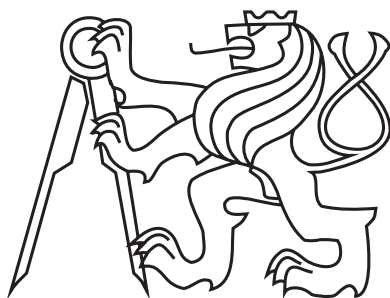


České vysoké učení technické v Praze
Fakulta jaderná a fyzikálně inženýrská

Katedra fyziky
Obor: Jaderné inženýrství
Zaměření: Experimentální jaderná fyzika



Výzkumný úkol

Eliptický tok z fragmentované reakční zóny

Autor: Filip Mohyla
Vedoucí práce: Mgr. Boris Tomášik, Ph.D.
Rok: 2010

Poděkování

Děkuji Mgr. Borisovi Tomášikovi, Ph.D. za vedení mého výzkumného úkolu, za jeho rady a ochotu. Dále děkuji své matce za podporu při studiu.

Filip Mohyla

Obsah

1	Úvod	1
1.1	Popis srážky	1
1.2	Kolektivní chování v jaderných srážkách	2
1.2.1	Popis anizotropie pomocí tenzoru sféricity	2
1.2.2	Popis anizotropie pomocí Fourierova rozkladu	4
1.2.3	Problémy při určování toku	5
2	Generátor srážek	7
2.1	Popis generátoru	7
2.1.1	Parametry generátoru	7
2.1.2	Fungování generátoru	8
2.2	Testování generátoru	8
3	Metoda srážkové roviny	10
3.1	Úvod	10
3.2	Výpočet toku	11
3.2.1	Integrální tok	11
3.2.2	Diferenciální tok	12
3.3	Výsledky analýzy	12
4	Úvod do statistiky	16
4.1	Jednodimenzionální rozdělení	16
4.2	Mnohodimenzionální rozdělení	17
4.3	Náhodné procesy	18
4.3.1	Jiný popis náhodných procesů	19
4.3.2	Korelační funkce	20
5	Metoda kumulantů	22
5.1	Rozvoj mnohočástečových úhlových korelací do kumulantů	22
5.1.1	Dvoučástečové korelace	22
5.1.2	Mnohočástečové korelace	24
5.2	Integrální tok	25
5.2.1	Generující funkce	25
5.2.2	Výpočet integrálního toku z kumulantů	26
5.3	Diferenciální tok	28
5.3.1	Generující funkce	28
5.3.2	Výpočet diferenciálního toku z kumulantů	29
5.4	Praktický výpočet kumulantů	30
5.4.1	Integrální tok	31

5.4.2	Diferenciální tok	31
5.5	Chyby metody	32
5.6	Výsledky analýzy	33
6	Lee-Yangovy nuly	37
6.1	Integrální tok	37
6.1.1	Generující funkce	37
6.1.2	Předpoklady metody	38
6.1.3	Výpočet integrálního toku	39
6.2	Diferenciální tok	42
6.2.1	Výpočet diferenciálního toku	42
6.3	Chyby metody	45
6.4	Výsledky analýzy	46
7	Závěr	49
	Literatura	52

Kapitola 1

Úvod

Při určování vlastností hmoty vzniklé při ultrarelativistických jaderných srážkách se jako nepostradatelný nástroj jeví výzkum necentrálních jaderných srážek. Při těchto necentrálních srážkách se anizotropie v prostorovém rozdělení srážejících se částic odráží v hybnostním rozdělení vzniklých částic. Tento jev označujeme jako částicový tok. Významnou složkou tohoto toku je tok eliptický. Jeho studium nám může pomoci mimo jiné při určení typu fázového přechodu, stupně termalizace a viskozity média.

1.1 Popis srážky

Abychom mohli popsat srážku dvou jader, musíme nejdříve zavést souřadný systém. Osa z je určena směrem dopadajících jader. Osa x leží ve směru *srážkového parametru*, který je definován jako nejkratší vzdálenost těžišť dopadajících jader a značí se b . Osa y je pak na tyto dvě osy kolmá. Celý souřadný systém je na obrázku 1.1. Rovina (x, z) se nazývá *reakční rovina*, analýza eliptického toku pracuje takřka výhradně s veličinami definovanými na rovině kolmé na osu z , tzv. *příčné rovině*.

Označme $\bar{\phi}$ azimutální úhel vůči reakční rovině. Pak je v této souřadné soustavě hybnost částice s hmotností m vyjádřena jako

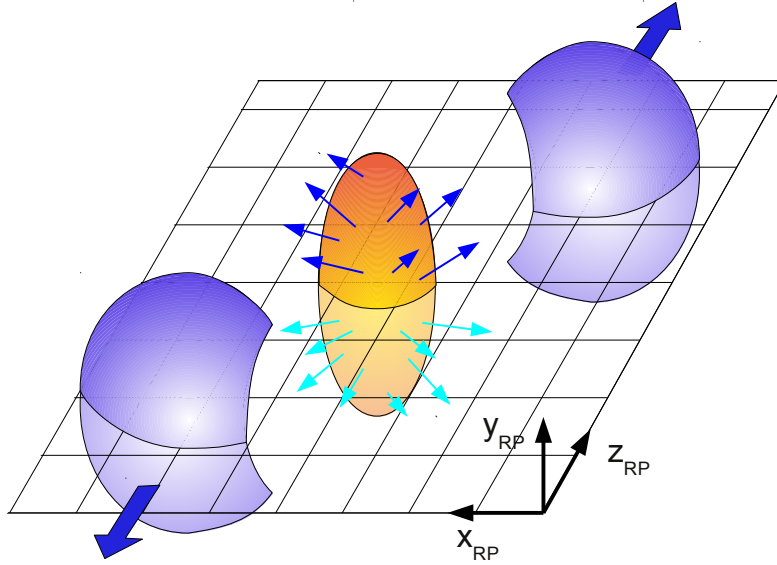
$$\mathbf{p} = \begin{pmatrix} p_x = p_T \cos \bar{\phi} \\ p_y = p_T \sin \bar{\phi} \\ p_z = \sqrt{p_T^2 + m^2} \sinh y \end{pmatrix}, \quad (1.1)$$

kde p_T značí příčnou hybnost a y je rapidita.

Souřadný systém, jak jsme si ho definovali, je pro každou srážku jiný a nedá se experimentálně určit. To je dáno rozdílnou orientací srážkového parametru při každé srážce a nemožností tento přímo měřit. Proto musíme zavést laboratorní souřadnou soustavu spojenou s detektorem, která je při všech srážkách stále stejná. Tyto dvě souřadné soustavy mají shodné osy z a jsou kolem ní proti sobě pootočený o úhel Φ_R nazývaný *úhlem reakční roviny*. Je jasné, že Φ_R je pro každou srážku jiný. Azimutální úhel v laboratorní soustavě označme ϕ , tento je narozdíl od $\bar{\phi}$ měřitelnou veličinou a platí $\bar{\phi} = \phi - \Phi_R$.

Abychom od sebe mohli odlišit výše zavedené souřadné systémy, budeme u prvního zmiňovaného používat indexy RP, tedy např. osa x bude značena x_{RP} pokud bude definovat reakční rovinu a x pokud bude myšlena laboratorní souřadná soustava.

Pomocí srážkového parametru b definujeme také centralitu srážky. Pro srážkový parametr $b = 0$ mluvíme o centrálních srážkách, pokud $b > 0$, mluvíme o srážkách necentrálních. Je jasné, že pokud je b větší než součet poloměrů srážejících se jader, ke



Obrázek 1.1: Souřadný systém v jaderné srážce.

srážce nedojde. Tato definice je pouze formální a jelikož, jak už bylo řečeno, je srážkový parametr přímo neměřitelný musíme centralitu srážky prakticky určovat z experimentálně pozorovatelných veličin, jako je např. počet detekovaných částic po srážce.

1.2 Kolektivní chování v jaderných srážkách

U částic vzniklých při necentrálních jaderných srážkách je pozorována anizotropie v hybnostním prostoru. Ke vzniku této anizotropie přispívá jak kolektivní chování - příspěvek toku, tak mnohé jiné efekty od toku nepocházející¹. Předpokládá se, že kolektivní chování je důsledkem hydrodynamického vývoje média, což předpokládá nástup minimálně lokální termalizace. Mezi efekty nepocházející od toku patří především jety, rozpady rezonancí, Hanbury-Brown Twiss (HBT) efekt a zákon zachování hybnosti.

Dalším speciálním jevem, ke kterému může dojít při vývoji QGP vzniklé ve srážce, kombinující jak vlivy pocházející, tak nepocházející od toku, je fragmentace reakční zóny. Pro případ plynulého přechodu fází (tzv. překřížení) může být tento jev způsoben náhlým vzrůstem objemové viskozity, kdy se expandující QGP roztrhá na malé kapky. V těchto kapkách může stále probíhat hydrodynamický vývoj, což způsobuje příspěvek k toku. Samotné kapky se ale zároveň při hadronizaci chovají jako rezonance (rozpadající se na více částic) a způsobují tím příspěvky k anizotropii nepocházející od toku. K podobné situaci, vzniku kapek QGP, dochází i při fázovém přechodu prvního druhu - spinodální rozklad.

1.2.1 Popis anizotropie pomocí tenzoru sféricity

Jeden z prvních způsobů popisu anizotropie v ultrarelativistických srážkách využil metodu používanou v analýze srážek nízkoenergetických a to popis pomocí tenzoru sféricity [7].

Nechť jsou hybnosti částic ve srážce s multiplicitou M označeny jako $\mathbf{p}(v)$, $v = 1, \dots, M$,

¹Anglicky se označují jako non-flow effects.

pak je tenzor sféricity definován jako

$$S_{ij} = \sum_{v=1}^M \omega(v) p_i(v) p_j(v), \quad (1.2)$$

kde p_i ($i = 1, 2, 3$) je i -tá souřadnice hybnosti a $\omega(v) = 1/2m_v$ je váha zvolená tak, aby byla stopa matice S (tedy za pomoci Einsteinovy sumace S_{ii}) celkovou kinetickou energií v nerelativistické limitě. Tenzor S obsahuje šest nezávislých parametrů, které odpovídají třem vlastním hodnotám f_1, f_2, f_3 a třem Eulerovým úhlům určujícím orientaci těchto ortogonálních vlastních vektorů. Jak je dokázáno v [7], jsou v souřadné soustavě reakční roviny jen tři parametry nezávislé a to θ_F a poměry $f_1/f_2, f_1/f_3$. Přičemž θ_F je úhel mezi největší hlavní osou tenzoru S a osou z , tedy $\theta_F = \pi/2$ pro centrální a $\theta_F = 0$ pro maximálně necentrální srážky. Tedy (1.2) má tvar

$$S = \begin{bmatrix} f_1 \cos^2 \theta_F + f_3 \sin^2 \theta_F & 0 & 2(f_3 - f_1) \sin \theta_F \cos \theta_F \\ 0 & f_2 & 0 \\ 2(f_3 - f_1) \sin \theta_F \cos \theta_F & 0 & f_1 \sin^2 \theta_F + f_3 \cos^2 \theta_F \end{bmatrix}. \quad (1.3)$$

Zdůrazněme, že tato rovnice platí jen v souřadné soustavě reakční roviny.

Pro případ ultrarelativistických srážek jsou typické příčné hybnosti částic mnohem menší, než hybnosti podélné, a tedy energie jde převážně do podélného směru. Proto se očekává, že se zvyšujícími se energiemi srážky pláí $\theta_F \rightarrow 0$ a $f_1, f_2 \ll f_3$, nezávisle na přítomnosti kolektivního chování. Jinak řečeno, jádra se od sebe zdatelně neodrazí a θ_F i f_3 se stávají nepodstatné, protože budou vždy přecházet v $\theta_F \rightarrow 0, f_3 \rightarrow \infty$. [7] Zaměříme se nyní na ovlivnění tenzoru sféricity příčným kolektivním tokem. Pokud omezíme tenzor S na příčnou rovinu (x_{RP}, y_{RP}), přejde (1.3) ve výše zmíněné limitě ($\theta_F \rightarrow 0, f_3 \rightarrow \infty$) na

$$S^\perp = \begin{bmatrix} f_1 + f_3 \theta_F^2 & 0 \\ 0 & f_2 \end{bmatrix}. \quad (1.4)$$

Pokud se navíc omezíme na oblast centrální rapidity, kde předpokládáme, že člen $f_3 \theta_F^2$ je zanedbatelný, pak

$$f_1 \simeq S_{11} = \sum_{v=1}^M \omega(v) p_x^2(v)$$

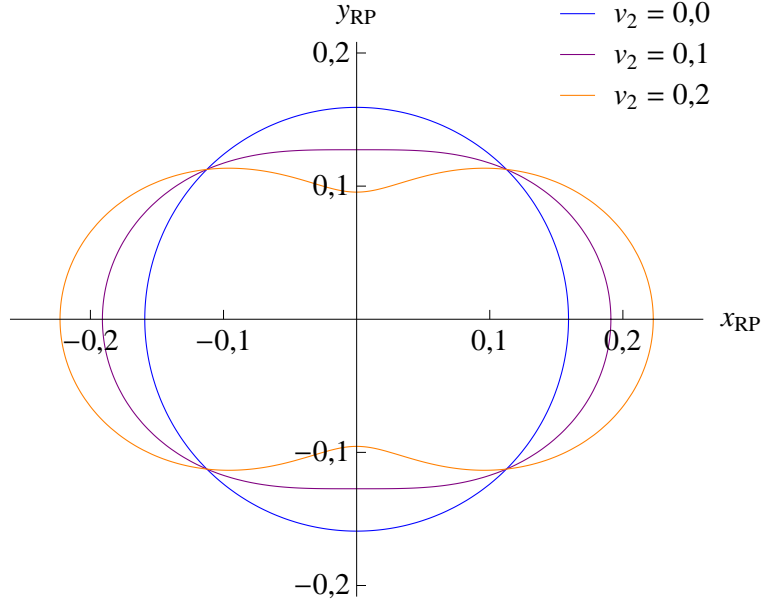
$$f_2 = S_{22} = \sum_{v=1}^M \omega(v) p_y^2(v)$$

a emise produktů reakce ve směru osy x_{RP} znamená, že $f_1 > f_2$. Přírozeným měřítkem této anizotropie je bezrozměrná pozorovatelná α [§] nazývaná *excentricita* a definovaná jako

$$\alpha = \frac{f_1 - f_2}{f_1 + f_2} = \frac{\sum_{v=1}^M \omega(v) [p_x^2(v) - p_y^2(v)]}{\sum_{v=1}^M \omega(v) [p_x^2(v) + p_y^2(v)]}.$$

$\alpha = 0$ pro izotropní distribuci ($f_1 = f_2$), zatímco $\alpha = 1$, pokud jsou všechny hybnosti naměřeny podél osy x_{RP} . Zdůrazněme, že tato rovnice platí pouze, když se jedná o osu reakční roviny x_{RP} a ne osu laboratorní souřadné soustavy x .

[§]Také označovaná jako ϵ .



Obrázek 1.2: Úhlové rozdělení hybností částic v případě nenulového eliptického toku v_2 , viz. legenda.

1.2.2 Popis anizotropie pomocí Fourierova rozkladu

Jak je zřejmé z předešlé části, je popis hybnostní anizotropie částic vzniklých ve srážce pomocí tenzoru sféricity nedostačující, příliš složitý a nevhodný pro analýzu diferenciálního toku. Proto byla v [16] představena nová metoda popisu, která umožňuje studovat komplikovanější tvary rozdělení, které nemohou být popsány elipsoidem při analýze pomocí tenzoru sféricity.

Metoda spočívá v rozdělení reakční zóny podle některé podélné proměnné, tzn. rapidity, nebo pseudorapidity, na několik oken a provedení Fourierovy analýzy v každém z nich. Fourierovy koeficienty pak odrážejí různé stupně příčného toku. Tedy matematicky vyjádřeno

$$E \frac{d^3 N}{d^3 p} = \frac{1}{2\pi} \frac{d^2 N}{p_T dp_T dy} \left(1 + \sum_{n=1}^{\infty} 2v_n \cos(n(\phi - \Phi_R)) \right), \quad (1.5)$$

kde $\frac{d^3 N}{d^3 p}$ je úhlové rozdělení hybnosti částice vůči reakční rovině, koeficienty $v_n = \langle \cos[n(\phi_i - \Phi_R)] \rangle$ značí jednotlivé složky toku a závorky $\langle \rangle$ označují průměr přes všechny částice ve všech srážkách. v_1 nazýváme *přímý* a v_2 *eliptický* tok. Protože jsou koeficienty v_n funkcí rapidity y a příčné hybnosti p_T mluvíme o *diferenciálním toku*. Pokud zprůměrujeme v_n přes rapiditu a příčnou hybnost, mluvíme o *toku integrálním*.

Přímý tok odpovídá celkovému posunutí distribuce v příčné rovině, eliptický tok pak popisuje kvadrupólovou deformaci eliptického tvaru a kvantitativně jde o rozdíl velikosti hlavní a vedlejší osy elipsy. Jelikož je reakční zóna při srážkách stejných sférických jader symetrická podle reakční roviny, je zřejmé, že všechny liché koeficienty v_n v centrální rapiditě po vystředování přes mnoho srážek vymizí. Pro ilustraci je na obrázku 1.2 znázorněno úhlové rozdělení pro různé hodnoty v_2 (viz. legenda), přičemž ostatní koeficienty jsou nulové.

Definici koeficientů v_n můžeme také přepsat za použití jednočásticové rozdělovací funkce hybnosti $f(\mathbf{p}) \equiv dN/d^3\mathbf{p}$, jako

$$v_n(\mathcal{D}) \equiv \left\langle e^{in(\phi - \Phi_R)} \right\rangle_{\mathcal{D}} = \frac{\int_{\mathcal{D}} e^{in(\phi - \Phi_R)} f(\mathbf{p}) d^3\mathbf{p}}{\int_{\mathcal{D}} f(\mathbf{p}) d^3\mathbf{p}}, \quad (1.6)$$

kde závorky $\langle \rangle$ označují průměr přes mnoho srážek a \mathcal{D} reprezentuje oblast ve fázovém prostoru v (p_T, y) rovině, kde měříme tok, obvykle tato oblast odpovídá detektoru. Protože je pro sférická jádra zdroj částic symetrický vůči reakční rovině, $\langle \sin n\phi \rangle$ vymizí a v_n jsou reálné, tedy

$$v_n \equiv \left\langle e^{in(\phi - \Phi_R)} \right\rangle = \left\langle \cos(n(\phi - \Phi_R)) \right\rangle. \quad (1.7)$$

Uvedme nyní pro úplnost vztah mezi oběma zmiňovanými metodami, tedy mezi popisem pomocí tenzoru sféricity a popisem pomocí koeficientů Fourierova rozkladu. Položme nyní všechny váhy $w(v) = 1$ a to proto, že při ultrarelativistických srážkách není už S_{ii} s dříve definovanými vahami rovna celkové kinetické energii. Tenzor sféricity S^\perp vyjádřený rovnicí (1.4) lze pak přepsat pomocí úhlu mezi osou x_{RP} a největší hlavní osou tohoto tenzoru θ a $S \equiv \text{tr } S^\perp = \sum_{v=1}^M p_T^2(v)$ jako

$$S^\perp = \frac{S}{2} \begin{pmatrix} 1 + \alpha \cos 2\theta & \alpha \sin 2\theta \\ \alpha \sin 2\theta & 1 - \alpha \cos 2\theta \end{pmatrix},$$

Pak můžeme vhodnou volbou váhy $\omega(v)$ docílit rovnosti $S = v_0$, viz [16]. Výpočet vlastních hodnot S^\perp pak dává pro excentricitu a eliptický tok vztah

$$\alpha = \frac{v_2}{v_0}.$$

1.2.3 Problémy při určování toku

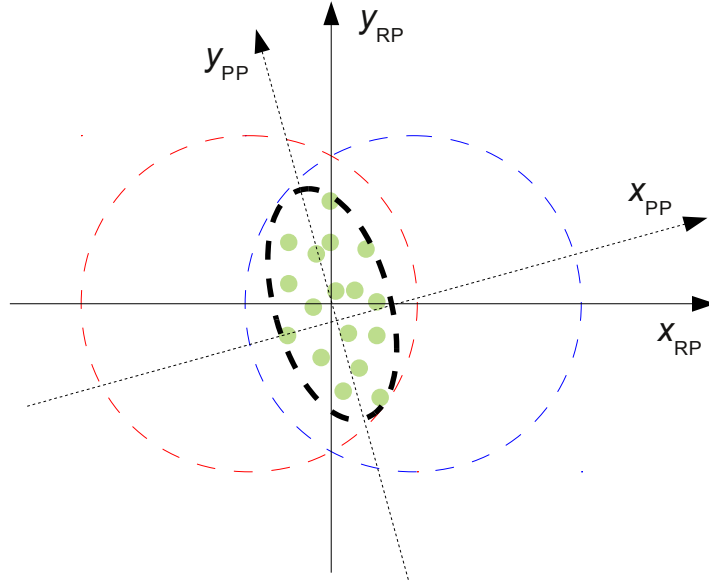
Vraťme se k různým jevům přispívajícím k hybnostní anizotropii částic nepocházejícím od toku. Pochopení jejich vlivu na jednotlivé metody výpočtu toku je velmi důležité pro interpretaci a možné korekce výsledků poskytovaných těmito metodami. Obecně můžeme jevy rozdělit do tří skupin:

- jevy nepocházející od toku,
- fluktuace toku,
- efekty detektoru.

Jevy nepocházející od toku. Dají se charakterizovat jako korelace nesouvisející s reakční rovinou a v případě dvoučásticových korelací jsou kvantifikovány parametrem δ_n jako

$$\langle \cos [n(\phi_i - \phi_j)] \rangle = v_n^2 + \delta_n.$$

Jak už bylo řečeno dříve, mezi jevy nepocházející od toku patří rozpady rezonancí, jety, HBT efekt a zákon zachování hybnosti. Protože jsou tyto korelace převážně máločásticové, škáluje δ_n jako $1/N$. Existuje více různých metod pro odstranění příspěvků nepocházejících od toku, jejich stručný přehled lze nalézt např. v [15].



Obrázek 1.3: Definice roviny účastníků.

Fluktuace toku. Neizotropní tok částic může fluktuovat srážku od srážky a to i při srážkách se stejným směrem i velikostí srážkového parametru b . Fluktuace toku se dají popsat rovnicí [15]

$$\sigma_{vn}^2 = \langle v_n^2 \rangle - \langle v_n \rangle^2.$$

Důležitým zdrojem těchto fluktuací jsou fluktuace v počáteční geometrii zdroje částic. V souvislosti s tím definujeme *rovinu účastníků*, která je určena různým rozložením interagujících částic a rozdílnou povahou jejich interakcí v oblasti překryvu srážejících se jader. Situace je znázorněna na obrázku 1.3, kde je zobrazena srážka v příčné rovině, přičemž interagující částice jsou vyznačeny zeleně a definují zcela jiný tvar interakční zóny, než která je vytyčena oblastí překryvu jader. Tento tvar (na obrázku vyznačen tučně čárkovaně) definuje v příčné rovině nový souřadný systém, který budeme značit dolním indexem PP, rovina účastníků je pak definována osou x_{PP} a osou z .

Rozlišovat mezi těmito dvěma rovinami je důležité, protože hodnota eliptického toku v soustavě účastníků je vždy větší, než v soustavě reakční roviny.

Efekty detektoru. Dalším faktorem ovlivňujícím výsledky určení anizotropního toku jsou efekty detektoru. Mezi tyto efekty se počítají jak konstrukční vlastnosti, např. pokrytí jen části azimutálního úhlu, nesymetrické pokrytí rapidity, tak vady a nefunkční prvky detektoru. Tyto "nedostatky" detektoru pak mohou přispět k efektům nepocházejícím od toku, např. pokud není akceptance detektoru symetrická vůči centrální rapiditě, může zachování celkové hybnosti ovlivnit měření přímého a eliptického toku [15].

Kapitola 2

Generátor srážek

Pro testování vlastností různých metod na určení eliptického toku diskutovaných v následujících kapitolách byl vytvořen „ad hoc“ generátor srážek. Důvodem pro vytvoření vlastního generátoru byla možnost kontrolovat všechny parametry produkovaných částic a lépe tak porozumět chování jednotlivých metod. Dalším faktorem hovořícím pro vlastní generátor byla absence požadavku na opravdový fyzikální vývoj média vzniklého ve srážce, ve smyslu vývoje podle nějakého fyzikálního modelu. To následně umožnilo vytvořit jednoduchý a na výpočetní zdroje nenáročný algoritmus.

2.1 Popis generátoru

Generátor byl napsán v jazyce C++ dle standardu POSIX threads¹, proto je primárně určen pro používání na UNIXových systémech. Generátor se nachází na přiloženém CD pod názvem *Generator.cc*.

2.1.1 Parametry generátoru

Aby bylo možné pohodlně generovat různé sady srážek s odlišnými parametry, bez nutnosti zasahovat do kódu programu, byly tyto parametry umístěny do textového souboru, z kterého jsou při běhu generátoru načteny. Název tohoto zdrojového souboru je předán programu při spuštění jako parametr, tady např.: `./Generator.out input.txt`. Každý řádek tohoto souboru začínající znakem `#` je přeskočen, lze tedy vkládat libovolné komentáře, stejně tak jsou přeskočeny i prázdné řádky. Každý jiný řádek poté značí jednu sadu srážek (počet těchto srážek je nastaven přímo v programu, stejně jako multiplicita částic ve srážce, která je pro všechny srážky stejná) a musí mít 4 parametry oddělené jednou či více mezerami, a/nebo jedním či více tabulátory, což umožňuje formátování textu do sloupců, a tedy větší přehlednost.

Hlavním úkolem generátoru je produkovat hybnostní rozdělení částic se složkou eliptického toku lineárně závislého na příčné hybnosti částic p_T . Tato závislost je parametrisována jako

$$v_2 = a p_T + b \tag{2.1}$$

a první dva parametry řádku ve zdrojovém souboru jsou právě parametry a a b , které jsou rozsahu `double`. Oba parametry musí být zadány v anglickém formátu oddělování desetinné části tečkou. Třetím parametrem je název výstupního souboru, kam jsou zapsány velikost příčné hybnosti částice p_T a její azimutální úhel ϕ v laboratorní souřadné soustavě.

¹Na systémech UNIX je toto rozhraní specifikováno standardem IEEE POSIX 1003.1c (1995).

Název musí obsahovat příponu, obvykle `.dat`. Tedy je jasné, že výstupní soubor obsahuje jednu sadu srážek. Jednotlivé srážky jsou odděleny řádkem obsahujícím řetězec `0 0` a každá částice je uvedena na zvláštním řádku. Pro potřebu testování jednotlivých metod analýzy toku nejsou nutné další údaje, jako je typ částice, místo vzniku částice, jednotlivé složky hybnosti atd. Poslední parametr umožňuje zapnout kontrolu správného fitu hybnosti podle nastavené závislosti v_2 . Tento parametr může mít pouze dvě hodnoty, `true`, pokud si přejeme kontrolu, nebo `false`, pokud kontrolu nechceme. Když je hodnota parametru jiná, vypíše program na chybový výstup varování a kontrolu vypne.

Pokud obsahuje řádek zdrojového souboru méně argumentů než 4, je na chybový výstup vypsáno varování a generování sady srážek je přeskočeno.

2.1.2 Fungování generátoru

Generování náhodného rozdělení probíhá pomocí generátoru náhodných čísel Mersenne Twister dostupného z [6], generujícího rovnoměrné rozdělení náhodných čísel. Volba padla na tento generátor kvůli jeho dlouhé délce cyklu ($2^{19937} - 1$), funkčnosti na jakémkoli CPU, pro který existuje C++ překladač, a podpoře multivláknového programování. Poslední jmenovaný důvod je obzvláště důležitý, jelikož je generátor srážek naprogramován multivláknově a musí tudíž používat jen tzv. thread safe knihovny. Potřebné úhlové rozdělení hybností je z vygenerovaného rovnoměrného rozdělení získáno metodou zamítnutí². Jako alternativní metoda byla vyzkoušena i transformační metoda³, pro kterou bylo ale nutné numericky určovat hodnoty inverzní funkce požadovaného úhlového rozdělení, což vedlo k výraznému zpomalení. Obě metody byly z části převzaty z [11].

Příčné hybnosti částic jsou generovány rovnoměrně v zadaném intervalu p_T , přičemž pro testování metod na výpočet eliptického toku byl použit interval (0,0 – 1,5) GeV.

2.2 Testování generátoru

Aby bylo možné ověřit správnou funkci generátoru, byla přidána možnost vynést úhlové rozdělení hybností vygenerovaných částic do grafu spolu s požadovaným průběhem rozdělení zadaným ve zdrojovém souboru. Jak už bylo řečeno, tato funkce se zapíná ve zdrojovém souboru a výsledkem je textový soubor obsahující počty částic v jednotlivých úhlových binech. Protože ale může být eliptický tok závislý na příčné hybnosti částice, jsou částice ještě rozděleny do několika binů v příčné hybnosti, tedy jeden bin reprezentuje $\frac{dN}{d\phi dp_T}$. Název tohoto textového souboru bude tvořen názvem specifikovaným ve zdrojovém souboru pro výsledný soubor s vygenerovanými částicemi a příponou `.test.dat`. Pokud je na počítači nainstalován program gnuplot⁴, bude spolu s textovým souborem vytvořeno několik grafů ve formátu png, přičemž každý graf odpovídá jednomu p_T binu a je v něm vyneseno i požadovaný průběh úhlového rozdělení dle vzorce

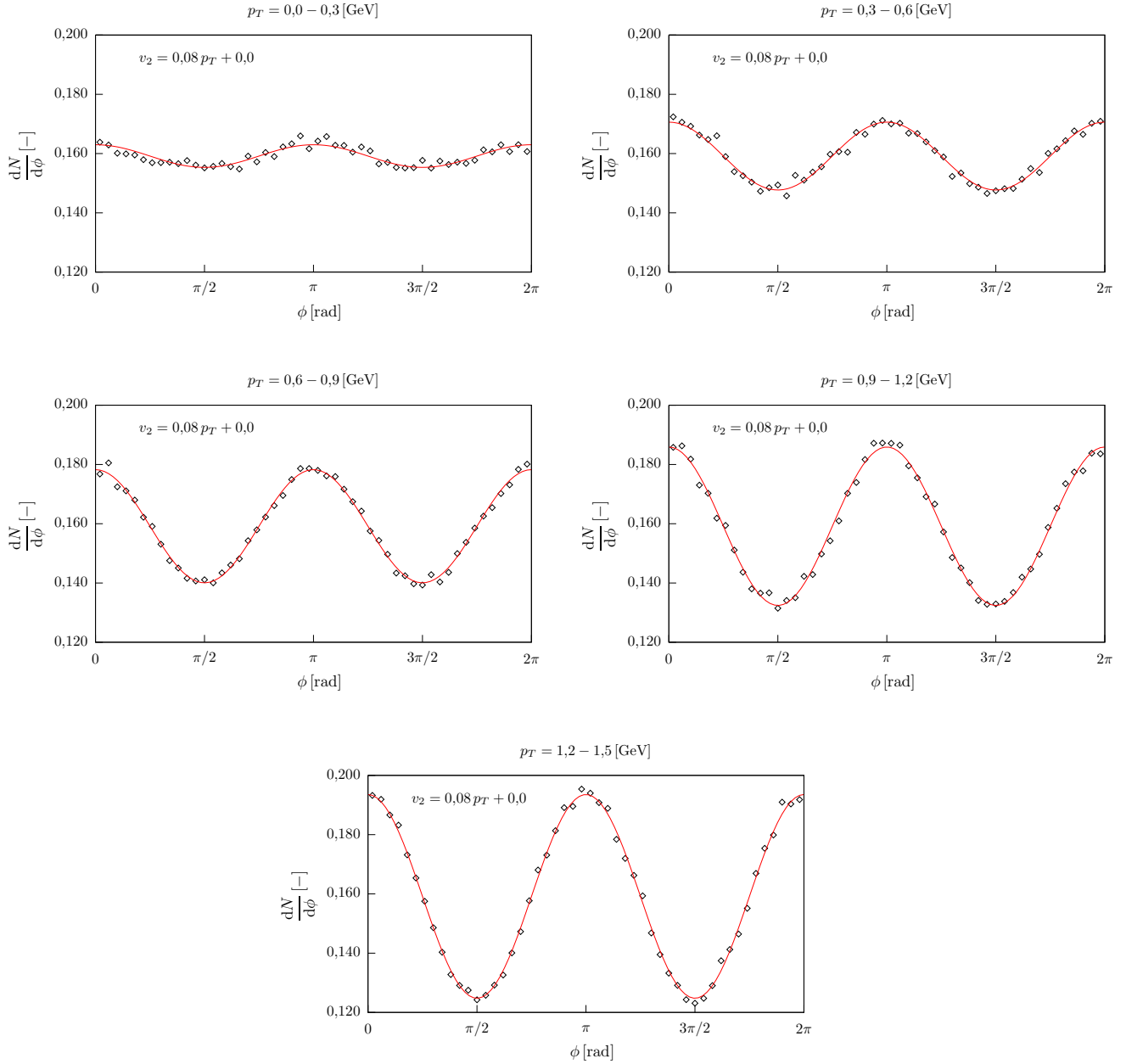
$$\frac{dN}{d\phi} = \frac{1 + 2v_2(p_T) \cos(2\phi)}{2\pi},$$

kde v_2 je parametrizován dle (2.1) a za p_T je dosazen střed daného binu. Grafy pro sadu 10 000 srážek s multiplicitou 300 částic a eliptickým tokem závislým na p_T jako $v_2 = 0,08 p_T / (1 \text{ GeV})$ jsou zobrazeny na obrázku 2.1.

²Anglicky označované jako rejection method.

³Anglicky označována jako transformation method.

⁴Dostupný z <http://www.gnuplot.info>.



Obrázek 2.1: Testování generátoru pro sadu 10 000 srážek s multiplicitou 300 částic. Závislost eliptického toku na p_T je vyznačena v grafu, rozsah příslušného p_T binu je uveden nad grafem. Černé body značí výsledné úhlové rozdělení a červená čára požadované rozdělení.

Kapitola 3

Metoda srážkové roviny

Metoda srážkové roviny¹ [10] je jednou z nejvíce používaných metod pro analýzu anizotropního toku. Sice je ze zde diskutovaných metod nejstarší, ale pokud se provedou korekce na efekty nepocházející od toku a také na fluktuace toku, poskytuje odhady toku srovnatelné s novějšími metodami. [9]

3.1 Úvod

Zavedeme pro každou částici jednotkový vektor \mathbf{u}_n , $n \in \mathbb{N}$ jako

$$\mathbf{u}_n = x_n + iy_n \equiv \cos(n\phi) + i \sin(n\phi) = e^{in\phi},$$

kde ϕ značí azimutální úhel částice. Dále zavedeme *vektor srážkového toku*² \mathbf{Q}_n , který představuje nezávislý odhad orientace reakční roviny (vůči laboratorní soustavě) pro každou n -tou sférickou harmoniku. Tento je definován jako suma vektorů \mathbf{u}_n z určité podmnožiny částic produkovaných ve srážce. Označme tuto podmnožinu EP, pak

$$\begin{aligned} \mathbf{Q}_n &= \sum_{i \in \text{EP}} w_i \mathbf{u}_{i,n} = \sum_{i \in \text{EP}} w_i (\cos(n\phi_i) + i \sin(n\phi_i)) \\ &\equiv X_n + iY_n = |\mathbf{Q}_n| \exp[in\Psi_n], \end{aligned} \tag{3.1}$$

kde X_n a Y_n jsou složky vektoru srážkového toku a Ψ_n je jeho úhel. w_i jsou váhy jednotlivých částic, v dalším textu je položíme rovny 1 a nebudeme je dále vyznačovat. Poznamenejme ale, že možná volba je $w_i = 1/\sqrt{N}$, kde N je počet částic v množině EP. Úhel Ψ_n je někdy označován jako *úhel srážkové roviny*. [12] Poznamenejme, že čím více částic je v podmnožině EP, tím blíže je orientace \mathbf{Q}_n k orientaci reakční roviny.

Čistě z praktických důvodů uveďme rovnici pro výpočet Ψ_n

$$\Psi_n = \frac{\tan^{-1} \left(\frac{\sum \sin(n\phi)}{\sum \cos(n\phi)} \right)}{n},$$

přičemž Ψ_n leží v intervalu $(0, 2\pi/n)$ a pro $n = 2$ je totožný s úhlem srážkové roviny určeným z příčného tenzoru sféricity S^\perp . [7]

¹Anglicky označovaná jako event plane method

²Anglicky se označuje jako event flow vector.

3.2 Výpočet toku

3.2.1 Integrální tok

Nyní se budeme zabývat distribucemi částic vůči srážkovým rovinám. Metoda srážkové roviny dovoluje vypočíst tok řádu n pomocí odhadu srážkové roviny Ψ_m , když platí $n = km, k \in \mathbb{N}$. Definujme

$$v_n^{\text{obs}} \equiv \langle \cos(n(\phi - \Psi_m)) \rangle,$$

kde průměr $\langle \rangle$ probíhá přes všechny částice ve všech srážkách. Pokud byla částice s azimutálním úhlem ϕ použita pro výpočet Ψ_m , musí být tento před určením v_n^{obs} vypočten bez této částice, aby byl odstraněn příspěvek od autokorelací. Tok řádu n je pak dán výrazem

$$v_n = \frac{v_n^{\text{obs}}}{\langle \cos(n(\Psi_m - \Phi_R)) \rangle},$$

kde Φ_R je úhel reakční roviny a jmenovatel se nazývá *rozlišení srážkové roviny*, označme ho R , a vždy zvětšuje hodnotu v_n (jelikož je menší než 1).

Rozlišení srážkové roviny R může být vyjádřeno rovnicí [10]

$$R \equiv \langle \cos(n(\Psi_m - \Phi_R)) \rangle = \mathcal{R}(\chi_{\text{full}}),$$

kde funkce \mathcal{R} je definována jako

$$\mathcal{R}(\chi) \equiv \frac{\sqrt{\pi}}{2} e^{-\chi^2/2} \chi \left[I_{(k-1)/2} \left(\frac{\chi^2}{2} \right) + I_{(k+1)/2} \left(\frac{\chi^2}{2} \right) \right], \quad (3.2)$$

přičemž I_s je modifikovaná Besselova funkce řádu s a χ je tzv. *parametr rozlišení*, pro který platí $\chi = v_m/\sigma$. Parametr σ je pak dán rovnicí $\sigma^2 = 1/N$, kde N je počet částic použitých pro výpočet Ψ_m (jak bylo definováno v oddíle 3.1). Pro zajímavost uveďme asymptotické formy $\mathcal{R}(\chi)$ [8]:

$$\mathcal{R}(\chi) \simeq \exp[-k^2/4\chi^2] \quad \text{pro } \chi \gg 1 \quad (3.3a)$$

$$\mathcal{R}(\chi) \simeq \frac{\sqrt{\pi}}{2^k \Gamma(\frac{k+1}{2})} \chi^k \quad \text{pro } \chi \ll 1, \quad (3.3b)$$

kde Γ je Eulerova gamma funkce. Funkce $\mathcal{R}(\chi)$ i její asymptotiky jsou vykresleny pro různá k na obrázku 3.1, přičemž je vidět, že nejlepší rozlišení lze dosáhnout volbou $k = 1$.

Z dosud uvedených rovnic není pomocí naměřených veličin rozlišení srážkové roviny spočitatelné. Pokud ale rozdělíme množinu EP na dvě podmnožiny A a B se stejným množstvím částic, označme ho N_s , pak můžeme psát

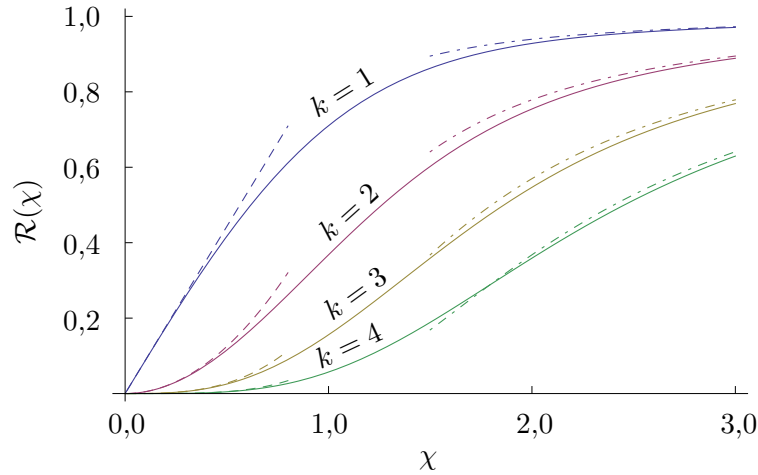
$$\langle \cos(n(\Psi_m^a - \Psi_m^b)) \rangle = \langle \cos(n(\Psi_m^a - \Phi_R)) \rangle \cdot \langle \cos(n(\Psi_m^b - \Phi_R)) \rangle,$$

kde Ψ_m^a , resp. Ψ_m^b jsou úhly reakční roviny vypočtené z množin A, resp. B. Tato rovnice platí za předpokladu, že neexistují jiné korelace, než ty pocházející od toku, nebo že mohou být zanedbány. Pro $k = 1$, $N_s = N/2$ a malé χ (cca $\chi < 0,5$) platí

$$\langle \cos(n(\Psi_m - \Phi_R)) \rangle = \sqrt{2 \langle \cos(n(\Psi_m^a - \Psi_m^b)) \rangle}. \quad (3.4)$$

Pro obecný případ ale musíme nejdříve vypočítat rozlišení podmnožin srážek jako

$$\mathcal{R}(\chi_s) = \sqrt{\langle \cos(n(\Psi_m^a - \Psi_m^b)) \rangle}.$$



Obrázek 3.1: Funkce $\mathcal{R}(\chi)$ (3.2) a její asymptotiky (3.3a) (čérchovaně) a (3.3b) (čárkovaně), pro různé hodnoty k , viz graf.

S použitím rovnice (3.2) pak určíme parametr χ_s a vypočteme rozlišení srážkové roviny dle

$$\mathcal{R}(\chi_{\text{full}}) = \mathcal{R}(\chi_s \sqrt{N/N_s}). \quad (3.5)$$

Speciálně pro $N_s = N/2$ dostáváme

$$v_n = \frac{v_n^{\text{obs}}}{\mathcal{R}(\chi_s \sqrt{2})}. \quad (3.6)$$

3.2.2 Diferenciální tok

Určení diferenciálního toku je jednoduché, stačí si uvědomit závislost $v_n^{\text{obs}}(p_T, y)$. Tedy diferenciální tok je dán rovnicí (3.6) s čitatelem vypočteným za použití částic s u_n patřícím do určitého rozmezí p_T a y .

3.3 Výsledky analýzy

Analýza byla provedena pomocí programu *EventPlane.cc*, který se nachází na příloženém CD. Program je stejně jako generátor srážek napsán v jazyce C++ dle standardu POSIX threads. Pro svůj běh potřebuje také generátor náhodných čísel Mersenne Twister, protože pomocí tohoto se částice rozdělují do jednotlivých podmnožin srážek.

Program přijímá dva parametry, název souboru se vstupními daty a volitelně slovo *test*. Pokud není druhého parametru použito, musí být vstupní soubor ve formátu OSCAR1997A, pokud je druhý parametr přítomen, musí být vstupní soubor ve formátu, který produkuje generátorem popsáným v kapitole 2.

Program počítá eliptický tok jak s výpočtem rozlišení reakční roviny dle (3.4), tak dle (3.5). Pro druhý jmenovaný poskytne program hodnotu výrazu (3.2.1) a hodnota (3.5) musí být vypočtena a zadána „ručně“.

Analýzovány byly celkem dvě skupiny srážek vygenerované programem popsáným v kapitole 2. První skupinu tvořilo 5 sad srážek s různou závislostí $v_2(p_T)$ parametrizovanou rovnicí (2.1). Každá tato sada byla tvořena $N_{\text{event}} = 10000$ srážkami s multiplicitou částic

Tabulka 3.1: Výsledné hodnoty integrálního (v_2) a diferenciálního (v_2') toku vypočtené pomocí R určeného dle rovnice (3.4) pro multiplicitu $M = 300$ a počet srážek v jednotlivých sadách $N_{\text{event}} = 10000$.

a [-]	0,02	0,04	0,06	0,08	0,10
v_2 [-]	0,0151	0,0315	0,0416	0,0547	0,0641
$v_2'(0,0 - 0,3)$ [-]	0,0060	0,0093	0,0094	0,0122	0,0114
$v_2'(0,3 - 0,6)$ [-]	0,0060	0,0209	0,0249	0,0333	0,0389
$v_2'(0,6 - 0,9)$ [-]	0,0150	0,0317	0,0403	0,0552	0,0648
$v_2'(0,9 - 1,2)$ [-]	0,0227	0,0420	0,0571	0,0759	0,0894
$v_2'(1,2 - 1,5)$ [-]	0,0261	0,0533	0,0761	0,0969	0,1160

Tabulka 3.2: Výsledné hodnoty integrálního (v_2) a diferenciálního (v_2') toku vypočtené pomocí R určeného dle rovnice (3.5) pro multiplicitu $M = 300$ a počet srážek v jednotlivých sadách $N_{\text{event}} = 10000$.

a [-]	0,02	0,04	0,06	0,08	0,10
v_2 [-]	0,0153	0,0325	0,0445	0,0614	0,0747
$v_2'(0,0 - 0,3)$ [-]	0,0060	0,0096	0,0101	0,0137	0,0132
$v_2'(0,3 - 0,6)$ [-]	0,0060	0,0216	0,0266	0,0373	0,0454
$v_2'(0,6 - 0,9)$ [-]	0,0152	0,0327	0,0431	0,0620	0,0755
$v_2'(0,9 - 1,2)$ [-]	0,0229	0,0434	0,0611	0,0852	0,1041
$v_2'(1,2 - 1,5)$ [-]	0,0264	0,0551	0,0815	0,1087	0,1351

$M = 1000$. Druhá skupina byla co se jmenovaných vlastností týče shodná s první, jen multiplicita částic ve srážkách byla rovna 300.

Výsledné hodnoty integrálního a diferenciálního eliptického toku vypočtené pomocí R určeného dle rovnice (3.4) jsou pro $M = 300$, resp. $M = 1000$ uvedeny v tabulce 3.1, resp. 3.3. Každý sloupec tabulky odpovídá jedné sadě srážek s eliptickým tokem parametrizovaným pomocí a dle rovnice (2.1) (hodnota parametru b je vždy nula). Rozsah p_T binu, v kterém byl vypočten diferenciální tok v_2' , je uveden v kulatých závorkách. Výsledné hodnoty diferenciálního toku jsou pak vyneseny v grafu na obrázku 3.2 vlevo, pro $M = 300$ a vpravo, pro $M = 1000$. Tyto hodnoty jsou vždy umístěny ve středu p_T binu, pro který byly počítány a v kulatých závorkách je uvedena hodnota a . V grafu je navíc pro každou sadu srážek vynesena i generovaná eliptická tok $v_2(p_T)$. Stejným způsobem jsou pak v tabulkách 3.2 a 3.4 uvedeny hodnoty vypočtené za použití R určeného z rovnice (3.5). Graficky je pak v_2' vynesena pro $M = 300$ do grafu na obrázku 3.3 vlevo a pro $M = 1000$ vpravo.

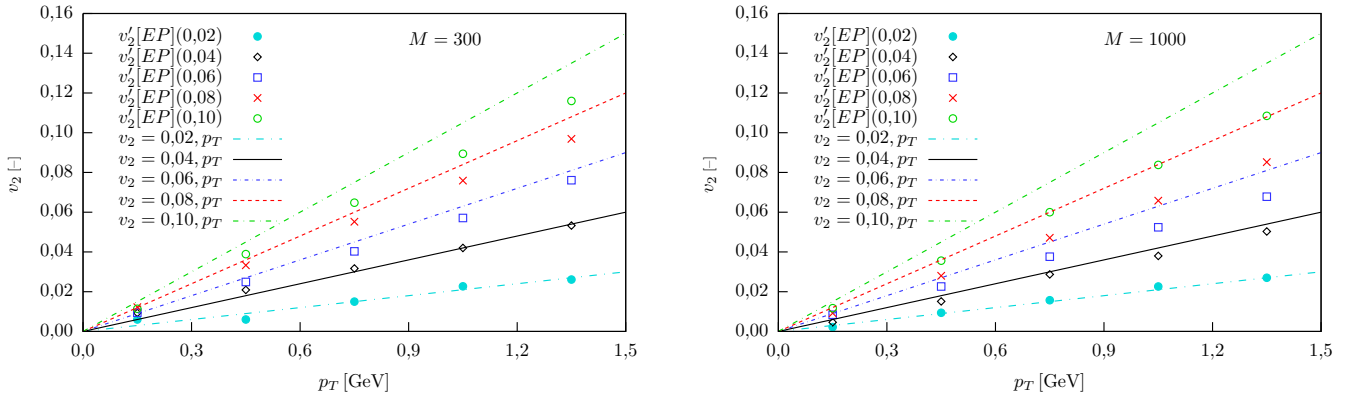
Jak můžeme vidět z grafů na obrázku 3.2, jsou hodnoty diferenciálního toku určeného z metody srážkové roviny za použití rovnice (3.4) v dobrém souladu s generovanými hodnotami jen pro případ slabého toku a malé multiplicity M . Toto chování je zcela dle očekávání, protože slabý tok a nízká multiplicita odpovídají malým hodnotám χ , což je oblast platnosti této rovnice. Pro silnější tok začínají být hodnoty v_2' výrazně menší, než je jejich generovaná hodnota a pro $M = 1000$ dokonce splývají s průběhem v_2 pro menší a . Naproti tomu hodnoty vypočtené za pomoci rovnice 3.5 jsou konzistentní s generovaným

Tabulka 3.3: Výsledné hodnoty integrálního (v_2) a diferenciálního (v'_2) toku vypočtené pomocí R určeného dle rovnice (3.4) pro multiplicitu $M = 1000$.

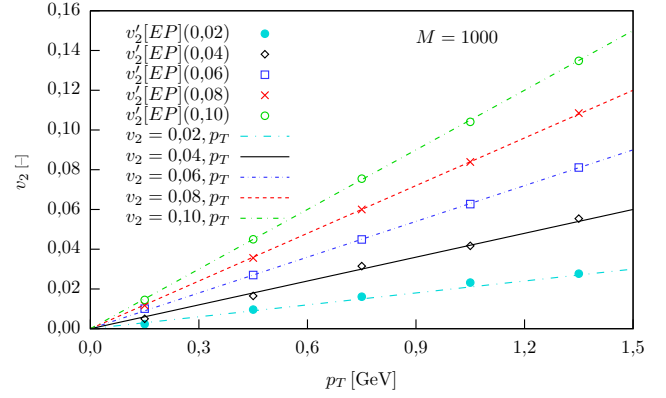
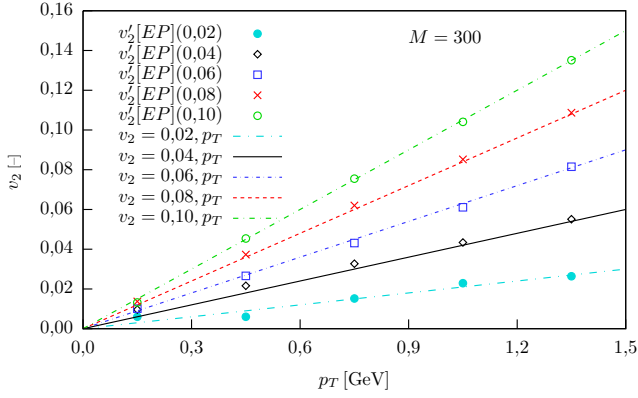
a [-]	0,02	0,04	0,06	0,08	0,10
v_2 [-]	0,0154	0,0273	0,0377	0,0471	0,0563
$v'_2(0,0 - 0,3)$ [-]	0,0022	0,0046	0,0084	0,0092	0,0117
$v'_2(0,3 - 0,6)$ [-]	0,0094	0,0151	0,0226	0,0280	0,0356
$v'_2(0,6 - 0,9)$ [-]	0,0157	0,0287	0,0376	0,0471	0,0600
$v'_2(0,9 - 1,2)$ [-]	0,0226	0,0380	0,0524	0,0658	0,0838
$v'_2(1,2 - 1,5)$ [-]	0,0270	0,0503	0,0678	0,0852	0,1085

Tabulka 3.4: Výsledné hodnoty integrálního (v_2) a diferenciálního (v'_2) toku vypočtené pomocí R určeného dle rovnice (3.5) pro multiplicitu $M = 1000$ a počet srážek v jednotlivých sadách $N_{\text{event}} = 10000$.

a [-]	0,02	0,04	0,06	0,08	0,10
v_2 [-]	0,0158	0,0301	0,0452	0,0599	0,0748
$v'_2(0,0 - 0,3)$ [-]	0,0023	0,0050	0,0101	0,0117	0,0145
$v'_2(0,3 - 0,6)$ [-]	0,0096	0,0165	0,0270	0,0356	0,0450
$v'_2(0,6 - 0,9)$ [-]	0,0161	0,0315	0,0449	0,0600	0,0755
$v'_2(0,9 - 1,2)$ [-]	0,0232	0,0417	0,0627	0,0839	0,1041
$v'_2(1,2 - 1,5)$ [-]	0,0277	0,0554	0,0811	0,1085	0,1348



Obrázek 3.2: Výsledné hodnoty diferenciálního toku v'_2 , vypočtené pomocí R určeného dle rovnice (3.4), a generované závislosti $v_2(p_T)$. Multiplicita M je vyznačena v grafu a počet srážek v jednotlivých sadách $N_{\text{event}} = 10000$.



Obrázek 3.3: Výsledné hodnoty diferenciálního toku v_2' , vypočtené pomocí R určeného dle rovnice (3.5), a generované závislosti $v_2(p_T)$. Multiplicita M je vyznačena v grafu a počet srážek v jednotlivých sadách $N_{\text{event}} = 10000$.

tokem pro všechny námi zkoumané závislosti $v_2(p_T)$ a multiplicity. Toto chování je také očekáváno, protože je v námi analyzovaných srážkách přítomen pouze tok eliptický. V případě přítomnosti jiných v_n , nebo efektů nepocházejících od toku by se situace jistě výrazně změnila a soulad vypočtených hodnot s generovanými by byl mnohem horší.

Kapitola 4

Úvod do statistiky

V této kapitole uvedeme vlastnosti statistiky, které nám pomohou porozumět metodám pro výpočet anizotropního toku diskutovaným v dalších kapitolách. Pro detailnější pojednání problematiky viz např. [14].

4.1 Jednodimenzionální rozdělení

Náhodná veličina, nebo také stochastická proměnná, značíme X , je definována sadou možných hodnot, nebo rozdělením pravděpodobností. Dále se zaměříme na druhý případ. V případě jednodimenzionálního spojitého X , je rozdělení pravděpodobnosti dáno funkcí $P(x)$ nazývanou hustota pravděpodobnosti, pro kterou platí

$$P(x) \geq 0$$

a je normalizována jako

$$\int P(x) dx = 1,$$

kde integrál probíhá přes celý rozsah X .

Střední hodnota funkce $f(X)$ definované na stejném stavovém prostoru jako $P(x)$ je dána rovnicí

$$\langle f(X) \rangle = \int f(x) P(x) dx.$$

Speciálně $\langle X^m \rangle \equiv \mu_m$ nazýváme m -tý (obecný) moment X a pro $m = 1$ nazýváme μ_1 průměr, nebo také střední hodnota. Kvadrát standardní odchylky σ^1 , tedy veličinu

$$\sigma^2 = \langle (X - \langle X \rangle)^2 \rangle = \mu_2 - \mu_1^2 \quad (4.1)$$

nazýváme rozptyl, nebo také variance.

Charakteristická funkce stochastické proměnné X , jejíž rozsah I je množina, nebo podmnožina, reálných čísel, je definována jako

$$G(k) \equiv \langle e^{ikX} \rangle = \int_I e^{ikx} P(x) dx.$$

Tato existuje pro všechna reálná k a splňuje

$$G(0) = 1, \quad |G(k)| \leq 1.$$

¹Často se ve fyzice používá značení $\sigma \equiv \Delta X$ a $\langle X \rangle \equiv \bar{X}$.

Charakteristická funkce je navíc generující funkcí momentů, protože koeficienty jejího Taylorova rozvoje v proměnné k jsou právě momenty μ_m :

$$G(k) = \sum_{m=0}^{\infty} \frac{(ik)^m}{m!} \mu_m,$$

tedy

$$\mu_m = \left(-i \frac{d}{dk} \right)^m G(k) \Big|_{k=0}.$$

To zaručuje implikuje existenci derivace $G(k)$ v bodě $k = 0$ až do řádu m stejného, jako stupeň momentu μ_m . Stejná funkce generuje také kumulanty κ_m , které jsou definovány jako

$$\ln G(k) = \sum_{m=1}^{\infty} \frac{(ik)^m}{m!} \kappa_m. \quad (4.2)$$

Kumulanty jsou kombinací momentů, tedy například pro první čtyři kumulanty platí

$$\begin{aligned} \kappa_1 &= \mu_1, \\ \kappa_2 &= \mu_2 - \mu_1^2 = \sigma^2, \\ \kappa_3 &= \mu_3 - 3\mu_2\mu_1 + 2\mu_1^3, \\ \kappa_4 &= \mu_4 - 4\mu_3\mu_1 - 3\mu_2^2 + 12\mu_2\mu_1^2 - 6\mu_1^4. \end{aligned}$$

4.2 Mnohodimenzionální rozdělení

Uvažujme nyní stochastickou proměnnou s r komponentami X_1, X_2, \dots, X_r , tzv. náhodný vektor. Její hustotu pravděpodobnosti označíme $P_r(x_1, x_2, \dots, x_r)$. Vezměme podmnožinu $s < r$ proměnných X_1, X_2, \dots, X_s . Pravděpodobnost, že mají nějaké hodnoty x_1, x_2, \dots, x_s , bez ohledu na hodnoty zbylých X_{s+1}, \dots, X_r , lze určit pomocí marginální hustoty pravděpodobnosti definované jako

$$P_s(x_1, \dots, x_s) = \int P_r(x_1, \dots, x_s, x_{s+1}, \dots, x_r) dx_{s+1} \cdots dx_r.$$

Předpokládejme, že r proměnných může být rozděleno do dvou množin (X_1, \dots, X_s) a (X_{s+1}, \dots, X_r) , takových, že P_r faktorizuje:

$$P_r(x_1, \dots, x_r) = P_s(x_1, \dots, x_s) P_{r-s}(x_{s+1}, \dots, x_r).$$

Pak se tyto dvě množiny nazývají statisticky nezávislé.

Momenty mnohodimenzionálního rozdělení jsou

$$\langle X_1^{m_1} X_2^{m_2} \cdots X_r^{m_r} \rangle = \int x_1^{m_1} x_2^{m_2} \cdots x_r^{m_r} P(x_1, x_2, \dots, x_r) dx_1 dx_2 \cdots dx_r$$

a charakteristická funkce je funkcí r pomocných proměnných

$$G(k_1, k_2, \dots, k_r) = \left\langle e^{i(k_1 X_1 + k_2 X_2 + \cdots + k_r X_r)} \right\rangle.$$

Její Taylorův rozvoj v proměnných k_i generuje momenty

$$G(k_1, k_2, \dots, k_r) = \sum_0^{\infty} \frac{(ik_1)^{m_1} (ik_2)^{m_2} \cdots (ik_r)^{m_r}}{m_1! m_2! \cdots m_r!} \langle X_1^{m_1} X_2^{m_2} \cdots X_r^{m_r} \rangle.$$

Kumulanty označíme dvojitými ostrými závorkami a definujeme je jako

$$\ln G(k_1, k_2, \dots, k_r) = \sum_0^{\infty} \frac{(ik_1)^{m_1} (ik_2)^{m_2} \dots (ik_r)^{m_r}}{m_1! m_2! \dots m_r!} \langle\langle X_1^{m_1} X_2^{m_2} \dots X_r^{m_r} \rangle\rangle, \quad (4.3)$$

kde apostrof znamená absenci členu, ve kterém jsou všechna m zároveň rovna 0.

Z druhého momentu můžeme vytvořit $r \times r$ matici $\langle X_i X_j \rangle$. Důležitější je však kovarianční matice

$$\langle\langle X_i X_j \rangle\rangle \equiv \langle (X_i - \langle X_i \rangle)(X_j - \langle X_j \rangle) \rangle = \langle X_i X_j \rangle - \langle X_i \rangle \langle X_j \rangle.$$

Její diagonální prvky jsou dle (4.1) variance (rozptyly) a její nediagonální prvky se nazývají kovariance. Pokud kovariance normalizujeme, nazývají se koeficienty korelace:

$$\rho_{ij} = \frac{\langle\langle X_i X_j \rangle\rangle}{\sqrt{\langle\langle X_i^2 \rangle\rangle \langle\langle X_j^2 \rangle\rangle}} = \frac{\langle X_i X_j \rangle - \langle X_i \rangle \langle X_j \rangle}{\sqrt{(\langle X_i^2 \rangle - \langle X_i \rangle^2)(\langle X_j^2 \rangle - \langle X_j \rangle^2)}}$$

Položíme-li $r = 2$, je statistická nezávislost X_1 a X_2 vyjádřena jedním z následujících kritérií:

1. Všechny momenty faktorizují

$$\langle X_1^{m_1} X_2^{m_2} \rangle = \langle X_1^{m_1} \rangle \langle X_2^{m_2} \rangle$$

2. Charakteristická funkce faktorizuje

$$G(k_1, k_2) = G_1(k_1)G_2(k_2)$$

3. Kumulanty $\langle\langle X_1^{m_1} X_2^{m_2} \rangle\rangle$ vymizí, pokud jsou jak m_1 tak m_2 různé od nuly.

Proměnné X_1, X_2 se nazývají nekorelované, pokud je jejich kovariance nula, což je slabší tvrzení, než statistická nezávislost.

4.3 Náhodné procesy

Náhodné procesy, nebo také náhodné bodové procesy, jsou reprezentovány stavy tvořenými:

- nezáporným číslem $s = 0, 1, \dots$
- pro každé s množinou s reálných čísel τ_σ , pro která platí

$$-\infty < \tau_1 < \tau_2 < \dots < \tau_s < \infty. \quad (4.4)$$

Tedy jednotlivé stavy mohou být chápány jako konkrétní těžkojaderné srážky a čísla τ_σ jako úhly detekovaných částic v této srážce.

Hustota pravděpodobnosti těchto stavů je dána posloupností nezáporných funkcí $Q_s(\tau_1, \tau_2, \dots, \tau_s)$ definovaných v oblasti (4.4) a normalizovaných dle

$$Q_0 + \int_{-\infty}^{\infty} d\tau_1 Q_1(\tau_1) + \int_{-\infty}^{\infty} d\tau_1 \int_{\tau_1}^{\infty} d\tau_2 Q_2(\tau_1, \tau_2) + \dots = 1.$$

Je výhodné odstranit limitující podmínku (4.4), tedy brát každé τ_σ z intervalu $-\infty$ až ∞ bez uspořádání. To můžeme provést za podmínky, že všech $s!$ množin $\{\tau_1, \tau_2, \dots, \tau_s\}$, lišících se jen permutací svých členů, odpovídá jednomu jedinému stavu. Pokud navíc rozšíříme definici $Q_s(\tau_1, \tau_2, \dots, \tau_s)$ na celý s -dimenzionální prostor tak, aby tato byla symetrickou funkcí svých proměnných, může být normalizační podmínka vyjádřena jako

$$Q_0 + \sum_{s=1}^{\infty} \frac{1}{s!} \int_{-\infty}^{\infty} d\tau_1 d\tau_2 \cdots d\tau_s Q_s(\tau_1, \dots, \tau_s) = 1.$$

V tomto integrálu mohou být dvě, či více τ stejné, i když hodnota Q_s v těchto bodech nebyla definována. Množina těchto bodů je ale míry nula v s dimenzionálním prostoru, a tedy do integrálu nepřispívají, pokud Q_s neobsahuje δ -funkce typu $\delta(\tau_1 - \tau_2)$. Omezíme se proto na situace, kdy τ nemají kladnou pravděpodobnost koincidence.

Průměry jsou definovány pro funkci A na stejném prostoru stavů, taková funkce sestává z posloupnosti

$$\{A_0, A_1(\tau_1), A_2(\tau_1, \tau_2), \dots, A_s(\tau_1, \tau_2, \dots, \tau_s), \dots\}.$$

V zásadě musí být každé A_s definováno pouze v oblasti (4.4), ale pokud definici opět symetricky rozšíříme na celý s -dimenzionální prostor, pak

$$\langle A \rangle = A_0 Q_0 + \sum_{s=1}^{\infty} \frac{1}{s!} \int A_s(\tau_1, \tau_2, \dots, \tau_s) Q_s(\tau_1, \tau_2, \dots, \tau_s) d\tau_1 d\tau_2 \cdots d\tau_s, \quad (4.5)$$

tedy průměr $\langle \rangle$ znamená jak sumu přes s , tak pro každé s s -násobný integrál.

4.3.1 Jiný popis náhodných procesů

Je užitečné pro přirozená n definovat posloupnost funkcí $f_n(t_1, t_2, \dots, t_n)$, jako

$$\begin{aligned} f_1(t_1) &= \sum_{s=1}^{\infty} \frac{1}{(s-1)!} \int_{-\infty}^{\infty} d\tau_2 \cdots d\tau_s Q_s(t_1, \tau_2, \dots, \tau_s), \\ f_2(t_1, t_2) &= \sum_{s=2}^{\infty} \frac{1}{(s-2)!} \int_{-\infty}^{\infty} d\tau_3 \cdots d\tau_s Q_s(t_1, t_2, \tau_3, \dots, \tau_s), \\ &\vdots \\ f_n(t_1, t_2, \dots, t_n) &= \sum_{s=n}^{\infty} \frac{1}{(s-n)!} \int_{-\infty}^{\infty} d\tau_{n+1} \cdots d\tau_s Q_s(t_1, t_2, \dots, t_n, \tau_{n+1}, \dots, \tau_s). \end{aligned} \quad (4.6)$$

f_n má následující vlastnosti:

- $f_n \geq 0$
- f_n je symetrická ve svých argumentech t_1, t_2, \dots, t_n

f_n nepodléhají žádné normalizaci, proto nejsou hustotami pravděpodobnosti. Ale f_1 je průměrnou hustotou τ a vyšší f_n se dají interpretovat jako "průměrné společné hustoty". Jen pro infinitezimální intervaly $(t_1, t_1 + dt_1), (t_2, t_2 + dt_2), \dots$ jsou $f_n(t_1, t_2, \dots, t_n) dt_1 dt_2 \cdots dt_n$ pravděpodobnosti, že každý z těchto intervalů obsahuje τ bez ohledu na to, kolik jich je mimo tento interval. Objasníme toto tvrzení na příkladu, nechť máme

interval (t_a, t_b) , kde je, narozdíl od infinitezimálního intervalu, více τ . Pak z rovnice (4.7) plyne, že integrál přes f_1 je střední počet τ , nikoli celková pravděpodobnost nalezení τ v intervalu.

Jako příklad použití funkcí f_n můžeme uvést vzorec pro střední hodnotu počtu částic $\langle N \rangle$ v intervalu (t_a, t_b)

$$\langle N \rangle = \int_{t_a}^{t_b} f_1(t_1) dt_1 \quad (4.7)$$

a vzorec pro střední kvadratickou hodnotu počtu částic $\langle N^2 \rangle$ ve stejném intervalu

$$\langle N^2 \rangle = \langle N \rangle + \int_{t_a}^{t_b} \int_{t_a}^{t_b} f_2(t_1, t_2) dt_1 dt_2.$$

Pomocí testovací, nebo také pomocné, funkce $v(t)$, můžeme definovat generující funkcionál pro funkce f_n . Tento funkcionál závisí na všech hodnotách, které v nabývá pro $-\infty < t < \infty$, tuto skutečnost označíme jako $[v]$. Tedy

$$L([v]) = \left\langle \prod_{\sigma=1}^s (1 + v(\tau_\sigma)) \right\rangle. \quad (4.8)$$

Roznásobením produktu a použitím definic (4.5) a (4.6) dostaneme

$$\begin{aligned} L([v]) &= 1 + \int v(t_1) f_1(t_1) dt_1 + \frac{1}{2} \int v(t_1) v(t_2) f_2(t_1, t_2) dt_1 dt_2 + \dots \\ &= 1 + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n!} \int v(t_1) v(t_2) \dots v(t_n) f_n(t_1, t_2, \dots, t_n) dt_1 dt_2 \dots dt_n. \end{aligned} \quad (4.9)$$

Tedy f_n jsou koeficienty v rozvoji $L([v])$ v testovací funkci v a znalost této $L([v])$ pro všechny funkce v jednoznačně určuje všechny f_n .

Abychom pochopili důsledek tohoto výsledku, vyjádříme v pomocí jiné funkce u jako

$$v(t) = e^{iu(t)} - 1,$$

pak dle (4.9) platí

$$\left\langle \exp \left[i \sum_{\sigma} u(\tau_{\sigma}) \right] \right\rangle = 1 + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n!} \int (e^{iu(t_1)} - 1) \dots (e^{iu(t_n)} - 1) f_n(t_1, \dots, t_n) dt_1 \dots dt_n$$

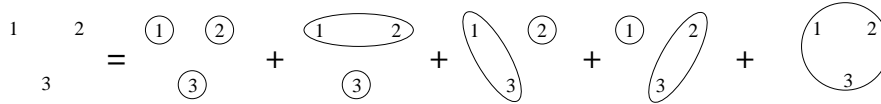
a tato rovnice ihned umožňuje rozvoj charakteristické funkce $\langle e^{ikU} \rangle$, kde $U = \sum_{\sigma} u(\tau_{\sigma})$, pomocí funkcí f_n .

4.3.2 Korelační funkce

Kromě distribučních funkcí existují další užitečné symetrické funkce g_m zvané korelační funkce. Ty jsou definovány pomocí rozvoje f_n jako

$$\begin{aligned} f_1(t_1) &= g_1(t_1), \\ f_2(t_1, t_2) &= g_1(t_1)g_1(t_2) + g_2(t_1, t_2), \\ f_3(t_1, t_2, t_3) &= g_1(t_1)g_1(t_2)g_1(t_3) + g_1(t_1)g_2(t_2, t_3) + g_1(t_2)g_2(t_1, t_3) + \\ &\quad + g_1(t_3)g_2(t_1, t_2) + g_3(t_1, t_2, t_3), \\ &\vdots \end{aligned}$$

Obecná rovnice pro f_n se získá za použití následujících pravidel:



Obrázek 4.1: Rozklad f_3 na korelační funkce, převzato z [5].

1. Rozdělme proměnné t_1, t_2, \dots, t_n všemi možnými způsoby do různých podmnožin (nepočítáme prázdnou množinu, ale zahrneme celou množinu, jako jedno určité rozdělení).
2. Pro každé rozdělení udělejme součin funkcí g pro jednotlivé podmnožiny.
3. Sečtěte tyto součiny přes všechny podmnožiny.

Pro případ f_3 je tento rozklad graficky znázorněn na obrázku 4.1.

Dá se dokázat, že $\ln L$ je generující funkcionál korelačních funkcí g_m , stejně jako byly kumulanty generovány logaritmem generujících funkcí momentů $G(k)$, viz (4.2), tedy

$$\ln L([v]) = \sum_{m=1}^{\infty} \frac{1}{m!} \int v(t_1)v(t_2) \cdots v(t_m) g_m(t_1, t_2, \dots, t_m) dt_1 dt_2 \cdots dt_m. \quad (4.10)$$

Na závěr uveďme jednu zajímavou vlastnost korelačních funkcí, pokud jsou body nezávislé, všechny g_m pro $m > 1$ vymizí.

Kapitola 5

Metoda kumulantů

5.1 Rozvoj mnohočasticových úhlových korelací do kumulantů

V tomto oddíle odvodíme vztah úhlových korelací a kumulantů a ukážeme, jak se z těchto dají kumulanty počítat.

5.1.1 Dvoučasticové korelace

Jelikož, jak už bylo řečeno dříve, není skutečná orientace reakční roviny experimentálně známá, můžeme měřit jen relativní azimutální úhly mezi vylétávajícími částicemi. Standardní analýza toku spoléhá na měření dvoučasticových azimutálních korelací, které obsahují dvoučasticovou rozdělovací funkci hybnosti $f(\mathbf{p}_1, \mathbf{p}_2) = dN/d^3\mathbf{p}_1 d^3\mathbf{p}_2$ a mohou být zapsány jako

$$\left\langle e^{in(\phi_1 - \phi_2)} \right\rangle_{\mathcal{D}_1 \times \mathcal{D}_2} = \frac{\int_{\mathcal{D}_1 \times \mathcal{D}_2} e^{in(\phi_1 - \phi_2)} f(\mathbf{p}_1, \mathbf{p}_2) d^3\mathbf{p}_1 d^3\mathbf{p}_2}{\int_{\mathcal{D}_1 \times \mathcal{D}_2} f(\mathbf{p}_1, \mathbf{p}_2) d^3\mathbf{p}_1 d^3\mathbf{p}_2}, \quad (5.1)$$

přičemž $\langle \rangle$ značí průměrování ve stejném smyslu, jako v rovnici (1.6). Dvoučasticové rozdělení hybností může být obecně vyjádřeno jako

$$f(\mathbf{p}_1, \mathbf{p}_2) = f(\mathbf{p}_1)f(\mathbf{p}_2) + f_c(\mathbf{p}_1, \mathbf{p}_2), \quad (5.2)$$

kde $f_c(\mathbf{p}_1, \mathbf{p}_2)$ označuje korelovanou část rozdělení. Poznamenejme, že rozdělovací funkce hybnosti f nejsou totožné s funkcemi definovanými v oddíle 4.3.1.

Nechť N je celkový počet částic vyprodukovaných ve srážce, pak je $f_c(\mathbf{p}_1, \mathbf{p}_2)$ typicky řádu $1/N$ vzhledem k nekorelované části rozdělení. Tento řád může být lehce pochopen v případě korelací mezi rozpadovými produkty v reakcích jako $\rho \rightarrow \pi\pi$. Zákony zachování energie a hybnosti způsobují mezi rozpadovými produkty korelace řádu jednotky. Protože je ve vysokoenergetických jádro-jaderných srážkách produkován velký počet ρ mezonů, je pravděpodobnost, že dva libovolné piony pocházejí ze stejného ρ mezonu, řádu $1/N$. Tedy dohromady platí pro korelace způsobené zachováním celkové hybnosti škálování $1/N$.

Dosažením výrazu (5.2) do rovnice (5.1) máme

$$\begin{aligned} \left\langle e^{in(\phi_1-\phi_2)} \right\rangle_{\mathcal{D}_1 \times \mathcal{D}_2} &= \frac{\int_{\mathcal{D}_1 \times \mathcal{D}_2} e^{in(\phi_1-\phi_2)} f(\mathbf{p}_1) f(\mathbf{p}_2) d\mathbf{p}_1 d\mathbf{p}_2 + \int_{\mathcal{D}_1 \times \mathcal{D}_2} e^{in(\phi_1-\phi_2)} f_c(\mathbf{p}_1, \mathbf{p}_2) d\mathbf{p}_1 d\mathbf{p}_2}{\int_{\mathcal{D}_1} f(\mathbf{p}_1) d\mathbf{p}_1 \int_{\mathcal{D}_2} f(\mathbf{p}_2) d\mathbf{p}_2 + \int_{\mathcal{D}_1 \times \mathcal{D}_2} f_c(\mathbf{p}_1, \mathbf{p}_2) d\mathbf{p}_1 d\mathbf{p}_2} = \\ &= \frac{\int_{\mathcal{D}_1} e^{in\phi_1} f(\mathbf{p}_1) d\mathbf{p}_1 \cdot \int_{\mathcal{D}_2} e^{in\phi_2} f(\mathbf{p}_2) d\mathbf{p}_2}{\int_{\mathcal{D}_1} f(\mathbf{p}_1) d\mathbf{p}_1 \cdot \int_{\mathcal{D}_2} f(\mathbf{p}_2) d\mathbf{p}_2} + \frac{\int_{\mathcal{D}_1 \times \mathcal{D}_2} e^{in(\phi_1-\phi_2)} f_c(\mathbf{p}_1, \mathbf{p}_2) d\mathbf{p}_1 d\mathbf{p}_2}{\int_{\mathcal{D}_1} f(\mathbf{p}_1) d\mathbf{p}_1 \cdot \int_{\mathcal{D}_2} f(\mathbf{p}_2) d\mathbf{p}_2} \end{aligned}$$

kde jsme využili vztahy $\int_{\mathcal{D}_2} f(\mathbf{p}_2) d\mathbf{p}_2 = 1$ a $\int_{\mathcal{D}_2} f_c(\mathbf{p}_1, \mathbf{p}_2) d\mathbf{p}_2 = 0$, které plynou z

$$\begin{aligned} f(\mathbf{p}_1) &= \int_{\mathcal{D}_2} f(\mathbf{p}_1, \mathbf{p}_2) d\mathbf{p}_2 = \int_{\mathcal{D}_2} f(\mathbf{p}_1) f(\mathbf{p}_2) + f_c(\mathbf{p}_1, \mathbf{p}_2) d\mathbf{p}_2 = \\ &= f(\mathbf{p}_1) \int_{\mathcal{D}_2} f(\mathbf{p}_2) d\mathbf{p}_2 + \int_{\mathcal{D}_2} f_c(\mathbf{p}_1, \mathbf{p}_2) d\mathbf{p}_2. \end{aligned}$$

Tedy nakonec dostáváme

$$\left\langle e^{in(\phi_1-\phi_2)} \right\rangle_{\mathcal{D}_1 \times \mathcal{D}_2} = \left\langle e^{in\phi_1} \right\rangle_{\mathcal{D}_1} \left\langle e^{-in\phi_2} \right\rangle_{\mathcal{D}_2} + \left\langle e^{in(\phi_1-\phi_2)} \right\rangle_c. \quad (5.3)$$

Poslední člen je dle definice kumulant druhého řádu a budeme ho značit $\left\langle e^{in(\phi_1-\phi_2)} \right\rangle_c \equiv \left\langle\left\langle e^{in(\phi_1-\phi_2)} \right\rangle\right\rangle$. Dále v textu pro jednoduchost vynecháme index \mathcal{D} , ale všechny průměry které budeme používat jsou přes oblast fázového prostoru, která nutně neznamená celý fázový prostor, ale může být omezena na akceptanci detektoru. Rovnici (5.3) tedy zapíšeme ve tvaru

$$\left\langle e^{in(\phi_1-\phi_2)} \right\rangle = \left\langle e^{in\phi_1} \right\rangle \left\langle e^{-in\phi_2} \right\rangle + \left\langle\left\langle e^{in(\phi_1-\phi_2)} \right\rangle\right\rangle. \quad (5.4)$$

Zabývejme se nyní případem, kdy je pokrytí detektoru izotropické, takový detektor budeme dále nazývat ideální. V tomto případě bude člen $\left\langle e^{in\phi_j} \right\rangle$ kvůli symetrii roven nule, a proto na pravé straně rovnice (5.4) zůstane jen člen $\left\langle\left\langle e^{in(\phi_1-\phi_2)} \right\rangle\right\rangle$. Tedy dvoučásticové korelace jsou rovny kumulantu druhého řádu.

Pokud by detektor nebyl ideální a úhly ϕ_1, ϕ_2 by nebyly korelované, vymizel by na pravé straně rovnice (5.4) člen druhý, zatímco první člen by mohl být nenulový. Tedy kumulant druhého řádu $\left\langle\left\langle e^{in(\phi_1-\phi_2)} \right\rangle\right\rangle$ představuje fyzikální korelaci a odděluje jí od efektů detektoru.

Existuje mnoho příspěvků ke kumulantu $\left\langle\left\langle e^{in(\phi_1-\phi_2)} \right\rangle\right\rangle$, dělí se na korelace pocházející a nepocházející (tzv. přímé) od toku, viz oddíl 1.2.3. Pokud je zdroj částic izotropický, neexistuje žádná anizotropie toku a zůstanou jen přímé korelace. Tyto škálují jako $1/N^{\S}$, jak bylo diskutováno dříve. Pokud není zdroj izotropní, generuje tok azimutální korelace mezi každými dvěma výchozími částicemi a přispívá faktorem v_n^2 ke kumulantu druhého řádu, jak uvidíme v oddíle 5.2.2.

^{\S}Zatím předpokládáme, že celkový počet vyprodukovaných částic ve srážce N , je shodný s počtem všech detekovaných částic, označme ho M , to ale nijak neubírá odvozování na obecnosti. Rozlišovat mezi těmito budeme až když to bude nutné.

5.1.2 Mnohočasticové korelace

Selhání standardní analýzy spočívá v nemožnosti oddělit v rovnici (5.2) korelovanou část od nekorelované. Hlavní myšlenka výpočtu toku metodou kumulantů spočívá v provedení této separace pomocí mnohočasticových korelací. Rozklad časticové rozdělovací funkce na korelovanou a nekorelovanou část může být zobecněn na libovolný počet částic. Například tříčasticová rozdělovací funkce může být rozložena jako

$$\frac{dN}{d\mathbf{p}_1 d\mathbf{p}_2 d\mathbf{p}_3} \equiv f(\mathbf{p}_1, \mathbf{p}_2, \mathbf{p}_3) = f_c(\mathbf{p}_1)f_c(\mathbf{p}_2)f_c(\mathbf{p}_3) + f_c(\mathbf{p}_1, \mathbf{p}_2)f_c(\mathbf{p}_3) + f_c(\mathbf{p}_1, \mathbf{p}_3)f_c(\mathbf{p}_2) + f_c(\mathbf{p}_2, \mathbf{p}_3)f_c(\mathbf{p}_1) + f_c(\mathbf{p}_1, \mathbf{p}_2, \mathbf{p}_3), \quad (5.5)$$

kde $f_c(\mathbf{p}_1) \equiv f(\mathbf{p}_1)$. Poslední člen $f_c(\mathbf{p}_1, \mathbf{p}_2, \mathbf{p}_3)$ odpovídá skutečné tříčasticové korelaci, která je řádu $1/N^2$.

Abychom pochopili tento řád, uveďme jednoduchý příklad: ω mezon se rozpadá převážně na tři piony. Tento rozpad generuje převážně přímé dvoučasticové korelace, přičemž vzájemná hybnost mezi každými dvěma vzniklými piony je omezena zákonem zachování hybnosti a energie. Odpovídající korelace je řádu $1/N$, jak bylo diskutováno dříve v případě reakce $\rho \rightarrow \pi\pi$, což odpovídá druhému, třetímu a čtvrtému členu pravé strany rovnice (5.5). Korelace mezi rozpadovými produkty daného ω mezonu je řádu jedné, zatím co pravděpodobnost, že tři libovolné piony pocházejí ze stejného ω škáluje s N jako $1/N^2$. Tedy korelace mezi třemi náhodnými piony je řádu $1/N^2$.

Zobecníme-li diskusi rozpadu ω mezonu na rozpad skupiny k částic, bude tento generovat korelace $f_c(\mathbf{p}_1, \dots, \mathbf{p}_{k'})$ s $k' \leq k$ a korelovanou část $f_c(\mathbf{p}_1, \dots, \mathbf{p}_k)$ řádu $1/N^{k-1}$. Tento rozklad je podobný rozkladu funkcí f_n na korelační funkce g_m diskutovaném v oddíle 4.3.2.

Stejně jako v předešlém oddílu, můžeme nyní pomocí rozkladu mnohočasticové rozdělovací funkce hybnosti rozložit i mnohočasticové korelace. Uveďme nejdřív několik vlastností, které nám pomůžou s tímto rozkladem. Připomeňme, že stále předpokládáme ideální detektor.

Pokud je zdroj částic izotropní, tedy když se k -časticové rozdělení při změně všech azimutálních úhlů o libovolnou konstantu α nezmění, je tok v_n (1.7) nulový. Tedy dvoučasticové azimutální korelace (5.3) se redukuje na příspěvek od přímých korelací řádu $1/N$. Jako další důsledek izotropie vymizí také všechny průměry obsahující lichý počet částic, tedy například

$$\left\langle e^{in(\phi_1+\phi_2-\phi_3)} \right\rangle = \left\langle e^{in[\phi_1+\alpha+\phi_2+\alpha-(\phi_3+\alpha)]} \right\rangle = e^{in\alpha} \left\langle e^{in(\phi_1+\phi_2-\phi_3)} \right\rangle,$$

kde první rovnost vyjadřuje předpoklad izotropie. Tato rovnost může být pro libovolné α splněna jen tehdy, když $\left\langle e^{in(\phi_1+\phi_2-\phi_3)} \right\rangle = 0$. Zůstanou tedy jen $2k$ -časticové korelace obsahující k mocnin $e^{in\phi}$ a k mocnin $e^{-in\phi}$. Použijeme-li metodu rozkladu rozdělovací funkce diskutovanou v oddíle 5.1.2 například na 4-časticové korelace, dostaneme

$$\begin{aligned} \left\langle e^{in(\phi_1+\phi_2-\phi_3-\phi_4)} \right\rangle &= \left\langle e^{in(\phi_1-\phi_3)} \right\rangle_c \left\langle e^{in(\phi_2-\phi_4)} \right\rangle_c + \left\langle e^{in(\phi_1-\phi_4)} \right\rangle_c \left\langle e^{in(\phi_2-\phi_3)} \right\rangle_c + \\ &+ \left\langle e^{in(\phi_1+\phi_2-\phi_3-\phi_4)} \right\rangle_c = \\ &= \left\langle e^{in(\phi_1-\phi_3)} \right\rangle \left\langle e^{in(\phi_2-\phi_4)} \right\rangle + \left\langle e^{in(\phi_1-\phi_4)} \right\rangle \left\langle e^{in(\phi_2-\phi_3)} \right\rangle + \\ &+ \left\langle \left\langle e^{in(\phi_1+\phi_2-\phi_3-\phi_4)} \right\rangle \right\rangle, \end{aligned}$$

kde poslední člen na pravé straně je dle definice kumulant čtvrtého řádu a je nezávislý na dvoučasticových korelacích. Toto tvrzení může být ilustrováno na systému, jehož částice jsou korelovány pouze po párech, pak je totiž kumulant čtvrtého řádu roven nule.

Obecně tedy můžeme říci, že kumulant $\langle\langle \exp[in(\phi_1 + \dots + \phi_k - \phi_{k+1} - \dots - \phi_{k+l})] \rangle\rangle$ obsahující $k+l$ částic odstraňuje všechny korelace až do řádu $k+l-1$. Příspěvky korelací nepocházejících od toku vyšších řádů jsou ale stále přítomny. V případě nepřítomnosti toku jsou kumulanty $\langle\langle \exp[in(\phi_1 + \dots + \phi_k - \phi_{k+1} - \dots - \phi_{k+l})] \rangle\rangle$ řádu¹ N^{1-k-l} . V případě ideálního detektoru kumulanty řádu $k \neq l$ vymizí a jsou tedy fyzikálně nezajímavé. Proto nás budou zajímat jen diagonální kumulanty s $k = l$.

5.2 Integrální tok

Předešlým způsobem bychom mohli postupovat i dále a konstruovat tak kumulanty vyšších řádů, ale jednak je tento způsob příliš složitý a také vyžaduje předpoklad ideálního detektoru. Proto definujeme kumulanty pomocí generující funkce.

5.2.1 Generující funkce

Nejdříve dle rovnice (4.8) definujeme pro každou srážku funkci $G_n(z)$, která závisí na komplexní proměnné $z = x + iy$, jako

$$G_n(z) = \prod_{j=1}^M \left(1 + \frac{w_j (\bar{z} e^{in\phi_j} + z e^{-in\phi_j})}{M} \right) = \prod_{j=1}^M \left(1 + w_j \frac{2x \cos(n\phi_j) + 2y \sin(n\phi_j)}{M} \right). \quad (5.6)$$

Hodnota této funkce je vždy reálná, $\bar{z} = x - iy$ značí komplexně sdružené číslo k z , M je počet detekovaných částic po srážce a w_j jsou váhy jednotlivých částic, které v dalším textu položíme rovny 1. Protože není v každé srážce tento počet částic M konstantní, je v generující funkci faktor $1/M$. Nyní budeme však pro jednoduchost předpokládat, že ve všech srážkách je M stejné². Pro fluktuující počet částic ve srážkách stačí po odvození výsledků nahradit M střední hodnotou $\langle M \rangle$. Pokud zprůměrujeme funkci $G_n(z)$ přes všechny srážky, označme $\langle \rangle_{\text{event}}$, a roznásobíme produkt v (5.6), dostaneme

$$\begin{aligned} \langle G_n(z) \rangle_{\text{event}} &= \left\langle 1 + \frac{z}{M} \sum_{j=1}^M e^{-in\phi_j} + \frac{\bar{z}}{M} \sum_{j=1}^M e^{in\phi_j} + \frac{z^2}{M^2} \sum_{j<k} e^{-in(\phi_j+\phi_k)} \right. \\ &\quad \left. + \frac{\bar{z}^2}{M^2} \sum_{j<k} e^{in(\phi_j+\phi_k)} + 2 \cdot \frac{z\bar{z}}{M^2} \sum_{j \neq k} e^{in(\phi_j-\phi_k)} + \dots \right\rangle_{\text{event}} \\ &= 1 + \frac{z}{M} \left\langle \sum_{j=1}^M e^{-in\phi_j} \right\rangle_{\text{event}} + \frac{\bar{z}}{M} \left\langle \sum_{j=1}^M e^{in\phi_j} \right\rangle_{\text{event}} + \frac{z^2}{M^2} \left\langle \sum_{j<k} e^{-in(\phi_j+\phi_k)} \right\rangle_{\text{event}} \\ &\quad + \frac{\bar{z}^2}{M^2} \left\langle \sum_{j<k} e^{in(\phi_j+\phi_k)} \right\rangle_{\text{event}} + 2 \cdot \frac{z\bar{z}}{M^2} \left\langle \sum_{j \neq k} e^{in(\phi_j-\phi_k)} \right\rangle_{\text{event}} + \dots \\ &= 1 + z \langle e^{-in\phi_1} \rangle + \bar{z} \langle e^{in\phi_1} \rangle \\ &\quad + \frac{M-1}{M} \left(\frac{z^2}{2} \langle e^{-in(\phi_1+\phi_2)} \rangle + \frac{\bar{z}^2}{2} \langle e^{in(\phi_1+\phi_2)} \rangle + z\bar{z} \langle e^{in(\phi_1-\phi_2)} \rangle \right) + \dots, \end{aligned}$$

¹Ve smyslu velikosti.

²To je za předpokladu, že počet srážek k dispozici je libovolně velký, stejné, jako říci, že vybereme srážky se stejnou multiplicitou M .

kde jsme v poslední rovnosti použili stejný způsob průměrování, označovaného $\langle \rangle$, jako v rovnici (1.6), tedy

$$\left\langle e^{-in(\phi_1+\phi_2+\dots+\phi_r)} \right\rangle = \left\langle \frac{1}{\binom{M}{r}} \sum_{j_1 < j_2 < \dots < j_r} e^{-in(\phi_{j_1}+\phi_{j_2}+\dots+\phi_{j_r})} \right\rangle_{\text{event}}.$$

Generující funkci kumulantů definujeme jako

$$C_n(z) \equiv M \left[\langle G_n(z) \rangle_{\text{event}}^{1/M} \right]. \quad (5.7)$$

Tato funkce sice není shodná s definicí (4.3), ale přejde v ní v limitě velkých M .

Rozvoj funkce (5.7) do mocninné řady dává, v souladu s (4.3) kumulanty, tedy

$$C_n(z) = \sum_{k,l} \frac{\bar{z}^k z^l}{k!l!} \left\langle \left\langle e^{in(\phi_1+\dots+\phi_k-\phi_{k+1}-\dots-\phi_{k+l})} \right\rangle \right\rangle. \quad (5.8)$$

Protože nás budou dále zajímat jen diagonální kumulanty s $k = l$ (viz (5.1.2)), označíme je

$$c_n\{2k\} \equiv \left\langle \left\langle e^{in(\phi_1+\dots+\phi_k-\phi_{k+1}-\dots-\phi_{2k})} \right\rangle \right\rangle. \quad (5.9)$$

5.2.2 Výpočet integrálního toku z kumulantů

Strategie výpočtu toku pomocí kumulantů spočívá v tom, že se pokusíme dostat definici toku (1.7) do funkce (5.6), potom jí upravíme a rozvineme do řady v $z^k \bar{z}^l$, koeficienty v této řadě potom budou dle definice (4.3) kumulanty.

Označme Φ_R úhel reakční roviny dané srážky, pak může být průměr přes srážky proveden ve dvou krocích:

1. Nejdříve provedeme průměr přes srážky se stejným Φ_R . Označme tedy tento průměr veličiny x s pevnou hodnotou Φ_R jako $\langle x | \Phi_R \rangle$. S použitím tohoto značení se rovnice (1.7) zapíše jako

$$\left\langle e^{in\phi_j} \mid \Phi_R \right\rangle = \left\langle e^{in(\phi-\Phi_R)} e^{in\Phi_R} \mid \Phi_R \right\rangle = v_n e^{in\Phi_R}.$$

Pokud nyní pro jednoduchost zanedbáme korelace nepocházející od toku, budou na sobě všechny ϕ_j nezávislé a střední hodnota (5.6) pro srážky se stejným Φ_R bude

$$\begin{aligned} \langle G_n(z) | \Phi_R \rangle &= \left\langle \prod_{j=1}^M \left(1 + \frac{\bar{z} e^{in\phi_j} + z e^{-in\phi_j}}{M} \right) \mid \Phi_R \right\rangle = \prod_{j=1}^M \left\langle 1 + \frac{\bar{z} e^{in\phi_j} + z e^{-in\phi_j}}{M} \mid \Phi_R \right\rangle \\ &= \prod_{j=1}^M \left(1 + \frac{\bar{z} \langle e^{in\phi_j} | \Phi_R \rangle + z \langle e^{-in\phi_j} | \Phi_R \rangle}{M} \right) = \left(1 + \frac{\bar{z} v_n e^{in\Phi_R} + z v_n e^{in\Phi_R}}{M} \right)^M, \end{aligned} \quad (5.10)$$

kde jsme použili, že pro nezávislé veličiny, je střední hodnota součinu rovna součinu středních hodnot.

2. Pak provedeme průměr přes Φ_R . Tedy

$$\langle G_n(z) \rangle_{\text{event}} = \int_0^{2\pi} \langle G_n(z) | \Phi_R \rangle \frac{d\Phi_R}{2\pi}.$$

Dosažením rovnice (5.10) dostáváme:

$$\begin{aligned}
\langle G_n(z) \rangle_{\text{event}} &= \int_0^{2\pi} \left(1 + \frac{\bar{z}v_n e^{in\Phi_R} + zv_n e^{in\Phi_R}}{M} \right)^M \frac{d\Phi_R}{2\pi} \\
&= \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \sum_{k=0}^M \binom{M}{k} \left(\frac{zv_n e^{-in\Phi_R} + \bar{z}v_n e^{in\Phi_R}}{M} \right)^k d\Phi_R \\
&= \frac{1}{2\pi} \sum_{k=0}^M \binom{M}{k} \left(\frac{v_n}{M} \right)^k \int_0^{2\pi} (ze^{-in\Phi_R} + \bar{z}e^{in\Phi_R})^k d\Phi_R \\
&= \frac{1}{2\pi} \sum_{k=0}^M \binom{M}{k} \left(\frac{v_n}{M} \right)^k \int_0^{2\pi} \sum_{l=0}^k \binom{k}{l} z^l e^{-inl\Phi_R} \cdot \bar{z}^{k-l} e^{in(k-l)\Phi_R} d\Phi_R \\
&= \frac{1}{2\pi} \sum_{k=0}^M \binom{M}{k} \left(\frac{v_n}{M} \right)^k \sum_{l=0}^k \binom{k}{l} \int_0^{2\pi} z^l \bar{z}^{k-l} e^{in\Phi_R(k-2l)} d\Phi_R,
\end{aligned}$$

kde integrál v posledním výrazu je vždy nulový, vyjma případu, kdy $k = 2l$, tedy

$$\begin{aligned}
\langle G_n(z) \rangle_{\text{event}} &= \frac{1}{2\pi} \sum_{k=0}^M \binom{M}{k} \left(\frac{v_n}{M} \right)^k \binom{k}{k/2} 2\pi (z\bar{z})^{k/2} \\
&= \sum_{k=0}^M \frac{M!}{k!(M-k)!} \left(\frac{v_n}{M} \right)^k \frac{k!}{[(k/2)!]^2} |z|^k.
\end{aligned}$$

Pokud přeznačíme $k \rightarrow 2k$, dostáváme:

$$\langle G_n(z) \rangle_{\text{event}} = \sum_{k=0}^{\lfloor M/2 \rfloor} \frac{M!}{(M-2k)!(k!)^2} \left(\frac{v_n}{M} \right)^{2k} |z|^{2k},$$

kde $\lfloor \cdot \rfloor$ v horní mezi sumy značí celou část. Pro velká M můžeme nahradit $\frac{M!}{(M-2k)!} = M^{2k}$ a rozšířit sumu do $+\infty$, tedy

$$\langle G_n(z) \rangle_{\text{event}} \simeq I_0(2v_n|z|),$$

kde I_0 značí modifikovanou Besselovu funkci prvního druhu.

Dosadíme-li tento výsledek do generující funkce kumulantů (5.7), dostaneme

$$C_n(z) \simeq M \left[(I_0(2v_n|z|))^{1/M} - 1 \right] \simeq \ln(I_0(2v_n|z|)),$$

kde jsme při přechodu od druhého členu použili limitu $M \rightarrow \infty$. Rozvinutím této rovnice do mocninné řady v $z\bar{z}$ dostáváme

$$C_n(z) \simeq v_n^2 z\bar{z} - \frac{1}{4} v_n^4 z^2 \bar{z}^2 + \frac{1}{9} v_n^6 z^3 \bar{z}^3 - \frac{11}{192} v_n^8 z^4 \bar{z}^4 + \mathcal{O}(z^5 \bar{z}^5).$$

Pokud nyní porovnáme tyto členy s členy rozvoje (5.8), máme

$$\begin{aligned}
v_n^2 z \bar{z} &= \frac{z \bar{z}}{1! 1!} c_n\{2\} & v_n\{2\}^2 &= c_n\{2\} \\
-\frac{1}{4} v_n^4 z^2 \bar{z}^2 &= \frac{z^2 \bar{z}^2}{2! 2!} c_n\{4\} & v_n\{4\}^4 &= -c_n\{4\} \\
\frac{1}{9} v_n^6 z^3 \bar{z}^3 &= \frac{z^3 \bar{z}^3}{3! 3!} c_n\{6\} & v_n\{6\}^6 &= \frac{c_n\{6\}}{4} \\
-\frac{11}{192} v_n^8 z^4 \bar{z}^4 &= \frac{z^4 \bar{z}^4}{4! 4!} c_n\{8\} & v_n\{8\}^8 &= -\frac{c_n\{8\}}{33},
\end{aligned}$$

kde jsme odhad v_n z $c_n\{2k\}$ označili $v_n\{2k\}$.

5.3 Diferenciální tok

Pro výpočet diferenciálního toku rozdělíme detekované částice na dvě skupiny, částice náležící do oblasti fázového prostoru v kterém budeme tok měřit nazveme protony (tedy prakticky vybereme nějaký druh částic s příčnou hybností a rapiditou v určitém intervalu) a částice, které byly použity pro výpočet integrálního toku nazveme piony. Poznamenejme, že jde jen o názvy skupin, a ne určení druhu částice.

Azimutální úhel protonu v laboratorní soustavě budeme značit ψ . Diferenciální tok řádu p označíme v'_p , tedy $v'_p = \langle e^{ip(\psi - \Phi_R)} \rangle$ a určíme ho korelací azimutálních úhlů protonů s azimutálními úhly pionů. Pokud je proton jedním z pionů, musí se odstranit autokorelace, viz dále. Výpočet diferenciálního toku řádu $p = mn, m \in \mathbb{N}$ lze provést jen se znalostí integrálního toku řádu n . Z toho důvodu zavedeme značení $v'_{p/n}$, což znamená odhad diferenciálního toku řádu p , za pomoci integrálního toku řádu n .

5.3.1 Generující funkce

Pro výpočet diferenciálního toku definujeme generující funkci úhlových korelací mezi protony a piony jako

$$D_{p/n}(z) \equiv \frac{\langle e^{ip\psi} G_n(z) \rangle_{\text{prot}}}{\langle G_n(z) \rangle_{\text{event}}}, \quad (5.11)$$

kde funkce $G_n(z)$ v čitateli je generující funkce (5.6) vypočtená pro srážku, ze které pochází proton. Značení $\langle \rangle_{\text{prot}}$ znamená průměrování přes všechny protony ve všech srážkách³. Pokud byl pro výpočet integrálního toku použit i proton (tedy proton je zároveň i pion), musí se tato funkce v čitateli vydělit faktorem

$$1 + \frac{\bar{z}e^{in\psi} + ze^{-in\psi}}{M},$$

čímž odstraníme autokorelace.

Objasněme si výpočet generující funkce (5.11) na příkladu. Mějme integrální tok, který jsme vypočetli použitím všech částic ve srážkách, tedy protonů i pionů. Pro tento výpočet jsme museli spočítat $\langle G_n(z) \rangle_{\text{event}}$, což nám zároveň tvoří jmenovatel (5.11). Nyní vybereme první srážku, ve které jsou nějaké protony, pro jednoduchost předpokládejme, že jsou v

³Tento způsob průměrování je v souladu s referencí [3], v [4], jak sami autoři uvádějí, byl uveden nesprávně.

ní právě dva s azimutálními úhly ψ_1 a ψ_2 . Pro tuto srážku spočteme $G_n(z)$ dle (5.6) za použití všech částic v této srážce. Nyní spočteme sumu

$$\frac{e^{ip\psi_1} G_n(z)}{1 + \frac{\bar{z}e^{in\psi_1} + ze^{-in\psi_1}}{M}} + \frac{e^{ip\psi_2} G_n(z)}{1 + \frac{\bar{z}e^{in\psi_2} + ze^{-in\psi_2}}{M}}.$$

Takto postupujeme i u všech dalších srážek obsahujících protony. Nakonec jednotlivé sumy sečteme a vydělíme celkovým počtem protonů. Tím dostáváme čítelel (5.11).

Dle definice jsou kumulanty koeficienty rozvoje

$$D_{p/n}(z) = \sum_{k,l} \frac{\bar{z}^k z^l}{k! l!} \left\langle \left\langle e^{ip\psi + in(\phi_1 + \dots + \phi_k - \phi_{k+1} - \dots - \phi_{k+l})} \right\rangle \right\rangle. \quad (5.12)$$

Generující funkce $D_{p/n}(z)$ je pro ideální detektor symetrická ve smyslu $\overline{D_{p/n}(z)} = D_{p/n}(\bar{z})$, což implikuje, že takto definované kumulanty jsou reálné. Pokud navíc, za dodržení předpokladu ideálního detektoru, posuneme úhly protonů i pionů o úhel α , bude čítelel (5.11), mající po tomto posunutí tvar $\langle e^{ip\psi} e^{-ip\alpha} G_n(ze^{in\alpha}) \rangle_{\text{prot}}$, po průměru přes α nenulový jen pro $l = k + m$. Tedy jediné fyzikálně relevantní kumulanty jsou

$$d_{mn/n}\{2k + m + 1\} \equiv \Re \left[\left\langle \left\langle e^{in(m\psi + \phi_1 + \dots + \phi_k - \phi_{k+1} - \dots - \phi_{2k+m})} \right\rangle \right\rangle \right],$$

kde \Re znamená reálnou část a $\{2k + m + 1\}$ značí, že kumulant obsahuje korelace mezi $2k + m$ piony a jedním protonem. Poznamenejme, že tato definice platí pro libovolný detektor.

5.3.2 Výpočet diferenciálního toku z kumulantů

V tomto oddíle budeme pro jednoduchost uvažovat ideální detektor a zanedbáme korelace nepocházející od toku. Pokud použijeme průměrování ve dvou krocích, jako v případě integrovaného toku, a označíme

$$\langle e^{ip\psi} | \Phi_{\text{R}} \rangle = v'_p e^{ip\Phi_{\text{R}}},$$

přejde rovnice (5.11) v

$$D_{p/n}(z) = \frac{\int_0^{2\pi} e^{ip\Phi_{\text{R}}} \langle G_n(z) | \Phi_{\text{R}} \rangle \frac{d\Phi_{\text{R}}}{2\pi}}{\langle G_n(z) \rangle_{\text{event}}} v'_p. \quad (5.13)$$

Výpočet čitatele je shodný s výpočtem v oddíle 5.2.2, až na faktor $e^{ip\Phi_{\text{R}}}$. Čítelel je nenulový jen pro $p = mn$, kde m je přirozené číslo, tedy

$$\begin{aligned} D_{mn/n}(z) &= \frac{1}{2\pi} \sum_{k=0}^M \binom{M}{k} \left(\frac{v_n}{M}\right)^k \sum_{l=0}^k \binom{k}{l} \int_0^{2\pi} z^l \bar{z}^{k-l} e^{in\Phi_{\text{R}}(k+m-2l)} d\Phi_{\text{R}} \\ &= \sum_{k=0}^M \binom{M}{k} \left(\frac{v_n}{M}\right)^k \binom{k}{\frac{k+m}{2}} z^{\frac{k+m}{2}} \bar{z}^{k-\frac{k+m}{2}} \\ &= \sum_{k=0}^M \frac{M!}{k!(M-k)!} \left(\frac{v_n}{M}\right)^k \frac{k!}{\left(\frac{k+m}{2}\right)! \left(\frac{k-m}{2}\right)!} z^{\frac{k+m}{2}} \bar{z}^{\frac{k-m}{2}}. \end{aligned}$$

Přeznačme $k \rightarrow 2k + m$, pak

$$\begin{aligned} D_{mn/n}(z) &= \sum_{k=0}^{[(M-m)/2]} \frac{M!}{(2k+m)!(M-2k-m)!} \left(\frac{v_n}{M}\right)^{2k+m} \frac{(2k+m)!}{(k+m)!(k)!} z^{k+m} \bar{z}^k \\ &= \sum_{k=0}^{[(M-m)/2]} \frac{M!}{(M-m-2k)!k!(k+m)!} \left(\frac{v_n}{M}\right)^{2k+m} \bar{z}^k z^{k+m}, \end{aligned}$$

kde $[\]$ opět značí celou část. V limitě velkých M platí $\frac{M!}{(M-m-2k)!} \simeq M^{2k+m}$ a také můžeme rozšířit sumu do $+\infty$, tedy

$$\begin{aligned} D_{mn/n}(z) &= (z\bar{z})^{\frac{m}{2}} v_n^m \sum_{k=0}^{+\infty} M^{2k+m} \frac{1}{k!(k+m)!} v_n^{2k} \frac{1}{M^{2k+m}} z^{k-\frac{m}{2}} \bar{z}^{k+\frac{m}{2}} \\ &= (|z|v_n)^m \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{(v_n^2|z|^2)^k}{k!(k+m)!} \left(\frac{z}{|z|}\right)^m = I_m(2v_n|z|) \left(\frac{z}{|z|}\right)^m \end{aligned}$$

a rovnice (5.13) bude mít tvar

$$D_{mn/n}(z) = \frac{I_m(2|z|v_n)}{I_0(2|z|v_n)} \left(\frac{z}{|z|}\right)^m v'_{mn},$$

kde I_m značí modifikovanou Besselovu funkci m -tého stupně.

Nás bude zajímat případ $m = 1$, tedy rozvoj do mocninné řady dává

$$\begin{aligned} D_{n/n}(z) &= \left(v_n|z| - \frac{1}{2}v_n^3|z|^3 + \frac{1}{3}v_n^5|z|^5 + \mathcal{O}(|z|^6) \right) \frac{z}{|z|} v'_n \\ &= v'_n v_n z - \frac{1}{2}v'_n v_n^3 z^2 \bar{z} + \frac{1}{3}v'_n v_n^5 z^3 \bar{z}^2 + \mathcal{O}(|z|^5) z v'_n \end{aligned}$$

a porovnáním koeficientů s (5.12) dostáváme

$$\begin{aligned} \frac{z}{1!} d_{n/n}\{2 \cdot 0 + 1 + 1\} &= v'_n v_n z & \frac{d_{n/n}\{2\}}{v_n} &= v'_{n/n}\{2\} \\ \frac{\bar{z}z^2}{1!2!} d_{n/n}\{2 \cdot 1 + 1 + 1\} &= -\frac{1}{2}v'_n v_n^3 z^2 \bar{z} & -\frac{d_{n/n}\{4\}}{v_n^3} &= v'_{n/n}\{4\} \\ \frac{\bar{z}^2 z^3}{2!3!} d_{n/n}\{2 \cdot 2 + 1 + 1\} &= \frac{1}{3}v'_n v_n^5 z^3 \bar{z}^2 & \frac{d_{n/n}\{6\}}{4v_n^5} &= v'_{n/n}\{6\}. \end{aligned}$$

5.4 Praktický výpočet kumulantů

Výpočet eliptického toku metodou kumulantů provedeme numericky. Nejdříve musíme určit hodnoty generující funkce (5.8) v $k_{\max} \times q_{\max}$ bodech komplexní roviny. Označme tyto body $z_{p,q} = x_{p,q} + iy_{p,q}$, kde

$$\begin{aligned} x_{p,q} &= r_0 \sqrt{p} \cos\left(\frac{2q\pi}{q_{\max}}\right) \\ y_{p,q} &= r_0 \sqrt{p} \sin\left(\frac{2q\pi}{q_{\max}}\right), \end{aligned}$$

přičemž $p = 1, \dots, k_{\max}$ a $q = 0, \dots, q_{\max} - 1$. Pokud budeme chtít vypočítat k_i kumulantů $c_n\{2k\}$ pro $k = 1, \dots, k_i$ a k_d kumulantů $d_{mn/n}\{2k + m + 1\}$ pro $k = 0, \dots, k_d - 1$, musí k_{\max} a q_{\max} splňovat nerovnosti $k_{\max} \geq k_i, k_d$ a $q_{\max} > 2k_i, 2(k_d + m - 1)$. Konstanta r_0 zajišťuje menší numerickou chybu při výpočtu generující funkce a je dána rovnicí [3]

$$r_0 \simeq (\epsilon N_{\text{evts}}^{3/2} M)^{1/8} \sqrt{\frac{M}{\langle w^2 \rangle}},$$

kde ϵ značí přesnost elementárních operací, N_{evts} je počet analyzovaných srážek a w jsou váhy z rovnice (5.6). Obvykle je r_0 rovno 1,5, nebo 2,0.

5.4.1 Integrovní tok

Označme hodnotu generující funkce (5.7) v bodech $z_{p,q}$ jako $C_{p,q}$, tedy

$$C_{p,q} \equiv C_n(z_{p,q}).$$

Dle definice (5.9) jsou kumulanty $c_n\{2k\}$ koeficienty pro diagonální prvky $k = l$. Abychom odstranili příspěvky od nediagonálních členů, provedeme průměr přes fázi bodů $z_{p,q}$, označme ho C_p , tedy

$$C_p = \frac{1}{q_{\max}} \sum_{q=0}^{q_{\max}} C_{p,q}.$$

Rozvojem C_p do mocninné řady dle (5.8) dostáváme soustavu k_i rovnic pro kumulanty

$$C_p = \sum_{k=1}^{k_i} \frac{(r_0 \sqrt{p})^{2k}}{(k!)^2} c_n\{2k\}$$

Řešení této rovnice pro případ $k_i = 3$ je

$$\begin{aligned} c_n\{2\} &= \frac{1}{r_0^2} (3C_1 - \frac{3}{2}C_2 + \frac{1}{3}C_3) \\ c_n\{4\} &= \frac{2}{r_0^4} (-5C_1 + 4C_2 - C_3) \\ c_n\{6\} &= \frac{6}{r_0^6} (3C_1 - 3C_2 + C_3). \end{aligned}$$

5.4.2 Diferenciální tok

Označme nyní generující funkci pro diferenciální tok (5.11) vypočtenou v bodě $z_{p,q}$ jako $D_{mn/n}(z_{p,q})$ a její reálnou, resp. imaginární část jako $X_{p,q}$, resp. $Y_{p,q}$. Potom platí

$$D_{mn/n}(z_{p,q}) = X_{p,q} + iY_{p,q} \quad (5.14)$$

a

$$\begin{aligned} X_{p,q} &\equiv \Re[D_{mn/n}(z_{p,q})] = \frac{\langle \cos(mn\psi) G_n(z_{p,q}) \rangle_{\text{prot}}}{\langle G_n(z_{p,q}) \rangle_{\text{event}}} \\ Y_{p,q} &\equiv \Im[D_{mn/n}(z_{p,q})] = \frac{\langle \sin(mn\psi) G_n(z_{p,q}) \rangle_{\text{prot}}}{\langle G_n(z_{p,q}) \rangle_{\text{event}}} \end{aligned}$$

kde $G_n(z_{p,q})$ je označení funkce (5.6) vyjádřené v bodě $z_{p,q}$ a \Re , resp. \Im značí reálnou, resp. imaginární část.

Abychom odstranili příspěvky od kumulantů, které pro ideální detektor vymizí, vynásobíme nejprve (5.14) \bar{z}^m a vezmeme jeho reálnou část

$$\begin{aligned}\Re[(D_{mn/n}(z_{p,q}) \cdot \bar{z}^m)] &= \Re \left[(X_{p,q} + iY_{p,q}) \cdot (r_0\sqrt{p})^m \left(\cos \left(m \frac{2q\pi}{q_{\max}} \right) - i \sin \left(m \frac{2q\pi}{q_{\max}} \right) \right) \right] \\ &= (r_0\sqrt{p})^m \left[X_{p,q} \cdot \cos \left(m \frac{2q\pi}{q_{\max}} \right) + Y_{p,q} \cdot \sin \left(m \frac{2q\pi}{q_{\max}} \right) \right],\end{aligned}$$

nyní provedeme průměr přes fázi $z_{p,q}$ a označíme tento průměr D_p , tedy

$$D_p = \frac{(r_0\sqrt{p})^m}{q_{\max}} \sum_{q=0}^{q_{\max}-1} \left[X_{p,q} \cdot \cos \left(m \frac{2q\pi}{q_{\max}} \right) + Y_{p,q} \cdot \sin \left(m \frac{2q\pi}{q_{\max}} \right) \right].$$

Rozvojem D_p do mocninné řady dle (5.12) dostáváme soustavu k_d rovnic pro kumulanty

$$D_p = \sum_{k=0}^{k_d-1} \frac{(r_0\sqrt{p})^{2(k+m)}}{k!(k+m)!} d_{mn/n}\{2k+m+1\}.$$

Pro $k_d = 3$ a $m = 1$ je řešení této soustavy dáno rovnicemi

$$\begin{aligned}d_{n/n}\{2\} &= \frac{1}{r_0^2} (3D_1 - \frac{3}{2}D_2 + \frac{1}{3}D_3) \\ d_{n/n}\{4\} &= \frac{1}{r_0^4} (-5D_1 + 4D_2 - D_3) \\ d_{n/n}\{6\} &= \frac{4}{3} \frac{1}{r_0^6} (3D_1 - 3D_2 + D_3).\end{aligned}$$

5.5 Chyby metody

Metoda kumulantů je, jako každá jiná metoda odhadu toku, zatížena dvěma druhy chyb, systematickou a statistickou. Systematická chyba je způsobena vlastnostmi metody, přičemž důležitou složku tvoří korelace nepocházejícími od toku a statistická chyba je způsobena konečným počtem srážek, které jsou k dispozici N_{evts} . Zde uvedeme jen stručný přehled problematiky, pro detailnější popis viz [4].

Zaměříme se nejdříve na chyby při výpočtu integrálního toku. Defnujme odhad systematické chyby jako rozdíl kvadrátů vypočtené a skutečné hodnoty toku, tedy

$$(\delta v_n\{2k\})_{\text{syst}}^2 \equiv v_n\{2k\}^{2k} - v_n^{2k}.$$

Pokud je splněna nutná podmínka měřitelnosti toku $v_n \gg 1/M$, platí $(\delta v_n\{2k\})_{\text{syst}} \sim (Mv_n)^{1-2k}$ a systematická chyba se se zvyšujícím k snižuje.

Odhad statistické chyby označme $\delta v_n\{2k\}$. Tento s rostoucím k roste, a proto je nutné najít vhodné k tak, aby obě chyby byly přibližně stejně velké. V mnoha praktických případech je volba $2k = 4$. Pokud zavedeme parametr rozlišení jako $\chi \equiv v_n\sqrt{M}$, platí

$$\begin{aligned}(\delta v_n\{2\})^2 &\equiv \langle v_n\{2\}^2 \rangle - \langle v_n\{2} \rangle^2 = \frac{1}{MN_{\text{evts}}} \frac{1 + 2\chi^2}{2\chi^2}, \\ (\delta v_n\{4\})^2 &\equiv \langle v_n\{4\}^2 \rangle - \langle v_n\{4} \rangle^2 = \frac{1}{MN_{\text{evts}}} \frac{1 + 4\chi^2 + \chi^4 + 2\chi^6}{2\chi^6}, \\ (\delta v_n\{6\})^2 &\equiv \langle v_n\{6\}^2 \rangle - \langle v_n\{6} \rangle^2 = \frac{1}{MN_{\text{evts}}} \frac{3 + 18\chi^2 + 9\chi^4 + 28\chi^6 + 12\chi^8 + 24\chi^{10}}{24\chi^{10}},\end{aligned}$$

přičemž v limitě $\chi \gg 1$ přejdou všechny rovnice na výraz $1/(MN_{\text{evts}})$.

Pro chyby diferenciálního toku je situace obdobná, se zvyšujícím se $2k+m$ systematická chyba klesá, zatímco statistická chyba roste. Pro optimální řád kumulantu přibližně platí

$$2k + m + 1 \simeq 1 + \frac{\ln N'}{\ln M},$$

kde N' značí celkový počet protonů použitých v analýze. Statistické chyby výpočtu diferenciálního toku se dají pro $m = 1$ vyjádřit jako

$$\begin{aligned} (\delta v'_{n/n}\{2\})^2 &\equiv \langle v'_{n/n}\{2\}^2 \rangle - \langle v_{n/n}\{2\} \rangle^2 = \frac{1}{2N'} \frac{1 + \chi^2}{\chi^2}, \\ (\delta v'_{n/n}\{4\})^2 &\equiv \langle v'_{n/n}\{4\}^2 \rangle - \langle v_{n/n}\{4\} \rangle^2 = \frac{1}{2N'} \frac{2 + 6\chi^2 + \chi^4 + \chi^6}{\chi^6} \end{aligned}$$

a v limitě $\chi \gg 1$ přejdou všechny rovnice na výraz $1/(2N')$.

Poznamenejme, že někdy mohou statistické fluktuaace vyústit v zápornou hodnotu toku $v_n\{2k\}^{2k}$. Pokud nastane tento případ, je jasné, že pomocí tohoto řádu kumulantu není možné odhad toku určit.

5.6 Výsledky analýzy

Analýza byla provedena pomocí programu *Cumulants.cc*, který se nachází na přiloženém CD. Program je opět napsán v jazyce C++ dle standardu POSIX threads. Program při spuštění přijímá dva parametry, název souboru se vstupními daty a volitelně slovo *test*. Pokud není druhého parametru použito, musí být vstupní soubor ve formátu OSCAR1997A, pokud je druhý parametr přítomen, musí být vstupní soubor ve formátu, který produkuje generátor popsaným v kapitole 2. Tedy zcela obdobně, jako tomu bylo v případě programu diskutovaného v oddílu 3.3.

Program počítá integrální a diferenciální eliptický tok za pomoci 2 a 4 částicových kumulantů, přičemž eliptický diferenciální tok se počítá pomocí integrálního toku stejného řádu, tedy $m = 1$. Spolu s těmito hodnotami je vypočtena i relativní statistická chyba integrálního toku δv_2 a absolutní statistická chyba toku diferenciálního $\delta v'_{2/2}$.

Analyzovány byly stejné skupiny srážek jako v případě metody reakční roviny. Hodnoty integrálního a diferenciálního eliptického toku vypočtené pomocí 2 částicových kumulantů jsou pro případ $M = 300$, resp. $M = 1000$ v tabulce 5.1, resp. 5.2. Graficky jsou pak vyneseny v grafech na obrázku 5.1 vlevo, resp. vpravo. V tabulkách jsou opět sady srážek pro jednotlivé hodnoty parametru a (udávajícího závislost generovaného v_2 na p_T dle rovnice (2.1)) umístěny ve sloupcích. V posledních pěti řádcích jsou pak hodnoty diferenciálního eliptického toku vypočtené v p_T binech daných v kulatých závorkách. Hodnoty jsou uvedeny i s absolutní statistickou chybou $\delta v'_{2/2}$. V tabulkách 5.3, resp. 5.4 jsou hodnoty vypočtené pomocí čtyřčásticových kumulantů pro $M = 300$, resp. $M = 1000$. Vyneseny jsou pak v grafech na obrázku 5.2 pro $M = 300$ vlevo a pro $M = 1000$ vpravo. Opět je v grafu vnesen i generovaný tok v_2 a každá hodnota $v'_{2/2}$ je umístěna do středu p_T binu pro který byla spočtena.

Porovnáním grafů na obrázcích 5.1 a 5.2 vidíme dobrou shodu vypočtených hodnot s vygenerovanými a to jak pro dvou, tak i pro čtyřčásticové kumulanty. Dvoučásticové kumulanty, až na drobné odchylky pro $a = 0,02$, velice přesně rekonstruují generovaný eliptický tok a navíc mají v porovnání se čtyřčásticovými kumulanty menší absolutní chyby. Čtyřčásticové kumulanty určují tok také dobře a generované hodnoty takřka vždy leží v jejich chybových intervalech. Větší statistické chyby jsou pozorovány v případě slabého

Tabulka 5.1: Výsledné hodnoty integrálního (v_2) a diferenciálního (v'_2) toku vypočtené pomocí kumulantu druhého řádu pro multiplicitu $M = 1000$ a počet srážek v jednotlivých sadách $N_{\text{event}} = 300$.

a [–]	0,02	0,04	0,06	0,08	0,10
v_2 [–]	0,0156	0,0306	0,0438	0,0603	0,0742
δv_2 [%]	0,186	0,137	0,078	0,047	0,036
$v'_2(0,0 - 0,3)$ [–]	$0,0031 \pm 0,0023$	$0,0077 \pm 0,0020$	$0,0097 \pm 0,0015$	$0,0130 \pm 0,0012$	$0,0139 \pm 0,0012$
$v'_2(0,3 - 0,6)$ [–]	$0,0034 \pm 0,0023$	$0,0199 \pm 0,0020$	$0,0275 \pm 0,0015$	$0,0359 \pm 0,0012$	$0,0451 \pm 0,0012$
$v'_2(0,6 - 0,9)$ [–]	$0,0119 \pm 0,0023$	$0,0323 \pm 0,0020$	$0,0437 \pm 0,0015$	$0,0604 \pm 0,0012$	$0,0746 \pm 0,0012$
$v'_2(0,9 - 1,2)$ [–]	$0,0146 \pm 0,0023$	$0,0440 \pm 0,0020$	$0,0623 \pm 0,0015$	$0,0837 \pm 0,0012$	$0,1037 \pm 0,0012$
$v'_2(1,2 - 1,5)$ [–]	$0,0172 \pm 0,0023$	$0,0559 \pm 0,0020$	$0,0841 \pm 0,0015$	$0,1071 \pm 0,0012$	$0,1338 \pm 0,0012$

Tabulka 5.2: Výsledné hodnoty integrálního (v_2) a diferenciálního (v'_2) toku vypočtené pomocí kumulantu druhého řádu pro multiplicitu $M = 1000$ a počet srážek v jednotlivých sadách $N_{\text{event}} = 10000$.

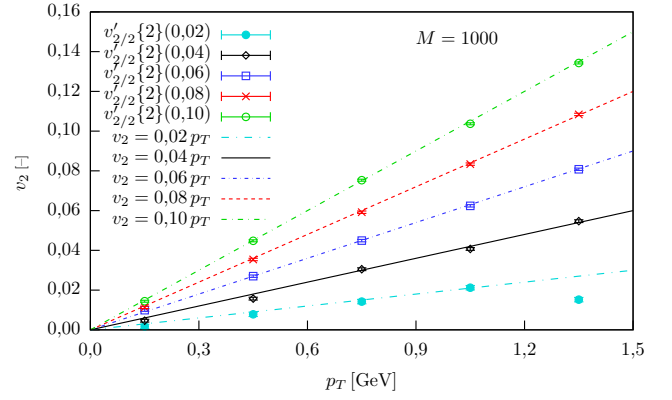
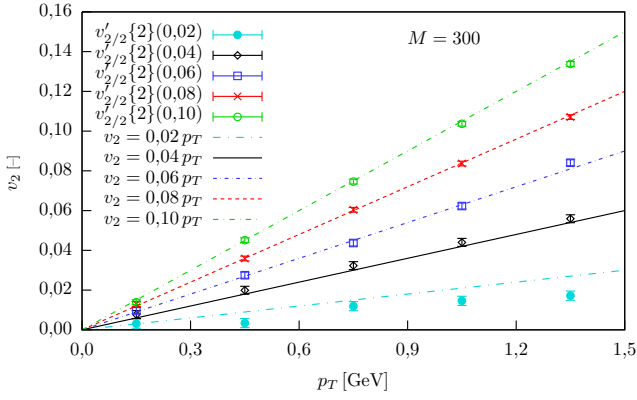
a [–]	0,02	0,04	0,06	0,08	0,10
v_2 [–]	0,0150	0,0297	0,0452	0,0598	0,0747
δv_2 [%]	0,076	0,055	0,017	0,013	0,010
$v'_2(0,0 - 0,3)$ [–]	$0,0017 \pm 0,0011$	$0,0046 \pm 0,0007$	$0,0099 \pm 0,0006$	$0,0113 \pm 0,0006$	$0,0144 \pm 0,0005$
$v'_2(0,3 - 0,6)$ [–]	$0,0078 \pm 0,0011$	$0,0157 \pm 0,0007$	$0,0270 \pm 0,0006$	$0,0354 \pm 0,0006$	$0,0448 \pm 0,0005$
$v'_2(0,6 - 0,9)$ [–]	$0,0142 \pm 0,0011$	$0,0305 \pm 0,0007$	$0,0449 \pm 0,0006$	$0,0592 \pm 0,0006$	$0,0753 \pm 0,0005$
$v'_2(0,9 - 1,2)$ [–]	$0,0212 \pm 0,0011$	$0,0407 \pm 0,0007$	$0,0624 \pm 0,0006$	$0,0834 \pm 0,0006$	$0,1037 \pm 0,0005$
$v'_2(1,2 - 1,5)$ [–]	$0,0152 \pm 0,0011$	$0,0547 \pm 0,0007$	$0,0808 \pm 0,0006$	$0,1084 \pm 0,0006$	$0,1343 \pm 0,0005$

Tabulka 5.3: Výsledné hodnoty integrálního (v_2) a diferenciálního (v'_2) toku vypočtené pomocí kumulantu čtvrtého řádu pro multiplicitu $M = 1000$ a počet srážek v jednotlivých sadách $N_{\text{event}} = 300$.

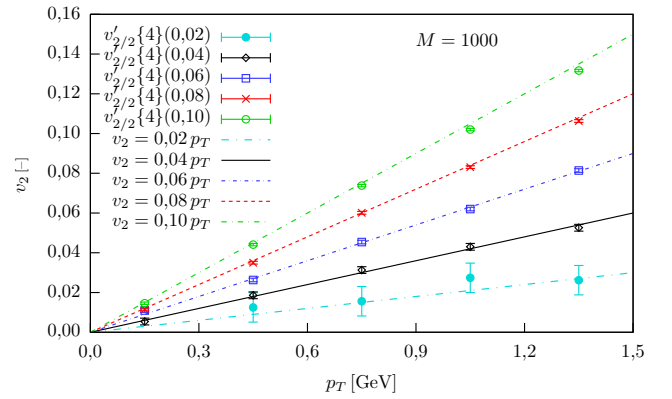
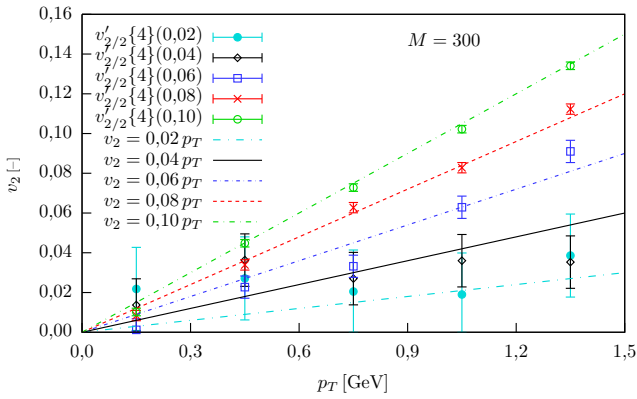
a [–]	0,02	0,04	0,06	0,08	0,10
v_2 [–]	0,0246	0,0294	0,0421	0,0606	0,0740
δv_2 [%]	6,417	2,416	0,369	0,066	0,028
$v'_2(0,0 - 0,3)$ [–]	$0,0218 \pm 0,0209$	$0,0137 \pm 0,0132$	$0,0012 \pm 0,0056$	$0,0084 \pm 0,0026$	$0,0102 \pm 0,0019$
$v'_2(0,3 - 0,6)$ [–]	$0,0271 \pm 0,0209$	$0,0363 \pm 0,0132$	$0,0227 \pm 0,0056$	$0,0339 \pm 0,0026$	$0,0448 \pm 0,0019$
$v'_2(0,6 - 0,9)$ [–]	$0,0205 \pm 0,0209$	$0,0270 \pm 0,0132$	$0,0332 \pm 0,0056$	$0,0627 \pm 0,0026$	$0,0728 \pm 0,0019$
$v'_2(0,9 - 1,2)$ [–]	$0,0190 \pm 0,0209$	$0,0360 \pm 0,0132$	$0,0629 \pm 0,0056$	$0,0828 \pm 0,0026$	$0,1022 \pm 0,0019$
$v'_2(1,2 - 1,5)$ [–]	$0,0386 \pm 0,0209$	$0,0353 \pm 0,0132$	$0,0910 \pm 0,0056$	$0,1123 \pm 0,0026$	$0,1341 \pm 0,0019$

Tabulka 5.4: Výsledné hodnoty integrálního (v_2) a diferenciálního (v'_2) toku vypočtené pomocí kumulantu čtvrtého řádu pro multiplicitu $M = 1000$ a počet srážek v jednotlivých sadách $N_{\text{event}} = 10000$.

a [-]	0,02	0,04	0,06	0,08	0,10
v_2 [-]	0,0159	0,0302	0,0455	0,0600	0,0749
δv_2 [%]	1,402	0,055	0,010	0,004	0,002
$v'_2(0,0 - 0,3)$ [-]	$-0,0004 \pm 0,0074$	$0,0054 \pm 0,0017$	$0,0109 \pm 0,0009$	$0,0115 \pm 0,0007$	$0,0146 \pm 0,0006$
$v'_2(0,3 - 0,6)$ [-]	$0,0125 \pm 0,0074$	$0,0186 \pm 0,0017$	$0,0263 \pm 0,0009$	$0,0350 \pm 0,0007$	$0,0441 \pm 0,0006$
$v'_2(0,6 - 0,9)$ [-]	$0,0156 \pm 0,0074$	$0,0313 \pm 0,0017$	$0,0454 \pm 0,0009$	$0,0601 \pm 0,0007$	$0,0738 \pm 0,0006$
$v'_2(0,9 - 1,2)$ [-]	$0,0274 \pm 0,0074$	$0,0430 \pm 0,0017$	$0,0620 \pm 0,0009$	$0,0831 \pm 0,0007$	$0,1020 \pm 0,0006$
$v'_2(1,2 - 1,5)$ [-]	$0,0262 \pm 0,0074$	$0,0526 \pm 0,0017$	$0,0814 \pm 0,0009$	$0,1063 \pm 0,0007$	$0,1317 \pm 0,0006$



Obrázek 5.1: Výsledné hodnoty diferenciálního toku v'_2 vypočtené pomocí kumulantu druhého řádu pro generované závislosti $v_2(p_T)$. Multiplicita M je vyznačena v grafu a počet srážek v jednotlivých sadách $N_{\text{event}} = 10000$.



Obrázek 5.2: Výsledné hodnoty diferenciálního toku v'_2 vypočtené pomocí kumulantu čtvrtého řádu pro generované závislosti $v_2(p_T)$. Multiplicita M je vyznačena v grafu a počet srážek v jednotlivých sadách $N_{\text{event}} = 10000$.

toku a $M = 300$, což je v souladu s očekáváním, jelikož statistická chyba u kumulantů roste s jejich řádem. Zdůrazněme, že v námi studovaných srážkách mají částice rovnoměrně rozdělené příčné hybnosti, a tedy v každém p_T binu je stejný počet částic, z čehož za použití $\delta(v'_n)^2 \propto 1/N'$ vyplývají i stejné statistické chyby pro diferenciální tok napříč biny (se stejným a).

Při výpočtu toku pomocí kumulantů se může stát, že některá z vypočtených hodnot je záporná. Toto chování jsme pozorovali u diferenciálního toku z čtyřčásticových kumulantů v binu $(0,0 - 0,3)$ GeV s $M = 1000$ a $v_2 = 0,02 p_T$. Jak bylo řečeno na konci oddílu 5.5, nemůže být v tomto případě tok daným kumulantem určen.

Z výše uvedeného se zdá, že dvoučásticové kumulanty jsou pro analýzu toku vhodnější, protože mají menší statistické chyby a jejich výsledky se velmi dobře shodují s generovaným tokem. Toto je ale způsobeno ideálními podmínkami, kdy ve srážkách neexistují jiné příspěvky k toku než od v_2 . Tento předpoklad však není prakticky splněn a lze předpokládat, že díky necitlivosti čtyřčásticových kumulantů na korelace řádu ≤ 3 budou tyto poskytovat přesnější výsledky.

Kapitola 6

Lee-Yangovy nuly

Metoda Lee-Yangových nul je vývojově nejmladší metodou diskutovanou v této práci. K výpočtu používá, stejně jako metoda kumulantů, kumulanty. Ale místo toho, aby se přímo počítaly kumulanty daného řádu, je zkoumáno jejich chování pro řády vysoké. Navíc se ukazuje, že nalezení tohoto chování je jednodušší, než práce se zadaným konečným řádem.

6.1 Integrální tok

6.1.1 Generující funkce

Stejně jako v případě metody kumulantů, musíme i nyní pro každou srážku definovat generující funkci. Abychom tak mohli učinit, musíme nejdříve definovat funkci $G(z)$ ¹. Zprvu byla používána funkce vycházející z projekce vektoru srážkového toku \mathbf{Q}_n (3.1) na libovolný směr s azimutálním úhlem v laboratorní soustavě $n\theta$. Označme tuto projekci Q^θ

$$Q^\theta \equiv Q_x \cos(n\theta) + Q_y \sin(n\theta) = \sum_{j=1}^M w_j \cos(n(\phi_j - \theta)),$$

kde w_j jsou váhy jednotlivých částic a složky vektoru \mathbf{Q}_n jsme označili jako Q_x a Q_y . Pak pro daný úhel θ definujeme funkci

$$G_Q^\theta(z) \equiv e^{zQ^\theta} = \exp \left[z \sum_{j=1}^M w_j \cos(n(\phi_j - \theta)) \right], \quad (6.1)$$

kde $z = x + iy$ je libovolné komplexní číslo.

Jiná možnost je definovat funkci $G(z)$ bez použití vektoru \mathbf{Q}_n jako

$$G^\theta(z) = \prod_{j=1}^M \left[1 + zw_j \cos(n(\phi_j - \theta)) \right]. \quad (6.2)$$

Tato funkce má menší standardní odchylku σ a je přesnější při výpočtu diferenciálního toku vyšších řádů, než (6.1) [2] a dále budeme používat ji. Postup odvození výpočtu anizotropního toku za použití funkce (6.1) je stejný a lze ho nalézt v [1]. Funkce (6.2) je

¹Narozdíl od [1] nebudeme funkci $G(z)$ nazývat generující funkcí, protože tou se dle matematické definice nazývá funkce $C(z)$. Navíc spojení „funkce $G(z)$ “ je zde použito jako název pro funkci, z které se určuje funkce generující, jednotlivé její definice budou opatřeny různými indexy.

tedy komplexní funkcí komplexní proměnné, narozdíl od reálné funkce $G_n(z)$ v případě metody kumulantů, viz (5.6).

Podívejme se nyní na průměr funkce $G^\theta(z)$ přes všechny srážky se stejnou centralitou. Pokud tento průměr označíme jako $\{ \}$, pak je funkce symetrická ve významu

$$\{G^{\theta+\pi/n}(z)\} = \{G^\theta(-z)\}, \quad (6.3a)$$

$$\overline{\{G^\theta(z)\}} = \{G^\theta(\bar{z})\}. \quad (6.3b)$$

Příčemž pruh značí komplexní sdružení a stejné vlastnosti má i $\{G_Q^\theta(z)\}$.

Dále položíme, jako v předešlém textu, váhy všech částic rovny 1 a nebudeme je, vyjma některých definic, dále vyznačovat.

V souladu s rovnicí (4.3) definujeme kumulanty, označme je $\langle\langle (G^\theta)^k \rangle\rangle$, jako rozvoj generující funkce $C^\theta(z)$ do mocninné řady:

$$C^\theta(z) \equiv \ln \langle G^\theta(z) \rangle = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{z^k}{k!} \langle\langle (G^\theta)^k \rangle\rangle. \quad (6.4)$$

6.1.2 Předpoklady metody

Odvození metody Lee-Yangových nul závisí na několika předpokladech:

1. Multiplicita ve srážce je mnohem větší než jedna.

Tento předpoklad je ve vysokoenergetických srážkách těžkých jader dobře splněn.

2. Pro pevnou orientaci reakční roviny (tedy úhlu Φ_R) je každá částice korelována s malým počtem částic, který se moc nemění s velikostí srážejících se jader, ani se srážkovým parametrem.

Tento předpoklad je klíčový a říká, že při stejné velikosti a orientaci srážkového parametru jsou korelace částic stejného řádu, tak jako kdyby byla srážka jader pouhou superpozicí nezávislých srážek nukleonů. To můžeme považovat v ultrarelativistických srážkách za splněné [1], protože příčný rozměr studovaného systému, je mnohem větší, než časová škála srážky, a proto jsou interakce nukleonů probíhající v různých místech příčné roviny nekorelované čistě kvůli kauzalitě. Interakce konečného stavu mohou sice způsobit, či zničit, korelace, ale předpokládá se, že tyto budou obsahovat jen málo částic, jejichž počet zůstane se zvětšujícím se systémem přibližně stejný. Tento předpoklad ale neplatí v blízkosti fázového přechodu, kdy kritické fluktuační způsobí korelace dlouhého dosahu. [13]

3. Počet srážek, které jsou k dispozici je libovolně velký.

Díky tomuto předpokladu můžeme průměry použité dále považovat za statistické průměry přes mnoho srážek, označovaném jako $\langle \rangle$.

4. Detektor má symetrické pokrytí v azimutálním úhlu.

Tento předpoklad není nepostradatelný, ale zjednoduší, stejně jako v případě předešlých metod, výpočty.

6.1.3 Výpočet integrálního toku

Analogicky s postupem v oddíle 5.2.2 definujeme průměr přes srážky se stejnou orientací reakční roviny jako $\langle |\Phi_{\text{R}} \rangle$ a budeme se zabývat průměrem $\langle G^\theta(z) | \Phi_{\text{R}} \rangle$. Protože platí předpoklad 1 a 2, je možné každou srážku rozdělit na N nezávislých podmnožin, přičemž N škáluje s multiplicitou srážky M . Tedy můžeme psát

$$\langle G^\theta(z) | \Phi_{\text{R}} \rangle = \prod_{j=1}^N \langle G_j^\theta(z) | \Phi_{\text{R}} \rangle, \quad (6.5)$$

kde jsme $G_j^\theta(z)$ označili funkce jednotlivých N podmnožin. Logaritmus tohoto výrazu pak škáluje jako počet nezávislých podmnožin N , který škáluje s multiplicitou M , tedy

$$\ln \langle G^\theta(z) | \Phi_{\text{R}} \rangle \sim M(az + bz^2 + cz^3 + \dots), \quad (6.6)$$

kde jsou všechny koeficienty nezávislé na velikosti systému a řádu jednotky (což platí, protože jsme v (6.2) zavedli $w_j = 1$). Tato rovnice je matematickým vyjádřením předpokladu 2 v oddílu 6.1.2 a zůstává v platnosti i přes přítomnost zákona zachování celkové hybnosti, protože ten, ač se týká všech částic, se efektivně chová jako korelace krátkého dosahu. [1]

Protože jsou všechny koeficienty v (6.6) stejného řádu a protože předpokládáme, že $|z| \ll 1$, můžeme tuto řadu přepsat jako

$$\ln \langle G^\theta(z) | \Phi_{\text{R}} \rangle \simeq z \left\langle \sum_{j=1}^M \cos(n(\phi_j - \theta)) \middle| \Phi_{\text{R}} \right\rangle + \frac{\sigma^2 z^2}{4}, \quad (6.7)$$

kde σ značí standardní odchylku metody, definovanou jako

$$\sigma^2 \equiv \langle Q_x^2 + Q_y^2 \rangle - \langle Q_x \rangle^2 - \langle Q_y \rangle^2 - V_n^2, \quad (6.8)$$

přičemž V_n je definováno rovnicí (6.9).

Poznamenejme ještě, že ponechání pouze dvou členů v rovnici (6.7) je centrální limitní věta.

Definujeme nyní „integrální“ tok jako

$$V_n \equiv \left\langle \sum_{j=1}^M \cos(n(\phi_j - \Phi_{\text{R}})) \right\rangle. \quad (6.9)$$

Tato definice není integrálním tokem ve smyslu oddílu 1.2.2, ale v případě jednotkových vah a pokud zanedbáme fluktuace multiplicity částic M ve srážce, platí

$$V_n = Mv_n,$$

kde v_n již značí integrální tok jak byl definován dříve.

Abychom mohli upravit rovnici (6.7), podívejme se nejdříve na výraz $\cos(n(\phi_j - \theta))$ a využijme symetrie interakční zóny vůči reakční rovině (viz. použití v rovnici (1.7)):

$$\begin{aligned} \cos(n(\phi_j - \theta)) &= e^{in(\phi_j - \theta)} = e^{in(\phi_j - \Phi_{\text{R}})} e^{in(\Phi_{\text{R}} - \theta)} \\ &= \cos(n(\phi_j - \Phi_{\text{R}})) \cos(n(\Phi_{\text{R}} - \theta)). \end{aligned}$$

Nyní můžeme za použití definice (6.9) přepsat koeficient u z na pravé straně rovnice (6.7) jako

$$\begin{aligned} \left\langle \sum_{j=1}^M \cos(n(\phi_j - \theta)) \middle| \Phi_R \right\rangle &= \left\langle \sum_{j=1}^M \cos(n(\phi_j - \Phi_R)) \cos(n(\Phi_R - \theta)) \middle| \Phi_R \right\rangle \\ &= \cos(n(\Phi_R - \theta)) \left\langle \sum_{j=1}^M \cos(n(\phi_j - \Phi_R)) \middle| \Phi_R \right\rangle \\ &= \cos(n(\Phi_R - \theta)) V_n. \end{aligned} \quad (6.10)$$

Tento vztah nám umožní přepsat rovnici (6.7) ve formě

$$\langle G^\theta(z) | \Phi_R \rangle = e^{\sigma^2 z^2 / 4 + V_n z \cos(n(\Phi_R - \theta))}. \quad (6.11)$$

Nyní provedeme průměr přes všechny možné orientace Φ_R

$$\langle G^\theta(z) \rangle = \int_0^{2\pi} \langle G_n(z) | \Phi_R \rangle \frac{d\Phi_R}{2\pi}.$$

Abychom tento výraz mohli dále upravit, budeme předpokládat, že σ je nezávislá na Φ_R [1], tedy s tímto předpokladem dostáváme

$$\langle G_{c.l.}(z) \rangle = e^{\sigma^2 z^2 / 4} \int_0^{2\pi} e^{V_n z \cos(n(\Phi_R - \theta))} \frac{d\Phi_R}{2\pi}, \quad (6.12)$$

přičemž index „c.l.“ zdůrazňuje použití centrální limitní věty při odvození tohoto výsledku. Po provedení integrace dostáváme

$$\langle G_{c.l.}(z) \rangle = e^{\sigma^2 z^2 / 4} I_0(V_n z), \quad (6.13)$$

kde I_0 je modifikovaná Besselova funkce řádu 0. Funkce $\langle G_{c.l.}^\theta(z) \rangle$ je dle očekávání (viz rovnice (6.3a)) sudá, tedy nelze určit znaménko V_n a liché kumulanty vymizí. Od teď budeme předpokládat, že V_n jsou kladné. Zdůrazněme, že tato funkce nezávisí na θ , proto jsme vynechali příslušný index.

Nyní bychom mohli, stejně jako v případě metody kumulantů, rozvést přirozený logaritmus rovnice (6.13) do mocninné řady a porovnáním příslušných koeficientů u z^{2k} s rozvojem v (6.4) počítat odhady $V_n^\theta \{2k\}^\S$. My se ale budeme zabývat případem, kdy $k \rightarrow \infty$. Dle [1] lze každá funkce $f(x)$, která je v blízkosti počátku analytická, rozvést do mocninné řady

$$f(z) = \sum_{k=0}^{\infty} a_k z^k,$$

přičemž chování koeficientů a_k pro velká k je určeno singularitami $f(z)$, které jsou nejbližší počátku. Speciálně pro funkce (6.4) a (6.13) platí pro velká k

$$a_k \sim -\frac{2}{k} \Re \left(\frac{1}{(z_0)^k} \right) \quad (6.14)$$

[§]Rovnice (6.13) sice na θ nezávisí, ale kumulanty v rozvoji (6.4) ano, proto nese odhad index θ .

kde z_0 je bod, v kterém jsou tyto funkce nulové. Tento bod budeme v případě funkce (6.4) značit z_0^θ a v případě funkce (6.13) z_0 . Poznamenejme, že $z_0 \neq z_0^\theta$.

Protože teď víme, že nás budou zajímat jen nulové body, můžeme v rovnici (6.13), protože všechny nulové body I_0 leží na imaginární ose, položit $z = ir$ a psát

$$\langle G_{c.l.}(ir) \rangle = e^{-\sigma^2 r^2/4} J_0(V_n r), \quad (6.15)$$

kde J_0 je Besselova funkce řádu 0. První nulový bod J_0 označme j_{01} , přičemž $j_{01} \simeq 2,405$. Tedy rovnice (6.15) je rovna nule, právě když $V_n r = j_{01}$. Označme $r_0 \equiv V_n/j_{01}$, pak můžeme psát

$$z_0 = ir_0 = \frac{ij_{01}}{V_n}.$$

Tedy pokud podle (6.14) vyjádříme pro funkce (6.4) a (6.15) koeficienty a_{2k} a porovnáme je, dostaneme

$$\begin{aligned} -\frac{2}{2k} \Re \left(\frac{1}{\left(\frac{ij_{01}}{V_n^\theta \{2k\}} \right)^{2k}} \right) &= -\frac{2}{2k} \Re \left(\frac{1}{(z_0^\theta)^{2k}} \right) \\ \Re \left(\frac{1}{(-1)^k \left(\frac{j_{01}}{V_n^\theta \{2k\}} \right)^{2k}} \right) &= \Re \left(\frac{1}{(z_0^\theta)^{2k}} \right) \\ (V_n^\theta \{2k\})^{2k} &= (-1)^k (j_{01})^{2k} \Re \left(\frac{1}{(z_0^\theta)^{2k}} \right). \end{aligned}$$

Pokud bychom nyní mohli učinit o z_0^θ stejný předpoklad, jako o z_0 , tedy že leží na imaginární ose: $z_0^\theta = ir_0^\theta$, dostali bychom rovnici

$$V_n^\theta \{\infty\} = \frac{j_{01}}{r_0^\theta}, \quad (6.16)$$

kde $V_n^\theta \{\infty\}$ značí použití chování rozvoje $\langle G_{c.l.}(ir) \rangle$ a $\langle G^\theta(z) \rangle$ pro velká k . Tento předpoklad ale není obecně splněn, protože statistické fluktuační $\langle G^\theta(z) \rangle$ kvůli konečnému počtu srážek vychýlí nulové body z imaginární osy. Proto nebudeme hledat nulové body, ale první minimum funkce $|\langle G^\theta(ir) \rangle|$. Pokud označíme toto první minimum jako r_0^θ , pak je rovnice (6.16) platná. Zdůrazněme, že $V_n^\theta \{\infty\}$ je limitou $V_n^\theta \{2k\}$ pro $k \rightarrow \infty$, jen tehdy, když první nulový bod $\langle G^\theta(z) \rangle$ leží přesně na imaginární ose.

S použitím rovnic (6.3b) a (6.3a) dostáváme pro $\langle G^\theta(ir) \rangle$ vztah

$$\langle G^{\theta+\pi/n}(ir) \rangle = \langle G^\theta(-ir) \rangle = \overline{\langle G^\theta(ir) \rangle}.$$

Tedy pro absolutní hodnotu $\langle G^\theta(ir) \rangle$ platí

$$|\langle G^{\theta+\pi/n}(ir) \rangle| = |\langle G^\theta(-ir) \rangle| = |\langle G^\theta(ir) \rangle|,$$

a tedy při výběru úhlu θ se můžeme omezit na interval $\langle 0, \pi/n \rangle$.

Pro zvýšení přesnosti metody je vhodné provést výpočet $V_n^\theta \{\infty\}$ (dle (6.16)) pro několik hodnot úhlu θ (zpravidla 4, nebo 5 se stejným rozestupem) a pak vypočíst průměr. Označme konečný odhad $V_n \{\infty\}$, tedy

$$V_n \{\infty\} \equiv \frac{1}{p} \sum_{k=0}^{p-1} V_n^{k\pi/pn} \{\infty\},$$

kde p značí počet úhlů θ , pro které se počítal odhad $V_n^\theta \{\infty\}$.

6.2 Diferenciální tok

Odvození vztahu pro výpočet diferenciálního toku je identické s předešlým postupem pro tok integrální. Předpoklady jsou také stejné, jako v oddíle 6.1.2. Částice náležící do části fázového prostoru pro který budeme diferenciální tok počítat, nazveme, v souladu s metodou kumulantů (viz oddíl 5.3), protony a částice použité pro výpočet integrálního toku nazveme piony. Odhad diferenciálního toku řádu mn , $m \in \mathbb{N}$, získaný pomocí odhadu integrálního toku V_n^θ , označíme v_{mn}^θ a azimutální úhel protonu ψ .

6.2.1 Výpočet diferenciálního toku

Budeme se zabývat průměry korelací $\langle \cos(mn(\psi - \theta))G^\theta(z) \rangle_{\text{prot}}$ přes všechny protony ve všech srážkách.² Označme

$$D_m^\theta(z) \equiv \cos(mn(\psi - \theta))G^\theta(z)$$

a s použitím předpokladu 2 z oddílu 6.1.2 můžeme analogicky s rovnicí (6.5) $\langle D_m^\theta(z) | \Phi_R \rangle$ faktorizovat, pokud pak navíc tuto rovnici vydělíme $\langle G^\theta(z) | \Phi_R \rangle$, jednotlivé faktorizované příspěvky se, až na ten obsahující proton, zruší. Uvedme příklad pro existenci protonu v podmnožině k_1 , tedy

$$\begin{aligned} \frac{\langle \cos(mn(\psi - \theta))G^\theta(z) | \Phi_R \rangle}{\langle G^\theta(z) | \Phi_R \rangle} &= \frac{\langle \cos(mn(\psi - \theta))G_{k_1}^\theta(z) | \Phi_R \rangle \prod_{j=1, j \neq k_1} \langle G_j^\theta(z) | \Phi_R \rangle}{\prod_{j=1} \langle G_j^\theta(z) | \Phi_R \rangle} \\ &= \frac{\langle \cos(mn(\psi - \theta))G_{k_1}^\theta(z) | \Phi_R \rangle}{\langle G_{k_1}^\theta(z) | \Phi_R \rangle}, \end{aligned}$$

což umožňuje provést rozvoj do řady

$$\frac{\langle \cos(mn(\psi - \theta))G^\theta(z) | \Phi_R \rangle}{\langle G^\theta(z) | \Phi_R \rangle} = a' + b'z + c'z^2 + \dots, \quad (6.17)$$

kde koeficienty rozvoje jsou nezávislé na velikosti systému a jsou řádu jednotky.

Podívejme se na vlastnosti průměru $D_m^\theta(z)$ přes srážky se stejnou centralitou, tedy $\{D_m^\theta(z)\}$. V souladu s předpokladem 3 v oddíle 6.1.2 budeme dál považovat průměr $\{ \}$ za pravý statistický průměr a značit ho jako $\langle \rangle$. Tedy funkce $\langle D_m^\theta(z) \rangle$ je symetrická ve smyslu

$$\langle D_m^{\theta+\pi/n}(z) \rangle = (-1)^m \langle D_m^\theta(-z) \rangle, \quad (6.18a)$$

$$\overline{\langle D_m^\theta(z) \rangle} = \langle G^\theta(\bar{z}) \rangle. \quad (6.18b)$$

Pokud je navíc počet srážek nekonečný a pokud je detektor symetrický v azimutálním úhlu, je funkce $\langle D_m^\theta(z) \rangle$ nezávislá na θ .

Definujme nyní kumulanty, označme je jako d_k , rozvojem

$$\frac{\langle D_m^\theta(z) \rangle}{\langle G^\theta(z) \rangle} = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{z^k}{k!} d_k. \quad (6.19)$$

²Stejně jako u metody kumulantů, je tento průměr jiný než námi normálně používaný průměr přes všechny srážky značený $\langle \rangle$, proto je opatřen indexem „prot“, pro větší přehlednost textu ale definujeme $\langle \cos(mn(\psi - \theta))G^\theta(z) \rangle_{\text{prot}} \equiv \langle \cos(mn(\psi - \theta))G^\theta(z) \rangle$.

Pokud je v systému přítomen anizotropní tok, můžeme v rozvoji (6.17) ponechat pouze první člen a

$$\frac{\langle \cos(mn(\psi - \theta)) G^\theta(z) | \Phi_R \rangle}{\langle G^\theta(z) | \Phi_R \rangle} \simeq \langle \cos(mn(\psi - \theta)) | \Phi_R \rangle. \quad (6.20)$$

Což je stejné, jako předpokládat, že pro pevnou orientaci reakční roviny není proton korelován s ostatními částicemi a že neexistují autokorelace, tedy že proton není mezi částicemi, z kterých byla zkonstruována funkce $G^\theta(z)$ v čitateli zlomku na levé straně. Systematická chyba způsobená autokorelacemi (tedy když je proton zároveň i pion) je pro $m = 1$ malá, ale pro $m > 1$ začíná být znatelná [1], a proto označme

$$\tilde{G}^\theta(z) = \frac{G^\theta(z)}{1 + ir_0^\theta \cos(n(\psi - \theta))}$$

a dále budeme používat $\tilde{G}^\theta(z)$.

Jmenovatel na levé straně rovnice (6.20) je dán rovnicí (6.11) a pravá strana této rovnice je analogicky s rovnicí (6.10) dána

$$\langle \cos(mn(\psi - \theta)) | \Phi_R \rangle = v'_{mn} \cos(mn(\Phi_R - \theta)).$$

Celkem tedy máme

$$\frac{\langle \cos(mn(\psi - \theta)) \tilde{G}^\theta(z) | \Phi_R \rangle}{e^{\sigma^2 z^2 / 4 + V_n z \cos(n(\Phi_R - \theta))}} = v'_{mn} \cos(mn(\Phi_R - \theta)).$$

Nyní můžeme provést průměr přes všechny možné orientace Φ_R

$$\begin{aligned} \langle \tilde{D}_m^\theta(z) \rangle &= \int_0^{2\pi} \frac{d\Phi_R}{2\pi} \langle \cos(mn(\psi - \theta)) \tilde{G}^\theta(z) | \Phi_R \rangle \\ &= \int_0^{2\pi} \frac{d\Phi_R}{2\pi} e^{\sigma^2 z^2 / 4 + V_n z \cos(n(\Phi_R - \theta))} v'_{mn} \cos(mn(\Phi_R - \theta)) \\ &= v'_{mn} e^{\sigma^2 z^2 / 4} \int_0^{2\pi} \frac{d\Phi_R}{2\pi} e^{V_n z \cos(n(\Phi_R - \theta))} \cos(mn(\Phi_R - \theta)) \\ &= v'_{mn} e^{\sigma^2 z^2 / 4} I_m(V_n z), \end{aligned}$$

kde $\tilde{D}_m^\theta(z)$ značí funkci $D_m^\theta(z)$ vytvořenou za použití funkce $\tilde{G}^\theta(z)$ a $I_m(z)$ je modifikovaná Besselova funkce řádu m . $\langle D_m^\theta(z) \rangle$ tedy nezávisí na úhlu θ a navíc jsme použili předpoklad, že σ nezávisí na Φ_R (stejně jako při odvozování vztahu pro integrální tok), proto označme

$$\langle D_{m \text{ c.l.}}(z) \rangle = v'_{mn} e^{\sigma^2 z^2 / 4} I_m(V_n z).$$

Použitím rovnice (6.13) můžeme dále psát

$$\frac{\langle D_{m \text{ c.l.}}(z) \rangle}{\langle G_{\text{c.l.}}(z) \rangle} = \frac{I_m(V_n z)}{I_0(V_n z)} v'_{mn}. \quad (6.21)$$

Pokud bychom postupovali v souladu s metodou kumulantů, rozvinuli bychom tuto funkci do mocninné řady a porovnali koeficienty u příslušných členů s rozvojem daným rovnicí (6.19). Nás ale, stejně jako v případě toku integrálního, bude zajímat chování koeficientů

mocninné řady pro vysoká k . Protože funkce (6.21) splňuje podmínky kladené na funkci $f(z)$ v oddíle 6.1.3, je chování koeficientů pro vysoká k dáno vztahem [1]

$$a_k \sim -\Re \left(\frac{2}{(z_0)^{k+1}} \frac{I_m(V_n z_0)}{\left. \frac{dI_0(V_n z)}{dz} \right|_{z=z_0}} \right) v'_{mn} = -\Re \left(\frac{2}{(z_0)^{k+1}} \frac{I_m(V_n z_0)}{V_n I_1(V_n z_0)} \right) v'_{mn}.$$

Dosadíme-li za V_n jeho odhad pro θ z rovnice (6.16), leží pak pól v bodě $z_0 = ir_0^\theta$. Dosazením této hodnoty a použitím vztahu $I_m(ir) = r^m J_m(r)$, dostáváme

$$a_k \sim -\Re \left(\frac{2i^{m-1}}{(ir_0^\theta)^{k+1}} \frac{J_m(j_{01})}{J_1(j_{01})} \right) \frac{v'_{mn}{}^\theta}{V_n^\theta \{\infty\}},$$

přičemž pravá strana je nenulová, jen tehdy, když $k = 2k' + m$, $k' \in \mathbb{N}_0$ a odhad diferenciálního toku v'_{mn} za použití odhadu toku integrálního $V_n^\theta \{\infty\}$ jsme označili $v'_{mn}{}^\theta$.

Také rovnice (6.19) splňuje podmínky pro funkci $f(z)$ v oddíle 6.1.3 a její koeficienty mocninného rozvoje pro velká k jsou dány vztahem

$$a_k \sim -\Re \left(\frac{2}{(z_0)^{k+1}} \frac{\langle \tilde{D}_m^\theta(z_0) \rangle}{\left. \frac{d\langle G^\theta(z) \rangle}{dz} \right|_{z=z_0}} \right), \quad (6.22)$$

kde singularity $\tilde{D}_m^\theta(z)$ jsou opět nulové body funkce $G^\theta(z)$. Stejně jako v případě integrálního toku, je reálná část prvního nulového bodu z_0 nepodstatná a proto položíme $z_0 = ir_0^\theta$. Derivaci ve jmenovateli vypočteme jako

$$\frac{d\langle G^\theta(z) \rangle}{dz} = \left\langle \sum_j \frac{\cos(n(\phi_j - \theta))}{1 + z \cos(n(\phi_j - \theta))} G^\theta(z) \right\rangle.$$

Nyní můžeme porovnat koeficienty (6.2.1) a (6.22) pro $k \rightarrow 2k + m$

$$-\Re \left(\frac{2i^{m-1}}{(ir_0^\theta)^{2k+m+1}} \frac{J_m(j_{01})}{J_1(j_{01})} \right) \frac{v'_{mn}{}^\theta}{V_n^\theta \{\infty\}} = -\Re \left(\frac{2}{(ir_0^\theta)^{2k+m+1}} \frac{\langle \tilde{D}_m^\theta(ir_0^\theta) \rangle}{\left\langle \sum_j \frac{\cos(n(\phi_j - \theta))}{1 + ir_0^\theta \cos(n(\phi_j - \theta))} G^\theta(ir_0^\theta) \right\rangle} \right)$$

a dostaneme

$$\frac{v'_{mn}{}^\theta \{\infty\}}{V_n^\theta \{\infty\}} \equiv \frac{J_1(j_{01})}{J_m(j_{01})} \Re \left(\frac{\left\langle G^\theta(ir_0^\theta) \frac{\cos(mn(\psi - \theta))}{1 + ir_0^\theta w_\psi \cos(n(\psi - \theta))} \right\rangle_{\text{prot}}}{i^{m-1} \left\langle G^\theta(ir_0^\theta) \sum_j \frac{w_j \cos(n(\phi_j - \theta))}{1 + ir_0^\theta w_j \cos(n(\phi_j - \theta))} \right\rangle} \right), \quad (6.23)$$

kde jsme, pro větší obecnost, uvedli případ s vahami částic w_j a protonů w_ψ a také jsme explicitně vyznačili průměrování přes všechny protony ve všech srážkách $\langle \rangle_{\text{prot}}$. Jako v případě integrálního toku, platí pro odhady toku diferenciálního vztah

$$v'_{mn}{}^{\theta+\pi/n} = v'_{mn}{}^\theta.$$

Proto můžeme volit úhel θ z intervalu $\langle 0, \pi/n \rangle$. Abychom získali odhad $v'_{mn}{}^\theta \{\infty\}$ s menší statistickou chybou, stačí provést průměr $v'_{mn}{}^\theta \{\infty\}$ přes θ , jako v případě integrálního toku. Poznamenejme, že pokud přintegrujeme rovnici (6.23) přes celý fázový prostor (p_T a y), nedostaneme přesně kvůli odstraněným autokorelacím tok integrální.

Pokud v čitateli na pravé straně rovnice (6.23) provedeme záměnu $\cos(mn(\psi - \theta)) \rightarrow \sin(mn(\psi - \theta))$, měl by být výsledek v mezích statistické chyby roven nule, pokud je zachována parita.

6.3 Chyby metody

Stejně jako v případě metody kumulantů, i zde uvedeme jen výsledné vztahy pro určení statistických a systematických chyb, detailnější popis lze nalézt v [1].

Systematická chyba je způsobena dvěma aproximacemi. První byla ponechat pouze první člen v rozvoji (6.6) a druhá byl předpoklad nezávislosti σ na úhlu reakční roviny Φ_R při odvození rovnice (6.12). Řádově je relativní systematická chyba určení integrálního toku rovna

$$\frac{V_n\{\infty\} - V_n}{V_n} = \mathcal{O}\left(\frac{1}{M}\right) + \mathcal{O}\left(\frac{1}{(Mv_n)^2}\right) + \mathcal{O}\left(\frac{v_{2n}}{Mv_n^2}\right).$$

Systematická chyba odhadu diferenciálního toku v'_n je chybou relativní a řádově je srovnatelná se systematickou chybou pro integrální tok, přičemž pro sférické harmoniky vyšších řádů v'_{mn} , $m > 1$ je při neodstranění autokorelací výrazně vyšší.

Statistická chyba vzniká kvůli konečnému počtu srážek, které jsou k dispozici a je závislá na parametru rozlišení χ definovaném jako

$$\chi \equiv \frac{V_n}{\sigma},$$

kde V_n je definován rovnicí (6.9) a σ rovnicí (6.8). Definujme statistickou chybu odhadu $V_n^\theta\{\infty\}$ následovně

$$\delta V_n^\theta \equiv V_n^\theta\{\infty\} - V_n.$$

Pomocí parametru rozlišení pak můžeme vyjádřit korelaci $\langle \delta V_n^\theta \delta V_n^{\theta'} \rangle$ jako

$$\begin{aligned} \frac{\langle \delta V_n^\theta \delta V_n^{\theta'} \rangle}{V_n^2} &= \frac{1}{2N_{\text{evts}} j_{01}^2 J_1(j_{01})^2} \left\{ \exp\left[\frac{j_{01}^2}{2\chi^2} \cos(n(\theta - \theta'))\right] J_0\left(2j_{01} \sin\left(\frac{n(\theta - \theta')}{2}\right)\right) \right. \\ &\quad \left. + \exp\left[-\frac{j_{01}^2}{2\chi^2} \cos(n(\theta - \theta'))\right] J_0\left(2j_{01} \cos\left(\frac{n(\theta - \theta')}{2}\right)\right) \right\}. \end{aligned}$$

S pomocí těchto korelací můžeme vypočítat jak relativní statistickou chybu V_n^θ , tak relativní statistickou chybu jejich průměru V_n , přičemž statistická chyba se s rostoucím počtem průměrovaných V_n^θ snižuje. Prakticky je dostatečné vypočítat V_n^θ pro 4, nebo 5 hodnot úhlu θ .

V případě výpočtu statistické chyby určení diferenciálního toku $\delta v'_{mn}$ postupujeme stejně, jako výše u toku integrálního. Rozdíl spočívá v tom, že statistická chyba u diferenciálního toku je chybou absolutní. Pro diferenciální tok tedy zavedeme korelace jako

$$\begin{aligned} \langle \delta v'_{mn}\{\infty\} \delta v'_{mn}\{\infty\} \rangle &= \frac{\cos(mn(\theta - \theta'))}{4N' J_m(j_{01})^2} \left\{ \exp\left[\frac{j_{01}^2}{2\chi^2} \cos(n(\theta - \theta'))\right] J_0\left(2j_{01} \sin\left(\frac{n(\theta - \theta')}{2}\right)\right) \right. \\ &\quad \left. + (-1)^m \exp\left[-\frac{j_{01}^2}{2\chi^2} \cos(n(\theta - \theta'))\right] J_0\left(2j_{01} \cos\left(\frac{n(\theta - \theta')}{2}\right)\right) \right\}, \end{aligned}$$

kde N' je celkový počet protonů ve všech srážkách. Pomocí těchto korelací pak můžeme vypočítat statistickou chybu jednotlivých v'_{mn} i jejich průměru v'_{mn} . I zde platí, že s rostoucím počtem průměrovaných v'_{mn} statistická chyba v'_{mn} klesá.

Poznamenejme, že pokud v analýze klesne parametr rozlišení $\chi^\theta \equiv V_n^\theta\{\infty\}/\sigma$ pod hodnotu $j_{01}/\sqrt{2 \ln(N_{\text{evts}}/2)}$, nedá se výsledný odhad toku interpretovat jako pravý částicový tok ve srážce a je pouze důsledkem statistických fluktuací.

Tabulka 6.1: Výsledné hodnoty integrálního (v_2) a diferenciálního (v_2') toku vypočtené pomocí metody Lee-Yangových nul pro multiplicitu $M = 300$ a počet srážek v jednotlivých sadách $N_{\text{event}} = 10000$.

a [–]	0,02	0,04	0,06	0,08	0,10
v_2 [–]	0,0388	0,0391	0,0456	0,0615	0,0745
δv_2 [%]	2,241	3,958	2,731	1,066	0,731
$v_2'(0,0 - 0,3)$ [–]	$0,0819 \pm 0,0048$	$0,0336 \pm 0,0085$	$0,0156 \pm 0,0059$	$0,0143 \pm 0,0023$	$0,0129 \pm 0,0017$
$v_2'(0,3 - 0,6)$ [–]	$0,0389 \pm 0,0048$	$0,0308 \pm 0,0085$	$0,0250 \pm 0,0059$	$0,0402 \pm 0,0023$	$0,0457 \pm 0,0017$
$v_2'(0,6 - 0,9)$ [–]	$0,0541 \pm 0,0048$	$0,0509 \pm 0,0085$	$0,0464 \pm 0,0059$	$0,0609 \pm 0,0023$	$0,0750 \pm 0,0017$
$v_2'(0,9 - 1,2)$ [–]	$0,0666 \pm 0,0048$	$0,0435 \pm 0,0085$	$0,0632 \pm 0,0059$	$0,0842 \pm 0,0023$	$0,1034 \pm 0,0017$
$v_2'(1,2 - 1,5)$ [–]	$0,0549 \pm 0,0048$	$0,0541 \pm 0,0085$	$0,0739 \pm 0,0059$	$0,1070 \pm 0,0023$	$0,1355 \pm 0,0017$

6.4 Výsledky analýzy

Analýza byla provedena pomocí programu *Zeroes.cc*, který se nachází na přiloženém CD. Program je opět napsán v jazyce C++ dle standardu POSIX threads. Program při spuštění přijímá celkem tři parametry, název souboru se vstupními daty, odhad hodnoty integrálního eliptického toku a volitelně slovo *test*. Pokud není třetího parametru použito, musí být vstupní soubor ve formátu OSCAR1997A, pokud je třetí parametr přítomen, musí být vstupní soubor ve formátu, který produkuje generátor popsáným v kapitole 2. Druhý parametr je zde kvůli zrychlení metody, kdy minimum funkce $|\langle G^\theta(ir) \rangle|$ je hledáno buď metodou zlatého řezu, nebo Brentovou metodou (viz např. [11]) v závislosti na nastavení proměnné *vypocet* v samotném programu. Pokud není odhad integrálního eliptického toku k dispozici, lze stále najít minimum $|\langle G^\theta(ir) \rangle|$ vykreslením této funkce do grafu. Avšak použití jedné ze dvou uvedených metod na hledání minima je přibližně 4krát rychlejší (v závislosti na počtu bodů při vykreslování grafu).

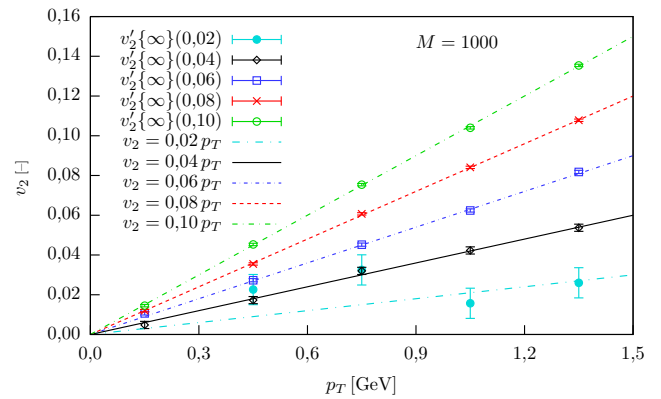
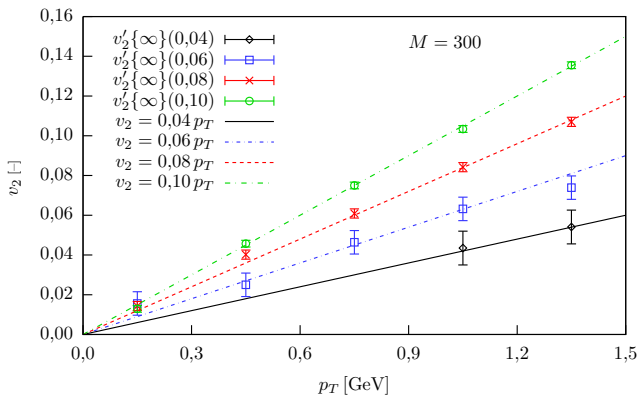
Diferenciální tok se počítá pomocí integrálního toku stejného řádu, tedy $m = 1$. Spolu s těmito hodnotami je vypočtena i relativní statistická chyba integrálního toku δv_2 a absolutní statistická chyba toku diferenciálního $\delta v_2'$. Výsledné hodnoty integrálního, resp. diferenciálního eliptického toku byly získány jako průměr přes pět odhadů toků V_2^θ , resp. $v_2'^\theta$ s různým úhlem $\theta \in \langle 0, \pi/5 \rangle$.

Analyzovány byly stejné skupiny srážek jako v případě obou předchozích metod, přičemž jako odhad integrálního toku byl použit výsledek ze čtyřčasticových kumulantů. Hledání minima pak probíhalo metodou zlatého řezu. Vypočtené hodnoty integrálního a diferenciálního eliptického toku jsou pro případ $M = 300$, resp. $M = 1000$ v tabulce 6.1, resp. 6.2. Graficky jsou pak vyneseny v grafech na obrázku 5.1 vlevo, resp. vpravo. V grafu je i nyní vnesen generovaný tok v_2 a každá hodnota v_2' je umístěna do středu p_T binu pro který byla spočtena. V tabulkách jsou sady srážek pro jednotlivé hodnoty parametru a (udávajícího závislost generovaného v_2 na p_T dle rovnice (2.1)) umístěny ve sloupcích. V posledních pěti řádcích jsou pak hodnoty diferenciálního eliptického toku vypočtené v p_T binech daných v kulatých závorkách. Hodnoty jsou uvedeny i s absolutní statistickou chybou $\delta v_2'$. V případě diferenciálního toku s $v_2 = 0,02 p_T$ a $M = 300$ (viz 6.1) metoda zcela selhala a produkovala obrovské hodnoty, proto nebyl tento případ vnesen do grafu 6.2. Stejně tak nebyly ze stejného důvodu vykresleny první tři hodnoty pro případ $v_2 = 0,04 p_T$ a $M = 300$. Odstraněna byla i hodnota $v_2'(0,0 - 0,3)$ pro $v_2 = 0,02 p_T$ a $M = 1000$, protože byla záporná.

Z výsledných hodnot jasně vyplývá silná závislost metody na počtu částic M a na síle

Tabulka 6.2: Výsledné hodnoty integrálního (v_2) a diferenciálního (v_2') toku vypočtené pomocí metody Lee-Yangových nul pro multiplicitu $M = 1000$ a počet srážek v jednotlivých sadách $N_{\text{event}} = 10000$.

a [-]	0,02	0,04	0,06	0,08	0,10
v_2 [-]	0,0197	0,0301	0,0455	0,0600	0,0749
δv_2 [%]	6,498	1,482	0,605	0,407	0,312
$v_2'(0,0 - 0,3)$ [-]	$-0,0006 \pm 0,0076$	$0,0048 \pm 0,0018$	$0,0106 \pm 0,0008$	$0,0120 \pm 0,0006$	$0,0145 \pm 0,0006$
$v_2'(0,3 - 0,6)$ [-]	$0,0226 \pm 0,0076$	$0,0173 \pm 0,0018$	$0,0273 \pm 0,0008$	$0,0355 \pm 0,0006$	$0,0453 \pm 0,0006$
$v_2'(0,6 - 0,9)$ [-]	$0,0325 \pm 0,0076$	$0,0320 \pm 0,0018$	$0,0452 \pm 0,0008$	$0,0607 \pm 0,0006$	$0,0754 \pm 0,0006$
$v_2'(0,9 - 1,2)$ [-]	$0,0157 \pm 0,0076$	$0,0423 \pm 0,0018$	$0,0624 \pm 0,0008$	$0,0841 \pm 0,0006$	$0,1040 \pm 0,0006$
$v_2'(1,2 - 1,5)$ [-]	$0,0260 \pm 0,0076$	$0,0537 \pm 0,0018$	$0,0818 \pm 0,0008$	$0,1078 \pm 0,0006$	$0,1354 \pm 0,0006$



Obrázek 6.1: Výsledné hodnoty diferenciálního toku v_2' vypočtené pomocí metody Lee-Yangových nul pro generované závislosti $v_2(p_T)$. Multiplicita M je vyznačena v grafu a počet srážek v jednotlivých sadách $N_{\text{event}} = 10000$.

toku. Zatím co pro silnější tok ($v_2 = 0,08 p_T$ s $M = 300$ a $v_2 = 0,04 p_T$ s $M = 1000$) jsou výsledky ve velmi dobrém souladu s generovaným tokem a statistické chyby nejsou velké, není pro slabé toky a nízkou multiplicitu metoda použitelná. Jeden vypočtený tok byl dokonce záporný, viz tabulka 6.2, což v tomto případě svědčí o jejím selhání. Připomeňme, že hodnoty eliptického toku, jak integrálního, tak diferenciálního, jsou výsledkem průměru přes několik (v našem případě 5) odhadů pro různé úhly θ , tedy když jsou průměrné hodnoty záporné, je metoda opravdu nepoužitelná. I přes výše zmíněné nedostatky, můžeme metodu dobře aplikovat na výpočet eliptického toku při vyšších multiplicitách a silnějších tocích. V její neprospěch ale mluví také relativní náročnost výpočtů, obzvláště když se minimum funkce $|\langle G^\theta(ir) \rangle|$ hledá vykreslením grafu.

Kapitola 7

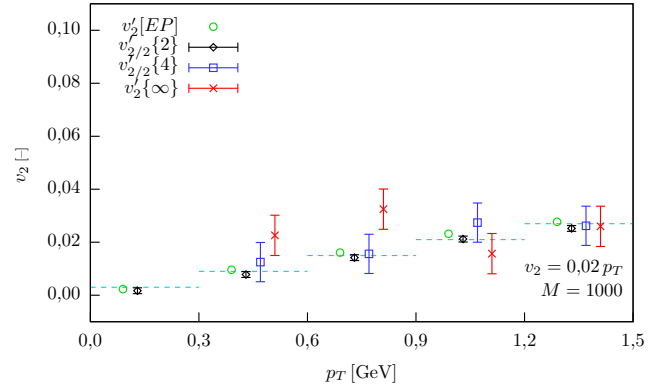
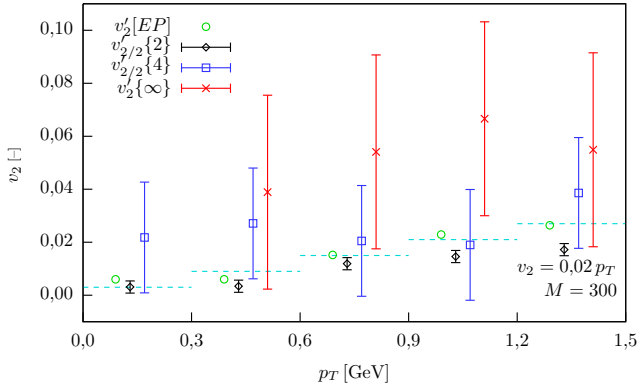
Závěr

Tato práce se zabývala různými metodami pro výpočet anizotropního toku s důrazem na tok eliptický. Pro tento účel byly uvažovány celkem tři metody, metoda srážkové roviny, metoda kumulantů a metoda Lee-Yangových nul. Abychom mohli lépe porovnat jejich vlastnosti, jsou v grafech na obrázcích 7.1, 7.2, 7.3, 7.4 a 7.5 shrnuty výsledky výpočtu diferenciálního toku těmito metodami pro různé multiplicity a závislosti eliptického toku na příčné hybnosti (viz legendy v grafech). Výpočet pomocí metody srážkové roviny je označen jako $v'_2[EP]$, pomocí metody kumulantů jako $v'_{2/2}\{k\}$, kde k je její řád, a pomocí metody Lee-Yangových nul jako $v'_2\{\infty\}$. Pro lepší vizualizaci jsou hodnoty pro jednotlivé metody rozprostřeny v daném p_T binu, přičemž generovaná hodnota diferenciálního toku v'_2 v binu je vyznačena přerušovanou vodorovnou čarou mající délku binu.

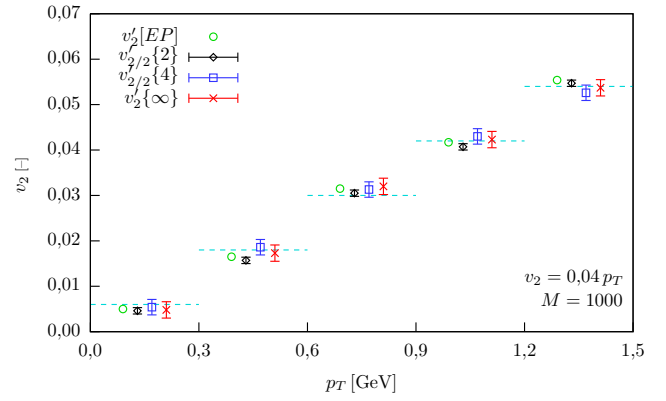
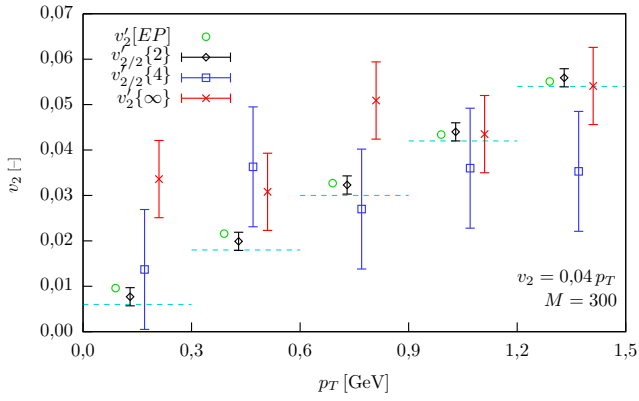
Pro srovnání odhadů integrálního toku byly vytvořeny podobné grafy, viz obrázek 7.6. Integrální tok vypočtený pomocí jednotlivých metod je vyneseno v závislosti na parametru a (který určuje $v_2(p_T)$ dle rovnice (2.1), přičemž $b = 0$) do jednotlivých binů. Generovaný integrální tok je pak v jednotlivých binech vyznačen vodorovnou přerušovanou čarou.

Z těchto všech grafů je patrné, že nejlepší výsledky (nejlepší shodu s generovaným tokem) mají metoda srážkové roviny a metoda dvoučásticových kumulantů. Avšak skutečnost, že pracujeme s ideálním případem, kdy ve srážkách nejsou přítomny kolektivní efekty nepocházející od toku, efektivně znevýhodňuje metodu Lee-Yangových nul a čtyřčásticových kumulantů oproti obou zbylým metodám. Je rozumné předpokládat, že pokud by se jednalo o reálnou srážku, zhoršil by se odhad pomocí metody srážkové roviny a dvoučásticových kumulantů mnohem více, než u metod čtyřčásticových kumulantů a Lee-Yangových nul. Jako vhodné se každopádně jeví analyzovat anizotropní tok pomocí více metod najednou a výsledky spolu porovnat.

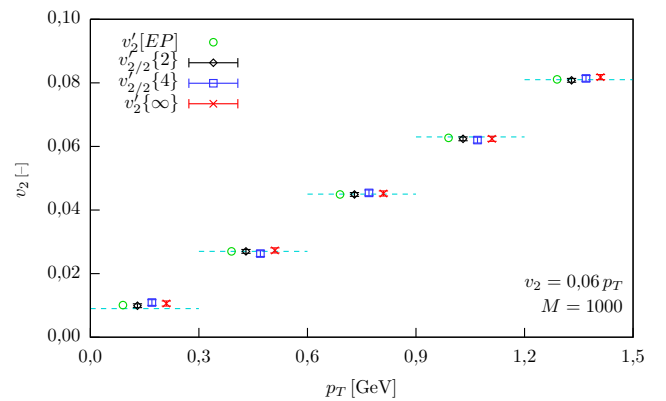
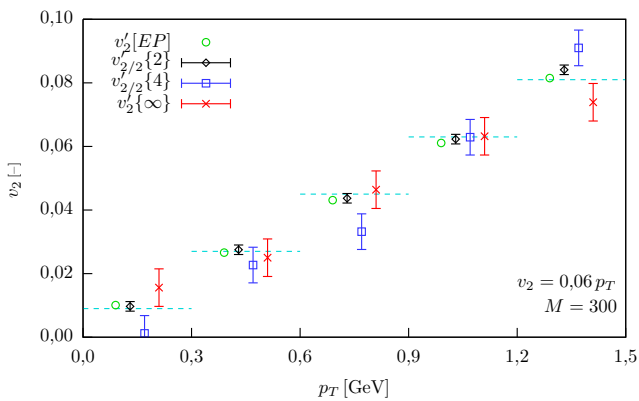
Kromě teoretických popisů metod byly jako součást práce vytvořeny počítačové programy pro jejich počítání, které se mohou bez větších úprav použít na analýzu reálných dat. Také byl vytvořen jednoduchý generátor srážek, který posloužil k otestování funkčnosti a demonstraci některých vlastností diskutovaných metod.



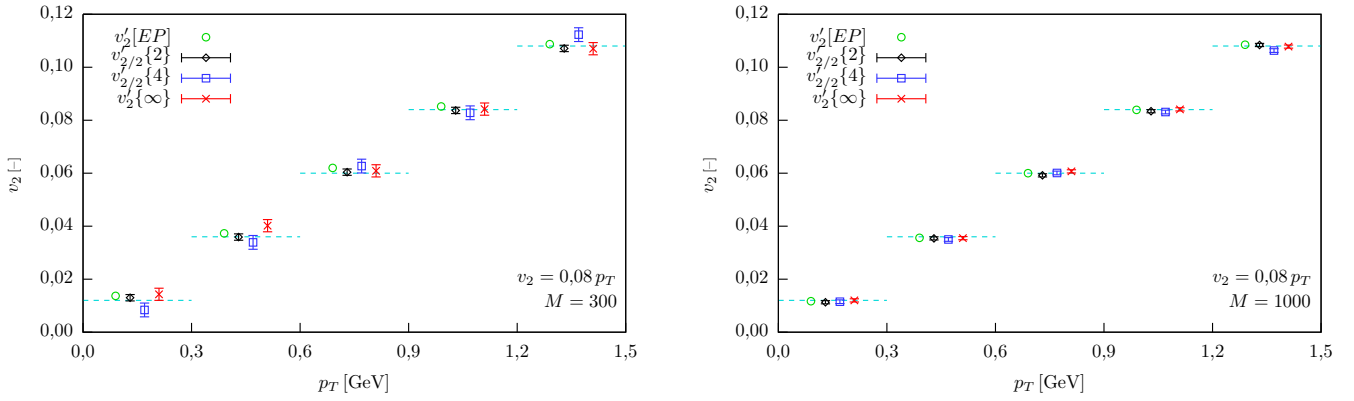
Obrázek 7.1: Diferenciální tok v_2' vypočtený metodou srážkové roviny $v_2'[EP]$, metodou kumulantů $v_2'/2\{k\}$ řádu k a metodou Lee-Yangových nul $v_2'\{\infty\}$ pro $v_2(p_T) = 0,02 p_T$, $N_{\text{event}} = 10000$ a různé multiplicity M , viz legenda a text.



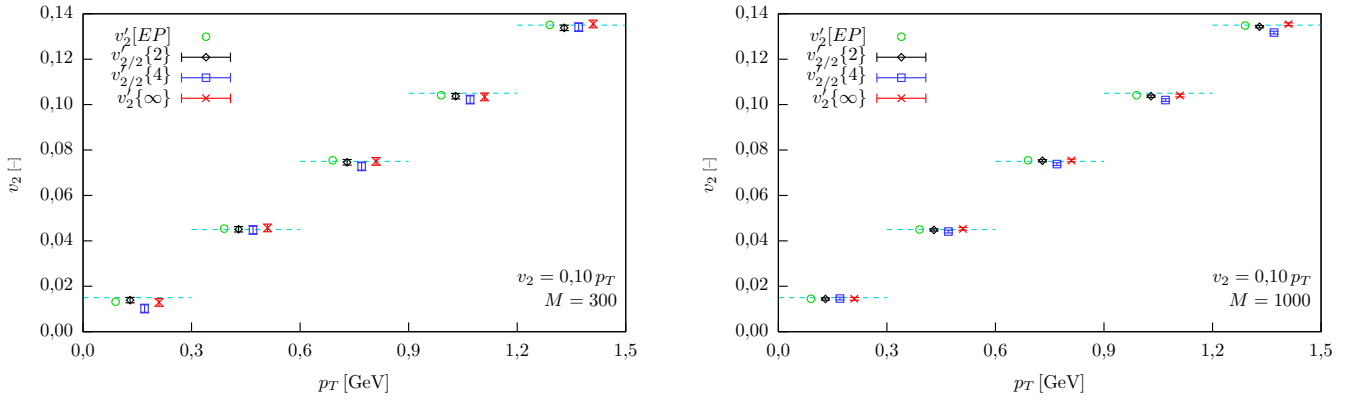
Obrázek 7.2: Diferenciální tok v_2' vypočtený metodou srážkové roviny $v_2'[EP]$, metodou kumulantů $v_2'/2\{k\}$ řádu k a metodou Lee-Yangových nul $v_2'\{\infty\}$ pro $v_2(p_T) = 0,04 p_T$, $N_{\text{event}} = 10000$ a různé multiplicity M , viz legenda a text.



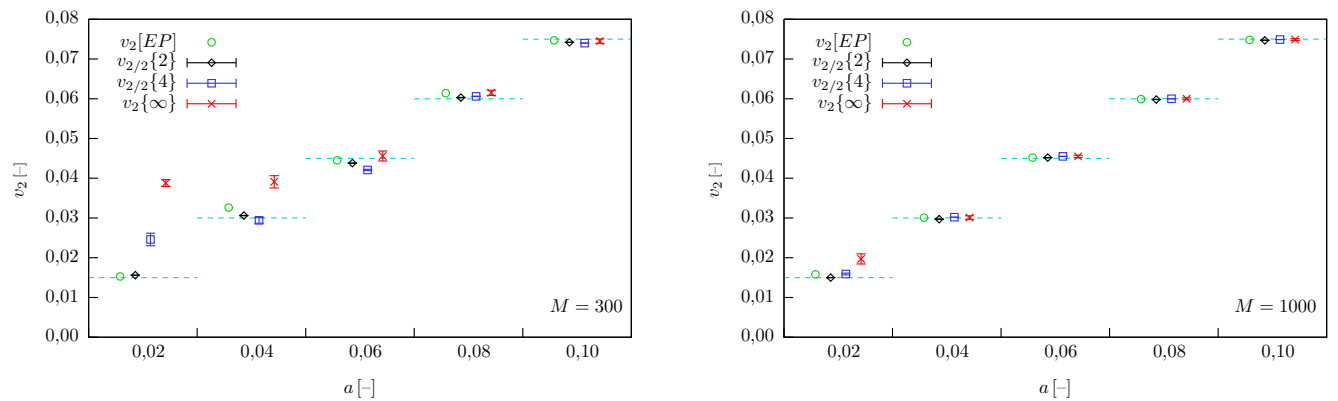
Obrázek 7.3: Diferenciální tok v_2' vypočtený metodou srážkové roviny $v_2'[EP]$, metodou kumulantů $v_2'/2\{k\}$ řádu k a metodou Lee-Yangových nul $v_2'\{\infty\}$ pro $v_2(p_T) = 0,06 p_T$, $N_{\text{event}} = 10000$ a různé multiplicity M , viz legenda a text.



Obrázek 7.4: Diferenciální tok v_2' vypočtený metodou srážkové roviny $v_2'[EP]$, metodou kumulantů $v_2'/2\{k\}$ řádu k a metodou Lee-Yangových nul $v_2'\{\infty\}$ pro $v_2(p_T) = 0,08 p_T$, $N_{\text{event}} = 10000$ a různé multiplicity M , viz legenda a text.



Obrázek 7.5: Diferenciální tok v_2' vypočtený metodou srážkové roviny $v_2'[EP]$, metodou kumulantů $v_2'/2\{k\}$ řádu k a metodou Lee-Yangových nul $v_2'\{\infty\}$ pro $v_2(p_T) = 0,10 p_T$, $N_{\text{event}} = 10000$ a různé multiplicity M , viz legenda a text.



Obrázek 7.6: Integrovaný tok v_2 vypočtený metodou srážkové roviny $v_2[EP]$, metodou kumulantů $v_2/2\{k\}$ řádu k a metodou Lee-Yangových nul $v_2\{\infty\}$ pro $v_2(p_T) = a p_T$, $N_{\text{event}} = 10000$ a různé multiplicity M , viz legenda a text.

Literatura

- [1] BHALERAO, R. S.; BORGHINI, N.; OLLITRAULT, J.-Y.: Analysis of anisotropic flow with Lee-Yang zeroes. *Nucl. Phys. A*, ročník 727, č. 3-4, listopad 2003: s. 373 – 426, ISSN 0375-9474, doi:DOI:10.1016/j.nuclphysa.2003.08.007.
- [2] BHALERAO, R. S.; BORGHINI, N.; OLLITRAULT, J.-Y.: Anisotropic flow from Lee-Yang zeros: a practical guide. *J. Phys. G: Nucl. Part. Phys.*, ročník 30, č. 8, srpen 2004: str. S1213, ISSN 1361-6471, doi:10.1088/0954-3899/30/8/092.
- [3] BORGHINI, N.; DINH, P. M.; OLLITRAULT, J.-Y.: Flow analysis from cumulants: A practical guide. [on-line], říjen 2001, arXiv:nucl-ex/0110016.
URL <<http://arxiv.org/abs/nucl-ex/0110016>>
- [4] BORGHINI, N.; DINH, P. M.; OLLITRAULT, J.-Y.: Flow analysis from multiparticle azimuthal correlations. *Phys. Rev. C*, ročník 64, č. 5, září 2001: str. 054901, ISSN 1089-490X, doi:10.1103/PhysRevC.64.054901.
- [5] BORGHINI, N.; DINH, P. M.; OLLITRAULT, J.-Y.: New method for measuring azimuthal distributions in nucleus-nucleus collisions. *Phys. Rev. C*, ročník 63, č. 5, duben 2001: str. 26, ISSN 1089-490X, doi:10.1103/PhysRevC.63.054906.
- [6] FOG, A.: Pseudo random number generators. srpen 2010.
URL <<http://agner.org/random/>>
- [7] OLLITRAULT, J.-Y.: Anisotropy as a signature of transverse collective flow. *Phys. Rev. D*, ročník 46, č. 1, červenec 1992: s. 229–245, ISSN 1550-2368, doi:10.1103/PhysRevD.46.229.
- [8] OLLITRAULT, J.-Y.: On the measurement of azimuthal anisotropies in nucleus-nucleus collisions. [on-line], listopad 1997, arXiv:nucl-ex/9711003v2.
URL <<http://arxiv.org/abs/nucl-ex/9711003v2>>
- [9] OLLITRAULT, J.-Y.; POSKANZER, A. M.; VOLOSHIN, S. A.: Effect of flow fluctuations and nonflow on elliptic flow methods. *Phys. Rev. C*, ročník 80, č. 1, červenec 2009: str. 014904, ISSN 1089-490X, doi:10.1103/PhysRevC.80.014904.
- [10] POSKANZER, A. M.; VOLOSHIN, S. A.: Methods for analyzing anisotropic flow in relativistic nuclear collisions. *Phys. Rev. C*, ročník 58, č. 3, září 1998: s. 1671–1678, ISSN 1089-490X, doi:10.1103/PhysRevC.58.1671.
- [11] PRESS, W. H.; TEUKOLSKY, S. A.; VETTERLING, W. T.; aj.: *Numerical Recipes in C*. Cambridge University Press, druhé vydání, 1992, ISBN 0521431085, 994 s.

- [12] SELYUZHENKOV, I.; VOLOSHIN, S. A.: Effects of nonuniform acceptance in anisotropic flow measurements. *Phys. Rev. C*, ročník 77, č. 3, březen 2008: str. 034904, ISSN 1089-490X, doi:10.1103/PhysRevC.77.034904.
- [13] STEPHANOV, M.; RAJAGOPAL, K.; SHURYAK, E.: Event-by-event fluctuations in heavy ion collisions and the QCD critical point. *Phys. Rev. D*, ročník 60, č. 11, listopad 1999: str. 114028, doi:10.1103/PhysRevD.60.114028.
- [14] van KAMPEN, N. G.: *Stochastic Processes in Physics and Chemistry*. North Holland, třetí vydání, 2007, ISBN 0444529659.
- [15] VOLOSHIN, S. A.; POSKANZER, A. M.; SNELLINGS, R.: Collective phenomena in non-central nuclear collisions. [on-line], 2008, arXiv:0809.2949v2 [nucl-ex]. URL <<http://arxiv.org/abs/0809.2949v2>>
- [16] VOLOSHIN, S. A.; ZHANG, Y.: Flow study in relativistic nuclear collisions by Fourier expansion of Azimuthal particle distributions. *Z. Phys.*, ročník C70, 1996: s. 665–672, doi:10.1007/s002880050141.