb and Pb-p
Transverse correlations	2.6%	2.3%	No
Bunch-by-bunch consistency	1.6%	-	No
Scan-to-scan consistency	0.5%	1.5%	No
Length-scale calibration	1.5%	1.5%	Yes
Background subtraction (V0 only)	0.5%	0.5%	Yes
Method dependence	0.3%	0.3%	No
Beam centering	0.3%	0.2%	No
Bunch size vs trigger	0.2%	0.2%	No
Bunch intensity	0.5%	0.5%	No
Orbit drift	0.4%	0.1%	No
Beam-beam deflection	0.2%	0.3%	Partially
Ghost charge	0.1%	0.2%	No
Satellite charge	<0.1%	0.1%	No
Dynamic β^*	<0.1%	0.1%	Partially
Total on visible cross section	3.5%	3.2%	
V0- vs T0-based integrated luminosity	1%	1%	No
Total on integrated luminosity	3.7%	3.4%	

Obrázek 4.5: Uváděné chyby při určování luminozity VdM kalibrací v roce 2013. Převzato z [6].

4.4 Další metody určení luminozity

Kromě VdM skenu je možné použít i jiné metody k určování absolutní hodnoty luminozity. Vždy záleží na tom, s jakou chybou daná metoda luminozitu určuje a je to tedy primární výběrové kritérium. Dalšími metodami jsou u hadronových urychlovačů: měření pomocí známého účinného průřezu, Optický teorém a Coulombův rozptyl. Mimo tyto zmíněné se na LHCb testuje nová metoda, známá pod jménem Beam-gas imaging, o které pojednává článek [17]. Jelikož se jedná o metodu, kterou nelze aplikovat na jakýkoliv detektor, není více zmíněna.

4.4.1 Pomocí známého účinného průřezu

Pokud je účinný průřez alespoň jedné z odehrávajících se interakcí známý, stačí počítat pouze frekvenci těchto interakcí. Z rovnice (1.1 lze vyjádřit luminozitu, která umožňuje spočítat účinný průřez jiné interakce. Tento postup je matematicky vyjádřen v rovnici (4.13),

$$\sigma_b = \frac{R_b \sigma_a}{R_a}. \quad (4.13)$$

Účinný průřez známého procesu jsme označili σ_a s frekvencí pozorování R_a . A pro neznámý účinný průřez σ_b pak stačí detekovat frekvenci R_b .

Zároveň má tato metoda nevýhody, které zabraňují jejímu častějšímu použití. Jednak je nutno znát účinnost detektoru při detekci dané interakce se známým účinným průřezem (má také určitou chybu). Dále se onen proces musí odehrávat dostatečně často, aby byla statistická chyba výsledku co nejnižší.

Tato metoda byla úspěšně použita na urychlovači Tevatron, kde byla chyba určení luminozity přibližně 5% a hlavním zdrojem neurčitosti byla právě neurčitost referenčního účinného průřezu. Na LHC se tento způsob momentálně nepoužívá. Proces, který by se mohl využívat, je produkce leptonových párů v neelastických proton-protonových srážkách nebo produkce bosonů slabé interakce. Teoreticky jsou účinné průřezy těchto interakcí známé, potíží je jak odlišit danou interakci s jinou, která také zahrnuje leptonové páry. Odhaduje se, že neurčitost na experimentu ATLAS by se mohla pohybovat mezi 1-3% podle článku [18].

4.4.2 Optický teorém a Coulombův rozptyl

Optický teorém dává do souvislosti celkový účinný průřez σ_{tot} (v kvantové mechanice znamená elastický i neelastický) s amplitudou elastického rozptylu $f_{el}(t)$, kde t je druhá mocnina předané čtyř-hybnosti, znázorněno rovnicí (4.14).

$$\sigma_{tot} = 4\pi \text{Im}[f_{el}(0)], \quad (4.14)$$

znamená, že celkový účinný průřez je přímo úměrný amplitudě elastického rozptylu při nulové předané hybnosti. Z optického teorému lze vyjádřit luminozitu:

$$L = \frac{1}{16\pi} \frac{R_{tot}^2(1 + \rho^2)}{\frac{dR_{el}}{dt}|_{t=0}}, \quad (4.15)$$

kde R_{tot} je celková frekvence interakcí, R_{el} je frekvence elastických interakcí, jmenovatel se určí extrapolací derivace R_{el} a ρ je podíl reálné a imaginární části amplitudy elastického rozptylu pro nulovou předanou hybnost. Potíží při použití této metody je několik: k měření malé předané hybnosti je potřeba mít detektory blízko svazku, dále detektory musí mít dostatečný rozsah pseudorapidity pro určení R_{tot} a nakonec je potřeba speciální svazkové optiky.

Kapitola 5

Simulace určení luminozity

Tato kapitola je zaměřena na popis simulace VdM skenu, která byla provedena ve frameworku ROOT [8]. A sice z toho důvodu, že není znám skutečný tvar balíků a neexistuje ideální metoda, jak otestovat hypotézu nefaktorizovatelnosti. Používá se k tomu dvojitá Gaussova distribuce, jejíž vstupní parametry se získávají fitováním naměřených dat. To by mohlo pomoci odhadnout korekci a určit systematickou chybu při nesplnění předpokladu faktorizovatelnosti svazku. Výhodou takovéto simulace je absolutní kontrola nad celým průběhem, což by v budoucnosti mohlo posloužit pro odhad vhodnosti různých korekcí, které se aplikují na reálná data. V sekci 5.1 jsou nejprve popsány základní struktury kódu, které byly použity pro generování náhodných bodů pomocí předem určené distribuce. Další sekce 5.2 je zaměřena na benchmark vygenerovaných modelů. Faktorizaci balíků je věnována sekce 5.3, v níž budou modely dále použity a v níž bude určen faktorizační poměr analytickou i numerickou metodou.

Smyslem této sekce je vytvořit model, který by byl schopen demonstrovat průběh VdM skenu. Nejdříve však je potřeba ukázat způsob jak popsat balík částic. Každý balík lze uzavřít do pravděpodobnostní obálky, která se v čase bude pohybovat. Tato obálka udává hladinu pravděpodobnosti výskytu částic – jinak řečeno uvnitř této struktury jsou uzavřeny všechny částice balíku. Tedy pro každý bod (x, y, z) je přiřazena pravděpodobnost výskytu částice. Každou obálkou lze vést řez rovinnou kolmou ke směru pohybu. Takto je možno získat dvou-dimenzionální distribuci částic. (Další možností je vyintegrovat z -ovou souřadnici, čímž získáme zase dvou-dimenzionální distribuci.) A pro dva balíky se jedná o dvě distribuce, které po vzájemném vynásobení a integraci udávají integrál překryvu. Ten je pak předmětem studia a to z důvodu efektu faktorizace (vysvětleno později). K popisu průřezu balíků byla využita dvou-dimenzionální Gaussova distribuce a posléze i dvojitá Gaussova distribuce. Tyto distribuce nebyly vybrány náhodně, ale na LHC je záměrem připravit svazky s Gaussovým rozdělením částic v balíku. Mimo to se jedná o funkce se kterými se dobře analyticky pracuje. Rovnice (5.1) vyjadřuje jednoduché dvou-dimenzionální Gaussovo rozdělení, které bylo použito v celé této práci. Z něj dále vychází dvojitá Gaussova distribuce v rovnici (5.2). Parametry $\mu_{x,y}$ označují hodnoty středů v rovině

x , respektive y . Parametry $\sigma_{x,y}$ určují rozptyl v x -ové, respektive y -ové rovině. Parametr ρ označuje korelaci mezi x -ovou a y -ovou souřadnicí a může nabývat hodnot $(-1;1)$. Pro $\rho = 0$ se jedná o nekorelovanou Gaussovu distribuci, která byla využita v Kapitole 3. Pro dvojitou Gaussovu distribuci je potřeba změřit ještě jeden parametr w , který označuje váhu jednoho či druhého Gaussova rozdělení. Pak je obvyklé volit stejný střed obou distribucí G_1 a G_2 , ale zároveň rozdílnou varianci.

$$G(x, y) = \frac{1}{2\pi\sigma_x\sigma_y\sqrt{1-\rho^2}} \exp \left[-\frac{1}{2(1-\rho^2)} \left(\frac{(x-\mu_x)^2}{\sigma_x^2} + \frac{(y-\mu_y)^2}{\sigma_y^2} - \frac{2\rho(x-\mu_x)(y-\mu_y)}{\sigma_x\sigma_y} \right) \right]. \quad (5.1)$$

$$DG(x, y) = wG_1(x, y) + (1-w)G_2(x, y). \quad (5.2)$$

5.1 ROOT- použité součásti

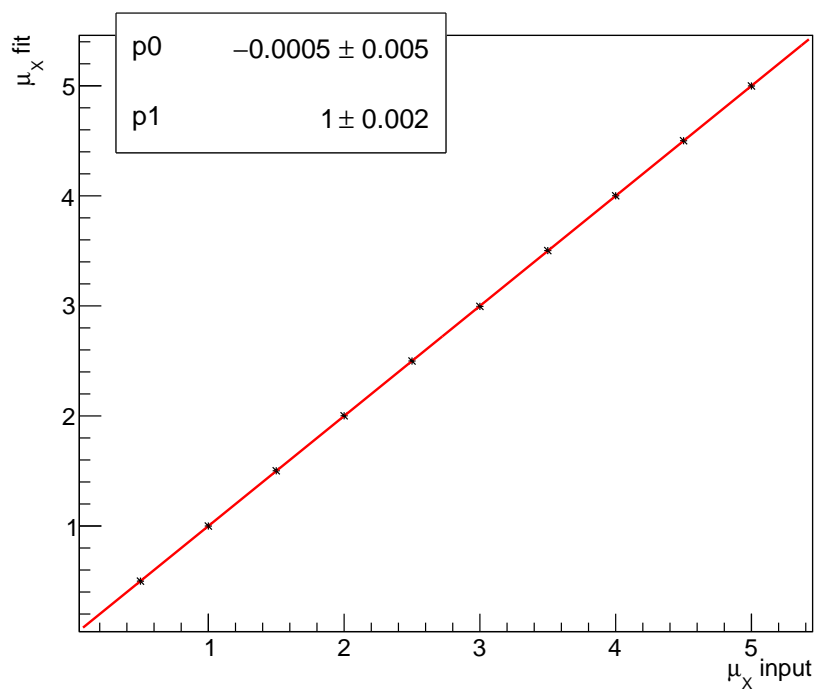
Byl zvolen model náhodného generování bodů v rámci určené distribuce. Tedy každý průřez balíkem byl reprezentován počtem bodů (pro většinu simulací bylo $N=20000$), které byly vloženy do histogramu. K náhodnému generování byla použita knihovna RooFit a přesněji třída RooMultiVarGaussian, do které vstupuje vektor středních hodnot a kovariantní matice, která určuje nejen varianci, ale také korelaci výsledných bodů. Vygenerovaná data byla následně převedena do třídy TH2D (což je dvou-dimenzionální histogram). K jejich vykreslení byla použita paleta "CONTZ", která udává pravděpodobnost pomocí barevného schématu. Pro potřeby benchmarku byly dále využity dvou-dimenzionální fitovací funkce, které se v ROOTu zadávají do třídy TF2, grafy s errorbary TGraphErrors pro vizualizaci výsledků fitování. K fitování byla vždy použita metoda nejmenších čtverců.

5.2 Benchmarking

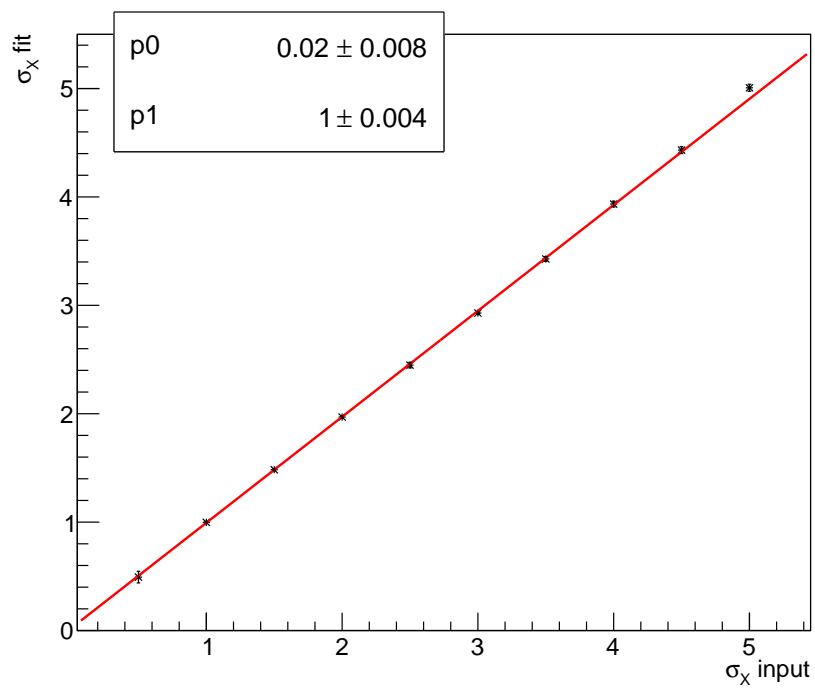
Před samotnou simulací bylo potřeba určit konzistenci použitých součástí. K tomu účely byly vytvořeny náhodně naplněné histogramy z dvou-dimenzionálních Gaussových distribucí s různými parametry, které byly zpětně nafitovány stejnou funkcí viz (5.1). Dále byly vytvořeny grafy závislostí hodnot parametrů získaných z fitu na vstupních hodnotách.

Pro testování určení středu byly variance položeny rovny 1 ($\sigma_{x,y} = 1$) a byly změněny vstupní hodnoty pro μ_x . Pro každou vstupní hodnotu byl vygenerován histogram s 20000 body, který byl nafitován a z fitu byla získána hodnota i chyba daného parametru. Závislost výstupní na vstupní hodnotě je na Obrázku 5.1.

Stejný postup byl proveden pro sledování závislosti hodnot rozptylu. Vstupní hodnoty středu byly $\mu_{x,y} = 0$ a měnily se hodnoty σ_x . Výsledná závislost je zobrazena na Obrázku 5.2.

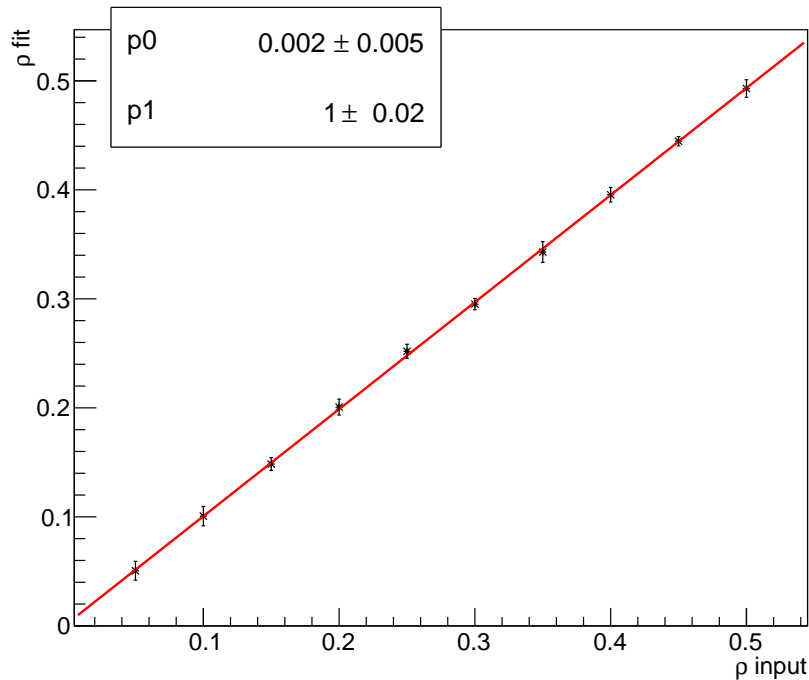


Obrázek 5.1: Závislost výstupní hodnoty fitu na vstupní hodnotě středu μ_x zadané do generátoru náhodných bodů pomocí dvou-dimenzionální Gaussovy distribuce. Jednotlivé chyby bodů jsou moc malé na to, aby byly viditelné.



Obrázek 5.2: Závislost hodnoty fitu na vstupní hodnotě rozptylu σ_x zadané do generátoru náhodných bodů pomocí dvou-dimenzionální Gaussovy distribuce.

Rovněž byla zkoumána schopnost rekonstrukce korelovaných dvou dimenzi-
onálních Gaussových distribucí. Metodika byla stejná jako u obou předchozích
testů, hodnoty středu zafixovány na nule, $\mu_{x,y} = 0$ a hodnoty rozptylu rovny
jedné, $\sigma_{x,y} = 1$. Výsledná závislost je na Obrázku 5.3.



Obrázek 5.3: Závislost hodnoty fitu na vstupní hodnotě korelačního faktoru ρ zadané do generátoru náhodných bodů pomocí dvou-dimenzionální Gaussovy distribuce.

Z předchozích obrázků je možné potvrdit schopnost rekonstrukce distribuce pomocí fitu¹, kde přesnost metody závisí na počtu vygenerovaných bodů (vyšší počet snižuje potencionální chybu). Zároveň bylo potřeba zkontrolovat, že simulace dává správné hodnoty i v porovnání s analytickým řešením. K tomu byly použity řezy histogramů, které byly naplněny korelovanou Gaussovou distribucí. Pro tyto řezy totiž existuje analytické vyjádření hodnot středů i rozptylu.

¹Poznámka: K tomu, aby jakýkoliv histogram mohl být naitován bylo třeba nastavit vhodným způsobem meze korelačního faktoru. V tomto případě se jednalo o interval $(-0,8;0,8)$. V opačném případě docházelo ke zhroutilí.

Vztahy pro x -ové řezy jsou v rovnici (5.3) a (5.4).

$$\mu = \rho \frac{\sigma_y}{\sigma_x} (x - \mu_x), \quad (5.3)$$

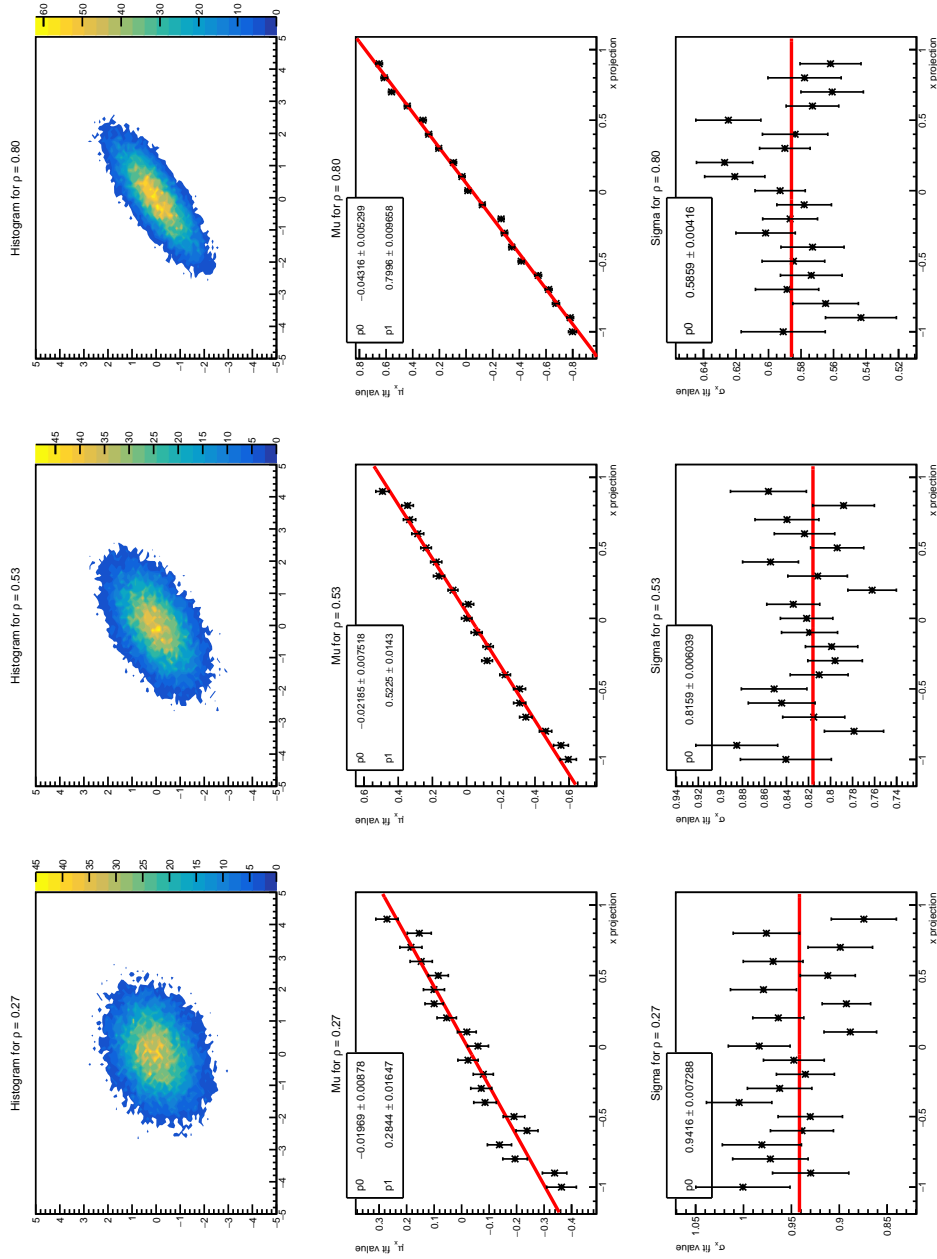
$$\sigma = \sigma_y \sqrt{1 - \rho^2}. \quad (5.4)$$

Cílem tedy bylo vygenerovat histogramy s různým korelačním faktorem a vytvořit řezy pro různé x -ové souřadnice, ze kterých byly určeny hodnoty středu a rozptylu za pomoci jednodimenzionálního Gaussova rozdělení. Takto získané hodnoty byly dále nafitovány, v případě středu polynomem prvního stupně (z důvodu analytického řešení) a v případě rozptylu konstantní funkcí. Obrázek 5.2 zobrazuje histogramy (s $\mu_{x,y} = 0$ a $\sigma_{x,y} = 1$) i hodnoty středů a rozptylů řezů. Řezy byly vybrány tak, aby byl počet bodů dostatečně vysoký.

Pro hodnoty středů je shoda s analytickým popisem v rámci chyby fitu, ale u rozptylu jsou hodnoty podhodnoceny o 2-4% (vypočteno pomocí rovnice (5.4)). Hodnoty vypočtené ze vzorce a ty získané fitem jsou v Tabulce 5.1. Původ této malé odchylky zatím není znám. Pravděpodobný původ je z fitovací procedury, protože ostatní testy již demonstrovaly správnou funkci generátoru 2D Gaussových distribucí. Z obou testování lze dojít k závěru, že daná metoda generování histogramů je vhodná k následné simulaci VdM skenů.

Tabulka 5.1: Porovnání hodnot σ_{rov} vypočtených z rovnice (5.4) s hodnotami σ_{fit} získanými nafitováním jednorozměrné projekce 2D Gaussovy distribuce. Ukazuje se, že hodnoty jsou podhodnoceny o 2-4%.

ρ	0.27	0.53	0.80
σ_{rov}	0.9629	0.8480	0.6000
σ_{fit}	0.9416	0.8159	0.5859



Obrázek 5.4: Porovnání modelu s analytickým řešením. Zleva doprava se zvyšuje korelační faktor ρ . První řada zobrazuje dvou-dimenzionální histogramy, druhá grafy s hodnotami středů a třetí řada zobrazuje hodnoty rozptylu pro různé řezy.

5.3 Určení faktorizace

K odhadu chyby, která vzniká v důsledku nesplnění předpokladu VdM skenu – faktorizovatelnosti balíku, je možno použít matematickou formuli (5.5). V této rovnici vystupují dva členy, první L_{true} , který udává reálný region luminozity a lze vypočítat pomocí rovnice (3.9). Druhý člen L_{VdM} , který udává luminozitní region pomocí dvou na sebe kolmých řezů a vychází z rovnice (4.6). Pokud by obě distribuce byly nekorelované, byl by splněn předpoklad faktorizovatelnosti a tudíž se musí poměr rovnat jedné $R = 1$. V případě vynechání konstant n_b , f , N_1 , N_2 bude daný člen značen hvězdičkou (*).

$$R = \frac{L_{true}}{L_{VdM}} \quad (5.5)$$

$$L_{true} = n_b f N_1 N_2 \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} S_1(x, y) S_2(x, y) dx dy \quad (5.6)$$

$$L_{VdM} = n_b f N_1 N_2 \frac{R(0, 0)}{\int_{-\infty}^{\infty} R(\Delta x, 0) d\Delta x} \frac{R(0, 0)}{\int_{-\infty}^{\infty} R(0, \Delta y) d\Delta y}. \quad (5.7)$$

5.3.1 Jednoduchá 2D Gaussova distribuce

Obě výše uvedené rovnice lze vypočítat analytickou cestou. Za $S_{1,2}$ se dosadí z rovnice (5.1). Vyjádření L_{VdM} je trochu složitější. Po použití rovnice (1.1) je možné použít $S_{1,2}$ a vyjádřit L_{VdM} jako

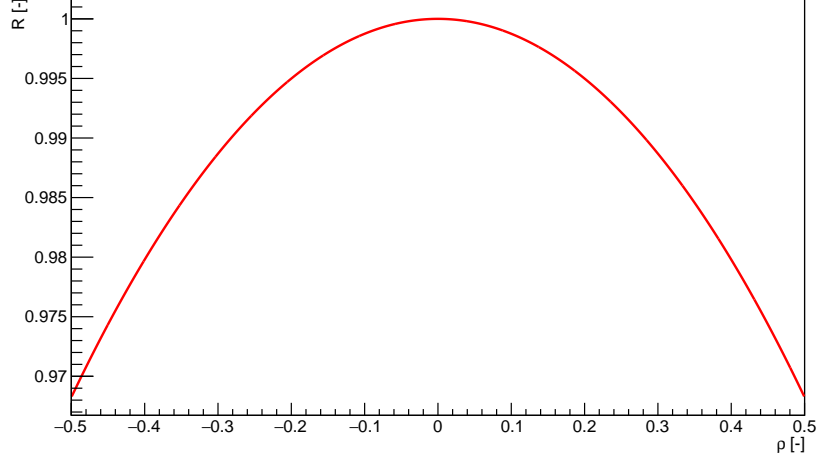
$$L_{VdM} = n_b f N_1 N_2 \frac{\int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} S_1(x, y) S_2(x, y) dx dy}{\int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} S_1(x + \delta x, y) S_2(x, y) dx dy d\delta x} \frac{\int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} S_1(x, y) S_2(x, y) dx dy}{\int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} S_1(x, y + \delta y) S_2(x, y) dx dy d\delta y}. \quad (5.8)$$

V čitateli je stejný integrál, který se nachází v L_{true} . Oba členy jsou definovány se stejnými konstantami, nebudou dále opisovány, jelikož při výpočtu poměru R se zkrátí. Výpočty se nacházejí v přílohách. Výsledkem tedy je:

$$L_{true*} = \frac{1}{2\pi\sigma_x\sigma_y\sqrt{4-\rho^2}}, \quad (5.9)$$

$$L_{VdM*} = \frac{1}{\pi\sigma_x\sigma_y(4-\rho^2)}. \quad (5.10)$$

To znamená že poměr faktorizovatelnosti je $R = \frac{\sqrt{4-\rho^2}}{2}$. Graf této funkce je zobrazen na Obrázku 5.5. Z výsledku vyplývá, že pro jeden korelovaný balík je luminozita určená VdM metodou vyšší než skutečná. V Sekci 5.4.1 bude popsána simulace k ověření tohoto výsledku numerickou metodou.



Obrázek 5.5: Závislost poměru R určení skutečného regionu luminozity vůči regionu určenému VdM metodou na korelačním faktoru ρ . Jedná se o případ, kdy k popisu obou balíků byla použita jednoduchá 2D Gaussova distribuce, kde pouze jeden ze svazků je korelovaný.

5.3.2 Dvojitá 2D Gaussova distribuce

Jelikož je integrál součtu součtem integrálů, je pouze potřeba zdokonalit předchozí výsledek z rovnice (5.9). Již nelze předpokládat, že by se rozptýl distribucí měl sobě rovnat nebo že by korelační faktor druhého rozdělení měl být nulový. Výpočet L_{true} je explicitně předveden v příloze, kde byl použit formalismus z článku [7], a sice maticová reprezentace. Výsledkem je rovnice (5.11), která přechází v rovnici (5.9) pro $\sigma_{x1} = \sigma_{x2}$, $\sigma_{y1} = \sigma_{y2}$ a $\rho_2 = 0$.

$$\begin{aligned}
 L_{true*}(S_1(x, y), S_2(x, y)) &= \\
 &= \frac{1}{2\pi\sqrt{\sigma_{x1}^2\sigma_{y1}^2(1-\rho_1^2) + \sigma_{x2}^2\sigma_{y2}^2(1-\rho_2^2) + \sigma_{x1}^2\sigma_{y2}^2 + \sigma_{x2}^2\sigma_{y1}^2 - 2\sigma_{x1}^2\sigma_{y1}^2\sigma_{x2}^2\sigma_{y2}^2\rho_1\rho_2}}
 \end{aligned}
 \tag{5.11}$$

Pro součin dvou dvojitých Gaussových distribucí definovaných následovně

$$\begin{aligned}
 DG_a &= w_1 S_1(x, y) + (1 - w_1) S_2, \\
 DG_b &= w_2 S_3(x, y) + (1 - w_2) S_4,
 \end{aligned}$$

platí, že celková skutečná luminozita $L_{DoubleT}$ je rovna:

$$\begin{aligned}
 L_{true}^{DG} &= w_1 w_2 L_{true}(S_1, S_3) + w_1(1 - w_2) L_{true}(S_1, S_4) \\
 &\quad + (1 - w_1) w_2 L_{true}(S_2, S_3) + (1 - w_1)(1 - w_2) L_{true}(S_2, S_4).
 \end{aligned}
 \tag{5.12}$$

Analyticky lze vyjádřit i luminozitu, která předpokládá faktorizovatelnost, $L_{\text{VdM}*}$ z rovnice (5.13) a její pomocí je možno vyjádřit také $L_{\text{DoubleVdM}}$. Nakonec poměrem L_{DoubleT} s $L_{\text{DoubleVdM}}$ lze získat faktorizovatelnost svazku R , která v explicitním tvaru pro dvojité Gaussovo rozdělení je k vypsání zbytečně dlouhá.

$$L_{\text{VdM}*} = 2\pi \sqrt{(\sigma_{x1}^2 + \sigma_{x2}^2)(\sigma_{y1}^2 + \sigma_{y2}^2)} L_{\text{true}*}^2. \quad (5.13)$$

$$\begin{aligned} L_{\text{VdM}}^{DG} = & w_1 w_2 L_{\text{VdM}}(S_1, S_3) + w_1(1 - w_2) L_{\text{VdM}}(S_1, S_4) \\ & + (1 - w_1) w_2 L_{\text{VdM}}(S_2, S_3) + (1 - w_1)(1 - w_2) L_{\text{VdM}}(S_2, S_4). \end{aligned} \quad (5.14)$$

5.4 VdM sken

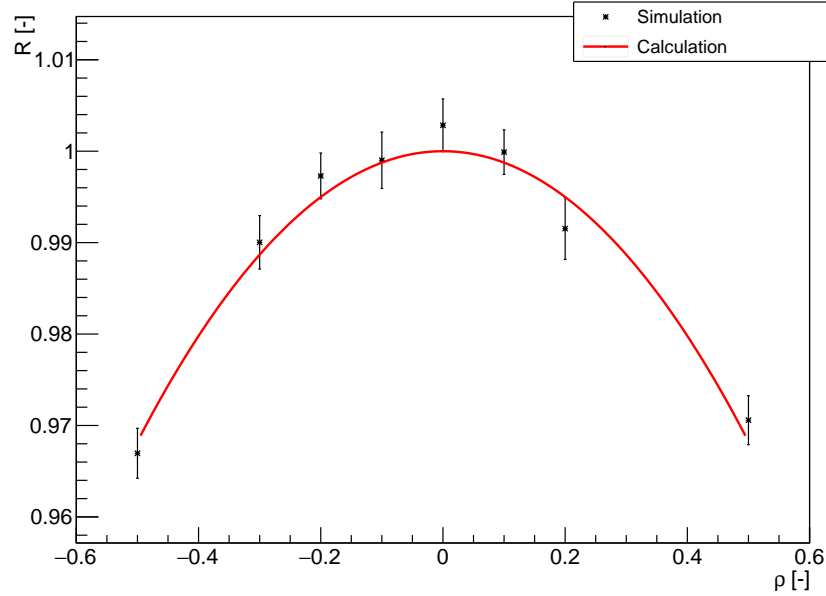
V sekci 5.2 byly ověřeny kvality generování balíků. Stejnou metodou bylo přistoupeno ke generování balíků použitých pro simulování VdM skenu. Z článku [6] byly použity naměřené hodnoty efektivní výšky svazků, počet skenovaných bodů i rozsah skenování. Bylo vygenerováno 25 histogramů náhodně naplněných pomocí korelované distribuce se středem v bodě (0;0) a 25 histogramů náhodně naplněných pomocí nekorelované distribuce s měnícím se středem od -0.15 mm do 0.15 mm jak pro x -ový sken, tak pro y -ový sken. Vždy jeden korelovaný histogram byl vynásoben histogramem nekorelovaným, čímž vznikl luminozitní region pro danou separaci. Po integraci byla získaná hodnota zanesena do grafu závislosti frekvence srážek na separaci svazku. Pro jednoduché Gaussovo rozdělení byl tento graf nařizován Gaussovou křivkou a z její integrací byly obdrženy veličiny potřebné k výpočtu luminozity pomocí rovnice (4.6). Pro dvojité Gaussovo rozdělení, jehož hodnoty byly získány z článku [7], byly grafy nařizovány dvojitým Gaussovým rozdělením. Výsledkem byl obdržen poměr R mezi analyticky vypočtenou skutečnou luminozitou a luminozitou určenou VdM skenem. Ke stanovení chyby simulace byl použit odhad pomocí parciálních derivací pro funkci $A(f, g, h, j)$ – zobrazeno v rovnici (5.15) (reprezentuje rovnici 4.6).

$$A = \frac{fg}{hj} \quad \sigma_A = \sqrt{\left(\frac{\sigma_{fg}}{hj}\right)^2 + \left(\frac{f\sigma_g}{hj}\right)^2 + \left(\frac{fg\sigma_h}{hj}\right)^2 + \left(\frac{fg\sigma_j}{hj}\right)^2}. \quad (5.15)$$

Zvolená metoda odhadu chyby je vhodná pouze v prvním přiblížení daného problému. Ve skutečnosti je výpočet chyby vycházející z nejistoty stanovení frekvence a výšky svazku mnohem složitější. Pokročilejší zpracování tohoto problému, které by reflektovalo skutečnou proceduru u reálných dat, je ponecháno budoucímu výzkumu.

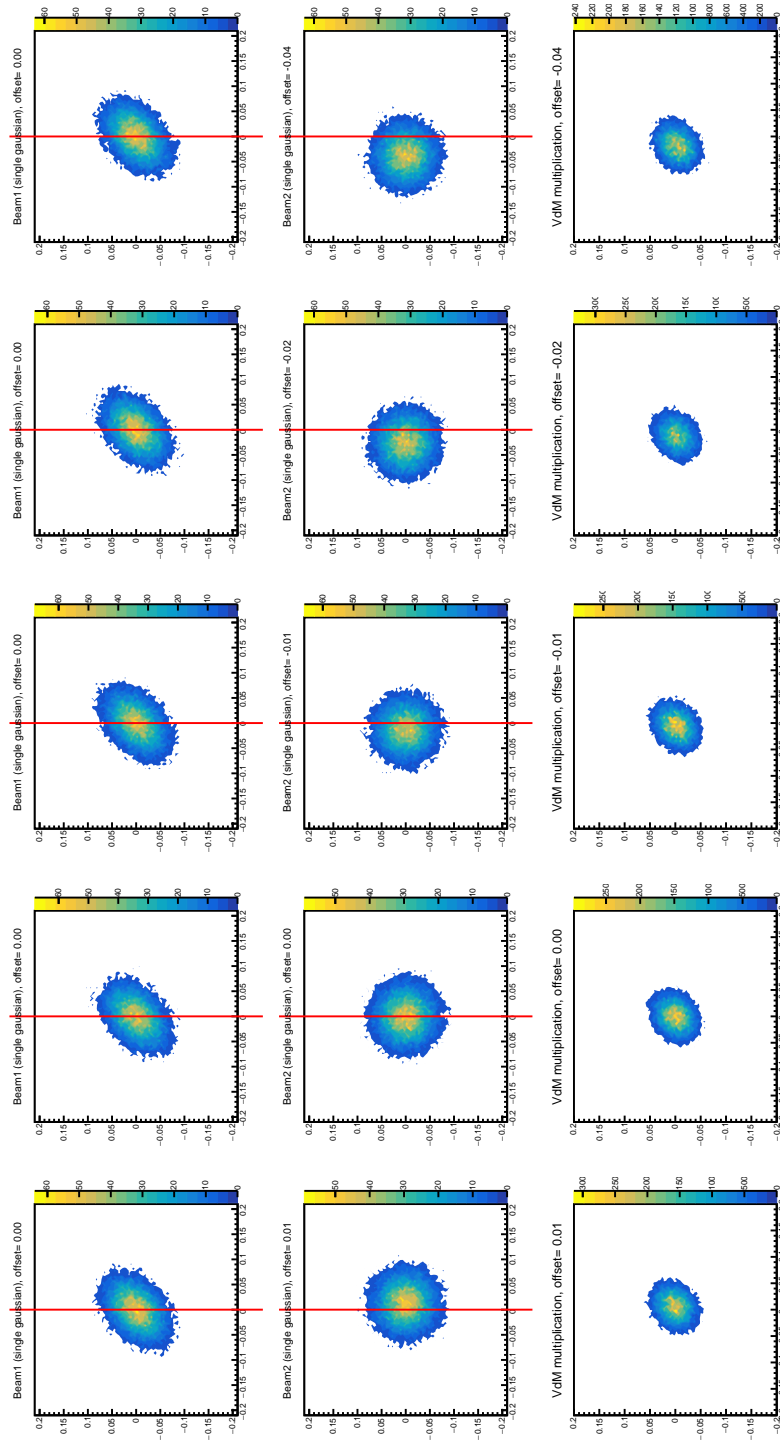
5.4.1 Jednoduchá 2D Gaussova distribuce

Výsledky byly vyneseny do grafu, který porovnává analytické řešení s numerickým, viz obrázek 5.6. Pro lepší názornost jsou uvedeny i některé použité histogramy a grafy x -ového a y -ového skenu (viz Obrázky 5.4.1 až 5.9).

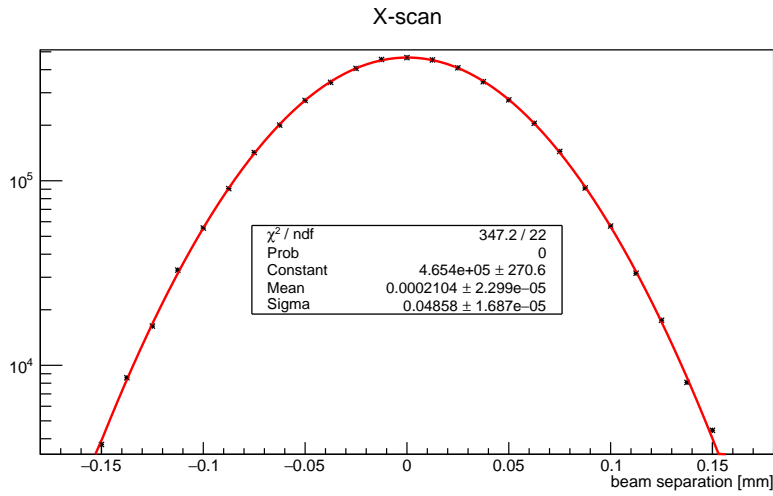


Obrázek 5.6: Závislost poměru R určení skutečného regionu luminozity vůči regionu určenému VdM metodou na korelačním faktoru ρ . Zobrazeno pro numerickou (černé body) i analytickou metodu (červená čára). Balíky byly modelovány jednoduchou 2D Gaussovou distribucí.

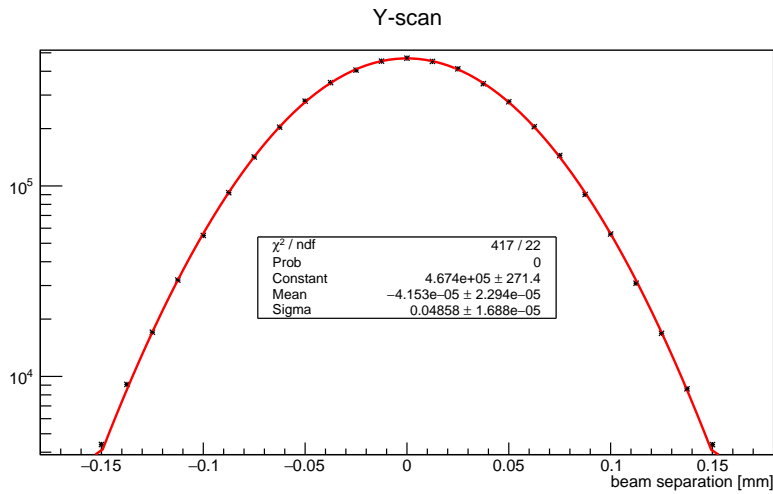
Kvalita fitu u Obrázku 5.8 a 5.9 je velmi špatná, přestože fit může vypadat zdařile. Důvod vysokého χ^2 zatím nebyl detailně studován, ale jsou dva možné důvody tohoto stavu: a) přisuzování chyb jednotlivým bodům je příliš zjednodušené, b) použitý model není vhodný na fitování. Podrobnější rozbor je jedním z možných dalších kroků výzkumu. Je potřeba si také uvědomit, že v důsledku odlišnosti parametrů fitu od těch skutečných, nelze používat chyby parametrů vyplývající z takového fitu.



Obrázek 5.7: Histogramy, v prvním řádku jsou vytvořeny z korelované distribuce ($\rho = 0.4$), je statická. V druhém řádku jsou histogramy s různým středem měnicím se pouze v x -ově směru. Výsledný překryv (vynásobení) prvního a druhého řádku je zobrazen v řádku třetím. Výsledek x -ového skenu je na Obrázku 5.8.



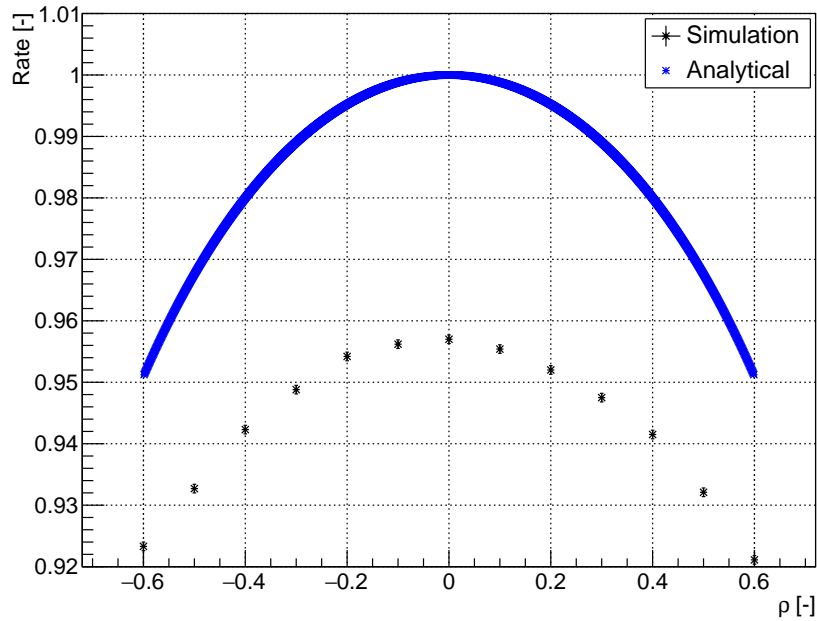
Obrázek 5.8: Výsledek x -ového skenu pro korelaci $\rho = 0.4$, která je nafitována Gaussovou křivkou potřebnou k určení luminozity VdM metodou.



Obrázek 5.9: Výsledek y -ového skenu pro korelaci $\rho = 0.4$, která je nafitována Gaussovou křivkou. Ta je dále integrována k určení luminozity z rovnice (4.6).

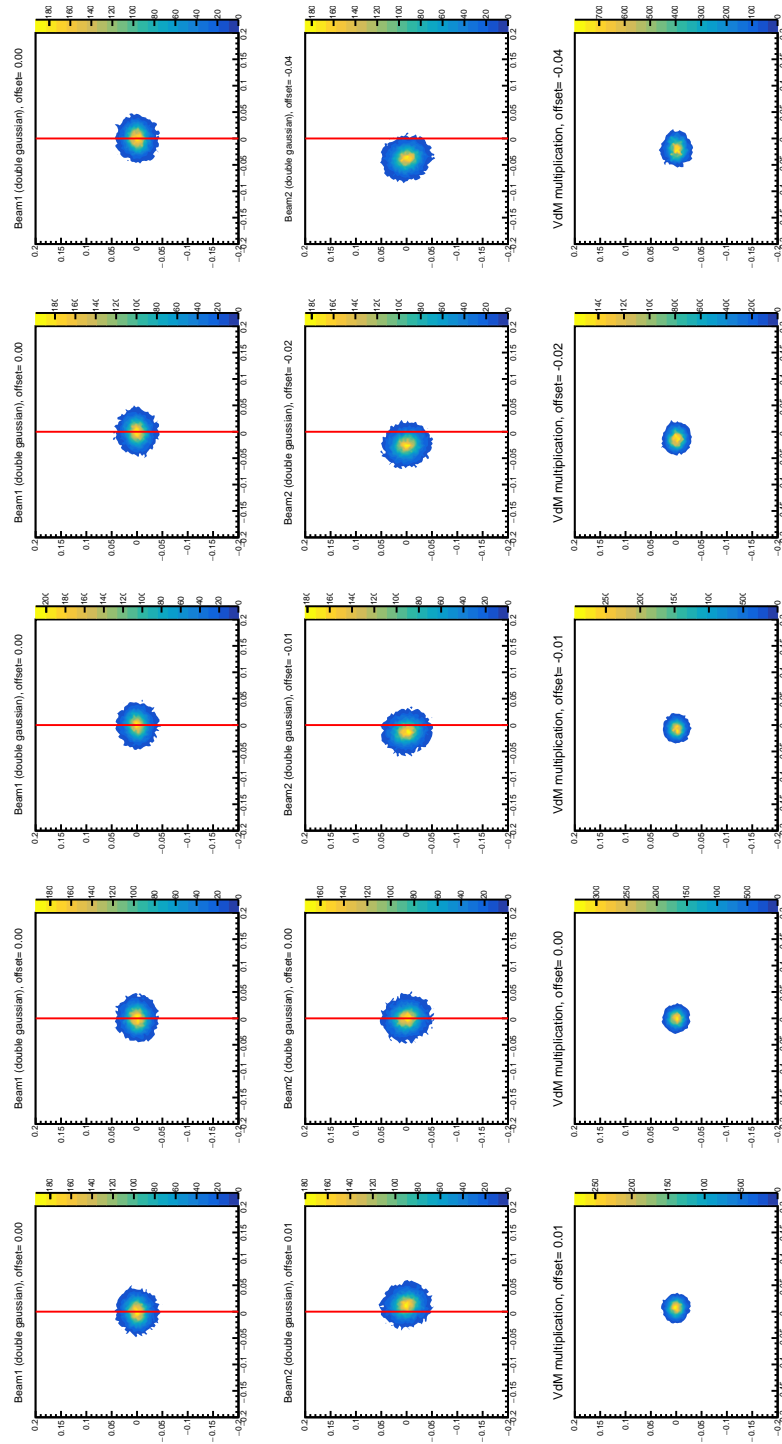
5.4.2 Dvojitá 2D Gaussova distribuce

V případě dvojité Gaussovy distribuce jsme schopni určit poměr R analyticky. K zjištění poměru numerickou cestou byla využita rovnice (5.12), jejíž výsledek byl podělen výstupní hodnotou ze simulace v závislosti na korelačním faktoru ρ . Jelikož se jedná celkem o čtyři jednoduché 2D Gaussovy distribuce, je použito následovně značení: pro první balík indexy $_{1,2}$ a pro druhý balík indexy $_{3,4}$, kde každý index přísluší jednoduchému 2D Gaussovu rozdělení. Parametry pro simulaci závislosti poměru R , skutečné luminozity s luminozitou určenou VdM metodou, na korelačním faktoru ρ_1 jsou následující: $\rho_{2,3,4} = 0$; $\overline{\sigma_{1,3}} = 0,01$; $\overline{\sigma_{2,4}} = 0,02$ a $w_{1,2} = 0,75$. Za pomoci parciálních derivací byla určena chyba každého bodu (viz rovnice (5.15)). Obrázek 5.10 zobrazuje srovnání výstupu ze simulace vůči analytické předpovědi.

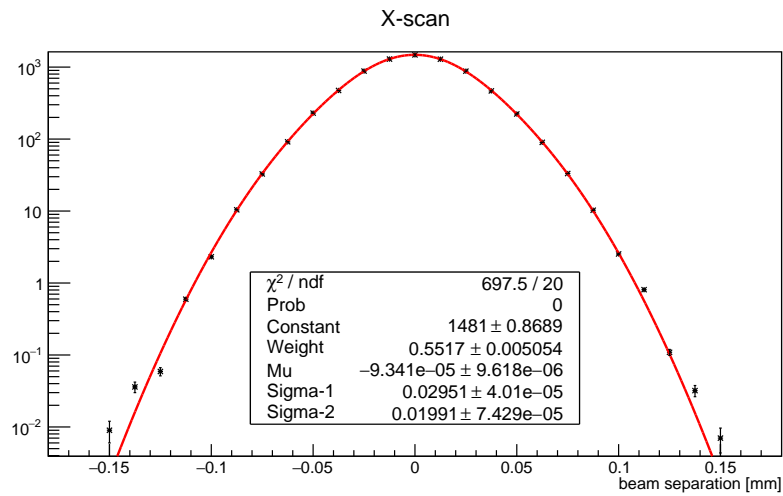
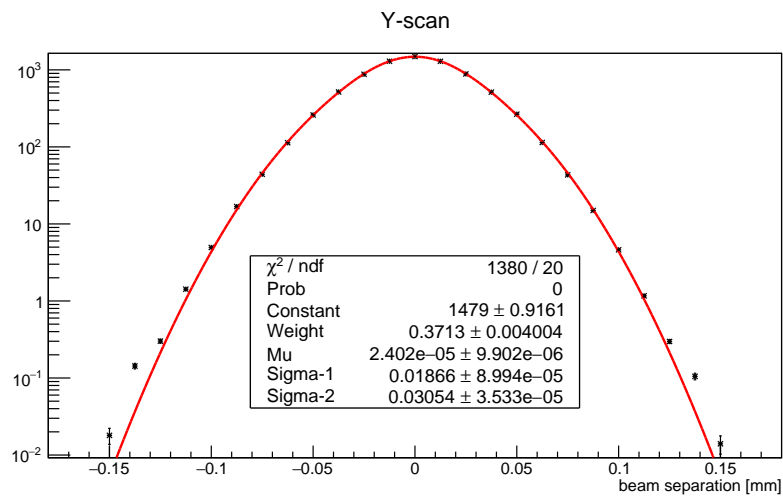


Obrázek 5.10: Závislost poměru R na korelačním faktoru ρ jednoduchého Gaussova rozdělení při použití dvojitého Gaussova rozdělení k reprezentaci balíků. Důvody závažného rozdílu je diskutovány dále.

Důležitou poznámkou je, že pro vhodnější fitování skenu byly všechny hodnoty vydělené faktorem 1000 a jako chyba byla použita druhá odmocnina samotné hodnoty. Pro parametry balíků udané v [7, str.63] jsou výsledné grafy na Obrázcích 5.4.2, 5.12 a 5.13.



Obrázek 5.1.1: Ukázka histogramů z x -ového skenu pro dvojitě Gaussovo rozdělení.

Obrázek 5.12: Výsledný fit nasimulovaných hodnot v x -ovém směru.Obrázek 5.13: Výsledný fit nasimulovaných hodnot v y -ovém směru.

Zatím výsledky analytického řešení odpovídají simulaci pro hodnoty skutečné luminozity L_{true} . Pro hodnoty luminozity určené VdM skenem L_{VdM} tomu tak je pouze v některých případech. Jedná se například o dvě jednoduchá Gaussova rozdělení bez korelace, kde všechny hodnoty souhlasí a poměr faktorizace je roven jedné. V případě použití dvojitě Gaussovy distribuce k reprezentaci balíku se výsledky značně odlišují. Důvodem může být, stejně jako bylo diskutováno v případě jednoduchých korelovaných normálních rozdělení, použití moc zjednodušeného modelu k určení chyb a také použití nevhodného modelu k fitování efektivní výšky svazku. Rozdíl mohl také vzniknout v důsledku chyby v analytickém výpočtu, která zatím nebyla odhalena. Rozřešení této záležitosti je ponechán na budoucí výzkum.

Kapitola 6

Závěr

Tato práce je prvním krokem v záměru prohloubit znalosti týkající se měření luminozity na hadronových urychlovačích. V úvodu práce bylo prezentováno výzkumné zařízení CERN, urychlovač LHC i experiment ALICE. Byly blíže popsány detektory mající hlavní roli při určování hodnoty luminozity, následovala část ve které byly znovu odvozeny všechny potřebné vztahy mezi tvarem srážejících se balíků, luminozitou a frekvencí referenčního procesu. Nejdříve byly odvozeny vztahy pro čelní srážky, dále rovnice pro srážky s posunutím používané při VdM skenu a nakonec vztahy pro kolize se srážkovým úhlem. Byl také popsán průběh Van der Meer skenu, který kalibruje stanovení luminozity a rovnice potřebné k získání hodnoty luminozity.

V praktické části bylo vygenerováno rozdělení částic v balíku podle předem definované distribuce (jednoduché Gaussovo rozdělení nebo dvojitě Gaussovo rozdělení) s cílem určit nejistotu měření plynoucí z nesplnění předpokladu VdM skenu (faktorizovatelnost svazku). Takto generovaná rozdělení byla otestována a konfrontována s analytickými výsledky. Jedinou odchylkou od analytické předpovědi se ukázala být hodnota variance rozdělení, což je způsobeno s největší pravděpodobností fitovací procedurou.

Dále bylo možné přejít k popisu faktorizace distribucí, prezentováno analyticky pro jednoduchý případ Gaussova rozdělení. Pro dvojitě Gaussovo rozdělení byla vypočtena skutečná hodnota luminozity. Tyto znalosti byly dále použity a v případě Gaussova rozdělení byl porovnán analytický model s numerickým. Pro dvojitě Gaussovo rozdělení bylo možné studovat velikost potřebné korekce ke kompenzaci nesplnění předpokladu faktorizovatelnosti svazku. Graficky byla zpracována závislost poměru skutečné luminozity vůči luminozitě určené VdM metodou v závislosti na korelačním faktoru pro jednotlivé části použité distribuce. Celkově byly vytvořeny nástroje k testování distribucí i následné simulaci VdM skenu, z čehož lze odhadnout nejistotu měření. K potvrzení správnosti modelu bude potřeba ověřit reálná data. V budoucnosti by bylo vhodné po-

užít složitější model výpočtu chyby jednotlivých bodů ve VdM skenu a jasně identifikovat vznik rozdílů pro model dvojitého Gaussova rozdělení. Následně by bylo vhodné v dalších krocích studovat luminozitní region za pomoci modelu zohledňujícího rozlišení detektoru, který by používal realistickou matici chyb pro získání pozice vertexů srážek. To je potřeba k simulování procedury, která je momentálně srovnávána s reálnými daty k odhadu efektů, které nastávají při srážkách s neznámou distribucí částic v balíku [7]. Dalším navrhovaným krokem, po implementaci efektů detektoru, by mohl být pokus simulovat reálný region luminozity a z něj přímo vypočítat luminozitu. Zajímavé by bylo vyhodnotit, jestli by metoda dosahovala přesnějších výsledků než ty současně používané.

Literatura

- [1] by LHC Team and Stefania Pandolfi. LHC Report: end of 2016 proton-proton operation. Oct 2016. URL: <http://cds.cern.ch/record/2229040>.
- [2] Tony Shave. Distribution of all CERN Users by Location of Institutes on 12 January 2016. May 2016. General Photo. URL: <https://cds.cern.ch/record/2152387>.
- [3] Christiane Lefèvre. The CERN accelerator complex. Complexe des accélérateurs du CERN. Dec 2008. URL: <https://cds.cern.ch/record/1260465>.
- [4] Arturo Tauro. ALICE Schematics. General Photo, May 2017. URL: <http://cds.cern.ch/record/2263642>.
- [5] Gabriel Anders. *Absolute luminosity determination for the ATLAS experiment*. PhD thesis, CERN, 2013. URL: http://inspirehep.net/record/1296442/files/525947540_CERN-THESIS-2013-111.pdf.
- [6] Betty Bezverkhny Abelev et al. Measurement of visible cross sections in proton-lead collisions at $\sqrt{s_{NN}} = 5.02$ TeV in van der Meer scans with the ALICE detector. *JINST*, 9(11):P11003, 2014. arXiv:1405.1849, doi: 10.1088/1748-0221/9/11/P11003.
- [7] Samuel Nathan Webb. *Factorisation of beams in van der Meer scans and measurements of the ϕ_n^* distribution of $Z \rightarrow e^+e^-$ events in pp collisions at $\sqrt{s} = 8$ TeV with the ATLAS detector*. PhD thesis, Manchester U., 2015-06-01. URL: <http://inspirehep.net/record/1381312/files/CERN-THESIS-2015-054.pdf>.
- [8] R. Brun and F. Rademakers. ROOT: An object oriented data analysis framework. *Nucl. Instrum. Meth.*, A389:81–86, 1997. doi:10.1016/S0168-9002(97)00048-X.
- [9] LHC Guide. Mar 2017. URL: <http://cds.cern.ch/record/2255762>.
- [10] K. Aamodt et al. The ALICE experiment at the CERN LHC. *JINST*, 3:S08002, 2008. doi:10.1088/1748-0221/3/08/S08002.

- [11] W. Herr and B. Muratori. Concept of luminosity. In *Intermediate accelerator physics. Proceedings, CERN Accelerator School, Zeuthen, Germany, September 15-26, 2003*, pages 361–377, 2003. URL: <http://doc.cern.ch/yellowrep/2006/2006-002/p361.pdf>.
- [12] S. van der Meer. Calibration of the Effective Beam Height in the ISR. 1968.
- [13] Tore Frängsmyr and Gösta Ekspong, editors. *Physics 1981-1990*. Les Prix Nobel. World Scientific Publishing Co., 1993.
- [14] C. Rubbia. Measurement of the Luminosity of p anti-p Collider with a (Generalized) Van Der Meer Method. 1977.
- [15] P Odier, M Ludwig, and S Thoulet. The DCCT for the LHC Beam Intensity Measurement. Technical Report CERN-BE-2009-019, CERN, Geneva, May 2009. URL: <https://cds.cern.ch/record/1183400>.
- [16] D Belohrad, O R Jones, M Ludwig, J J Savioz, and S Thoulet. Implementation of the Electronics Chain for the Bunch by Bunch Intensity Measurement Devices for the LHC. Technical Report CERN-BE-2009-018, CERN, Geneva, May 2009. URL: <https://cds.cern.ch/record/1183399>.
- [17] R. Aaij et al. Absolute luminosity measurements with the LHCb detector at the LHC. *JINST*, 7:P01010, 2012. [arXiv:1110.2866](https://arxiv.org/abs/1110.2866), [doi:10.1088/1748-0221/7/01/P01010](https://doi.org/10.1088/1748-0221/7/01/P01010).
- [18] Matthias Schott. Determination of Integrated Luminosity via W and Z Boson Production with the ATLAS Detector. 2011. [arXiv:1108.2230](https://arxiv.org/abs/1108.2230).

Přílohy

Výpočet faktorizace pro jednoduché 2D Gaussovo rozdělení

Zde je předveden výpočet skutečného hodnoty luminozity (bez předpokladu faktorizovatelnosti) a výpočet hodnoty luminozity pomocí VdM metody (s předpokladem faktorizovatelnosti). Jelikož je potřeba výsledky dále použít v této práci i pro součin dvojitých Gaussových rozdělení, nelze klást jakékoliv podmínky na vstupní parametry. K výpočtu $L_{\text{true}*}$ je použit maticový formalismus, který je převzat z [7] a který výrazně ulehčuje celou úlohu. Ze stejného zdroje je převzata rovnice (6.1). Výsledek $L_{\text{true}*}$ je v rovnici (6.7). Výpočet $L_{\text{VdM}*}$ je zjednodušen za pomoci vhodných substitucí. Výsledek je pak v rovnici (6.13)

$$L_{\text{true}*} = \frac{\sqrt{|\mathbf{K}|}}{2\pi\sqrt{|\sigma_{\mathbf{a}}||\sigma_{\mathbf{b}}|}}. \quad (6.1)$$

Ve kterém $\sigma_{\mathbf{a}}$ označuje kovariantní matici prvního Gaussova rozdělení a $\sigma_{\mathbf{b}}$ je totéž pro druhé Gaussovo rozdělení.

$$\sigma_{\mathbf{a}} = \begin{pmatrix} \sigma_{x1}^2 & \rho_1\sigma_{x1}\sigma_{y1} \\ \rho_1\sigma_{x1}\sigma_{y1} & \sigma_{y1}^2 \end{pmatrix}, \quad (6.2)$$

$$\sigma_{\mathbf{b}} = \begin{pmatrix} \sigma_{x2}^2 & \rho_2\sigma_{x2}\sigma_{y2} \\ \rho_2\sigma_{x2}\sigma_{y2} & \sigma_{y2}^2 \end{pmatrix}. \quad (6.3)$$

$$\mathbf{K}^{-1} = \sigma_{\mathbf{a}}^{-1} + \sigma_{\mathbf{b}}^{-1}. \quad (6.4)$$

Pro takto definované matice je k nim matice inverzní následovná

$$\sigma_{\mathbf{a}}^{-1} = \begin{pmatrix} \frac{1}{\sigma_{x1}^2(1-\rho_1^2)} & \frac{-\rho_1}{\sigma_{x1}\sigma_{y1}(1-\rho_1^2)} \\ \frac{-\rho_1}{\sigma_{x1}\sigma_{y1}(1-\rho_1^2)} & \frac{1}{\sigma_{y1}^2(1-\rho_1^2)} \end{pmatrix}. \quad (6.5)$$

Z toho plyne, že pro matici \mathbf{K}^{-1} platí

$$\mathbf{K}^{-1} = \begin{pmatrix} \frac{\sigma_{x1}^2(1-\rho_1^2) + \sigma_{x2}^2(1-\rho_2^2)}{\sigma_{x1}^2\sigma_{x2}^2(1-\rho_1^2)(1-\rho_2^2)} & -\frac{\sigma_{x1}\sigma_{y1}(1-\rho_1^2)\rho_2 + \sigma_{x2}\sigma_{y2}(1-\rho_2^2)\rho_1}{\sigma_{x1}\sigma_{y1}(1-\rho_1^2)\sigma_{x2}\sigma_{y2}(1-\rho_2^2)} \\ -\frac{\sigma_{x1}\sigma_{y1}(1-\rho_1^2)\rho_2 + \sigma_{x2}\sigma_{y2}(1-\rho_2^2)\rho_1}{\sigma_{x1}\sigma_{y1}(1-\rho_1^2)\sigma_{x2}\sigma_{y2}(1-\rho_2^2)} & \frac{\sigma_{y1}^2(1-\rho_1^2) + \sigma_{y2}^2(1-\rho_2^2)}{\sigma_{y1}^2\sigma_{y2}^2(1-\rho_1^2)(1-\rho_2^2)} \end{pmatrix}.$$

A ze znalosti toho, že determinant inverzní matice \mathbf{A}^{-1} je převrácená hodnota determinantu matice \mathbf{A} .

$$\det \mathbf{K}^{-1} = \frac{\sigma_{x1}^2 \sigma_{y1}^2 (1 - \rho_1^2) + \sigma_{x2}^2 \sigma_{y2}^2 (1 - \rho_2^2) + \sigma_{x2}^2 \sigma_{y1}^2 + \sigma_{x1}^2 \sigma_{y2}^2 - 2\sigma_{x1} \sigma_{y1} \sigma_{x2} \sigma_{y2} \rho_1 \rho_2}{\sigma_{x1}^2 \sigma_{y1}^2 \sigma_{x2}^2 \sigma_{y2}^2 (1 - \rho_1^2)(1 - \rho_2^2)} \quad (6.6)$$

Z rovnice (6.1) lze nyní vyčíslit $L_{\text{true}*}$ a výsledek je v rovnici (6.7).

$$\begin{aligned} L_{\text{true}*} &= \\ &= \frac{\sigma_{x1} \sigma_{y1} \sigma_{x2} \sigma_{y2} \sqrt{(1 - \rho_1^2)(1 - \rho_2^2)}}{2\pi \sqrt{\sigma_{x1}^2 \sigma_{y1}^2 (1 - \rho_1^2) + \sigma_{x2}^2 \sigma_{y2}^2 (1 - \rho_2^2) + \sigma_{x1}^2 \sigma_{y2}^2 + \sigma_{x2}^2 \sigma_{y1}^2 - 2\sigma_{x1}^2 \sigma_{y1}^2 \sigma_{x2}^2 \sigma_{y2}^2 \rho_1 \rho_2}} \\ &\times \frac{1}{\sigma_{x1} \sigma_{y1} \sqrt{1 - \rho_1^2} \sigma_{x2} \sigma_{y2} \sqrt{1 - \rho_2^2}} \\ &= \frac{1}{2\pi \sqrt{\sigma_{x1}^2 \sigma_{y1}^2 (1 - \rho_1^2) + \sigma_{x2}^2 \sigma_{y2}^2 (1 - \rho_2^2) + \sigma_{x1}^2 \sigma_{y2}^2 + \sigma_{x2}^2 \sigma_{y1}^2 - 2\sigma_{x1}^2 \sigma_{y1}^2 \sigma_{x2}^2 \sigma_{y2}^2 \rho_1 \rho_2}} \end{aligned} \quad (6.7)$$

Pro výpočet $L_{\text{VdM}*}$ je potřeba znát součin distribucí pro různé separace

$$\begin{aligned} G_1 G_2(\Delta x, 0) &= \frac{1}{4\pi \sigma_{x1} \sigma_{y1} \sigma_{x2} \sigma_{y2} \sqrt{1 - \rho_1^2} \sqrt{1 - \rho_2^2}} \\ &\times \exp \left[\frac{-1}{2(1 - \rho_1^2)} \left(\frac{(x + \Delta x)^2}{\sigma_{x1}^2} + \frac{y^2}{\sigma_{y1}^2} - \frac{2\rho_1(x + \Delta x)y}{\sigma_{x1} \sigma_{y1}} \right) \right] \\ &\times \exp \left[\frac{-1}{2(1 - \rho_2^2)} \left(\frac{x^2}{\sigma_{x2}^2} + \frac{y^2}{\sigma_{y2}^2} - \frac{2\rho_2 xy}{\sigma_{x2} \sigma_{y2}} \right) \right]. \end{aligned} \quad (6.8)$$

Ke zjednodušení je vhodné zavést následující substituce:

$$\begin{aligned} A &= \frac{1}{4\pi \sigma_{x1} \sigma_{y1} \sigma_{x2} \sigma_{y2} \sqrt{1 - \rho_1^2} \sqrt{1 - \rho_2^2}} \\ a_1 &= \frac{1}{2(1 - \rho_1^2) \sigma_{x1}^2} \\ a_2 &= \frac{1}{2(1 - \rho_2^2) \sigma_{x2}^2} \\ a &= a_1 + a_2 \\ b &= \frac{1}{2(1 - \rho_1^2) \sigma_{y1}^2} + \frac{1}{2(1 - \rho_2^2) \sigma_{y2}^2} \\ c_1 &= \frac{\rho_1}{(1 - \rho_1^2) \sigma_{x1} \sigma_{y1}} \\ c_2 &= \frac{\rho_2}{(1 - \rho_2^2) \sigma_{x2} \sigma_{y2}} \\ c &= c_1 + c_2 \end{aligned}$$

protože potom lze zapsat součin distribucí jako

$$G_1 G_2(\Delta x, 0) = A \exp[-x^2 a - 2x \Delta x a_1 - \Delta x^2 a_1 - y^2 b + x y c + \Delta x y c_1]. \quad (6.9)$$

Postupně je součin distribucí zintegrován přes $d\Delta x, dx, dy$.

$$\begin{aligned} \int G_1 G_2(\Delta x, 0) d\Delta x &= A \sqrt{\frac{\pi}{a_1}} \exp\left[-x^2 a_2 + x y c_2 - y^2 \left(b - \frac{c_1^2}{4a_1}\right)\right] \\ \int \int G_1 G_2(\Delta x, 0) d\Delta x dx &= A \sqrt{\frac{\pi}{a_1}} \sqrt{\frac{\pi}{a_2}} \exp\left[-y^2 \left(b - \frac{c_1^2}{4a_1} - \frac{c_2^2}{4a_2}\right)\right] \\ \int \int \int G_1 G_2(\Delta x, 0) d\Delta x dx dy &= A \frac{\pi}{\sqrt{a_1 a_2}} \sqrt{\frac{\pi}{b - \frac{c_1^2}{4a_1} - \frac{c_2^2}{4a_2}}} \end{aligned}$$

Po dosazení za substituční členy je výsledkem (6.10). Ze symetrie problému lze ihned napsat výsledek pro separaci v y -ové ose viz rovnice (6.11).

$$\int \int \int G_1 G_2(\Delta x, 0) d\Delta x dx dy = \frac{1}{\sqrt{2\pi(\sigma_{y1}^2 + \sigma_{y2}^2)}} \quad (6.10)$$

$$\int \int \int G_1 G_2(0, \Delta y) d\Delta y dx dy = \frac{1}{\sqrt{2\pi(\sigma_{x1}^2 + \sigma_{x2}^2)}} \quad (6.11)$$

Dále stačí dosadit do rovnice (6.12), která byla odvozena v Sekci 4.2.

$$L_{\text{vdM}^*}(0, 0) = f n_b N_1 N_2 \frac{R(0, 0)}{\int_{-\infty}^{\infty} R(\Delta x, \Delta y_0) d\Delta x} \frac{R(0, 0)}{\int_{-\infty}^{\infty} R(\Delta x_0, \Delta y) d\Delta y}. \quad (6.12)$$

Takže výsledkem, ve kterém je za $R(0, 0)$ dosazena L_{true^*} z rovnice (6.7) je:

$$L_{\text{vdM}^*} = \frac{\sqrt{(\sigma_{x1}^2 + \sigma_{x2}^2)(\sigma_{y1}^2 + \sigma_{y2}^2)}}{2\pi(\sigma_{x1}^2 \sigma_{y1}^2 (1 - \rho_1^2) + \sigma_{x2}^2 \sigma_{y2}^2 (1 - \rho_2^2) + \sigma_{x1}^2 \sigma_{y2}^2 + \sigma_{x2}^2 \sigma_{y1}^2 - 2\sigma_{x1}^2 \sigma_{y1}^2 \sigma_{x2}^2 \sigma_{y2}^2 \rho_1 \rho_2)} \quad (6.13)$$