

ČESKÉ VYSOKÉ UČENÍ TECHNICKÉ V PRAZE

Fakulta jaderná a fyzikálně inženýrská

katedra fyziky

Studium izotropie kosmického záření pomocí dat experimentu AUGER

Michal Nyklíček

Vedoucí práce: Jan Řídký, CSc., FZÚ AV ČR, v.v.i. Praha
Konzultant: Mgr. Radomír Šmída, FZÚ AV ČR, v.v.i. Praha

Výzkumný úkol
Akademický rok 2006/2007

Obsah

1	Úvod	4
2	Primární kosmické záření	6
2.1	Složení	6
2.2	Energetické spektrum	6
2.3	Zdroje kosmického záření	8
2.4	Urychlovací mechanismy	10
2.4.1	Postupné urychlování	10
2.4.2	Přímé urychlování	13
2.5	GZK mez	14
3	Sekundární kosmické záření	16
3.1	Elektromagnetická komponenta	16
3.2	Hadronová komponenta	18
3.3	Mionová komponenta	18
3.4	Maximum atmosférické spršky	19
3.5	Podélný vývoj atmosférické spršky	19
4	Projekt Observatoře Pierra Augera	21
5	Souřadnicové systémy	24
5.1	Horizontální souřadnicový systém	24
5.2	Rovňkový souřadnicový systém	25
5.2.1	Rovňkové souřadnice prvního druhu	25
5.2.2	Rovňkové souřadnice druhého druhu	26
5.3	Galaktický souřadnicový systém	27
5.4	Transformace souřadnic	28
5.4.1	Rovňkové I na horizontální	28
5.4.2	Horizontální na rovňkové I	28
5.4.3	Rovňkové I na galaktické	28
6	Expoziční funkce	29
6.1	Definice expoziční funkce	29
6.2	Expoziční funkce pro AUGER	30
6.2.1	Normování	30

6.2.2	Výsledné histogramy	31
7	Kolmogorovův-Smirnovův (KS) test	33
7.1	Jednodimenzionální KS test	33
7.2	Dvoudimenzionální KS test	35
7.3	Korelační koeficienty	36
8	Data z experimentu AUGER	37
8.1	Aktivní galaktická jádra a katalog aktivních galaxií	37
8.2	Data naměřená experimentem AUGER	39
8.3	Variace použití KS testu	40
8.4	Výsledky KS testu	42
9	Závěr	46
10	Reference	48
A	Zkratky a konstanty	50
B	Statistické tabulky	51

Kapitola 1

Úvod

Kosmické záření (KZ) je tok energetických částic neustále dopadajících na Zem z vesmíru.

Kosmické záření je zajímavé především díky svým obrovským energiím. Energie částic kosmického záření se pohybují až po stovky EeV. Pro srovnání, nejvyšší energie dosahované člověkem na dnešních urychlovačích, se pohybují řádově kolem TeV. Kosmické záření tedy představuje unikátní možnost pro studium vysokoenergetických procesů. Na většinu otázek týkajících se kosmického záření, nejsou v současné době známy uspokojující a vyčerpávající odpovědi. Mezi nejdůležitější otázky, na které dosud nejsou známy odpovědi patří:

- Jakými mechanismy jsou částice ve vesmíru urychlovány na takovéto energie?
- Ve kterých objektech mohou fungovat mechanismy urychlující tyto částice?
- Jak se kosmické záření šíří?
- Existuje mezní energie KZ¹?

Kosmické záření s nejvyššími energiemi může představovat "nové okno astronomie": nese informace o svých zdrojích, vlastnostech mezihvězdného prostoru a magnetických polích.

Kosmické záření bylo objeveno roku 1912 Viktorem Hessem a od té doby bylo podrobně zkoumáno. Studium kosmického záření vedlo např. k objevu dosud neznámých elementárních částic (např. pozitron², mion³). Do poloviny padesátých let bylo KZ jediným zdrojem vysokoenergetického záření.

Důležitým poznatkem je, že kosmické záření lze rozdělit na dva základní druhy. Na **primární kosmické záření** a **sekundární kosmické záření**. Primárním kosmickým zářením myslíme částice kosmického záření, které se šíří od svého původního zdroje až do doby, než dosáhnou zemské atmosféry. Sekundárním kosmickým zářením jsou

¹Viz. kap. 2.5 GZK mez.

²objevitel C.D. Anderson; 1932

³objevitelé C.D. Anderson a S. Neddermeyer; 1937

myšleny spršky částic kosmického záření, které vznikají interakcí primárního kosmického záření s částicemi v atmosféře. Na zemském povrchu detekujeme převážně částice sekundárního kosmického záření.

Uvedeme přehled základních znalostí o kosmickém záření, a to zvlášť pro primární kosmické záření a zvlášť pro sekundární kosmické záření.

Kapitola 2

Primární kosmické záření

2.1 Složení

V kosmickém záření se vyskytují všechny známé stabilní částice, jako jsou protony, α částice, těžší jádra, elektrony, pozitrony a fotony. Částicové složení kosmického záření závisí na energii.

Složení primárního kosmického záření v oblasti řádově 10 GeV¹ je tvořeno přibližně z 90% protony, 7% α částicemi, atomovými jádry 1%, elektrony a pozitrony 1% a malou částí fotonů. V energetické oblasti TeV až PeV je tvořeno přibližně z 50% protony, 25% α částicemi, 13% jádra CNO (uhlík, dusík, kyslík) a 13% jádry s atomovým číslem blízkým Fe [3].

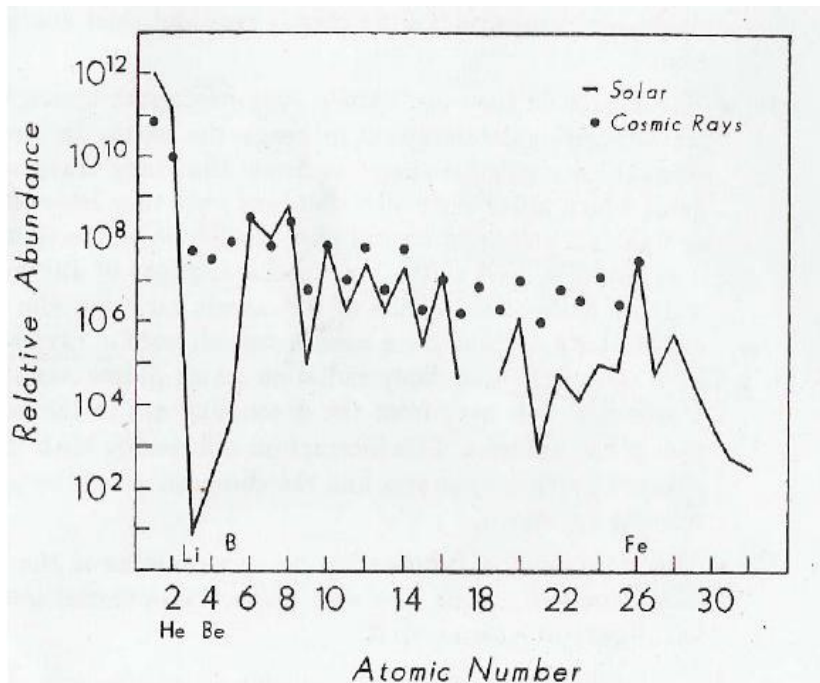
Na zemský povrch dopadají částice kosmického záření vzniklé mimo naši sluneční soustavu (dále označované pouze jako "kosmické záření") a částice pocházející z naší sluneční soustavy. Výskyt atomových jader (viz. obr. 2.1) v kosmickém záření je podobný se zastoupením atomových jader v naší sluneční soustavě. U kosmického záření je větší výskyt lehčích jader ³Li, ⁴Be, ⁵B. Protony a α částice se naopak o něco více vyskytují ve složení sluneční soustavy. Při šíření mezihvězdným prostorem dochází k interakcím s různými částicemi a těžší jádra se rozpadají na lehčí. Díky dráze, kterou musí kosmické záření urazit než dosáhne Země, se v kosmickém záření vyskytuje více lehčích jader [3]. Výskyt jader železa je u obou shodný.

2.2 Energetické spektrum

Energetické spektrum je jedním z nejdůležitějších poznatků vypovídajících o vlastnostech kosmického záření.

Energie kosmického záření se řádově pohybují od 10⁹ eV do 10²⁰ eV. Dolní energetická mez je způsobena činností Slunce, které vytváří tzv. sluneční vítr, který je tvořen pohybujícími se nabitými částicemi. Ty vytvářejí magnetické pole, které zabraňuje částicím s nízkými energiemi, aby pronikly do naší sluneční soustavy.

¹ v této oblasti je složení měřeno přímo



Obrázek 2.1: Zastoupení atomových jader ve sluneční soustavě a kosmickém záření.

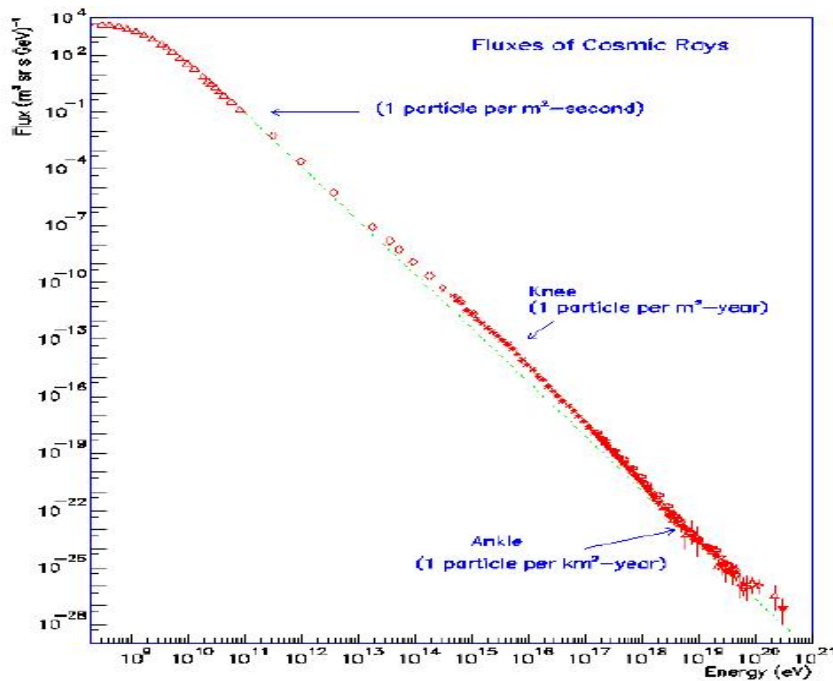
Energetické spektrum je závislost toku částic kosmického záření na jeho energii, v jednotkách počtu částic/[$m^2 \cdot sr \cdot s \cdot eV$].

Diferenciální energetické spektrum (viz. obr.2.2) se řídí přibližným vztahem:

$$\frac{dN}{dE} \approx E^{-\alpha}, \quad (2.1)$$

kde E je energie částic kosmického záření, N je počet částic a α je spektrální index, který charakterizuje mocný pokles počtu částic s energií.

Jak je vidět z obrázku 2.2, tak sklon diferenciálního energetického spektra není konstantní. Mezi energiemi 10^{10} eV až 10^{15} eV je hodnota α přibližně rovna 2.7. Za touto částí diferenciálního energetického spektra následuje přechod ke strmější části. Tento bod se nazývá koleno (anglicky "knee"). Strmější část spektra je mezi energiemi 10^{15} až 10^{18} eV. V této části spektra nabývá α přibližně hodnoty 3. V oblasti 4×10^{18} eV dochází opět ke změně sklonu. Tato část spektra se nazývá kotník (anglicky "ankle"). V energetické oblasti 10^{19} eV až 5×10^{19} eV je hodnota α opět přibližně rovna hodnotě 2.6. Pro energie vyšší než 5×10^{19} se předpokládá strmý pokles spektra, což některé experimenty potvrzují. Naopak některé experimenty ukazují pokračující diferenciální energetické spektrum.



Obrázek 2.2: Energetické spektrum kosmického záření.

Z obr. (2.2) lze vyčíst, jaké počty částic s danou energií dopadají na zemskou kouli. Pro částice s nejnižší energií (10^9 eV) je tok poměrně vysoký: 10^4 částic $\text{m}^{-2}\text{s}^{-1}$. Tento tok s rostoucí energií klesá. Pro částice s energiemi 10^{12} eV činí tok 1 částice $\text{m}^{-2}\text{s}^{-1}$. V oblasti spektra, která se nazývá "koleno" je tok jen 1 částice $\text{m}^{-2}\text{rok}^{-1}$. Částic, které mají energii 10^{18} eV, tedy jsou z oblasti "kotníku", dopadá na zemský povrch 1 částice $\text{km}^{-2}\text{rok}^{-1}$. Částice s nejvyššími energiemi jsou tak vzácné, že jich dopadá na zemský povrch přibližně 1 částice $\text{km}^{-2}\text{století}^{-1}$.

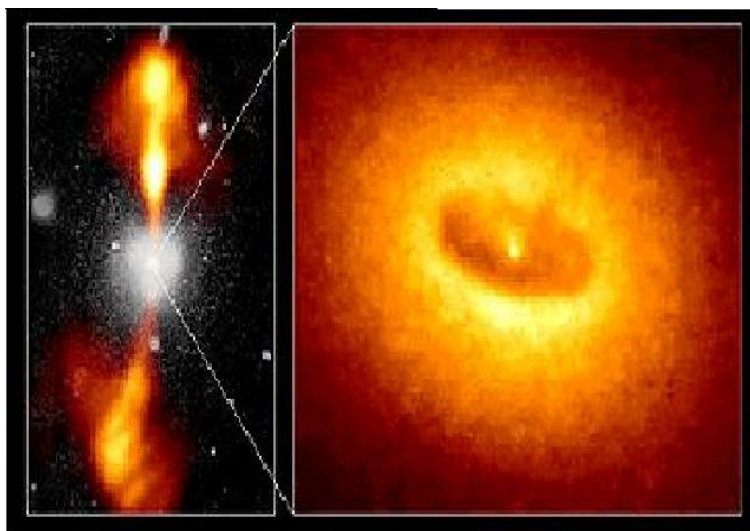
2.3 Zdroje kosmického záření

V současné době se předpokládá, že vysokoenergetické kosmické záření vzniká a je urychlováno v astronomických objektech jako jsou např. supernovy, pulsary, galaktická jádra obsahující černé díry, kvazary, rádiové galaxie. Zdroje kosmického záření mohou být galaktické a extragalaktické.

Existují dva možné způsoby urychlování² a to urychlování postupné³ a urychlování přímé. Dle způsobu, kterým částice kosmického záření dosahují svých energií, můžeme zdroje rozdělit do tří kategorií [16].

²urychlovacím mechanismům se věnuje následující podkapitola

³Viz. kap. 2.4



Obrázek 2.3: Aktivní galaktické jádro.[21].

Do první kategorie patří zbytky supernov, srážky galaxií, rádiové galaxie, v nichž dochází k postupnému urychlování částic.

Do druhé kategorie lze zařadit zdroje, v nichž probíhají katastrofické procesy. Jedná se většinou o poměrně kompaktní objekty a částice jsou v nich urychlovány jen v jediném kroku. Lze sem zařadit např. elektrická pole u pulsarů a u akrečních disků okolo černých děr a v neposlední řadě i procesy probíhající v souvislosti se záblesky záření gama. Ať již je fyzikální podstata zdrojů záblesků gama jakákoli, dochází k produkci gama fotonů právě interakcí ultrarelativisticky urychlených částic s okolním prostředím. Dle stávajících teorií může ve všech těchto zdrojích při ideálním nastavení parametrů docházet k urychlení částic na energie až 10^{20} eV.

Do třetí kategorie patří tzv. "exotické zdroje". Patří sem např. hypotetické supertěžké částice vzniklé krátce po Velkém třesku⁴. Klidové energie těchto částic by mohly dosahovat hodnot až 10^{24} eV a jejich rozpadem by měly vznikat částice s velmi vysokými energiemi, typicky nad 10^{20} eV. Při těchto rozpadech vznikají především fotony a neutrina a zhruba zbylých 10% částic by měly tvořit protony. Extrémně energetická neutrina se mohou srážet s pomalými reliktními neutriny a vytvářet částice Z (intermediální bosony slabé interakce), jejichž rozpadem pak vzniká několik desítek částic včetně protonů a elektronů s energiemi až do 10^{21} eV. Tato reakce je perspektivní zejména kvůli tomu, že pomalých neutrin je všude dostatek, a tak může docházet k rozpadu Z částic a následnému vzniku spršek i v "kosmologicky malých" vzdálenostech (řádově Mpc) od Země.

⁴počátek našeho vesmíru

2.4 Urychlovací mechanismy

Urychlovací mechanismy lze rozdělit na dva druhy a to na urychlování postupné a urychlování přímé.

2.4.1 Postupné urychlování

V případě postupného urychlování částic je finální energie částice dosaženo mnohonásobným odrazem na magnetických polích pohybujících se oblaků nebo šokových vln. Proces, při němž částice získává finální energii zabere mnoho času, mnohdy i tisíce let. Základní mechanismus tohoto urychlovacího modelu navrhl v roce 1949 Enrico Fermi. Dále budeme označovat tento mechanismus jako Fermi II⁵.

V roce 1978 Bell, Blandford a Ostriker aplikovali urychlovací mechanismus navržený Fermim pro rychle se pohybující rázové vlny. Pro tento případ dosahují částice vysokých energií mnohem rychleji a výsledné energie jsou také výrazně vyšší. Tento mechanismus budeme dále označovat jako Fermi I.

Fermi II.

Fermi předpokládal, že částice jsou urychlovány kolizemi s magnetickými oblaky v galaxii. Energie takovýchto magnetických mlhovin jsou mnohem větší než energie částice kosmického záření, která s nimi přichází do styku při urychlovacím procesu.

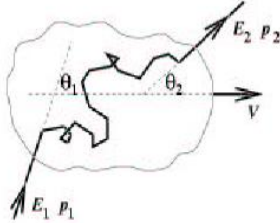
Při popisu urychlovacího mechanismu Fermi II. budeme pracovat s následujícími předpoklady:

- částice je relativistická ($E = pc$),
- zanedbáváme energetické ztráty částic při srážkách (předpoklad pružných srážek),
- částice se v oblaku pohybuje náhodně,
- struktura magnetických mlhovin je dána a není ovlivňována srážkami s částicemi.

Na obrázku 2.4 je schématicky znázorněna srážka částice s magnetickým oblakem. Pohybující částice má na začátku procesu energii E_1 a její vektor rychlosti svírá s vektorem rychlosti magnetického oblaku úhel θ_1 . Na konci procesu má částice finální energii E_2 a vylétává pod úhlem θ_2 . Magnetická mlhovina se pohybuje malou rychlostí V . Všechny uvedené veličiny jsou označeny v laboratorní soustavě. Označme čárkovaně veličiny v těžišťové soustavě (E'_1, \dots).

$$\begin{pmatrix} \frac{i}{c} E'_1 \\ p'_1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \gamma & -i\beta\gamma & 0 & 0 \\ i\beta\gamma & \gamma & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \frac{i}{c} E_1 \\ p_1 \cos \theta_1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \quad (2.2)$$

⁵Fermi II. z důvodu, že energetický zisk z jedné srážky je úměrný β^2



Obrázek 2.4: Schéma srážky částice s magnetickou mlhovinou.[1]

$$\begin{pmatrix} \frac{i}{c} E_2 \\ p_2 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \gamma & i\beta\gamma & 0 & 0 \\ -i\beta\gamma & \gamma & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \frac{i}{c} E'_2 \\ p'_2 \cos \theta'_2 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \quad (2.3)$$

Pomocí Lorentzovy transformace z laboratorní soustavy do těžišťové (2.2) lze získat vztah:

$$E'_1 = \gamma E_1 (1 - \beta \cos \theta_1), \quad (2.4)$$

kde $\beta = V/c$ a $\gamma = 1/\sqrt{1 - \beta^2}$.

Přechodem z těžišťové soustavy zpět do laboratorní (pomocí vztahu 2.3) lze získat vztah:

$$E_2 = \gamma E'_2 (1 + \beta \cos \theta'_2), \quad (2.5)$$

Předpokládáme pouze pružné srážky částice s magnetickou mlhovinou, proto se energie v těžišťové soustavě magnetické mlhoviny zachovává $\Rightarrow E'_1 = E'_2$. Díky tomu lze dostat následující vztah:

$$E_2 = \gamma^2 E_1 (1 - \beta \cos \theta_1) (1 + \beta \cos \theta'_2). \quad (2.6)$$

Vztah (2.6) můžeme přepsat na změnu energie připadající na jednu srážku jako $(E_2 - E_1)/E_1$ a dostaneme následující výraz:

$$\frac{\Delta E}{E_1} = \gamma^2 (1 - \beta \cos \theta_1) (1 + \beta \cos \theta'_2). \quad (2.7)$$

Protože je pohyb částice v magnetické mlhovině zcela náhodný, všechny možné hodnoty úhlu rozptylu θ'_2 budou mít stejnou pravděpodobnost. Z toho pramení, že:

$$\langle \cos \theta'_2 \rangle = 0. \quad (2.8)$$

Střední hodnota $\langle \cos \theta_1 \rangle$ závisí na poměru srážek částic kosmického záření s magnetickou mlhovinou pro různé úhly. Poměr srážek je úměrný relativní rychlosti s mlhovinou a částicí, takže pravděpodobnost, že dojde ke srážce pod úhlem θ_1 je úměrná $(v - V \cos \theta_1)$ a pro ultrarelativistické částice ($v \approx c$) vede k hodnotě [1]:

$$\langle \cos \theta_1 \rangle = -\frac{\beta}{3}. \quad (2.9)$$

Střední hodnota rovnice (2.7), vystředovaná přes všechny úhly, vede ke vztahu:

$$\frac{\Delta E}{E_1} \approx \frac{4}{3} \beta^2. \quad (2.10)$$

Protože $\beta \ll 1$, tak průměrný energetický zisk z jedné srážky je velmi malý. K malému průměrnému zisku dochází, protože mohou nastat dva případy srážky a to "catch-up" kolize (při které částice energii ztrácí) a "head-on" kolize (při které dochází k energetickému zisku částice). Lze ukázat, že pravděpodobnost "head-on" kolize je větší, než pravděpodobnost "catch-up" kolize [3] a výsledná energie částice je vyšší než původní.

Fermi I.

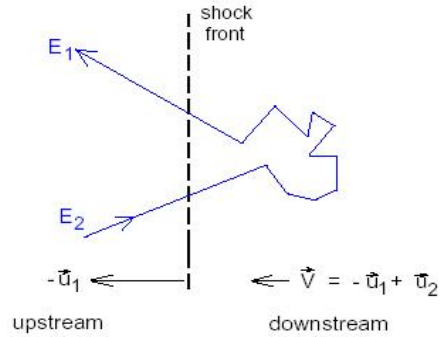
Protože původní Fermiho model vyžadoval velmi dlouhé uvěznění částice v magnetickém oblaku pro dosažení pozorovaných energií⁶, byl v 70. letech modifikován. Bylo tak učiněno z důvodu účinnějšího popisu urychlování (na úroveň prvního řádu β). Tento mechanismus hraje důležitou roli u rázových vln ze supernov, ale je obecně aplikovatelný na silnější rázové vlny z jiných astrofyzikálních objektů [1].

V tomto případě dochází k čelním srážkám mezi rázovou vlnou a relativistickou částicí (viz. obr. 2.5). Rázová vlna vzniká při výbuchu, kdy je vyzářena hmota o hmotnosti několika sluncí rychlostí přibližně 10^4 km/s, která je mnohem větší než rychlost zvuku v mezihvězdném prostoru (10 km/s)[1]. Rychlost takovéto rázové vlny je označena $-\vec{u}_1$. Částice se pohybují směrem k rázové vlně rychlostí \vec{u}_2 a platí $|u_1| > |u_2|$. V laboratorní soustavě se částice za rázovou vlnou pohybují rychlostí $\vec{V} = -\vec{u}_1 + \vec{u}_2$, která může být interpretována jako rychlost urychlených částic ("downstream") vzhledem k neurychleným částicím ("upstream").

Podobně jako u vztahu (2.8) lze určit střední hodnotu $\cos \theta'_2$, která je narozdíl od mechanismu Fermi II nenulová. Lze ukázat [1], že v takovémto uspořádání splňují vystředované hodnoty následující vztahy:

$$\langle \cos \theta_1 \rangle = -\frac{2}{3}, \quad (2.11)$$

⁶Z důvodu malého energetického zisku z jedné srážky částice KZ s magnetickým oblakem.



Obrázek 2.5: Srážka KZ s rázovou vlnou ze supernovy.

$$\langle \cos \theta'_2 \rangle = \frac{2}{3}. \quad (2.12)$$

Dosažením vztahů 2.11 a 2.12 do 2.7 dostaneme vztah:

$$\frac{\Delta E}{E_1} = \frac{1 + 4\beta/3 + 4\beta^2/9}{1 - \beta^2} - 1 \approx \frac{4}{3}\beta. \quad (2.13)$$

Energetický zisk částice závisí lineárně na $\beta = V/c$. Vztahy 2.10 a 2.13 platí pouze v případě, že rázová vlna je nerelativistická, ale dá se ukázat, že podobné výsledky platí i v případě relativisticky se pohybující rázové vlny.

Urychlovací mechanismus je v tomto případě daleko účinnější, neboť pohyb částice v rázové vlně není náhodný. V tomto procesu vede srážka částice s rázovou vlnou vždy k energetickému zisku.

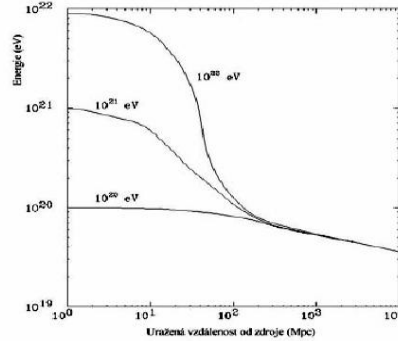
2.4.2 Přímé urychlování

K přímému urychlování dochází u objektů, okolo kterých se vytváří velký elektrický potenciál, jako jsou např. neutronové hvězdy nebo akreční disky u černých děr.

Magnetické pole na povrchu mladých, rychle rotujících neutronových hvězd dosahuje 10^8 T a indukovaný elektrický potenciál může dosáhnout řádově 10^{18} V. Pokud by nedocházelo ke srážkám, při kterých částice ztrácí energii, byly by částice urychleny na energii

$$E = Z \cdot 10^{18} eV,$$

kde Z je náboj částice.



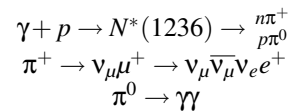
Obrázek 2.6: Schématické znázornění úbytku energie částice KZ v závislosti na uražené vzdálenosti.

2.5 GZK mez

V roce 1966 K. Greisen [7] a nezávisle na něm G. T. Zacepin a V. A. Kuzmin [8] zjistili⁷, že částice s energií nad 50 EeV ztrácejí energii srážkami s fotony reliktního záření. Toto záření je pozůstatkem procesů proběhlých během Velkého třesku a nyní jeho teplota odpovídá 2.7 K. Toto záření homogenně vyplňuje celý vesmír a má výrazný vliv na šíření částic KZ s energiemi vyššími než 50 EeV. Existence či neexistence GZK meze je jedna z fundamentálních otázek dnešního studia kosmického záření.

Pokud částice s libovolně vysokou energií absolvuje při svém šíření vzdálenost vyšší než přibližně 100 Mpc, klesne její energie na hodnotu okolo 5×10^{19} eV. Úbytek energie částice v závislosti na uražené vzdálenosti je znázorněn na obrázku (2.6).

Hlavní proces, vedoucí k energetickým ztrátám protonů kosmického záření při interakcích s reliktními fotony je:



Detekujeme-li tedy kosmické záření s energiemi většími než je mez GZK, jsou možné jen dva typy vysvětlení.[3]

1. Zdroje extrémně energetického záření jsou "blízko" Země (tedy do 100 Mpc). V takovém případě však zatím nevíme, o jaké zdroje se jedná. Mohou to být známé astronomické objekty anebo exotické zdroje, jako jsou rozpady supertěžkých částic.

⁷Na jejich počest byla tato mez nazvána GZK mez.

2. Zdroje jsou v kosmologických vzdálenostech a GZK limit je vypočten špatně. To může mít však jen velmi fundamentální příčiny - spekulativní teorie, které byly zatím předloženy, se pokoušejí mez GZK zvýšit kvantově-gravitačními korekcemi vycházejícími ze superstrunové teorie, anebo modifikací lorentzovské transformace.

Kapitola 3

Sekundární kosmické záření

Po vstupu částice primárního kosmického záření do zemské atmosféry dojde k interakci s částicemi v atmosféře. Jakmile se tak stane, vznikne rozsáhlá atmosférická sprška (EAS – extensive air shower) sekundárního záření. První interakce se uskuteční přibližně ve výšce několika desítek kilometrů nad zemským povrchem. EAS je tvořena velkým množstvím částic (milióny až desítky miliard). Počet těchto částic závisí na energii a typu primární částice, na fluktuacích ve vývoji EAS a počet těchto částic se mění s nadmořskou výškou. Počet částic v EAS roste, dokud průměrná energie připadající na částici neklesne pod kritickou mez, při které už není další produkce nových částic možná. V tomto bodě interakce nevedou k tvorbě nových částic, ale k absorpci. Tento bod se nazývá maximum EAS. Po dopadu na zemský povrch může mít sprška průměr několika kilometrů a zasažené území tak činí až desítky km^2 (závisí na sklonu spršky).

Na zemském povrchu detekujeme sekundární částice¹. Z vlastností detekované EAS odvozujeme vlastnosti primární částice – směr příletu, energii a typ primární částice.

Složení EAS záleží na primární částici kosmického záření. Pokud byl primární částicí foton, tak bude EAS obsahovat převážně e^- , e^+ a γ . Pokud primární částicí bylo nějaké jádro, tak EAS bude navíc obsahovat miony, neutrina a hadrony (protony, neutrony a piony) [3].

Sprška sekundárního kosmického záření se skládá ze tří důležitých komponent (viz. obr. 3). Jednotlivé komponenty spršky budou popsány v následujícím textu.

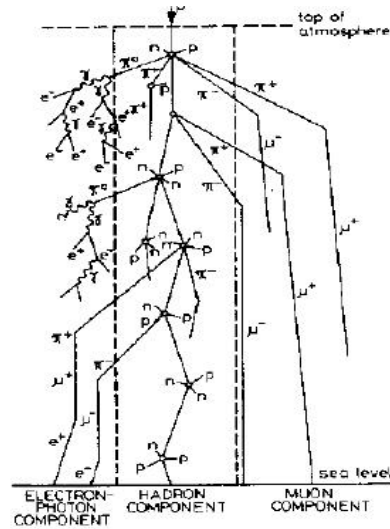
3.1 Elektromagnetická komponenta

Zdrojem fotonů pro elektromagnetickou komponentu jsou rozpady π^0 :

$$\pi^0 \rightarrow \gamma + \gamma$$

Vysokoenergetické fotony produkují elektron-pozitronové páry, které v důsledku brzdného záření vyzařují brzděné fotony. Ty produkují další elektron-pozitronové páry. Počet elektron-pozitronových párů a brzděných fotonů poroste do té doby, dokud se

¹ Vyjímku tvoří neutrina.



Obrázek 3.1: Složení spršky sekundárního kosmického záření.

ionizační ztráty e^+ , e^- nestanou srovnatelné s radiačními ztrátami, tj. do té doby, dokud energie e^+ , e^- nedosáhne kritické hodnoty E_c (84 MeV ve vzduchu).

Předpokládejme primární foton o energii E_0 , který urazí vzdálenost R než vytvoří elektron-pozitronový pár. Každý lepton z elektron-pozitronového páru bude mít v průměru energii rovnou $E_0/2$. Po další vzdálenosti R elektron nebo pozitron emituje brzdný foton s průměrnou energií $E_0/4$. Tento proces se dále opakuje. Po uražení vzdálenosti nR vznikne 2^n částic s průměrnou energií $E_0/2^n$. Tento proces vzniku částic pokračuje do té doby, dokud energie částice neklesne pod kritickou energii E_c [3].

Kritická energie E_c je definovaná jako energie, při níž se ionizační ztráty rovnají ztrátám vzniklými brzdným zářením. Pro fotony je to energie, kde začíná převažovat Comptonův rozptyl nad tvorbou párů. Pod touto energií už nevznikají další částice, kromě nízkoenergetických elektron-iontových párů.

EAS tedy dosáhne svého maxima, když průměrná energie částic ve spršce je rovna kritické energii. Celkový počet fotonů a elektronů v EAS je tedy dán poměrem E_0/E_c . Lze ukázat, že počet vzdáleností R potřebných k dosažení maxima spršky je dán výrazem:

$$\frac{\ln(E_0/E_c)}{\ln(2)}. \quad (3.1)$$

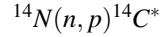
Hloubka maxima spršky má tedy logaritmickou závislost na energii primární částice a počet částic v maximu spršky má lineární závislost na energii primární částice. Počet částic N_{max} , v maximu spršky lze také přibližně určit ze vztahu:

$$N_{max} = (1.1 \div 1.6)E_0[GeV] \quad (3.2)$$

Z tohoto vztahu je vidět, že částice s energií řádově EeV vytvoří spršku řádově 10^9 částic.

3.2 Hadronová komponenta

Hadronová komponenta obsahuje převážně nukleony a piony. Tato složka EAS se tvoří až do okamžiku, dokud energie nukleonů neklesne na hodnotu několik stovek MeV. Protony spotřebují svoji energii na ionizační procesy. Neutrony vyvolávají jaderné procesy, dokud se nestanou pomalými. Ty jsou pak zachycovány, nejvíce jádry ^{14}N [4].

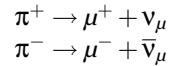


Než hadronová komponenta dosáhne svého maxima, chová se podobně jako elektromagnetická komponenta. Maximum spršky závisí na detailech hadronové interakce a povaze primární částice. Po dosažení maxima spršky začne počet částic ve spršce exponenciálně klesat.

3.3 Mionová komponenta

Miony produkované ve spršce sekundárního kosmického záření jsou velmi důležité pro určení složení primárního kosmického záření.

Zdrojem mionů ve spršce jsou rozpady pionů [4]:



Pravděpodobnost, že se pion spíše rozpadne, než zainteraguje, závisí na jeho energii a na hustotě atmosféry. Ve vyšších nadmořských výškách, díky nižší hustotě atmosféry, se vysokoenergetické piony pravděpodobněji rozpadají. Nejenergetičtější miony jsou tedy výsledkem rozpadů vysokoenergetických pionů a poskytují nám informace o raném vývoji spršky. Vysokoenergetické miony jsou produkovány blízko osy spršky a vznikají v nadmořské výšce 8 - 16 km [3].

Počet nízkoenergetických (řádově v oblasti GeV) a vysokoenergetických mionů (řádově v oblasti TeV) závisí na atomovém čísle primární částice.

Uvažujme pro názornost dvě různé spršky – první iniciovanou primární částicí ^{56}Fe a druhou iniciovanou protonem. Při interakci jádra ^{56}Fe je vytvořeno zhruba 56 individuálních EAS, každá generovaná nukleonem o průměrné energii $E_0/56$. Výsledné piony v každé EAS budou mít menší průměrnou energii než v EAS iniciované protonem o stejné energii. Těžší jádra tedy vytvoří více pionů. Mnoho z těchto nízkoenergetických pionů se rozpadne na miony.

Počet vysokoenergetických mionů ve spršce sekundárního kosmického záření, vytvořené částicí s atomovým číslem A , může být určen pomocí následující formule [3]:

$$N_\mu(> E_{min}) = \frac{KA \sec \theta}{E_{min}} \left(\frac{E_{min}}{E_0/A} \right)^\alpha \left(1 - \frac{E_{min}}{E_0/A} \right)^\beta, \quad (3.3)$$

kde E_0 je primární energie částice v GeV, A je atomové číslo, E_{min} je v jednotkách GeV, $K = 14.5$ GeV, $\alpha = -0.757$, $\beta = 5.25$, θ je zenitový úhel. Tento vzorec je založen na simulacích Monte Carlo a předpokládá $\theta < 60^\circ$.

3.4 Maximum atmosférické spršky

Poloha maxima EAS X_{max} je důležitým ukazatelem u spršek sekundárního záření. Poloha maxima EAS nám dává informaci, v jaké hloubce atmosféry EAS dosáhla svého maxima kde dochází k poklesu v produkci nových částic.

Atmosférickou hloubku lze určit ze vztahu:

$$X = \int_l \rho(h_v) dl = \int_l \rho \left[l \cos \theta + \frac{1}{2} \frac{l^2}{R_E} \sin^2 \theta \right] dl, \quad (3.4)$$

kde ρ je hustota atmosféry ve výšce h_v , l je vzdálenost, θ je zenitový úhel a R_E je poloměr Země.

Užitečným vztahem je také následující rovnice:

$$\frac{p}{\rho} = \frac{X_V}{-dX_V/dh}, \quad (3.5)$$

kde p je atmosférický tlak a X_V je vertikální vzdušná hmota. Pro atmosféru o konstantní teplotě platí vztah:

$$X_V = X_0 e^{-h/h_0}, \quad (3.6)$$

kde $X_0 \simeq 1030 \text{ g/cm}^2$.

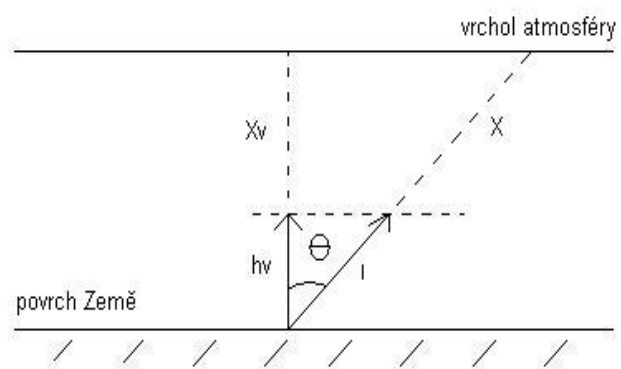
Simulace ukazují, že střední hodnoty X_{max} jsou 750 g/cm^2 pro jádra Fe a 850 g/cm^2 pro protony. Bohužel fluktuaace místa první interakce a ve vývoji spršky vedou k posunům polohy maxima X_{max} . Např. pro částici s primární energií $E = 10^{19} \text{ eV}$ dosahují posuny pozice X_{max} přibližně 50 g/cm^2 [1].

3.5 Podélný vývoj atmosférické spršky

Podélný vývoj EAS se dá přibližně popsat následujícím analytickým vyjádřením pro spršku iniciovanou protonem. Vztah je založen na simulacích Monte Carlo a autory jsou Gaisser a Hillas [3].

$$N(X) = N_{max} \left(\frac{X - X_0}{X_{max} - X_0} \right)^{\frac{X_{max} - X_0}{\lambda}} \exp \left(\frac{X_{max} - X}{\lambda} \right) \quad (3.7)$$

kde $N(X)$ je počet částic ve spršce jako funkce vzdušné hmoty X [g/cm^2]; X_0 je místo první interakce; X_{max} je pozice maxima EAS; konstanta $\lambda = 70 \text{ g/cm}^2$.



Obrázek 3.2: Ilustrativní obrázek ke vztahům pro výpočet vzdušné hmoty X .

Kapitola 4

Projekt Observatoře Pierra Augera

Observatoř Pierra Augera je mezinárodní projekt na detekci kosmického záření. Jedná se o největší projekt svého druhu. Projekt nese jméno francouzského fyzika Pierra Augera (obr. 8.3), který v roce 1938 objevil atmosférické spršky sekundárního kosmického záření. Projektu se účastní přibližně 350 vědců z více než 30 institucí z 15 zemí světa.



Obrázek 4.1: Pierre Victor Auger, francouzský fyzik.

Základní myšlenka projektu je dílem nositele Nobelovy ceny prof. Jamese Cronina z University v Chicagu a prof. Alana Watsona z University v Leedsu. Mezinárodní spolupráce na projektu započala v listopadu 1995. Cílem projektu je studium částic kosmického záření pro energie větší než 10^{18} eV [16], [15].

Observatoř Pierra Augera je budována na jižní polokouli. Je umístěna v pampě nedelako města Malargüe¹ v provincii Mendoza v západní Argentině. Její výstavba byla zahájena roku 2001 a měla by být dokončena na přelomu let 2007 a 2008. Do budoucna se plánuje vybudovat další observatoř na severní polokouli.

Observatoř AUGER je tzv. hybridní detektor, což znamená, že se skládá z více typů detektorů. Na projektu AUGER jsou využity čerenkovské detektory (viz. obr. 4.2) a

¹V nadmořské výšce 1400m.

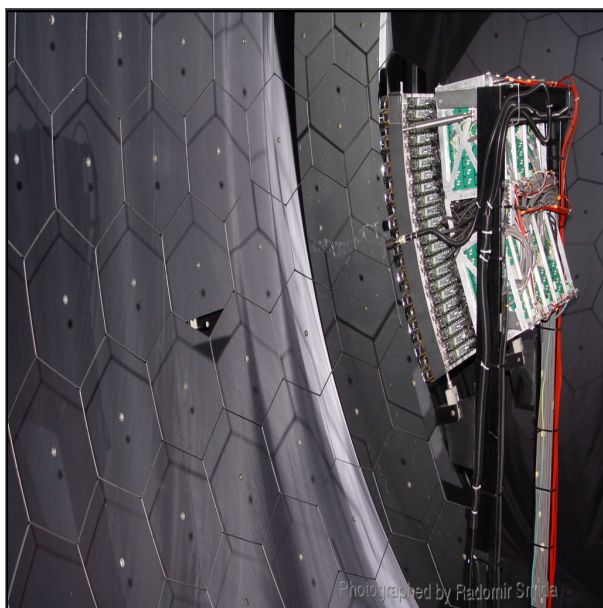
atmosférické fluorescenční teleskopy (viz. obr. 4.3). Po dobudování celé observatoře bude observatoř sestávat z 1600 čerenkovských detektorů, vzdálených od sebe 1.5 km a pokrývajících plochu 3000 km². Tuto detekční síť doplňují atmosférické fluorescenční detektory, které měří za jasných bezměsíčných nocí a které jsou umístěny ve 4 pozorovatelnách.

Všechny čerenkovské detektory jsou velké nádrže naplněné vodou. Každá nádrž obsahuje 12 tisíc litrů destilované vody a je opatřena 3 fotonásobiči.



Obrázek 4.2: Čerenkovský detektor, jedna z nádrží naplněná destilovanou vodou, používaná na projektu AUGER.

Každá pozorovatelná fluorescenčního detektoru se skládá ze 6 teleskopů (zrcadel). Jednotlivá zrcadla mají rozměr 3.6×3.6 m se zorným polem $30^\circ \times 30^\circ$. V ohnisku každého zrcadla je kamera tvořená 440 fotonásobiči.



Obrázek 4.3: Fluorescenční teleskop používaný na projektu AUGER.



Obrázek 4.4: Budova fluorescenčního teleskopu.

Kapitola 5

Souřadnicové systémy

Pro experimenty zabývající se studiem kosmického záření je důležitým prvkem při zpracování dat, dobrá volba vhodného souřadnicového systému. Z tohoto důvodu je tato kapitola věnována popisu souřadnicových systémů, které se běžně používají.

V této kapitole budou popsány tři nejběžnější astronomické souřadnicové systémy, určující pozici na nebeské sféře: souřadnice horizontální, souřadnice ekvatoriální a souřadnice galaktické.

Podstatou definice souřadné soustavy je definice *základní roviny* procházející počátečním bodem (počátkem souřadnic) a *základního směru*.

V této kapitole je využita převážně literatura [5].

5.1 Horizontální souřadnicový systém

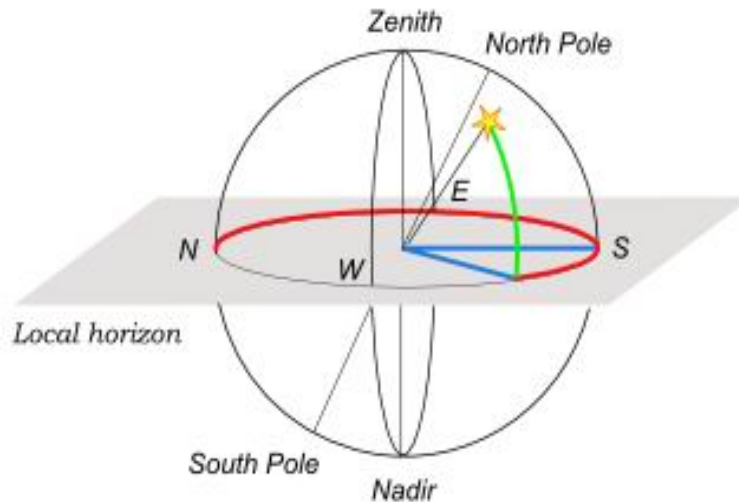
Díky velkým rozměrům Země, vzhledem k velikosti člověka, má pozorovatel dojem, že okolní krajina je rovina¹. Tato rovina zdánlivě protíná oblohu na obzoru (horizontu), je kolmá na směr gravitace a je rovinou horizontální. Příímka vedená kolmo k horizontální rovině je příímka vertikální a protíná sféru ve dvou bodech - v zenitu² a nadiru. Příímka vertikální spojuje zenit a nadir a zajišťuje polohu roviny obzoru, která je hlavní rovinou horizontálních souřadnic.

Souřadnice, které používá k popisu objektů horizontální souřadnicový systém, se nazývají *výška* h a *azimut* A . Výška h je úhel, pod kterým je vidět objekt nad či pod horizontem a nabývá hodnot z intervalu $\langle -90^\circ; +90^\circ \rangle$. Zavádí se také zenitový úhel $\theta = 90^\circ - h$. Azimut A je úhel, který mezi sebou svírají místní poledník³ a vertikální kružnice vedená popisovaným objektem. Azimut se měří od jižního bodu směrem k severnímu ve směru pohybu hodinových ručiček a nabývá hodnot $\langle 0^\circ; +360^\circ \rangle$. Tj. bod jižní má $A = 0^\circ$, bod západní $A = 90^\circ$, bod severní $A = 180^\circ$ a bod východní má $A = 270^\circ$.

¹Pokud není hornatá a kopcovitá.

²Bod nad hlavou pozorovatele.

³Místní poledník je myšlená kružnice procházející jihem, zenitem, severem a nadirem, kolmá na horizont.



Obrázek 5.1: Horizontální souřadnicový systém.

Horizontální souřadnicový systém je fixován se Zemí, nikoli s hvězdami. Souřadnice jednotlivých objektů se během rotace Země mění s časem. Souřadnice stejného objektu, pozorovaného ve stejném čase na různých místech Země budou mít jiné hodnoty.

5.2 Rovníkový souřadnicový systém

Projekce zemského rovníku na nebeskou sféru se nazývá nebeský rovník. Obdobně, projekce geografických pólů na nebeskou sféru se nazývají severní a jižní nebeský pól. Rovina nebeského rovníku je základní rovinou pro rovníkové souřadnice.

Rovníkový souřadnicový systém používá souřadnice, jež lze rozdělit podle výchozího bodu na dva druhy. A to na ekvatoriální souřadnice prvního druhu a ekvatoriální souřadnice druhého druhu [5].

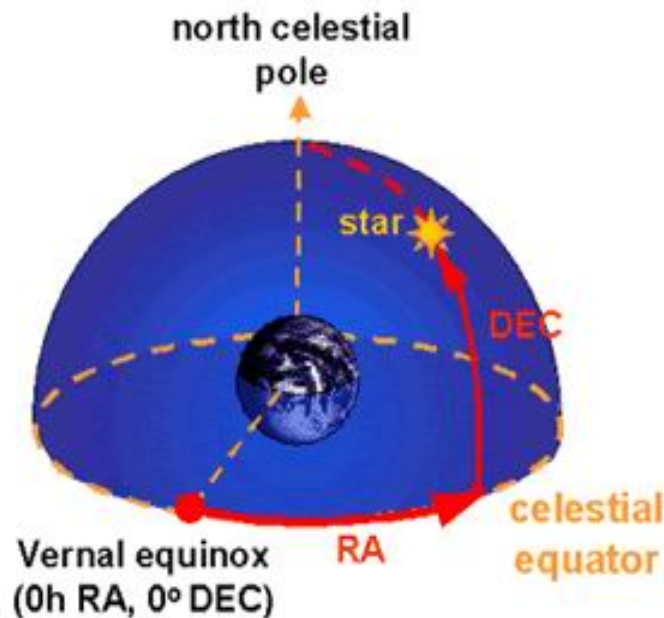
5.2.1 Rovníkové souřadnice prvního druhu

Rovníkové souřadnice prvního druhu mají za výchozí bod průsečík meridiánu⁴ s rovníkem.

Rovníkové souřadnice prvního druhu (viz. obr. 5.2) využívají dvě základní souřadnice k určení polohy objektu. První souřadnicí je *deklinace* δ . Deklinace vyjadřuje úhel nad nebo pod nebeským rovníkem. Je měřena ve stupních a nabývá hodnot z intervalu $\langle -90^\circ; +90^\circ \rangle$.

Druhou souřadnicí je hodinový úhel t . Je to úhel mezi místním poledníkem a objektem měřený ve směru zdánlivého pohybu hvězd. Objekt v nejvyšším bodě své

⁴Meridián (poledník) je hlavní kružnice kolmá k horizontu orientovaná směrem sever-jih, která prochází póly [17].



Obrázek 5.2: Grafické znázornění rovníkových souřadnic druhého druhu [14].

dráhy (tj. nad jihem) má $t = 0$ h, naopak v nejnižším bodě své dráhy (nad severem) má $t = 12$ h. Hodinový úhel je přepočten z úhlové míry na časovou míru. Pro přepočten se používá jednoduchý vztah:

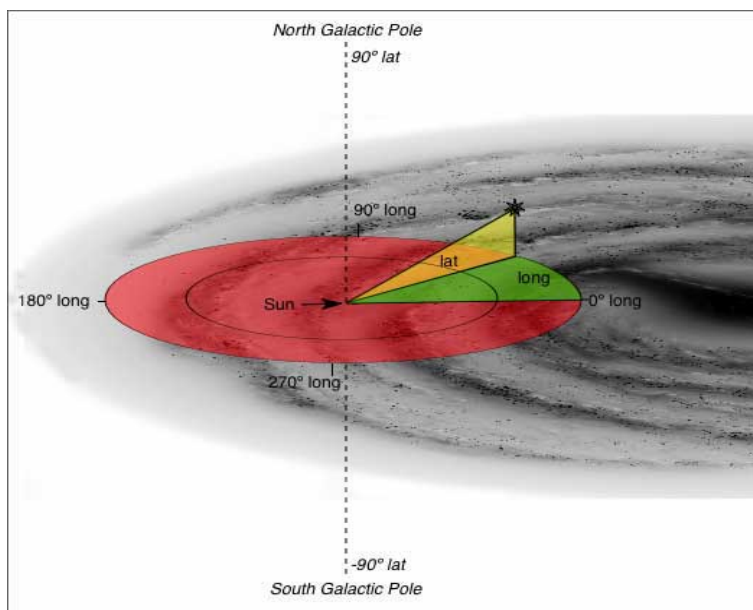
$$24h = 360^\circ \quad (5.1)$$

Deklinace je pro určitou hvězdu stejná pro všechna místa na Zemi a v čase se nemění vlivem zdánlivého pohybu oblohy. Hodinový úhel se mění jak se zeměpisnou délkou pozorovacího místa, tak i s časem, ale změna hodinového úhlu je kontinuální.

5.2.2 Rovníkové souřadnice druhého druhu

Rovníkovými souřadnicemi druhého druhu jsou *deklinace* δ a *rektascenze* α . Deklinace je definovaná stejně jako u ekvatoriálních souřadnic prvního druhu.

Avšak místo hodinového úhlu, který se v každém okamžiku mění, je zde úhel, neměnicí se s časem. Místo průsečíku rovníku s místním meridiánem je nutno použít východního bodu na rovníku, který se zúčastňuje rovnoměrného pohybu oblohy. Takovým bodem je místo na rovníku, kde je Slunce v okamžiku jarní rovnodennosti.



Obrázek 5.3: Galaktický souřadnicový systém. Ve středu systému je umístěno slunce. Lat - galaktická délka, long - galaktická šířka.

Bod jarní rovnodennosti je hledaným výchozím bodem a vzhledem k němu se určuje rektascenze, tj. úhel, který mezi sebou svírají deklinační kružnice, procházející bodem jarní rovnodennosti a deklinační kružnice hvězdy, jejíž rektascenzi určujeme.

Tato souřadnicová síť se otáčí spolu s oblohou.

5.3 Galaktický souřadnicový systém

Tento souřadnicový systém byl definován roku 1958 Mezinárodní astronomickou unií.

Základní rovinou galaktických souřadnic je rovina Galaxie (Mléčná dráha). Mléčná dráha není přesně ohraničený pás a má jisté nepravidelnosti. Poloha roviny je tedy stanovena mezinárodní úmluvou (jsou stanoveny souřadnice galaktických pólů). Výchozím bodem je střed Galaxie.

Pro popis polohy objektů se v galaktickém souřadnicovém systému používají *galaktická délka* l a *galaktická šířka* b . Galaktická délka l nabývá hodnot z intervalu $\langle 0^\circ; +360^\circ \rangle$ a galaktická šířka b nabývá hodnot z intervalu $\langle -90^\circ; +90^\circ \rangle$.

5.4 Transformace souřadnic

Jak je patrné, používá se běžně několik druhů souřadnicových systémů. V různých případech lze použít různých druhů souřadnic.

5.4.1 Rovníkové I na horizontální

Pro transformaci z rovníkových souřadnic I na horizontální se používá následujících vztahů:

$$\begin{aligned}\cos \theta &= \sin \varphi \sin \delta + \cos \varphi \cos \delta \cos t \\ \sin \theta \sin A &= \cos \delta \sin t\end{aligned}\quad (5.2)$$

$$\sin \theta \cos A = -\cos \varphi \sin \delta + \sin \varphi \cos \delta \cos t,$$

kde θ je zenitový úhel, φ je zeměpisná šířka, δ je deklinace, t je hodinový úhel a A je azimut.

5.4.2 Horizontální na rovníkové I

Pro transformaci z horizontálních souřadnic na rovníkové I se používá následujících vztahů:

$$\begin{aligned}\sin \delta &= \cos \theta \sin \varphi - \sin \theta \cos \varphi \cos A \\ \cos \delta \cos t &= \cos \theta \cos \varphi + \sin \theta \sin \varphi \cos A \\ \cos \delta \sin t &= \sin \theta \sin A,\end{aligned}\quad (5.3)$$

5.4.3 Rovníkové I na galaktické

Pro transformaci z rovníkových souřadnic na galaktické se používá následujících vztahů:

$$b = -\arcsin[\sin(\delta) \cdot \sin(\delta_0) + \cos(\delta) \cdot \cos(\alpha_0 - \alpha)], \quad (5.4)$$

$$l = l_0 - \arctg(y/x), \quad (5.5)$$

kde

$$\begin{aligned}y &= \sin(\alpha_0 - \alpha) \\ x &= \cos(\alpha_0 - \alpha) \cdot \sin(\delta_0) - \frac{\sin(\delta)}{\cos(\delta)} \cdot \cos(\delta_0)\end{aligned}$$

kde b, l jsou galaktická šířka, resp. délka; δ, α jsou ekvatoriální souřadnice. Pro převod mezi rovníkovými a galaktickými souřadnicemi byly stanoveny následující konstanty:

- Severní galaktický pól: $\delta_0 = 27^\circ 7' 42.1''$, $\alpha_0 = 12 \text{ h } 51 \text{ min } 26.28 \text{ s}$
- Průsečík rovníkového a galaktického rovníku: $l_0 = 122.932$

Kapitola 6

Expoziční funkce

6.1 Definice expoziční funkce

Expoziční funkce je funkcí souřadnic nebeské sféry. Její jednotka je $km^2 \cdot rok$. Udává efektivní sběrnou plochu pro tok KZ pro pozice na obloze.

Relativní expoziční funkce ω je bezrozměrnou veličinou. Nabývá hodnot z intervalu $< 0; 1 >$. Relativní expoziční funkce ω je váhovou funkcí, která nám poskytuje informaci o tom, s jakou váhou lze pozorovat místa na obloze pro dané místo na Zemi. Zjednodušeně lze říci, že relativní expoziční funkce nám poskytuje informaci, kam a jak často daný experiment pozoruje místa na obloze.

Relativní expoziční funkce ω se dá vypočítat dle následujícího vztahu [6]:

$$\omega(\delta) \propto \cos(a_0) \cos(\delta) \sin(\alpha_m) + \alpha_m \sin(a_0) \sin(\delta), \quad (6.1)$$

kde a_0 je zeměpisná šířka a δ je deklinace. Konstanta α_m se vypočítá dle vztahů:

$$\alpha_m = \begin{cases} 0 & \xi > 1 \\ \pi & \xi < -1 \\ \cos^{-1}(\xi) & \text{jindy} \end{cases} \quad (6.2)$$

kde ξ se vypočte dle vztahu:

$$\xi = \frac{\cos(\theta_m) - \sin(a_0) \sin(\delta)}{\cos(a_0) \cos(\delta)} \quad (6.3)$$

Ve vzorci (6.3) vystupuje navíc veličina θ_m , která označuje maximální zenitový úhel.

6.2 Expoziční funkce pro AUGER

Pro zpracování dat z experimentu AUGER byla vypočtena relativní expoziční funkce ω dle vztahu (6.1). Relativní expoziční funkce byla počítána pomocí programu napsaného v jazyce C++. Pomocí Cernských knihoven ROOT pak byla získaná data vykreslena do následujících histogramů.

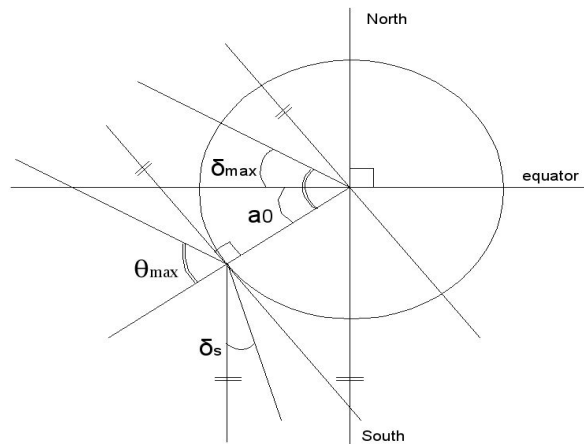
Pro experiment AUGER mají konstanty ve vztahu pro výpočet relativní expoziční funkce (6.1) následující hodnoty:

$$a_o = -35.2^\circ; \quad \theta_m = 60^\circ. \quad (6.4)$$

6.2.1 Normování

Vztah (6.1) pro výpočet relativní expoziční funkce ω není přesně normován tak, aby nabýval hodnot z intervalu $< 0; 1 >$. Je tedy nutné najít normovací konstantu K .

Hodnotu normovací konstanty lze vypočítat pro deklinační úhel, který setrvává po celý den v zorném poli observatoře a kde platí $\omega = 1$.



Obrázek 6.1: Úhly pro experiment AUGER.

Pomocí obrázku (6.1) lze odvodit vztah pro hledaný deklinační úhel δ_s . Výsledný vztah bude mít následující podobu:

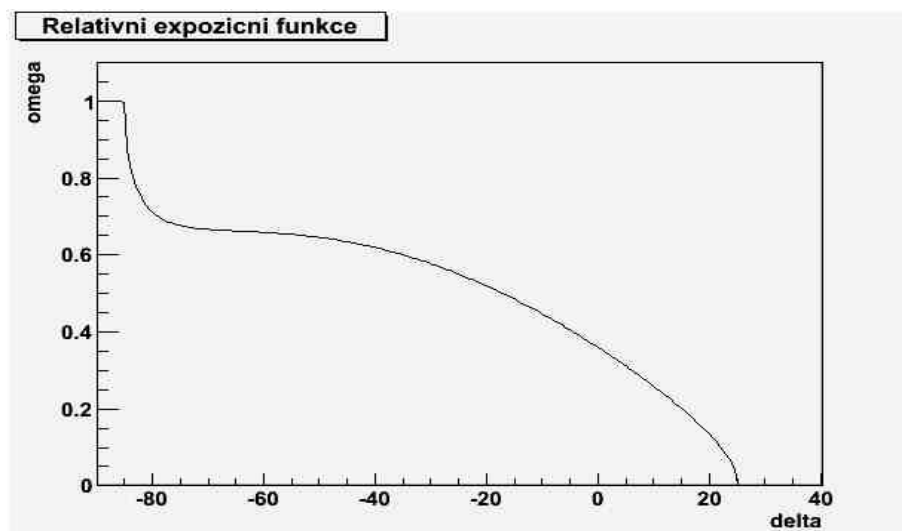
$$\delta_s = 90^\circ - [(90^\circ - |a_o|) + (90^\circ - \theta_m)] \quad (6.5)$$

Pomocí vztahu (6.5) lze vypočítat, že hledané δ má hodnotu 5° . Z čehož plyne, že pro deklinaci z intervalu $< -90^\circ; -85^\circ >$ bude relativní expoziční funkce nabývat hodnotu 1 a lze spočítat normovací konstantu. Normovací konstanta¹ bude mít tedy hodnotu:

¹Normovací konstanta vytupuje ve vztahu pro relativní expoziční funkci ve tvaru $K \cdot \omega$.

$$K = 0.555591$$

(6.6)



Obrázek 6.2: Průběh relativní expoziční funkce ω pro AUGER a pro $\theta_m = 60^\circ$.

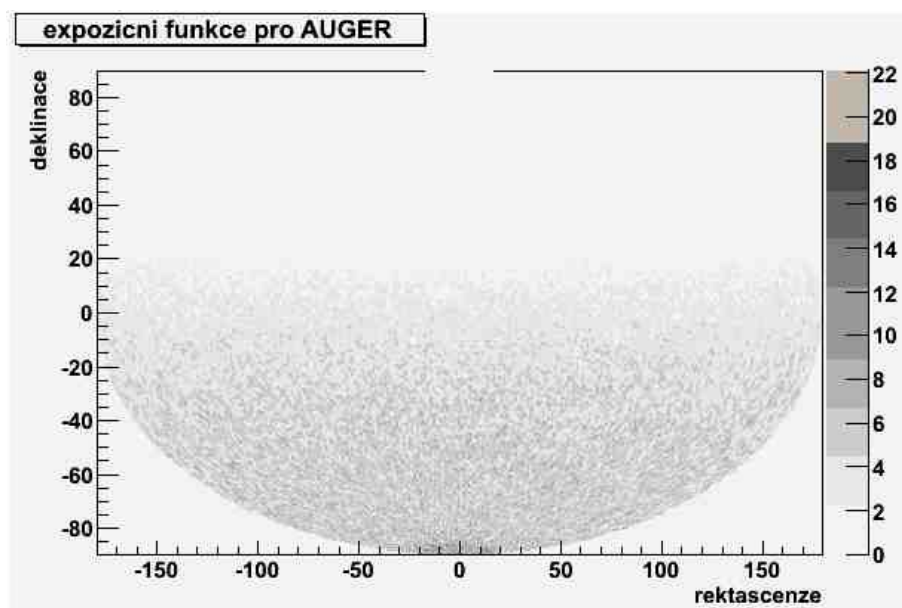
Na obrázku (6.2) je vidět, jak se chová relativní expoziční funkce ω v závislosti na deklinaci δ pro pozici experimentu AUGER.

6.2.2 Výsledné histogramy

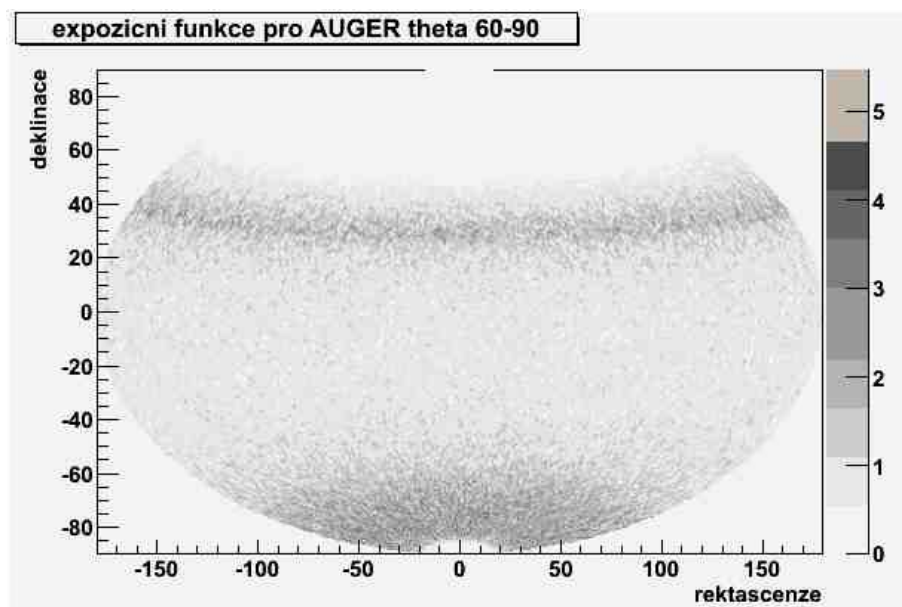
Na obrázku (6.3) je vidět relativní expoziční funkce ω vygenerovaná pro 500 000 náhodných bodů a pro zenitový úhel $\theta_m = 60^\circ$. Hodnota $\theta_m = 60^\circ$ se standartně používá na AUGERu pro rekonstrukce atmosférických spršek. (Pro $\theta \leq \theta_m$ dosahuje efektivita měření 100% pro energie nad $3 \cdot 10^{18}$ eV.)

Z obrázku (6.3) je vidět, že experiment Auger "vidí" na celou jižní polokouli a na část severní polokoule. Přesněji řečeno, lze vypočítat, že experiment Auger může detekovat směry příletu KZ pro deklinaci z intervalu $\langle -90^\circ; +24.8^\circ \rangle$.

Na obrázku (6.4) je vidět, o co by se relativní expoziční funkce ω změnila, kdyby $\theta_m = 90^\circ$. V tomto případě by experiment AUGER sbíral data pro deklinaci z intervalu $\langle -90^\circ; +54.8^\circ \rangle$.



Obrázek 6.3: Relativní expoziční funkce pro práci s daty z experimentu AUGER. Zenitový úhel $\theta_m = 60^\circ$.



Obrázek 6.4: Relativní expoziční funkce pro práci s daty z experimentu AUGER. Zenitový úhel $\theta \in \langle 60^\circ; 90^\circ \rangle$.

Kapitola 7

Kolmogorovův-Smirnovův (KS) test

Kolmogorovův-Smirnovův test se používá pro ověření hypotézy, zda data pochází z daného rozdělení se spojitou distribuční funkcí. Ověřujeme tedy hypotézu, zda náhodný výběr pochází z rozdělení spojitě náhodné veličiny s danou distribuční funkcí proti alternativě, že z tohoto rozdělení nepochází.

KS test lze rozdělit na test pro jeden výběr a na test pro dva nezávislé výběry a to jak v případě 1D i 2D KS testu.

V této kapitole je využito převážně literatury [2], [9] a [10].

7.1 Jednodimenzionální KS test

Jedná se o jednodimenzionální¹ (1D) KS test.

KS test pro jeden výběr

Testovacím kritériem je veličina Z (definovaná vztahem 7.1), jejíž kritické hodnoty jsou tabelovány. Testovanou hypotézu zamítáme, pokud vypočtená hodnota je větší než tabelovaná kritická hodnota.

$$Z = D\sqrt{N} \quad (7.1)$$

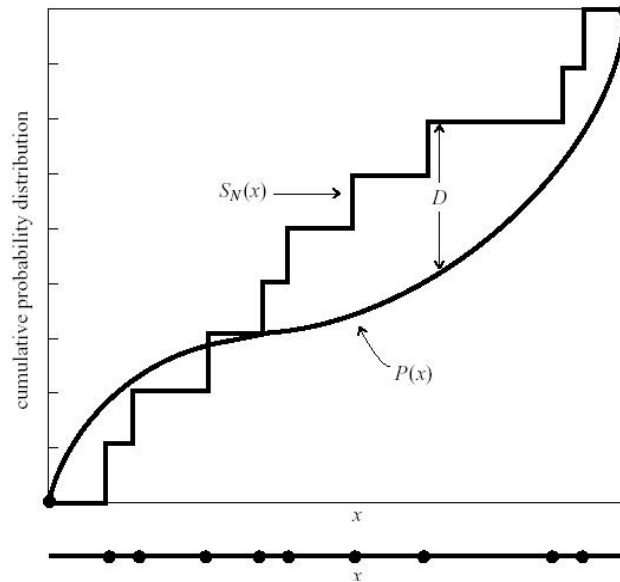
Velichina D je definovaná jako maximální absolutní rozdíl empirické kumulativní distribuční funkce $S_N(x)$ (vytvořené z výběru) a teoreticky určené distribuční funkce $P(x)$ a N je počet dat ve výběru.

$$D = \max_{-\infty < x < \infty} |S_N(x) - P(x)| \quad (7.2)$$

¹Jednorozměrná data jsou charakterizována jednou souřadnicí.

$$S_N(x) = \frac{i}{N}, \quad (7.3)$$

kde i je počet dat s hodnotou $\leq x$.



Obrázek 7.1: Hledání maximální vzdálenosti D pro distribuční funkci reálných dat $S_N(x)$ porovnáním s teoretickou distribucí $P(x)$ [2].

KS test pro dva nezávislé výběry

Testujeme nulovou hypotézu, že dva nezávislé výběry mají stejnou distribuční funkci. Testovacím kritériem je opět veličina Z (viz. rovnice 7.1).

KS test pro dva nezávislé výběry se oproti KS testu pro jeden výběr liší ve výpočtu hodnoty D , která je v tomto případě definovaná následujícím vztahem:

$$D = \max_{-\infty < x < \infty} |S_{N_1}(x) - S_{N_2}(x)|, \quad (7.4)$$

kde S_{N_1} je kumulativní distribuční funkce pro první výběr a S_{N_2} je kumulativní distribuční funkce pro druhý výběr. A ve vztahu (7.1) je nutné vypočítat hodnotu N dle následujícího vztahu:

$$N = \frac{N_1 N_2}{N_1 + N_2} \quad (7.5)$$

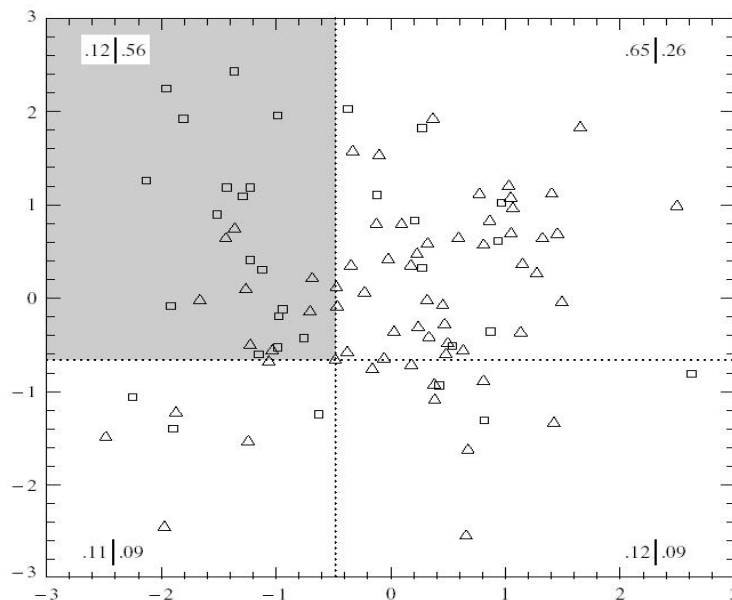
kde N_1 je počet dat z prvního výběru a N_2 je počet dat z druhého výběru.

7.2 Dvoudimenzionální KS test

Zobecnění KS testu pro dvoudimenzionální distribuce byla navržena v [9] a [10]. Každý bod dvoudimenzionální distribuce je charakterizován dvěma souřadnicemi a je hledán maximální rozdíl mezi dvěma dvoudimenzionálními distribucemi. V případě 2D KS testu je nutno hodnotu D počítat numericky, neboť kumulativní distribuční funkce S_N není definovaná pro více než 1D.

KS test pro jeden výběr

V případě 2D KS testu pro jeden výběr se hodnota D hledá jako maximální rozdíl poměrného zastoupení experimentálních dat a předpokládaného rozložení dat v jednotlivých kvadrantech. V obrázku (7.2) je vyvětleno, jak se hodnota D hledá.



Obrázek 7.2: Hledání maximální vzdálenosti D pro dvě sady dvourozměrných dat. Jednu sadu dat představují čtverečky a druhou trojúhelníčky. V rozích jednotlivých kvadrantů jsou poměrné počty trojúhelníčků a čtverečků. Je vidět, že hledaný maximální rozdíl je v levém horním kvadrantu, kde $D = 0.56 - 0.12 = 0.44$ [2].

Testovacím kritériem je opět veličina Z , definovaná vztahem (7.1). Hodnota N je počet experimentálních dat.

KS test pro dva nezávislé výběry

V případě 2D KS testu pro dva nezávislé výběry se hodnota D hledá následujícím způsobem: nejprve určíme hodnotu D_1 pro porovnání první sady dat s druhou sadou a

potom hodnotu D_2 pro porovnání druhé sady dat s první sadou. Hledaná hodnota D je aritmetický průměr těchto dvou hodnot [2]:

$$D = \frac{D_1 + D_2}{2}. \quad (7.6)$$

Testovacím kritériem je opět veličina Z , definovaná vztahem (7.1). Hodnotu N je nutno spočítat dle vztahu (7.5).

7.3 Korelační koeficienty

Korelační koeficient rozhoduje o správném výběru tabelovaných hodnot Z_{krit} . Počítá se pro dvou dimenzionální sadu (nebo sady) dat.

Pro jeden výběr

Korelační koeficient pro jeden výběr dat se počítá dle následujícího vztahu:

$$r = \frac{\sum_i (x_i - \bar{x})(y_i - \bar{y})}{\sqrt{\sum_i (x_i - \bar{x})^2} \sqrt{\sum_i (y_i - \bar{y})^2}}. \quad (7.7)$$

Pro dva nezávislé výběry

V případě dvou nezávislých výběrů se korelační koeficient počítá dle vztahu:

$$r = \sqrt{\frac{r_1^2 + r_2^2}{2}}, \quad (7.8)$$

kde r_1 resp. r_2 jsou lineární koeficienty korelace pro první, resp. druhou sadu dat.

Kapitola 8

Data z experimentu AUGER

Naměřená data z observatoře AUGER jsou porovnávána s objekty obsaženými v katalogu aktivních galaxií [11].

8.1 Aktivní galaktická jádra a katalog aktivních galaxií

Aktivní galaktická jádra (AGN)

AGN jsou astronomické objekty, v jejichž středu se nachází supermasivní černá díra, která je nepřetržitě zásobována materiálem z obklopujícího akrečního disku¹ (viz. obr. 8.1).

Nejpronikavější UV a rentgenové záření vychází z vnitřní části akrečního disku. Pozorovatel, hledícímu na objekt ze strany, zastíní vnější části akrečního disku značnou část záření, takže spektrum objektu závisí na úhlu pohledu. Část materiálu je urychlována podél osy souměrnosti a uniká v podobě výtrysků (jetů). O výtryscích se předpokládá, že jsou oboustranné, ale záření přicházející od vzdáleného výtrysku je velmi zeslabeno. Délky výtrysku dosahují až stovky kiloparseků. Akrece hmoty na centrální černou díru uvolňuje obrovské množství energie. Díky tomuto a také dalším procesům se aktivní galaktická jádra uvažují jako možné zdroje extrémně energetického kosmického záření. Na obrázku (8.1) je tento objekt schématicky znázorněn.

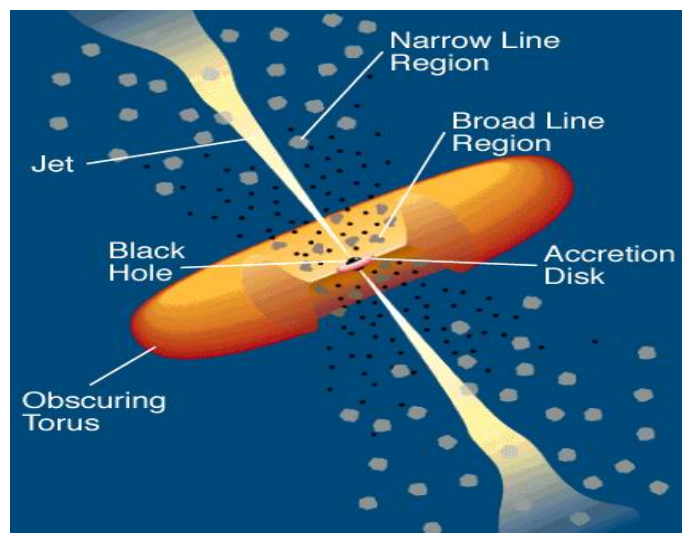
Z hlediska pozorovatele se aktivní galaktická jádra odlišují podle svého optického vzhledu, spektra, luminozity² a časové proměnnosti.

Za účelem třídění se aktivní galaxie obvykle sdružují do několika skupin: rádiové galaxie, kvazary, blazary, Seyfertovy galaxie (I. a II. typu), jaderné oblasti ionizovaného vodíku (HII), galaxie s bouřlivou tvorbou hvězd a další. Z nich tři nejvýznamější skupiny jsou charakterizovány následovně:

- Kvazary - jsou hvězdám podobné (jejich úhlový rozměr bývá menší než jedna úhlová sekunda) extragalaktické objekty (obvykle s velkým červeným posuvem),

¹Akreční disk je tvořen látkou, kterou přitahuje ústřední černá díra.

²Zářivého výkonu.



Obrázek 8.1: Aktivní galaktické jádro.

které lze opticky rozlišit podle širokých emisních čar (odpovídající vysokým termálním rychlostem plynu).

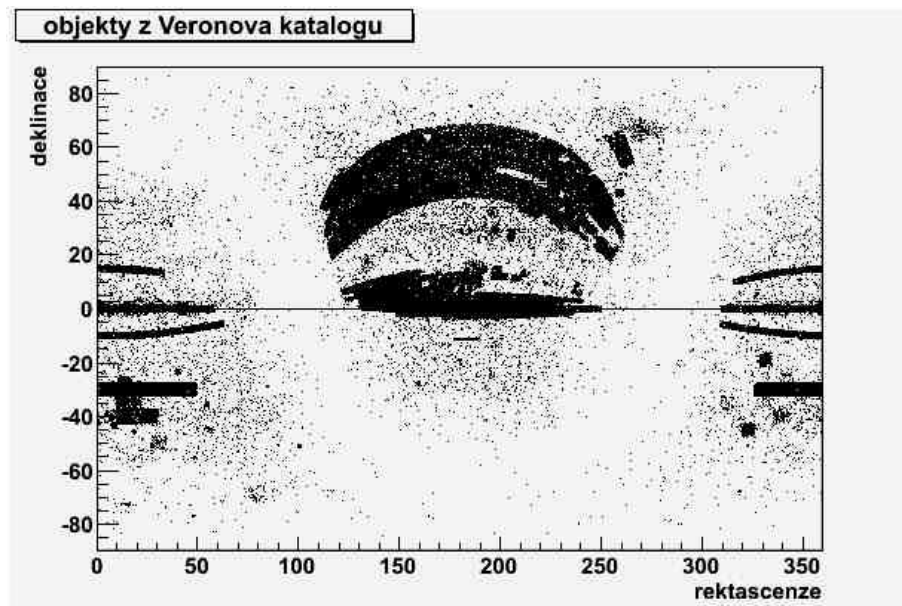
- Blazary - jsou velmi svítivé a velice proměnné extragalaktické zdroje. Na rozdíl od "normálních" aktivních galaktických jader směřuje u blazaru výtrysk plazmy z jádra přímo k pozorovateli. Jsou vysoce proměnné ve spektrálních oborech rádiového, optického a rentgenového záření, nevykazují široké optické čáry a optické záření těchto objektů bývá silně a proměnlivě polarizováno.
- Seyfertovy galaxie jsou vesměs spirální galaxie, které vynikají velmi bouřlivou aktivitou jader. Mají následující charakteristiky: malé a velmi jasné jádro, ve spektru svítí mnoho širokých emisních spektrálních čar (plyny se pohybují rychlostmi až 5 000 km/s), vykazují netepelné záření v širokém rozsahu spektra a v jádře je velmi kompaktní zdroj rádiového záření.

Katalog aktivních galaxií

Katalog aktivních galaxií [11] shrnuje všechna pozorovaná aktivní galaktická jádra (AGN) a třídí je do tří kategorií: kvazary, blazary a ostatní. Ve dvanácté verzi tohoto katalogu se nachází 85 221 kvazarů, 1 122 blazarů a 21 737 ostatních aktivních galaktických jader (z nichž 9 628 se řadí k 1. typu Seyfertových galaxií).

U některých objektů uvedených v katalogu aktivních galaxií není znám červený posuv³, je tedy nutné vybrat jen ty objekty, u nichž je červený posuv znám a tedy i vzdálenost.

³Červený posuv je prodloužení vlnové délky elektromagnetického záření způsobené rozpínáním vesmíru po Velkém třesku



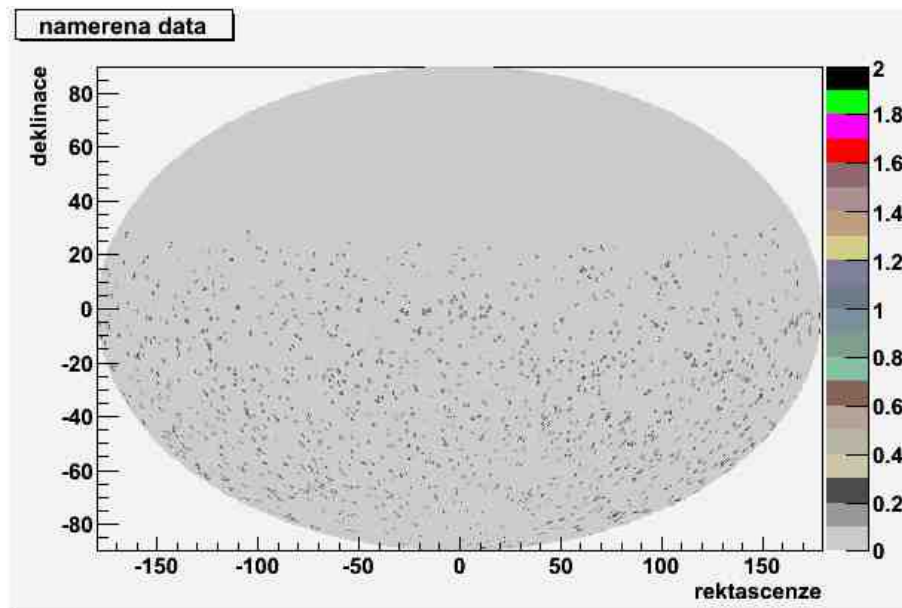
Obrázek 8.2: Grafické znázornění všech objektů z katalogu aktivních galaxií, pro něž je znám červený posuv.

Na obrázku (8.2) jsou vyneseny všechny objekty z katalogu aktivních galaxií, pro něž je známa vzdálenost. Na tomto obrázku je ilustrována neúplnost katalogu. Jsou na něm vidět výsledky několika stupňových přehlídek oblohy (vysoká hustota objektů) a zároveň část oblohy zastíněná naší galaxií.

Protože rozmístění AGN není zmapováno ve všech oblastech oblohy, omezíme se na blízké okolí naší galaxie (malý červený posuv, ve shodě s GZK). Blízké okolí je zmapováno mnohem detailněji než odlehlé části vesmíru.

8.2 Data naměřená experimentem AUGER

Na obrázku (8.3) jsou vynesena data naměřená observatoří AUGER během prvních měsíců roku 2006. Zrekonstruované energie primárních částic dosahovala desítky EeV.



Obrázek 8.3: Naměřené data z experimentu AUGER.

8.3 Variace použití KS testu

Pro ilustraci použití KS testu byla vzata data z katalogu aktivních galaxií pro blazary. KS test byl na tyto data aplikován bez a s použitím expoziční funkce a pro různé vstupní parametry.

Z dat pro blazary je nejprve nutno vybrat ta, která mají $\delta < 24.8^\circ$ a jsou pozorovatelná observatoří AUGER.

2D KS test pro jeden výběr

V tomto případě byl KS test proveden pro jeden výběr (data z experimentu AUGER) a porovnáván s předpokládaným rozložením blazarů z katalogu aktivních galaxií. KS test byl proveden s aplikací i bez aplikace expoziční funkce. Získané výsledky jsou uvedeny v tabulce (8.1).

	bez expozice	s expozicí
N_a	1488	1488
N_b	308	114.316
D	0.474916	0.355188
Z	18.32	13.7

Tabulka 8.1: Výsledky KS testu pro data z experimentu AUGER vs blazary pro případ 2D KS testu pro jeden výběr.

N_a značí počet všech dat z experimentu AUGER; N_b je počet blazarů z Veronova katalogu; D je maximální vzdálenost a Z je testovací veličina počítaná dle vztahu (7.1).

2D KS test pro dva nezávislé výběry

V tomto případě byl KS test proveden pro dva nezávislé výběry - jedním výběrem jsou opět data z experimentu AUGER a druhým výběrem jsou blazary z katalogu aktivních galaxií. KS test byl proveden s aplikací i bez aplikace expoziční funkce. Získané výsledky jsou uvedeny v tabulce (8.2).

	bez expozice	s expozicí
N_a	1488	1488
N_b	308	—
N'_b	—	114.316
N	255.18	106.16
D	0.474685	0.359038
Z	7.58	3.7

Tabulka 8.2: Výsledky KS testu pro data z experimentu AUGER vs blazary pro případ 2D KS testu pro dva nezávislé výběry.

N_a značí počet všech dat z experimentu AUGER; N_b je počet blazarů z Veronova katalogu; N'_b je součet normované expoziční funkce pro pozice blazarů; N je určeno dle vztahu (7.5); D je maximální vzdálenost a Z je testovací veličina počítaná dle vztahu (7.1).

8.4 Výsledky KS testu

Pro testování hypotézy o shodném rozložení dat z experimentu AUGER s aktivními galaktickými jádry byla pro astronomické objekty použita následující kritéria:

1. Deklinace je menší než 24.8° .
2. Maximální vzdálenosti určené následujícími červenými posuvy 0.01, 0.015, 0.02 a 0.025.

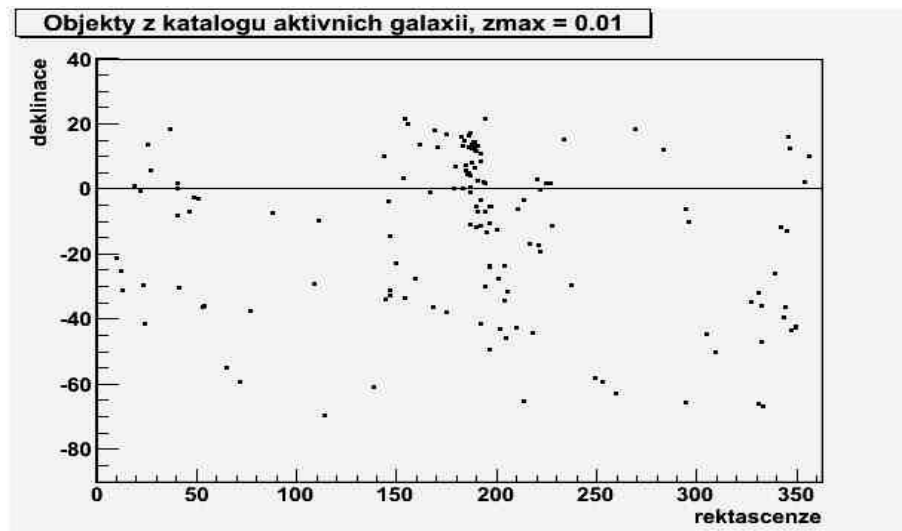
Byl použit 2D KS test pro dva nezávislé výběry, kterými jsou data z experimentu AUGER a AGN. Na data z katalogu je nutno aplikovat expoziční funkci.

V tabulce (8.3) jsou uvedeny výsledky KS testu pro porovnání objektů z katalogu aktivních galaxií a dat z experimentu AUGER.

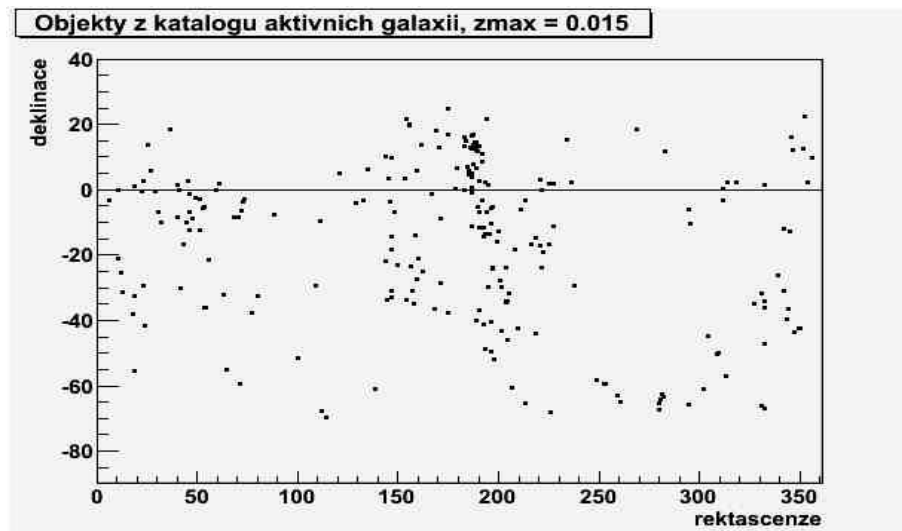
Z korelačního koeficientu v tabulce (8.3) lze určit, že se jedná o nekorelovaná data a tudíž hodnoty Z_{krit} budeme brát z tabulky (B.1 z dodatku B). Zvolíme hladinu spolehlivosti 99%. Z tabulky (B.1) použijeme následující hodnoty:

Z tabulek (8.3) a (8.4) lze vidět, že vždy platí:

$$Z > Z_{krit} \quad (8.1)$$

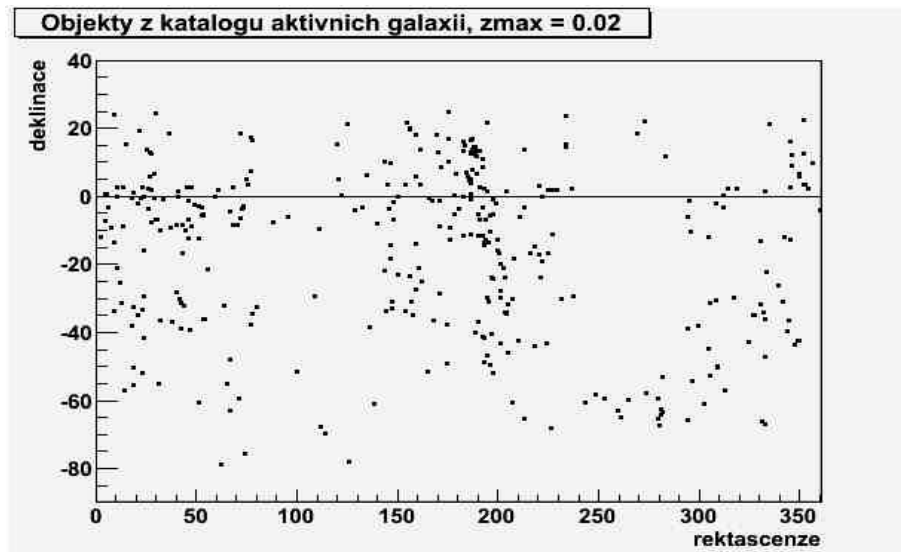


Obrázek 8.4: Rozmístění všech možných zdrojů z katalogu aktivních galaktických jader, s maximálním červeným posuvem 0.01 a s deklinací menší než 24.8° .

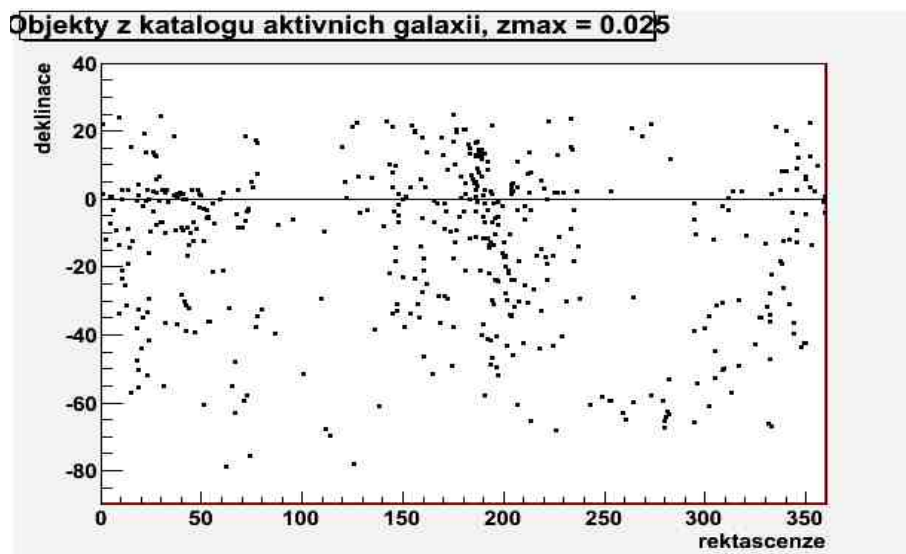


Obrázek 8.5: Rozmístění všech možných zdrojů z katalogu aktivních galaktických jader, s maximálním červeným posuvem 0.015 a s deklinací menší než 24.8° .

Ze vztahu (8.1) lze vidět, že s chybou 1% nepochází testovaná data z experimentu AUGER a objekty z katalogu aktivních galaxií ze stejné distribuce.



Obrázek 8.6: Rozmístění všech možných zdrojů z katalogu aktivních galaktických jader, s maximálním červeným posuvem 0.02 a s deklinací menší než 24.8° .



Obrázek 8.7: Rozmístění všech možných zdrojů z katalogu aktivních galaktických jader, s maximálním červeným posuvem 0.025 a s deklinací menší než 24.8° .

	$RS \leq 0.01$	$RS \leq 0.015$	$RS \leq 0.02$	$RS \leq 0.025$
N_a	1488	1488	1488	1488
N_k	152	238	367	484
N	137.912	205.182	294.391	365.209
D	0.23933	0.215442	0.200391	0.22728
r	0.1302	0.129	0.097	0.076
Z	2.811	3.086	3.438	4.343

Tabulka 8.3: Výsledky KS testu pro porovnání objektů z katalogu aktivních galaxií a dat z experimentu AUGER. RS značí červený posuv; N_a značí počet všech dat z experimentu AUGER; N_k značí počet zdrojů z katalogu aktivních galaxií (agn, blazary a kvazary); N je celkový počet dat určený dle vztahu (7.5); D je maximální vzdálenost; r je korelační koeficient počítaný dle vztahu (7.8) a Z je testovací veličina počítaná dle vztahu (7.1).

	Z_{krit}
$n = 100$	1.85
$n = 200$	1.89
$n = 500$	1.92

Tabulka 8.4: Hodnoty Z_{krit} pro nekorelované sady dat. Veličina n značí počet dat.

Kapitola 9

Závěr

Úvodní kapitoly shrnují známé poznatky o kosmickém záření. Následující kapitola je věnována základnímu popisu projektu Observatoře Pierra Augera, což je největší projekt zabývající se detekcí kosmického záření a zároveň projekt, jehož data jsou využita v této práci. V dalších kapitolách jsou pak popsány souřadnicové systémy, expoziční funkce a Kolmogorovův-Smirnovův test.

Moje vlastní práce je v kapitole o expoziční funkci a v kapitole s názvem Data experimentu AUGER. V kapitole o expoziční funkci byla spočítána relativní expoziční funkci pro experiment AUGER. Z hodnoty relativní expoziční funkce bylo určeno, že experiment AUGER je schopen detekovat události pro deklinační úhel $< -90^\circ; 24.8^\circ >$. Na obrázku (6.2) je vidět celý průběh relativní expoziční funkce a na obrázku (6.3) je vidět, jaká by měla být předpokládaná hustota rozložení detekovaných událostí.

Hlavní náplň práce bylo porovnání dat z experimentu AUGER s objekty z katalogu aktivních galaxií pomocí Kolmogorova-Smirnovova testu a ukázky výpočtu tohoto testu pro 2D pro případ jednoho, či dvou nezávislých výběrů a demonstrace vlivu použití (či nepoužití) expoziční funkce.

Na obrázku (8.3) jsou vynesena data z experimentu AUGER, která byla v této práci využita. Z tohoto obrázku lze vidět, že data z experimentu AUGER, o energiích řádově desítky EeV, jsou rozmístěna na obloze **ve shodě s teoretickou předpovědí pro izotropní rozložení** (viz. obr. 6.3).

V kapitole 8.3 (Variace použití KS testu) je demonstrováno použití 2D Kolmogorova-Smirnovova testu pro jeden a dva nezávislé výběry za použití i bez použití expoziční funkce. V tabulce (8.1) jsou uvedeny výsledky 2D Kolmogorova-Smirnovova testu pro jeden výběr při použití i bez použití expoziční funkce. V tabulce (8.2) jsou uvedeny výsledky 2D Kolmogorova-Smirnovova testu pro dva nezávislé výběry při použití i bez použití expoziční funkce. Tyto výsledky jsou pouze demonstrativní. Ukazují, jak se liší výsledky Kolmogorova-Smirnovova testu pro různé parametry a různé způsoby výpočtu.

V kapitole 8.4 jsou uvedeny výsledky Kolmogorova-Smirnovova testu pro porovnání dat z experimentu AUGER a objektů z katalogu aktivních galaxií. Pro dosažení správných výsledků byl použit 2D Kolmogorovův-Smirnovův test pro dva nezávislé výběry s použitím expoziční funkce. V tabulce (8.3) jsou uvedeny dosažené výsledky,

kteře jsou porovnaný s kritickými hodnotami v tabulce (8.4). Byla testována nulová hypotéza, zda testované sady dat (data z experimentu AUGER a objekty z katalogu aktivních galaxií) pocházejí ze stejné distribuce. Vzhledem k dosaženým výsledkům (viz. vztah 8.1) lze prohlásit, že s **chybou 1% nepochází data z experimentu AUGER a objekty z katalogu aktivních galaxií ze stejné distribuce.**

Kapitola 10

Reference

- [1] Radomír Šmída, Astrofyzika velmi vysokých energií, diplomová práce MFF UK 2002
- [2] Press, W.K.; Teukolsky, S.A.; Vetterling, W.T.; Flannery B.P.1992se: Numerical recipes in C; Cambridge University Press
- [3] Pierre Sokolsky, Introduction to Ultrahigh Energy Cosmic Ray Physics, Westview Press, 2004
- [4] Zdeněk Janout, Jiří Kubašta, Stanislav Pospíšil, "Úlohy z jaderné a subjaderné fyziky", Vydavatelství ČVUT 1997
- [5] Vladimír Vanýsek, Základy astronomie a astrofyziky, Academia, 1980
- [6] Paul Sommers, Cosmic Ray Anisotropy Analysis with a Full-Sky Observatory, arXiv:astro-ph/0004016 v31, 3 Apr 2000
- [7] Greisen, K. (1966): End to the Cosmic-Ray Spectrum? Physical Review Letters, 16, 748
- [8] Zatsepin, G.T.; Kuzmin, V.A.(1966): Journal of Experimental and Theoretical Physics Letters, 4, 78
- [9] J.A.Peacock (1983): Two-dimensional goodness-of-fit testing in astronomy; Mon. Not. R. astr. Soc. (1983) 202, 615-627
- [10] Fasano, G.; Franceschini, A. (1987): A multidimensional version of the Kolmogorov-Smirnov test; Mon. Not. R. astr. Soc.(1987)225, 155-170
- [11] Veron-Cetty, M.P.; Veron, P. (2006): Quasars and Active Galactic Nuclei (12th Ed.); Astron. Astrophys. 455, 773 (2006)
- [12] <http://docs.kde.org/development/en/kdeedu/kstars/ai-skycoords.html>
- [13] http://en.wikipedia.org/wiki/Equatorial_coordinate_system

- [14] *[http : //cosmos.swin.edu.au/entries/equatorialcoordinatesystem/equatorialcoordinatesystem2.gif](http://cosmos.swin.edu.au/entries/equatorialcoordinatesystem/equatorialcoordinatesystem2.gif)*
- [15] Oficiální stránky projektu AUGER: *[http : //www.auger.org](http://www.auger.org)*
- [16] Česká skupina projektu AUGER,
[http : //www – hep2.fzu.cz/Auger/cz/kosmzar.html](http://www-hep2.fzu.cz/Auger/cz/kosmzar.html)
- [17] *[http : //ihy2007.astro.cz/ihy2007.astro.cz/_www/soutez/pozorovani/slovnicekIHY.doc](http://ihy2007.astro.cz/ihy2007.astro.cz/_www/soutez/pozorovani/slovnicekIHY.doc)*
- [18] *[http : //www.thinkastronomy.com/M13/Manual/common/galactic_coords.html](http://www.thinkastronomy.com/M13/Manual/common/galactic_coords.html)*
- [19] *[http : //seds.org/ spider//spider/ScholarX/coords.html#galactic](http://seds.org/spider/spider/ScholarX/coords.html#galactic)*
- [20] *[http : //en.wikipedia.org/wiki/Horizontal_coordinate_system](http://en.wikipedia.org/wiki/Horizontal_coordinate_system)*
- [21] *[http : //starchild.gsfc.nasa.gov/docs/StarChild/universe_level2/quasars.html](http://starchild.gsfc.nasa.gov/docs/StarChild/universe_level2/quasars.html)*
- [22] *[http : //en.wikipedia.org/wiki/Pierre_Victor_Auger](http://en.wikipedia.org/wiki/Pierre_Victor_Auger)*

Dodatek A

Zkratky a konstanty

Tabulka A.1: Tabulka předpon

název	zkratka	hodnota
Kilo	k	10^3
Mega	M	10^6
Giga	G	10^9
Tera	T	10^{12}
Peta	P	10^{15}
Exa	E	10^{18}
Zetta	Z	10^{21}
Yotta	Y	10^{24}

Tabulka A.2: Tabulka zkratk

zkratka	český název	anglický název
KZ	kosmické záření	cosmic ray (CR)
EAS	sprška sekundárního záření	extensive air shower
GZK	Greisen-Zatsepin-Kuzmin	Greisen-Zatsepin-Kuzmin
KS	Kolmogorov-Smirnov	Kolmogorov-Smirnov
AGN	aktivní galaktické jádro	active galactic nucleus

Tabulka A.3: fyzikální konstanty a jednotky

název	hodnota
rychlost světla ve vakuu	$c = 299792458 \text{ ms}^{-1}$
parsek	$1\text{pc} = 3.0856 \times 10^{16} \text{ m}$
elektron-volt	$1\text{eV} = 1.6022 \times 10^{-19} \text{ J}$
Gauss	$1\text{G} = 10^{-4} \text{ T}$

Dodatek B

Statistické tabulky

Table A1. Critical values of Z_n for a uniform uncorrelated distribution.

$n^{(b)}$	$SL(\%)^{(a)}$ # of simul.	30	40	50	60	70	80	90	95	99
5	100000	.883	.943	1.00	1.06	1.13	1.21	1.33	1.44	1.63
7	"	.894	.950	1.01	1.07	1.14	1.22	1.35	1.46	1.67
10	"	.901	.960	1.02	1.08	1.15	1.24	1.37	1.48	1.70
15	"	.915	.975	1.03	1.10	1.17	1.26	1.39	1.51	1.74
20	"	.927	.987	1.05	1.11	1.19	1.27	1.41	1.52	1.76
30	"	.948	1.01	1.07	1.13	1.21	1.30	1.43	1.55	1.79
50	"	.972	1.03	1.09	1.16	1.23	1.33	1.46	1.58	1.82
100	10000	1.00	1.06	1.12	1.19	1.26	1.36	1.49	1.62	1.85
200	5000	1.03	1.10	1.16	1.23	1.30	1.39	1.53	1.66	1.89
500	"	1.07	1.13	1.20	1.26	1.33	1.42	1.57	1.69	1.92
1000	"	1.10	1.17	1.23	1.29	1.37	1.45	1.60	1.72	1.97
2000	1000	1.11	1.18	1.24	1.31	1.38	1.47	1.61	1.73	1.94
5000	500	1.13	1.19	1.24	1.31	1.36	1.45	1.64	1.71	1.89

^(a) Significance level ($SL \equiv 1 - P(> Z_n)$); ^(b) Size of the sample

Obrázek B.1: Kritické hodnoty Z_{krit} pro KS test pro dva nezávislé a nekorelované výběry [10].