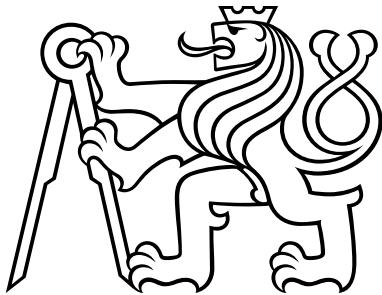


ČESKÉ VYSOKÉ UČENÍ TECHNICKÉ  
V PRAZE

Fakulta jaderná a fyzikálně inženýrská

Katedra fyziky



**Diplomová práce**

**Fluktuace multiplicity ve srážkách těžkých  
iontů**

**Bc. Radka Sochorová**

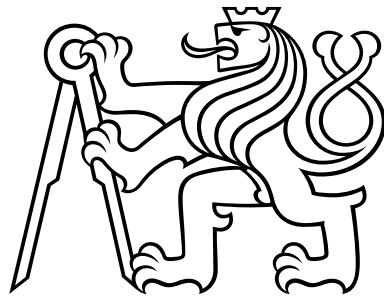
**Vedoucí práce: Doc. Dr. Boris Tomášik**

**Praha, 2018**

CZECH TECHNICAL UNIVERSITY  
IN PRAGUE

Faculty of Nuclear Sciences and Physical  
Engineering

Department of Physics



**Master's Thesis**

**Multiplicity fluctuations in heavy-ion  
collisions**

**Bc. Radka Sochorová**

**Supervisor: Doc. Dr. Boris Tomášik**

**Prague, 2018**



*Katedra:* fyziky

*Akademický rok:* 2017/18

## ZADÁNÍ DIPLOMOVÉ PRÁCE

*Student:* Bc. Radka Sochorová

*Studijní program:* Aplikace přírodních věd

*Obor:* Experimentální jaderná a čisticová fyzika

*Název práce:* Fluktuace multiplicity ve srážkách těžkých iontů  
*(česky)*

*Název práce:* Multiplicity fluctuations in heavy-ion collisions  
*(anglicky)*

### *Pokyny pro vypracování:*

- 1) Fluktuace počtu částic a antičástic, které nesou zachovávající se náboj. Časový vývoj těchto fluktuací podle řídící rovnice.
- 2) Odvození nové řídící rovnice pro rozdělení multiplicity v případě systému chemických reakcí v nichž jeden z produktů může být i reaktantem.
- 3) Aplikace odvozené rovnice pro studium časového vývoje rozdělení počtu protonů ve fireballu, kterému se snižuje teplota a roste objem.
- 4) Porovnání teoretických výsledků s experimentálními daty.

*Doporučená literatura:*

- [1] C.M. Ko et al.: Kinetic equation with exact charge conservation. Phys. Rev. Lett. 86, 5438 (2001)
- [2] D.A. McQuarrie: Kinetics of small systems I. J. Chem. Phys. 35, 433 (1963)
- [3] D.A. McQuarrie et al.: Kinetics of small systems II. J. Chem. Phys. 40, 2914 (1964)
- [4] D.T. Gillespie: Exact stochastic simulation of coupled chemical reactions. J. Phys. Chem. 81, 2340 (1977)
- [5] G. Nicolis: Fluctuations around nonequilibrium states in open nonlinear systems. J. Stat. Phys. 6, 195 (1972)
- [6] L. Adamczyk et al. (STAR collaboration): Energy dependence of moments of net-proton multiplicity distributions at RHIC. Phys. Rev. Lett. 112, 032302 (2015)

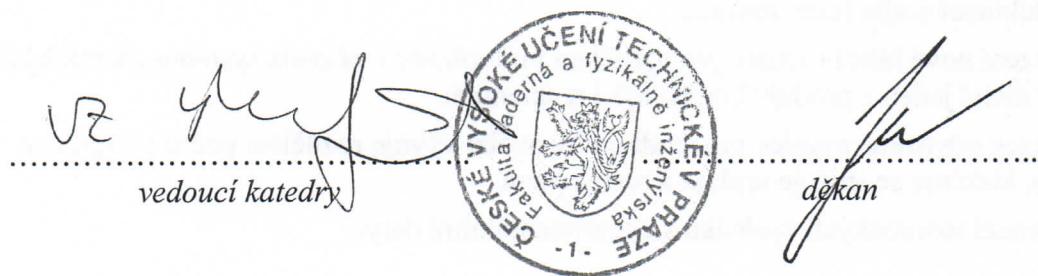
*Jméno a pracoviště vedoucího diplomové práce:*

doc. Dr. Boris Tomášik, Katedra fyziky, FJFI ČVUT v Praze

*Datum zadání diplomové práce:* 24.10.2017

*Termín odevzdání diplomové práce:* 07.05.2018

*Doba platnosti zadání je dva roky od data zadání.*



*V Praze dne* 24.10.2017

**Prohlášení:**

Prohlašuji, že jsem svou diplomovou práci vypracovala samostatně a použila jsem pouze podklady (literaturu, projekty, software, atd.) uvedené v přiloženém seznamu.

Nemám závažný důvod proti užití tohoto školního díla ve smyslu § 60 Zákona č. 121/2000 Sb., o právu autorském, o právech souvisejících s právem autorským a o změně některých zákonů (autorský zákon).

V Praze dne

Radka Sochorová

*Název práce:*

## **Fluktuace multiplicity ve srážkách těžkých iontů**

*Autor:* Bc. Radka Sochorová

*Obor:* Experimentální jaderná a čisticová fyzika

*Druh práce:* Diplomová práce

*Vedoucí práce:* Doc. Dr. Boris Tomášik

---

*Abstrakt:*

Celkové pozorované multiplicity jednotlivých druhů částic z ultrarelativistických srážek těžkých iontů souhlasí se statistickým modelem při teplotách nad 160 MeV. V tomto případě jsou susceptibility vyšších řádů porovnávány s daty, která jsou spojená s fluktuacemi. Tato teplota je nižší než 160 MeV. Susceptibility různých řádů se přitom projevují ve vyšších momentech rozdělení multiplicity.

Cílem této práce je studovat vývoj rozdělení multiplicity za pomocí řídící rovnice. Nejdříve se zaměřujeme na vyšší faktoriální momenty, ze kterých můžeme následně odvodit všechny ostatní momenty jako např. centrální momenty nebo koeficient šikmosti a koeficient špičatosti. Jelikož nás zajímá čas termalizace faktoriálních momentů, nejdříve studujeme relaxaci rozdělení multiplicity pro konstantní teplotu. Potom necháme teplotu fireballu postupně klesat a sledujeme, jak se vyšší momenty chovají v tomto případě.

*Klíčová slova:* fázový přechod, řídící rovnice, faktoriální momenty, centrální momenty, koeficient šikmosti a špičatosti

*Title:*

## Multiplicity fluctuations in heavy-ion collisions

*Autor:* Bc. Radka Sochorová

---

*Abstract:*

The overall observed multiplicity of different types of particles from ultrarelativistic nuclear collisions agrees with the statistical model at temperatures above 160 MeV. The phase transition temperature can be also determined by lattice QCD methods. In this case are susceptibilities of higher orders compared with data associated with fluctuations. This temperature is lower than 160 MeV. Susceptibilities of different orders manifest themselves in higher moments of the multiplicity distribution.

The main aim of this work is to study the evolution of the multiplicity distribution with the help of a master equation. Particularly we focus on the higher factorial moments from which all other kinds of moments, eg. central moments or the coefficients of skewness and kurtosis, can be calculated. We first study thermalisation time of factorial moments when the temperature is fixed. Then we study the evolution of the moments in a situation with decreasing temperature.

*Key words:* phase transition, Master equation, factorial moments, central moments, coefficient of skewness and kurtosis

## **Poděkování**

Ráda bych poděkovala vedoucímu mé diplomové práce, Doc. Dr. Borisi Tomášikovi, za jeho ochotu, čas, pomoc, odborné rady a připomínky při vedení této práce. Dále bych chtěla poděkovat svým spolužákům a kamarádům za jejich podporu a cenné rady. Poděkování patří také mé rodině a mému příteli Janu Vozábovi za neustálou psychickou podporu po celou dobu zhodnocování této práce.

# Obsah

<b>Úvod</b>	<b>15</b>
<b>1 Ultrarelativistické srážky těžkých iontů</b>	<b>17</b>
1.1 Vysoko-energetické jaderné srážky . . . . .	17
1.2 Časový vývoj ultrarelativistické srážky těžkých iontů . . . . .	18
1.3 Od hadronů ke kvarkům a gluonům . . . . .	21
1.4 Kvantová chromodynamika (QCD) . . . . .	23
<b>2 Co víme o QCD fázovém diagramu?</b>	<b>25</b>
2.1 QCD na mřížce . . . . .	25
2.2 Fázový diagram . . . . .	27
2.3 Proč by se na konci křivky fázového přechodu prvního druhu měl nacházet kritický bod? . . . . .	28
2.4 Kritický bod . . . . .	29
<b>3 Rozdělení multiplicity</b>	<b>33</b>
3.1 Motivace . . . . .	33
3.2 Úvod . . . . .	33
3.3 Rovnice pro změnu multiplicity . . . . .	34
3.4 Multiplicita v rovnovážném stavu a relaxační čas . . . . .	36
3.5 Řídící rovnice . . . . .	38
3.6 Generující funkce . . . . .	38
3.7 Faktoriální momenty . . . . .	40
3.7.1 Centrální momenty . . . . .	40
3.8 Numerické řešení řídící rovnice . . . . .	42
3.8.1 Počáteční podmínky . . . . .	42
3.8.2 Časový vývoj faktoriálních momentů . . . . .	43
3.8.3 Výsledky . . . . .	43
<b>4 Řídící rovnice závislá na teplotě a reálném čase</b>	<b>47</b>
4.1 Motivace . . . . .	47

4.2	Chemické složení a reakce . . . . .	47
4.3	Účinné průřezy pro produkci kaonů . . . . .	48
4.4	Řídící rovnice závislá na reálném čase . . . . .	49
4.5	Reakce $\pi N \rightarrow K\Lambda$ . . . . .	50
4.6	Výsledky . . . . .	51
4.6.1	Konstantní teplota . . . . .	51
4.6.2	Postupná změna teploty . . . . .	54
4.6.3	Zdánlivá teplota vymrznutí . . . . .	60
<b>5</b>	<b>Centrální momenty</b>	<b>63</b>
5.1	Rovnovážné hodnoty centrálních momentů . . . . .	63
5.2	Časový vývoj centrálních momentů . . . . .	67
5.2.1	Další poměry centrálních momentů . . . . .	71
<b>6</b>	<b>Řídící rovnice pro reakci <math>p + \pi^- \rightarrow \Delta^0 \rightarrow n + \pi^0</math></b>	<b>75</b>
6.1	Motivace . . . . .	75
6.2	Řídící rovnice . . . . .	75
6.3	Parametrizace pion-nukleonových účinných průřezů . . . . .	76
6.4	Clebsch-Gordanovy koeficienty . . . . .	78
6.4.1	Konstantní teplota . . . . .	80
6.4.2	Postupná změna teploty . . . . .	82
<b>7</b>	<b>Řídící rovnice pro dvojici reakcí <math>p + \pi^- \rightarrow \Delta^0 \rightarrow n + \pi^0</math>, <math>p + \pi^0 \rightarrow \Delta^+ \rightarrow n + \pi^+</math></b>	<b>85</b>
7.1	Motivace . . . . .	85
7.2	Řídící rovnice pro reakci $A + B \rightleftharpoons C + D$ . . . . .	85
7.3	Řídící rovnice pro dvojici reakcí . . . . .	87
7.3.1	Přesné odvození . . . . .	88
7.3.2	Počáteční počty částic . . . . .	89
7.4	Výsledky . . . . .	91
7.4.1	Konstantní teplota . . . . .	91
7.4.2	Postupná změna teploty . . . . .	92
<b>8</b>	<b>Porovnání výsledků s experimentálními daty</b>	<b>95</b>
8.1	Motivace . . . . .	95

8.2 Počáteční podmínky . . . . .	95
8.3 Výsledky . . . . .	97
<b>Závěr</b>	<b>101</b>
<b>A Příloha: Vztahy pro modifikované Besselovy funkce</b>	<b>103</b>
<b>B Příloha: Odvození rovnovážného řešení pro dvojici řídících rovnic</b>	<b>107</b>
<b>Příloha B: Odvození rovnovážné hodnoty pro dvojici řídících rovnic</b>	<b>107</b>
B.1 Odvození rovnovážného řešení pro jednu řídící rovnice . . . . .	107
B.2 Odvození rovnovážného řešení pro dvojici řídících rovnic . . . . .	108
<b>C Příloha: Odvození rovnovážných hodnot faktoriálních momentů</b>	<b>111</b>
<b>Příloha C: Odvození rovnovážných hodnot faktoriálních momentů</b>	<b>111</b>
<b>D Příloha: Tabulky zdánlivých teplot a zdánlivých časů vymrznutí pro faktoriální a centrální momenty</b>	<b>115</b>
<b>Příloha D: Tabulky zdánlivé teploty a zdánlivého času vymrznutí pro faktoriální a centrální momenty</b>	<b>115</b>

## Seznam obrázků

1.1 Popis srážky těžkých jader . . . . .	19
1.2 Schéma hadronové polévky . . . . .	21
1.3 Tlak a hustota energie ve dvoufázovém modelu ideálního plynu . . . . .	22
1.4 Schématické znázornění mechanismu uvěznění kvarků pomocí struny . . . . .	24
2.1 Fázový diagram QCD . . . . .	28
2.2 Fázový diagram QCD pro dva nehmotné kvarky . . . . .	30
2.3 Závislost kritického chování QCD na hodnotě kvarkových hmotností . . . . .	31
3.1 Koeficient šikmosti . . . . .	41
3.2 Koeficient špičatosti . . . . .	41
3.3 Časový vývoj 2. faktoriálního momentu pro různá $N_0$ . . . . .	44
3.4 Faktoriální momenty pro binomické počáteční podmínky . . . . .	45

3.5	Faktoriální momenty pro poissonovské počáteční podmínky . . . . .	45
3.6	Faktoriální momenty předělené rovnovážnými hodnotami . . . . .	46
4.1	Účinný průřez pro reakci (4.13) . . . . .	51
4.2	4. faktoriální moment pro různé teploty $T$ . . . . .	52
4.3	4. faktoriální moment pro různé teploty $T$ s 200krát větším účinným průřezem	53
4.4	Závislost relaxačního času na teplotě . . . . .	54
4.5	Závislost relaxačního času na normálním čase . . . . .	55
4.6	Závislost teploty $T$ na normálním čase . . . . .	56
4.7	Normované faktoriální momenty pro postupnou změnu teploty ze 165 MeV na 100 MeV pro 30krát zvětšený účinný průřez . . . . .	57
4.8	Normované faktoriální momenty pro postupnou změnu teploty ze 165 MeV na 100 MeV pro 100krát zvětšený účinný průřez . . . . .	58
4.9	Normované faktoriální momenty pro postupnou změnu teploty ze 165 MeV na 100 MeV pro 200krát zvětšený účinný průřez . . . . .	58
4.10	Normované faktoriální momenty pro postupnou změnu teploty ze 165 MeV na 100 MeV pro 400krát zvětšený účinný průřez . . . . .	59
4.11	Zdánlivá teplota vymrznutí faktoriálních momentů pro postupnou změnu teploty ze 165 MeV na 100 MeV pro 30krát zvětšený účinný průřez . . . . .	60
4.12	Zdánlivá teplota vymrznutí faktoriálních momentů pro postupnou změnu teploty ze 165 MeV na 100 MeV pro 100krát zvětšený účinný průřez . . . . .	61
4.13	Zdánlivá teplota vymrznutí faktoriálních momentů pro postupnou změnu teploty ze 165 MeV na 100 MeV pro 200krát zvětšený účinný průřez . . . . .	61
4.14	Zdánlivá teplota vymrznutí faktoriálních momentů pro postupnou změnu teploty ze 165 MeV na 100 MeV pro 400krát zvětšený účinný průřez . . . . .	62
5.1	Zdánlivá teplota vymrznutí počtu částic pro postupnou změnu teploty ze 165 MeV na 100 MeV pro různé účinné průřezy . . . . .	68
5.2	Zdánlivá teplota vymrznutí směrodatné odchylky pro postupnou změnu teploty ze 165 MeV na 100 MeV pro různé účinné průřezy . . . . .	68
5.3	Zdánlivá teplota vymrznutí 3. centrálního momentu pro postupnou změnu teploty ze 165 MeV na 100 MeV pro různé účinné průřezy . . . . .	69
5.4	Zdánlivá teplota vymrznutí 4. centrálního momentu pro postupnou změnu teploty ze 165 MeV na 100 MeV pro různé účinné průřezy . . . . .	69

5.5	Zdánlivá teplota vymrznutí koeficientu šikmosti pro postupnou změnu teploty ze 165 MeV na 100 MeV pro různé účinné průřezy . . . . .	70
5.6	Zdánlivá teplota vymrznutí koeficientu špičatosti pro postupnou změnu teploty ze 165 MeV na 100 MeV pro různé účinné průřezy . . . . .	70
5.7	Koeficient $R_{32}$ pro postupnou změnu teploty ze 165 MeV na 100 MeV pro různé účinné průřezy . . . . .	72
5.8	Koeficient $R_{42}$ pro postupnou změnu teploty ze 165 MeV na 100 MeV pro různé účinné průřezy . . . . .	72
5.9	Koeficient $R_{12}$ pro postupnou změnu teploty ze 165 MeV na 100 MeV pro různé účinné průřezy . . . . .	73
5.10	Koeficient $R_{31}$ pro postupnou změnu teploty ze 165 MeV na 100 MeV pro různé účinné průřezy . . . . .	73
6.1	Účinný průřez daný rovnicí (6.10) . . . . .	77
6.2	Faktoriální momenty pro konstantní teplotu $T$ . . . . .	80
6.3	Faktoriální momenty pro konstantní teplotu $T$ . . . . .	81
6.4	Změna teploty systému s časem . . . . .	82
6.5	Normované faktoriální momenty pro postupnou změnu teploty ze 165 MeV na 100 MeV . . . . .	83
7.1	Hadronové výtěžky pro energii srážky $\sqrt{s_{NN}} = 200\text{GeV}$ . . . . .	90
7.2	Normované faktoriální momenty pro konstantní teplotu 165 MeV . . . . .	92
7.3	Normované faktoriální momenty pro konstantní teplotu 165 MeV předělené svými rovnovážnými hodnotami . . . . .	93
7.4	Normované faktoriální momenty pro postupnou změnu teploty . . . . .	94
8.1	Závislost $M/\sigma^2$ , $S\sigma$ a $\kappa\sigma^2$ na energii srážky $\sqrt{s_{NN}}$ . . . . .	97
8.2	Závislost různých poměrů ne teplotě . . . . .	98
8.3	Závislost $M/\sigma^2$ na energii srážky $\sqrt{s_{NN}}$ . . . . .	99
8.4	Závislost $S\sigma$ na energii srážky $\sqrt{s_{NN}}$ . . . . .	99
8.5	Závislost $\kappa\sigma^2$ na energii srážky $\sqrt{s_{NN}}$ . . . . .	100

## Seznam tabulek

4.1	Hodnoty relaxačního času pro různé násobky účinného průřezu . . . . .	56
8.1	Počty jednotlivých druhů částic . . . . .	96

8.2 Počty jednotlivých druhů částic, které byly použity pro simulacee . . . . .	100
D.1 Hodnoty zdánlivého času $t$ a zdánlivé teploty vymrznutí $T$ pro 30 krát větší účinný průřez . . . . .	115
D.2 Hodnoty zdánlivého času $t$ a zdánlivé teploty vymrznutí $T$ pro 100 krát větší účinný průřez . . . . .	115
D.3 Hodnoty zdánlivého času $t$ a zdánlivé teploty vymrznutí $T$ pro 200 krát větší účinný průřez . . . . .	115
D.4 Hodnoty zdánlivého času $t$ a zdánlivé teploty vymrznutí $T$ pro 400 krát větší účinný průřez . . . . .	115
D.5 Hodnoty zdánlivého času $t$ a zdánlivé teploty vymrznutí $T$ pro různé násobky účinného průřezu pro normu . . . . .	116
D.6 Hodnoty zdánlivého času $t$ a zdánlivé teploty vymrznutí $T$ pro různé násobky účinného průřezu pro směrodatnou odchylku . . . . .	116
D.7 Hodnoty zdánlivého času $t$ a zdánlivé teploty vymrznutí $T$ pro různé násobky účinného průřezu pro 3. centrální moment . . . . .	116
D.8 Hodnoty zdánlivého času $t$ a zdánlivé teploty vymrznutí $T$ pro různé násobky účinného průřezu pro 4. centrální moment . . . . .	116
D.9 Hodnoty zdánlivého času $t$ a zdánlivé teploty vymrznutí $T$ pro různé násobky účinného průřezu pro koeficient šiknosti . . . . .	116
D.10 Hodnoty zdánlivého času $t$ a zdánlivé teploty vymrznutí $T$ pro různé násobky účinného průřezu pro koeficient špičatosti . . . . .	117

# Úvod

Jednou z oblastí zájmu současné částicové fyziky je studium horké a husté hadronové hmoty nazývané kvark-gluonové plazma (QGP), ve které už běžné hadrony neexistují a ve které nejsou kvarky a gluony vázány v hadronech. Toto médium vzniká v rané fázi ultra-relativistické jaderné srážky. Celkové pozorované multiplicity jednotlivých druhů častic z těchto srážek jsou dobře popsány statistickým modelem pro teploty vyšší než 160 MeV. Na druhé straně je možné teplotu fázového přechodu stanovit i pomocí metod QCD na mřížce. Je to teplota, při které se hustota energie jako funkce teploty mění nejrychleji. Vyšší derivace partiční funkce potom v okolí kritické teploty velice fluktuují, a proto je obtížné určit přesnou hodnotu kritické teploty. Tato teplota se nachází okolo 150 MeV. Susceptibilita se přitom projevuje ve vyšších momentech rozdělení multiplicity.

První kapitola je věnována ultrarelativistickým srážkám těžkých iontů. Je v ní popsán časový vývoj ultrarelativistické srážky, tj. proces produkce častic, čas termalizace, hydrodynamická expanze, chemické a kinetické vymrznutí. Dále jsou v této kapitole stručně zmíněny vlastnosti kvark-gluonového plazmatu a kvantové chromodynamiky.

Druhá kapitola je zaměřena na fázový diagram QCD. Je zde popsáno, jakým způsobem se hledá struktura fázového diagramu a především potom, jak se hledá poloha kritického bodu.

Třetí kapitola je zaměřena na popis rozdělení multiplicity. Je zde uvedena a vysvětlena rovnice pro změnu multiplicity, dále řídící rovnice a generující funkce. Pomocí generující funkce je zde odvozeno rovnovážné řešení řídící rovnice. Nejdůležitější součástí této kapitoly jsou definice faktoriálních momentů a odvození jejich rovnovážných hodnot. Na konci kapitoly jsou popsány zvolené počáteční podmínky pro řídící rovnici.

Ve čtvrté kapitole je odvozena řídící rovnice závislá na reálném čase. Zavedením účinných průřezů pro konkrétní reakci vzniká závislost řídící rovnice na teplotě. V této kapitole se venujeme reakci, ve které se produkuje podivnost  $\pi N \rightarrow K\Lambda$ . Díky závislosti řídící rovnice na teplotě a reálném čase můžeme studovat chování momentů při postupné změně teploty.

Pátá kapitola je věnována centrálním momentům, odvození jejich rovnovážných hodnot a jejich důležitým poměrům jako je koeficient šikmosti a špičatosti.

V šesté kapitole se venujeme reakci  $\pi N \rightarrow \pi N$ , která v ultrarelativistických srážkách těžkých iontů nastává s větší pravděpodobností než reakce  $\pi N \rightarrow K\Lambda$ . Hlavním důvodem, proč se této reakci venujeme je fakt, že důležitou studovanou veličinou je rozdělení počtu

baryonů a jeho fluktuace. Tyto fluktuace se projevují ve fluktuacích počtu protonů, které v této kapitole sledujeme pomocí jednoduchého modelu. V sedmé kapitole tento model ještě vylepšíme. Opět zde studujeme chování faktoriálních momentů pro postupné snižování teploty.

V sedmé kapitole je odvozena řídící rovnice pro dvojici reakcí, kde jeden z produktů první reakce je zároveň reaktantem druhé reakce. Chování vyšších faktoriálních momentů rozdelení počtu protonů je studováno pro dvojici reakcí  $p + \pi^- \rightarrow \Delta^0 \rightarrow \pi^0 + n$ ,  $p + \pi^0 \rightarrow \Delta^+ \rightarrow \pi^+ + n$ .

Poslední osmá kapitola je věnována porovnání výsledků s experimentálními daty.

## 1. ULTRARELATIVISTICKÉ SRÁŽKY TĚŽKÝCH IONTŮ

# 1 Ultrarelativistické srážky těžkých iontů

## 1.1 Vysoko-energetické jaderné srážky

Hlavním cílem vysokoenergetických srážek atomových jader je produkce a snaha o pochopení horké a husté jaderné hmoty při hustotách energie nad energií základního stavu jádra ( $\epsilon_0 \simeq 0,15 \text{ GeV/fm}^3$ ). Tato myšlenka je stará nyní asi 45 let [5]. Při vysokých hustotách energie a/nebo při vysokých teplotách očekáváme, že kvarky (stavební bloky hadronů) nejsou dále vázány, ale pohybují se volně po vzdálenostech větších než jsou rozměry nukleonu (okolo  $1 \text{ fm} = 10^{-15} \text{ m}$ ). Takovýto stav hmoty, ve kterém jsou kvarky relevantními stupni volnosti, se nazývá kvark-gluonové plazma (QGP).

První experimenty zkoumající srážky těžkých iontů s energiemi nad 10 GeV na nukleon v paprsku projektilu byly provedeny v BNL ("Brookhaven National Laboratory") a v CERNu ("European Organisation for Nuclear Research") v r. 1968 [4]. Srážky těžkých iontů se v současné době provádějí na urychlovačích RHIC ("Relativistic Heavy Ion Collider") a LHC ("Large Hadron Collider") za účelem studia vlastností jaderné hmoty při vysokých teplotách a hustotách energie. Důležitými experimenty zabývajícími se touto oblastí jsou také experiment HADES v GSI Darmstadt a experiment NA61 na SPS v CERNu. Mezi budoucí experimenty patří NICA v SÚJV Dubna nebo FAIR v Darmstadt.

V ultrarelativistických srážkách těžkých iontů je produkováno velké množství částic. Počet částic nazýváme částicovou multiplicitou. Hmota, která je ve srážkách tvořena, žije jen velice krátkou dobu, rychle expanduje a chladne. Proto můžeme předpokládat, že bude časoprostorový vývoj probíhat daleko od rovnovážného stavu.

## 1.2 Časový vývoj ultrarelativistické srážky těžkých iontů

Ve všech dalších vztazích budeme pokládat  $\hbar^1=c=k_B^2=1$ .

Srážka jader je vysoce dynamická událost. Systém se po srážce rychle vyvíjí v expandující, horkou a hustou hmotu kvarků a gluonů. Existuje několik přístupů, jak přechod k horkému a hustému systému kvarků a gluonů popsat. Tento přechod popisujeme například pomocí QCD roztržení struny, QCD kaskádního modelu nebo pomocí CGC<sup>3</sup>, který se vyvíjí v glasma a poté v kvark-gluonové plazma.

Časoprostorový vývoj ultrarelativistické srážky je na Obr.1.1, který ukazuje srážku dvou Lorentzovsky kontrahovaných jader srážejících se s rychlosťí blízkou rychlosti světla. Svislá osa popisuje časový směr, kde dolní část osy popisuje čas před srážkou a horní část čas po srážce. Vodorovná osa reprezentuje prostorovou dimenzi. Obě jádra se srazila v čase  $(t, z) = (0, 0)$ . Po srážce se vytvořil fireball, který expanduje v čase a prochází různými fázemi až do chvíle, kdy vytvořené částice vymrzou a dosáhnou detektoru. Křivka odpovídající rovnici  $t^2 - z^2 = 0$  ( $\sqrt{t^2 - z^2} \equiv \tau$  je podélný vlastní čas částice) podél dráhy srážejících se jader definuje světelný kužel. Vrchní část světelného kuželetu, pro kterou platí  $t^2 - z^2 > 0$ , se nazývá času-podobnou oblastí. Produkce častic ve srážkách těžkých iontů se odehrává právě ve vrchní části  $(t, z)$  roviny světelného kuželetu. Oblast, která se nachází mimo světelný kužel, a pro kterou platí  $t^2 - z^2 < 0$ , se nazývá prostoru-podobná [13].

Důležitou veličinou je časoprostorová rapidita, která je definovaná následujícím vztahem

$$\eta_s = \frac{1}{2} \ln \left( \frac{t+z}{t-z} \right). \quad (1.1)$$

Můžeme si všimnout, že vztah (1.1) není definován v prostoru-podobné oblasti. Nabývá hodnot  $\pm\infty$  podél směrů paprsku, pro které je  $t = \pm z$  [2].

Říkáme, že částice je světlu-podobná, když se pohybuje podél směru paprsku.

Další důležitou veličinou je rapidita  $y$ , která je definovaná vztahem

$$y = \frac{1}{2} \ln \left( \frac{E + p_z}{E - p_z} \right), \quad (1.2)$$

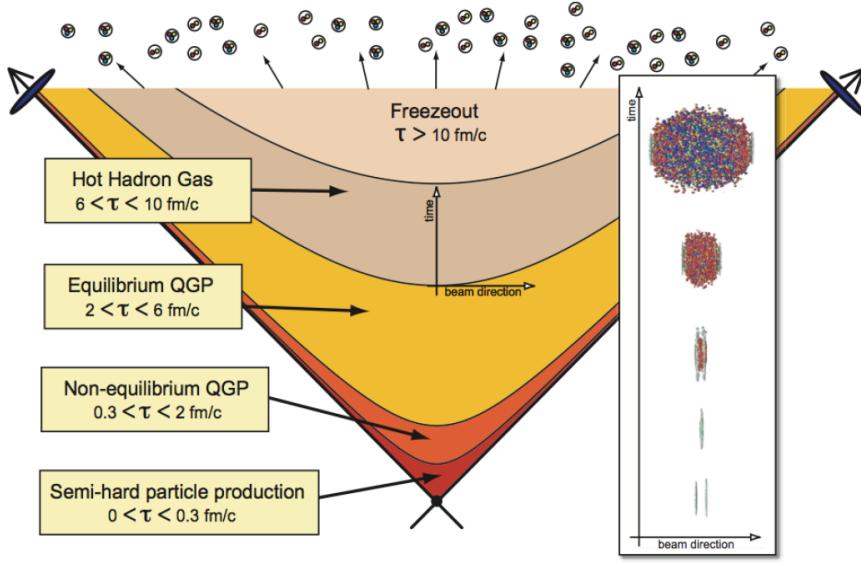
---

<sup>1</sup>redukovaná Planckova konstanta  $\hbar = \frac{\hbar}{2\pi} = 6,58 \cdot 10^{-22}$  MeV.s [4]

<sup>2</sup>Boltzmannova konstanta  $k_B = 8,625 \cdot 10^{-11}$  MeV/K [4]

<sup>3</sup>Color Glass Condensate je efektivní teorie, která byla vyvinuta s cílem organizovat výpočty procesů v saturační oblasti. Tato teorie popisuje gluonový obsah vysoce energetických hadronů nebo jader v saturační oblasti [1].

# 1. ULTRARELATIVISTICKÉ SRÁŽKY TĚŽKÝCH IONTŮ



Obrázek 1.1: Popis srážky těžkých iontů jader v prostorové (z) a časové (t) dimenzi [14].

kde  $p_z$  je podélná hybnost. Dále můžeme pro volnou částici nacházející se na hmotnostní slupce (pro kterou platí  $E^2 = p^2 + m^2$ ), a pro níž má 4-hybnost pouze 3 stupně volnosti, definovat  $E$  a  $p_z$  pomocí  $(y, \vec{p}_T)$ .  $(E, p_z)$  vyjádříme pomocí  $(y, \vec{p}_T)$  jako

$$E = m_T \cosh y, \quad (1.3)$$

$$p_z = m_T \sinh y, \quad (1.4)$$

kde  $m_T$  je příčná hmotnost, pro kterou platí vztah

$$m_T^2 = m^2 + \vec{p}_T^2. \quad (1.5)$$

Ve vztahu (1.5) je  $\vec{p}_T$  příčná hybnost.

Srážku těžkých iontů můžeme schematicky rozdělit do několika fází [3]:

- (i) Počáteční srážka
- (ii) Přechod od počátečních podmínek k hydrodynamické expanzi: s touto fází je spojený čas termalizace, který je potřebný k dosažení rovnovážného rozdělení energie. Data z RHICu ukazují, že tento čas je  $\tau_{therm} < 1$  fm. Pokud bereme v úvahu silně vázané kvark-gluonové plazma, získáme dobu termalizace 1 fm [13].

- (iii) Hydrodynamická expanze a chlazení (ve stavu "deconfinementu"): v důsledku expanze se termodynamické vlastnosti hadronové hmoty velmi rychle mění. Toto pozorování souhlasí s faktem, že je zde přítomný fázový přechod z kvark-gluonového plazmatu o vysoké teplotě ( $T > T_c$ ) do hadronového plynu o nízké teplotě ( $T < T_c \sim 160$  MeV). Pokud je tento přechod přechodem prvního druhu, pak můžeme pro nízké energie a pomalé rozpínání systému předpokládat, že se skládá ze tří kroků. Nejprve je hmota adiabaticky se rozpínajícím kvark-gluonovým plazmatem, potom se hmota změní ve směs fáze plazmatu a hadronového plynu a v posledním kroku hmota expanduje do hadronového plynu. Poté nastává expanze hadronového plynu[4].
- (iv) Chemické vymrznutí: při ochlazování systému je velice pravděpodobné, že neelastické srážky mezi hadrony skončí dříve než elastické srážky. Chemické vymrznutí nastává ve chvíli, kdy vymizí neelastické srážky, hadronové výtěžky jsou zmraženy. Teplotu chemického vymrznutí lze odvodit z poměru měrených hadronových multiplicit.
- (v) Kinetické (tepelné) vymrznutí: toto vymrznutí nastává ve chvíli, kdy hadrony přestanou interagovat, elastické srážky vymizí, spektra a korelace jsou zmraženy. Při tepelném vymrznutí přechází systém ze silně vázaného stavu do úplně volného systému neinteragujících hadronů. Tento přechod od jednoho stavu do druhého je vyvolán rozpínáním hmoty, které způsobuje rychlý nárůst střední volné dráhy částic  $\lambda$ . Tepelné vymrznutí tedy nastává ve chvíli, kdy čas spojený se srážkou, který je úměrný  $\lambda$ , překoná čas spojený s rozpínáním, který je rovný  $\partial_\mu u^\mu$ .

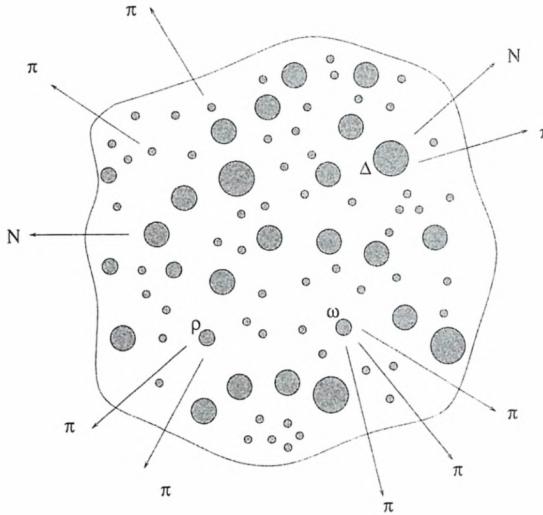
Při vývoji systému z chemického do tepelného vymrznutí jsou dominantní elastické srážky, např.  $\pi + \pi \rightarrow \rho \rightarrow \pi + \pi$  nebo  $\pi + N \rightarrow \Delta \rightarrow \pi + N$  a silné rozpady těžších rezonancí, jejichž rozpadem vznikají stabilní hadrony.

Schéma rozpadu rezonancí je na Obr.1.2.

Hlavním cílem srážek těžkých iontů je charakterizovat horké stádium (iii) nazývané fireball, zatímco většina měření prováděných pomocí hadronů nebo jejich produktů rozpadu nám přináší primárně informaci o fázích systému (iv) a (v). Informace o vlastnostech počáteční horké fáze získáme pouze s pomocí modelů. Při nízkých a středních energiích se používá hadronový transportní model. Při vysokých energiích se využívá hydrodynamiky. Existují i hybridní modely, které kombinují hydrodynamiku s transportním modelem [3].

Typická doba života fireballu se pohybuje v řádu deseti fm/c, což je přibližně  $10^{-22}$  s a

## 1. ULTRARELATIVISTICKÉ SRÁŽKY TĚŽKÝCH IONTŮ



Obrázek 1.2: Schéma hadronové polévky vytvořené v relativistické srážce těžkých iontů při procesu vymrznutí. Těžší rezonance se následně rozpadají na stabilní hadrony [4].

jeho typický rozměr je v řádu 10 fm. Typické měřítko silného rozpadu je v řádu 1 fm. Fireball tedy žije déle a je větší v porovnání se silným rozpadem. Rozdělení částic je charakterizováno pomocí Bose-Einsteinovy nebo Fermi-Diracovy statistiky [16].

### 1.3 Od hadronů ke kvarkům a gluonům

Přechod od hadronové hmoty ke kvark-gluonovému plazmatu může být přiblížen jednoduchým modelem. Pro ideální plyn nehmotných pionů je závislost tlaku od teploty dána Stefan-Boltzmanovým vztahem

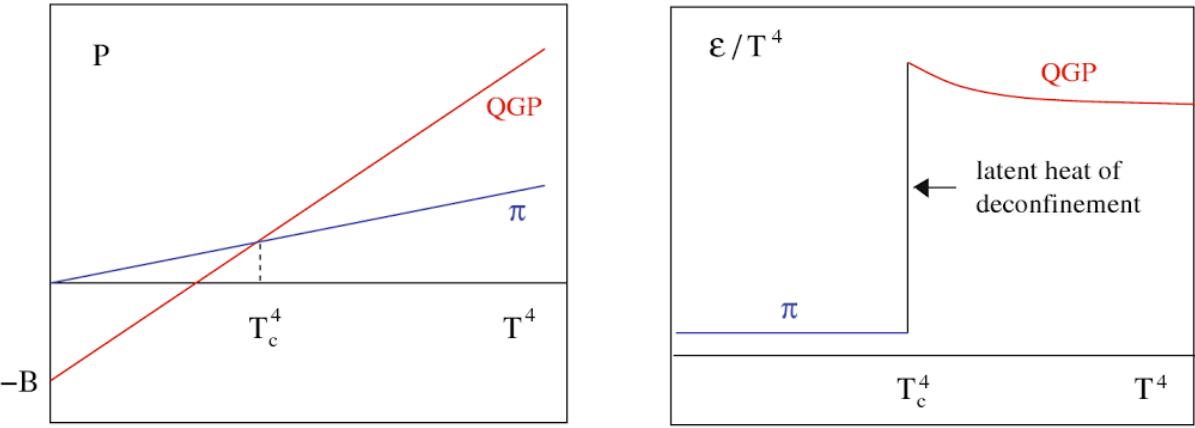
$$P_\pi = 3 \frac{\pi^2}{90} T^4, \quad (1.6)$$

kde faktor 3 je zde proto, že započítáváme 3 druhy pionů  $\pi^\pm, \pi^0$ .

Pro kvark-gluonové plazma se dvěma vůněmi a třemi barvami platí podobný vztah

$$P_{qg} = \left\{ 2 \times 8 + \frac{7}{8} (3 \times 2 \times 2 \times 2) \right\} \frac{\pi^2}{90} T^4 - B = 37 \frac{\pi^2}{90} T^4 - B, \quad (1.7)$$

kde člen  $2 \times 8$  máme pro 2 spiny a 8 barevných stupňů volnosti gluonů, člen  $3 \times 2 \times 2 \times 2$  popisuje 3 barvy, 2 vůně, 2 spiny a 2 stupně volnosti pro dvojici kvark-antikvark pro kvarky. Faktor  $7/8$  přidáváme kvůli správné statistice fermionů. Tlak  $B$  je ve vztahu kvůli rozdílu



Obrázek 1.3: Tlak a hustota energie ve dvoufázovém modelu ideálního plynu. Na levém obrázku je porovnání chování tlaku pro ideální plyn a pro kvark-gluonové plazma a na pravém obrázku je závislost hustoty energie na teplotě  $T$ . Na obou obrázcích vidíme fázový přechod prvního druhu [13] .

mezi fyzikálním vakuem a základním stavem pro kvarky a gluony v médiu. V termodynamice platí, že se systém snaží zaujmout stav s nejnižší možnou volnou energií a tudíž s nejvyšším tlakem. Na levé části Obr.1.3 porovnáme chování tlaku pro rovnice (1.6) a (1.7).

Výše popsaný jednoduchý model vede k dvoufázovému popisu silně interagující hmoty. Hadronová fáze existuje až do teploty

$$T_c = \left( \frac{45}{17\pi^2} \right)^{1/4} B^{1/4} \simeq 0,72 B^{1/4}. \quad (1.8)$$

Nad touto kritickou teplotou se pak nachází kvark-gluonové plazma. Z hadronové spektroskopie dostaneme  $B^{1/4} \simeq 0,2 \text{ GeV}$ .

Pro kritickou teplotu pak dostaneme

$$T_c \simeq 150 \text{ MeV}. \quad (1.9)$$

Hustota energie pro hadronovou fázi je dána vztahem

$$\epsilon_\pi = \frac{\pi^2}{10} T^4 \quad (1.10)$$

## 1. ULTRARELATIVISTICKÉ SRÁŽKY TĚŽKÝCH IONTŮ

a pro kvark-gluonové plazma vztahem

$$\epsilon_{qg} = 37 \frac{\pi^2}{30} T^4 + B. \quad (1.11)$$

Výsledná závislost teploty  $T_c$  je na pravé části Obr.1.3. Přechod od hadronové fáze ke kvark-gluonovému plazmatu je potom prvního druhu. Vztahy v této kapitole byly převzány z [13].

### 1.4 Kvantová chromodynamika (QCD)

Nyní se zaměříme na silné interakce, které jsou popsány kvantovou chromodynamikou.

Lagranžián QCD je dán vztahem

$$L = -\frac{1}{4} \sum_a F_{\mu\nu}^a F_a^{\mu\nu} + \sum_{f=1}^{N_f} \bar{\psi}^f \left( i\gamma^\mu \partial_\mu - m_f - g\gamma^\mu \sum_a A_\mu^a \frac{\lambda_a}{2} \right) \psi_f, \quad (1.12)$$

kde

$$F_{\mu\nu}^a = \partial_\mu A_\nu^a - \partial_\nu A_\mu^a - g f_{bc}^a A_\mu^b A_\nu^c. \quad (1.13)$$

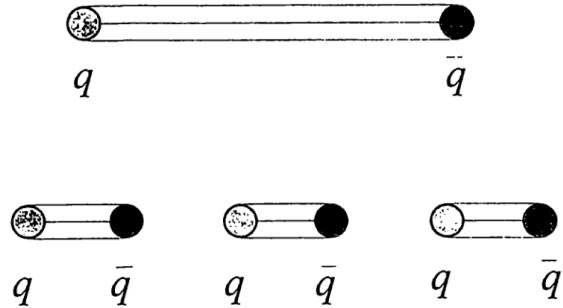
Ve vztazích (1.12) a (1.13) je  $A_\mu^a$  gluonové pole barev  $a$  ( $a = 1, 2, \dots, 8$ ) a  $\psi^f$  je kvarkové pole vůní  $f$  (u,d,s,c,b,t), hmotnosti vstupujících kvarků jsou dány  $m_f$ ,  $\gamma^\mu$  jsou Diracovy matice,  $g$  je vazbová konstanta silné interakce,  $\lambda^a$  jsou Gell-Mannovy matice a  $f_{bc}^a$  jsou strukturní funkce Liovy algebry. Vztahy (1.12) a (1.13) byly převzaty z [4].

QCD je fundamentální teorie silně interagující hmoty, je to teorie kvarků a gluonů. Ty jsou za normálních podmínek uvězněny v hadronech (baryonech a mezonech). Systém silně interagujících častic je produkovaný během srážky těžkých iontů.

Tato teorie sahá do r.1963, kdy Gell-Mann a Zweig navrhli, že by struktura hadronů mohla být vysvětlena existencí menších častic uvnitř hadronů, v této době to byly kvarky u,d,s. V r.1964 Greenberg a v r.1965 Han s Nambu navrhli, že kvarky mají další stupeň volnosti, který byl později nazván barevným nábojem. Dále Han a Nambu přišli s tím, že by kvarky mohly interagovat skrze výměnu oktetu vektorových kalibračních bosonů (později gluonů) [4].

Důležitou vlastností QCD je barevné uvěznění, které je opakem asymptotické volnosti. To je jev, který říká, že barevně nabité částice jako jsou kvarky a gluony nemůžou být

izolovány jako samostatné objekty. To znamená, že kvarky a gluony nemůžou být přímo pozorovány. Fyzikálně může být tento jev demonstrován pomocí struny, která je napnutá mezi kvark-antikvarkovým párem. Pokud budeme pár kvark-antikvark rychle oddalovat od sebe, ve struně se bude hromadit velké množství potenciální energie, až se nakonec struna roztrhne na menší délky. Na konci nových kousků vzniknou opět kvarky, resp. antikvarky, jak je zobrazeno na Obr.1.4.



Obrázek 1.4: Schématické znázornění mechanismu uvěznění kvarků pomocí struny. Struna je napnuta mezi párem  $q\bar{q}$ . Při napínání vede hromadící se energie uvnitř struny k jejímu roztržení a vytvoření nových strun mezi páry  $q\bar{q}$ . Více páru vede k vytvoření koncového stavu, k formaci hadronů [4].

Jaderná síla působící mezi baryony a mezony může být v určitém smyslu chápána jako zbytková síla mezi kvarky a gluony jako je např. chemická (Van der Waalsova) síla zbytkovou silou elektromagnetické interakce.

## 2. CO VÍME O QCD FÁZOVÉM DIAGRAMU?

# 2 Co víme o QCD fázovém diagramu?

Hledání struktury QCD fázového diagramu stejně tak jako hledání kritického bodu se stalo hlavním zájmem výzkumu silných interakcí v posledních několika letech. Část teoretiků a experimentátorů se soustředí na měření a výpočty kumulantů zachovávajících se nábojů, zejména se pak soustředí na výpočet kumulantů rozdělení baryonového čísla.

Kumulanty rozdělení počtu častic mají tu výhodu, že jsou snadno spočitatelné v teorii pole s konečnou teplotou, protože jsou dané derivacemi volné energie s ohledem na odpovídající chemický potenciál. Mají ale tu nevýhodu, že míchají korelace různých řádů [10]. Bylo předpovězeno, že kumulanty vyšších řádů fluktuací baryonového a nebo nábojového čísla jsou velmi citlivé ke korelační délce,  $\xi$ , a tudíž nám poskytují informaci o základním chování kritického módu [11].

## 2.1 QCD na mřížce

Základní poznatky o QCD fázovém přechodu lze získat z výpočtů QCD na diskretizované časoprostorové mřížce. Partiční funkce systému je sice známá, ale my ji neumíme spočítat. A proto musíme použít QCD na mřížce, které nám umožňuje spočítat tuto funkci pomocí Monte-Carlo metod.

Partiční funkci můžeme definovat vztahem [4]:

$$Z = \text{Tr} \left[ \exp \left( -\hat{E}/T + \mu_B \hat{N}_B/T \right) \right], \quad (2.1)$$

kde  $\hat{E}$  je operátor energie,  $\hat{N}_B$  je operátor baryonového čísla,  $T$  je teplota a  $\mu_B$  je baryochemický potenciál.

Z této definice partiční funkce můžeme spočítat například

- střední hodnotu energie

$$\langle E \rangle = \frac{1}{2} \text{Tr} \left[ \hat{E} \exp \left( -\hat{E}/T + \mu_B \hat{N}_B/T \right) \right] = -\frac{\partial \ln(Z)}{\partial(1/T)}, \quad (2.2)$$

- rozptyl energie

$$\langle (\delta E)^2 \rangle = \langle E^2 \rangle - \langle E \rangle^2 = \left( -\frac{\partial^2 \ln(Z)}{\partial(1/T)^2} \right) = \left( -\frac{\partial}{\partial(1/T)} \right) \langle E \rangle, \quad (2.3)$$

$$\langle(\delta E)^n\rangle = \left(-\frac{\partial}{\partial(1/T)}\right)^{n-1} \langle E \rangle. \quad (2.4)$$

Partiční funkce (2.1) může být pro  $\mu_B = 0$  ekvivalentně vyjádřena pomocí funkcionálního dráhového integrálu jako

$$Z(T, V) = \int dA d\psi d\bar{\psi} \exp \left( - \int_V d^3x \int_0^{1/T} d\tau L(A, \psi, \bar{\psi}) \right), \quad (2.5)$$

kde  $L$  je definován vztahem (1.12),  $V$  je objem systému (prostorová integrace), integrační škála přes  $\tau$  je spočítaná z inverzní teploty systému.

Z partiční funkce  $Z(T, V)$  lze spočítat např. hustotu energie, která je dána vztahem

$$\epsilon = (T^2/V) \left( \frac{\partial \ln Z}{\partial T} \right)_V \quad (2.6)$$

a tlak, který je dán vztahem

$$P = T \left( \frac{\partial \ln Z}{\partial V} \right)_T. \quad (2.7)$$

Energii můžeme definovat pomocí ostatních termodynamických veličin jako

$$E = TS - pV + \mu_B N_B. \quad (2.8)$$

Kumulanty energie jsou daný derivacemi  $\ln Z$  podle teploty  $T$  a kumulanty baryonového čísla jsou daný derivacemi  $\ln Z$  podle chemického potenciálu  $\mu$ .

Kumulanty baryonového čísla jsou potom definovaný vztahy

$$K_n = \frac{\partial^n}{\partial(\mu_B/T)^n} \ln(Z) = \frac{\partial^{n-1}}{\partial(\mu_B/T)^{n-1}} \langle N \rangle, \quad (2.9)$$

$$K_1 = \langle N \rangle, \quad K_2 = \langle (\delta N)^2 \rangle = \langle N - \langle N \rangle \rangle^2, \quad (2.10)$$

$$K_3 = \langle (\delta N)^3 \rangle = \langle N - \langle N \rangle \rangle^3, \quad K_4 = \langle (\delta N)^4 \rangle - 3 \langle (\delta N)^2 \rangle. \quad (2.11)$$

Všechny kumulanty jsou škálované s objemem, platí pro ně

$$K_n \sim V. \quad (2.12)$$

## 2. CO VÍME O QCD FÁZOVÉM DIAGRAMU?

Jelikož se objem při srážkách těžkých iontů špatně kontroluje, je lepší měřit na objemu nezávislé poměry

$$\frac{K_2}{\langle N \rangle}, \quad \frac{K_3}{K_2}, \quad \frac{K_4}{K_2}. \quad (2.13)$$

Pro studium kritického chování jsou velice důležité korelace dlouhého dosahu a mnoha částicové interakce. Typická vazbová konstanta je v tomto případě velká. Z tohoto důvodu tu nefunguje poruchová teorie a proto ji nemůžeme použít. Je proto potřeba jiný přístup, abychom mohli počítat tlak a energii. Nezbytné neporuchové schéma nám poskytuje právě formulace QCD na mřížce. To následně vede k formě, která může být spočítána numericky pomocí počítačových simulací.

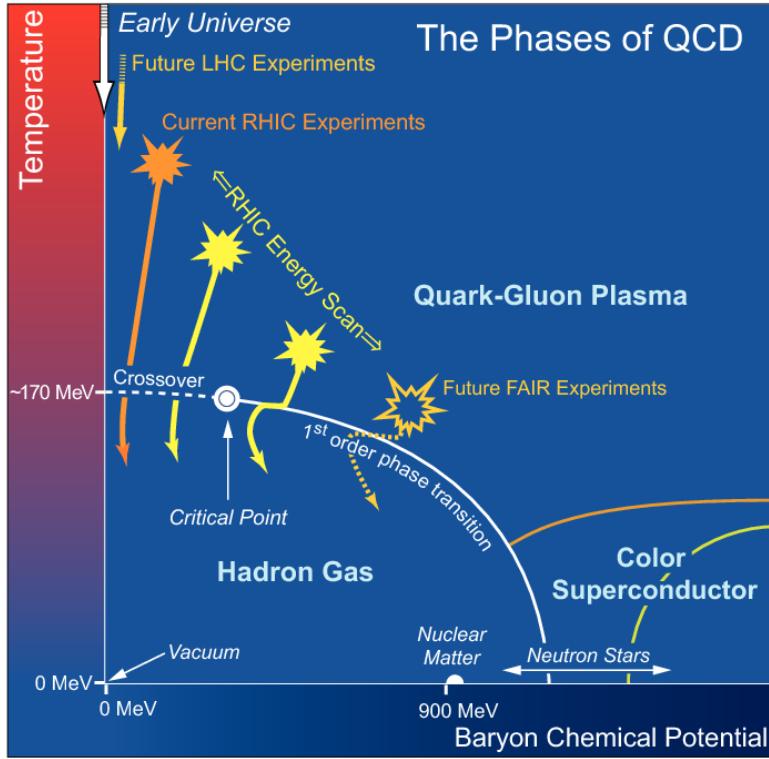
### 2.2 Fázový diagram

Na Obr.2.1 je znázorněn fázový diagram z pohledu současných teoretických výpočtů. Na fázovém diagramu nás nejvíce zajímá poloha fázových přechodů, tedy hranice mezi jednotlivými fázemi. Fázové přechody jsou termodynamickými singularitami systému. Předpokládáme, že systém je oblast silně interagující hmoty, která je v tepelné a chemické rovnováze a která je charakterizovaná danými hodnotami teploty  $T$  a baryochemického potenciálu  $\mu_B$ . V teorii je tato oblast považována za nekonečnou, protože se odvozuje v termodynamické limitě, ve které je počet častic obrovský. V praxi je takovýto systém uvnitř neutronových hvězd nebo uvnitř horkého a hustého objektu tzv. fireballu, který se tvoří při srážkách těžkých iontů.

Fázový přechod nazveme prvního druhu, jsou-li v bodě přechodu nespojitě první derivace partiční funkce podle teploty (existuje-li zde konečný skok). Fázový přechod nazveme druhého druhu, jsou-li v bodě přechodu nespojitě druhé derivace partiční funkce (existuje-li zde konečný skok)

Fázový diagram můžeme rozdělit do několika oblastí podle hodnoty teploty  $T$  a baryochemického potenciálu  $\mu_B$  [12].

- Oblast s nízkou hodnotou teploty  $T$  a velkou hodnotou baryochemického potenciálu  $\mu_B$  je relevantní pro fyziku neutronových hvězd. V této oblasti se dají dělat analytické výpočty, proto je pro teoretiky zajímavá. Tato skutečnost vyplývá z asymptotické volnosti QCD.
- Z experimentálního hlediska se ovšem snadněji prozkoumává oblast fázového diagramu, která se nachází okolo teploty  $T \sim 100$  MeV a výše (až do 170 – 200 MeV). Pro



Obrázek 2.1: Fázový diagram QCD, ve kterém  $\mu$  je baryochemický potenciál, který určuje baryonovou hustotu systému, a  $T$  je teplota. Plná bílá čára znázorňuje čáru fázového přechodu mezi partony a hadrony a končí kritickým bodem. Při menších hodnotách  $\mu_B$  se vyskytuje cross-over přechod [6].

baryochemický potenciál v této oblasti platí  $\mu_B \sim 0 - 600$  MeV. V této oblasti je nejzajímavějším bodem takzvaný kritický bod  $E$ , který je koncovým bodem křivky fázového přechodu prvního druhu.

## 2.3 Proč by se na konci křivky fázového přechodu prvního druhu měl nacházet kritický bod?

Základní tvrzení, které podporují existenci kritického bodu  $E$  [12]:

- Přechod při  $\mu_B = 0$ , který je řízený teplotou, není termodynamickou singularitou. Je to

## 2. CO VÍME O QCD FÁZOVÉM DIAGRAMU?

rychlý, ale hladký ”crossover” přechod z oblasti hadronového plynu do oblasti, ve které dominují vnitřní stupně volnosti QCD kvarky a gluony. Tyto poznatky jsou výsledkem mřížkových výpočtů pro konečné teploty.

- Při  $T = 0$  a vysokém baryochemickém potenciálu je přítomný hladký crossover přechod z CFL (Colour Flavor locked <sup>4)</sup> fáze a Nambu-Goldstone (hadronové) fáze. Tento crossover přechod může mít úzkou souvislost s myšlenkou kvark-hadronového kontinua [21]. Mřížkové výpočty v této oblasti nejsou ale zcela kontrolovatelné.

Koncovým bodem křivky fázového přechodu prvního druhu je kritický bod druhého druhu. V QCD existují dvě fáze současně, hadronový plyn při nižší teplotě  $T$  a kvark-gluonové plazma při vyšší teplotě  $T$ . Rozdíl mezi těmito dvěma fázemi je pouze kvantitativní a je více zřetelný v blízkosti kritického bodu. Pro vysokou hodnotu teploty  $T$  a nízkou hodnotu baryochemického potenciálu  $\mu_B$  se předpokládá, že kritická teplota přechodu mezi konfinovanou a dekonfinovanou fází hmoty je přibližně  $T_{krit} \approx 170$  MeV. Tato teplota odpovídá hustotě energie přibližně  $1$  GeV/fm<sup>3</sup>. V tomto případě se nejedná o fázový přechod prvního druhu, ale pouze o plynulý přechod od jedné fáze k druhé. V současnosti je snaha tento přechod najít a změřit [13].

Očekáváme tedy, že by se ve fázovém diagramu měl nacházet fázový přechod prvního druhu, protože to předpovídá efektivní chirální teorie se 2 nehmotnými kvarky. A proto tedy také očekáváme, že se tam bude nacházet i kritický bod. Pořád ale zůstává nezodpovězená spousta otázek. Opravdu tam kritický bod je? Jak ho najít? Jak se projevuje? Jak ho experimentálně změřit? A proto je důležité fázový diagram zkoumat podrobněji, abychom jednou na tyto otázky našli odpovědi.

### 2.4 Kritický bod

Nyní se budeme zabývat chirálně symetrickou teorií s nehmotnými kvarky, protože tady dokážeme provádět výpočty a také doufáme, že i přes veškerá zjednodušení se něco relevantního dozvíme o fázovém diagramu.

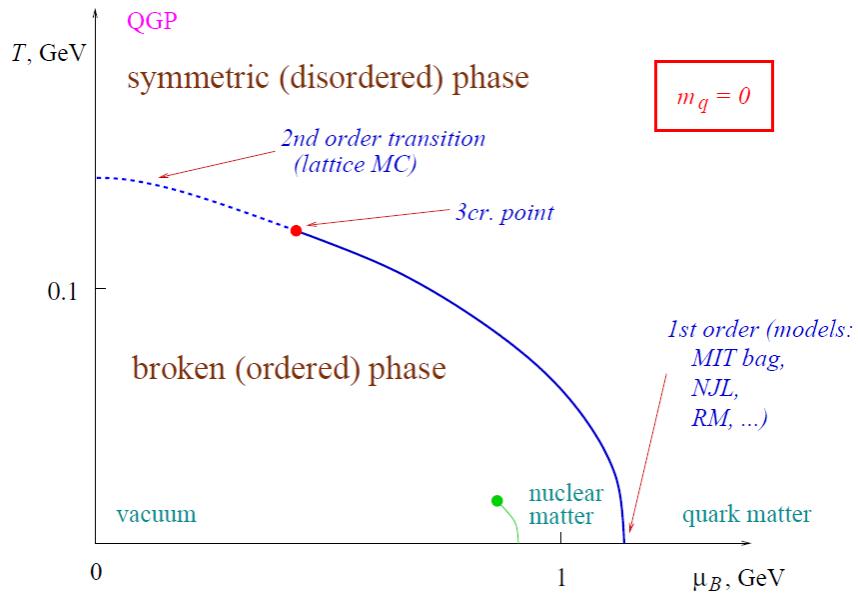
V idealizovaném QCD, ve kterém jsou kvarky nehmotné ( $m_q = 0$ ), je rozdíl mezi fází hadronového plynu a fází kvark-gluonového plazmatu prudký. V tomto limitním případě QCD se dvěma nehmotnými kvarky  $u$  a  $d$  je chirální symetrie  $SU(2)_V \times SU(2)_A$  přesná.

---

<sup>4</sup>barevné stupně volnosti a ”flavour” stupně volnosti jsou navzájem svázané

Nyní budeme uvažovat fixní baryochemický potenciál, např.  $\mu_B = 0$ . Chirální kondenzát  $\langle\psi\bar{\psi}\rangle$  jako funkce teploty  $T$  je potom roven nule (ze symetrie) pro všechny teploty vyšší, než je nějaká teplota  $T_c$  a není nulový pro všechny teploty, které jsou pod teplotou  $T_c$  (narušení symetrie). Takováto funkce nemůže být analytická a singularita musí nastat v bodě  $T_c$ .

Z výpočtů QCD na mřížce víme, že singularita je fázovým přechodem druhého druhu, pokud se teplota  $T_c$  blíží k hodnotě potenciálu  $\mu_B = 0$ . Pro ostatní hodnoty  $\mu_B$  je kritická teplota odlišná. Křivka fázového přechodu  $T_c(\mu_B)$  nemůže být přerušena, protože jakákoliv cesta z vakua  $T = \mu_B = 0$  do fáze s vyšším  $T$  musí protnout singularitu. Někde uprostřed fázového diagramu se potom crossover přechod mění na fázový přechod prvního druhu. Bod, ve kterém tato změna nastává, se nazývá trojkritickým bodem [12]. Výsledný diagram je na Obr.2.2.

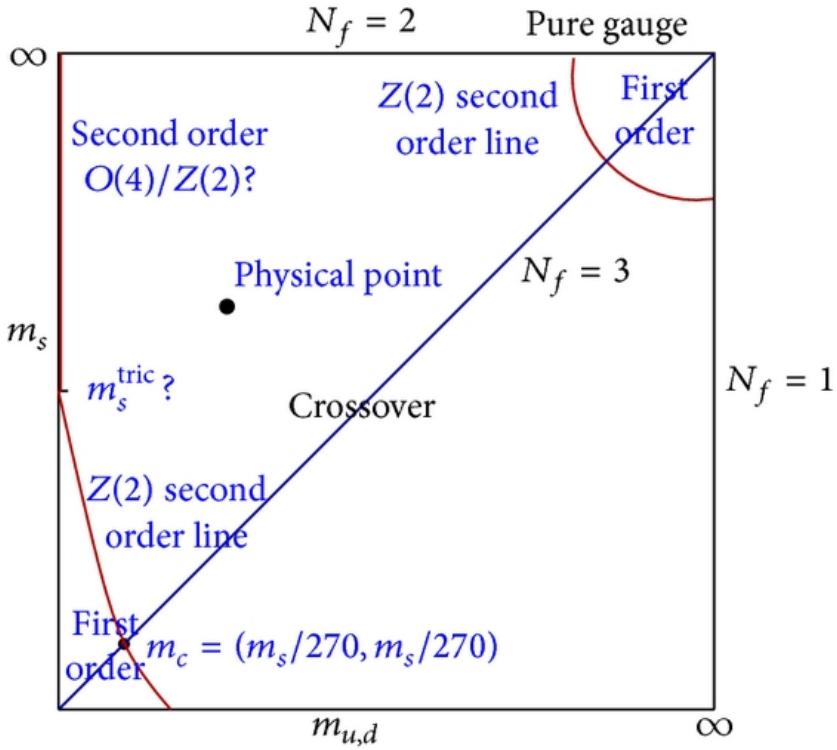


Obrázek 2.2: Fázový diagram QCD pro dva nehmotné kvarky. Parametr uspořádání chirální symetrie kvalitativně rozlišuje dvě fáze:  $\langle\psi\bar{\psi}\rangle \neq 0$  ve fázi, ve které je symetrie narušena a  $\langle\psi\bar{\psi}\rangle = 0$  ve fázi, ve které není symetrie narušena [12].

Pro hmotné kvarky je rozdíl mezi fází, kde není symetrie narušena a fází, kde je symetrie narušena, rozmazený. V tomto případě je fázový přechod druhého druhu nahrazen hladkým "crossover" přechodem. To znamená, že nenastává žádný pravý fázový přechod, ale nastává rychlá změna v malém intervalu teploty. Pro nulový baryochemický potenciál  $\mu_B = 0$  jsou

## 2. CO VÍME O QCD FÁZOVÉM DIAGRAMU?

výsledky shrnutý na Obr. 2.3, původní práce [8] a [9].



Obrázek 2.3: Závislost kritického chování QCD na hodnotě kvarkových hmotností. Tato závislost je známá pod názvem "Columbia plot". Převzato z [7].

- V limitě  $m_u, m_d, m_s \rightarrow \infty$  máme pouze kalibrační teorii, protože kvarky se ničeho neúčastní a efektivně máme pouze gluony.
- Pro limitu  $m_u = m_d = m_s \rightarrow 0$  dostáváme chirální fázový přechod, který je fázovým přechodem prvního druhu.
  - Pro  $m_u, m_d = 0$  a  $m_s$  je větší než hodnota trojkritického bodu  $m_s^{tri}$ , fázový přechod je druhého druhu.
  - ”Fyzikální bod” odpovídá malým hodnotám  $m_u$  a  $m_d$ , zatímco  $m_s > m_s^{tri}$ . Podle současných pozorování tento bod odpovídá hladkému cross-over přechodu. To znamená, že nenastává žádný pravý fázový přechod, ale nastává rychlá změna v malém intervalu teploty.
  - Pro všechny hodnoty  $m_u, m_d, m_s$  se parametry chirální susceptibilita  $\chi(T)$  a Polyakovova smyčka  $L(T)$  ostře mění s teplotou. A tudíž můžeme dobře definovat kritický bod  $T_c$ .



### 3. ROZDĚLENÍ MULTIPLICITY

## 3 Rozdělení multiplicity

### 3.1 Motivace

Hlavní motivací následujících kapitol je pozorování, že celkové pozorované multiplicity jednotlivých druhů částic z ultrarelativistických jaderných srážek souhlasí se statistickým modelem při teplotách nad 160 MeV. Na druhé straně je možné teplotu fázového přechodu stanovit i pomocí metod QCD na mřížce. Teplota se v tomto případě určuje tak, že se měří 2. až 4. řád fluktuací protonů, které představují fluktuace baryonů. Tyto výsledky se pak porovnávají s výsledky QCD na mřížce. Takto určená teplota je potom nižší než 160 MeV.

Cílem následujících kapitol je tedy zjistit, jak rychle různé momenty rozdělení multiplicity dosáhnou své rovnovážné hodnoty. Pokud se soubor systémů částic začne vyvíjet s rozdělením multiplicity mimo rovnovážnou hodnotu, vývoj multiplicity je popsán pomocí řídící rovnice, kterou k popisu použijeme.

### 3.2 Úvod

Relativistická statistická termodynamika je používána k popisu částicové produkce ve vysokoenergetických srážkách těžkých iontů. Nedávné analýzy ukázaly, že statistický model dává uspokojivý popis multiplicit většiny hadronů měřených ve srážkách  $A - A$  v BNL a CERNu. Popisu multiplicity pomocí statistického modelu se věnuje např. práce [31]. Dynamika částicového rovnovážného stavu a chemické rovnováhy není ovšem stále úplně pochopena [17].

Produkce částic je obvykle popsána za pomoci grandkanonického souboru, ve kterém jsou průměrné multiplicity kontrolovány pomocí chemického potenciálu. V tomto popisu fluktuuje čistá hodnota náboje (např. elektrického, baryonového, podivného, půvabného, ...) daná  $U(1)$ . Je-li částic mnoho, můžeme fluktuace připustit, přestože se náboje v podstatě musí zachovávat - čili bychom neměli mít žádné fluktuace. V opačném případě, když bude produkce částic řídká, musíme použít kanonický soubor.

Ukazuje se, že kanonický statistický model dobře popisuje výtěžek částic měřených v nízko-energetických srážkách těžkých iontů a vysoko-energetických hadron-jaderných srážkách, hadron-hadronových srážkách a  $e^+e^-$  reakcích. Fluktuace budou jiné pro kanonický a jiné pro grandkanonický soubor. Proto je nezbytné do výpočtů zahrnout fluktuace multiplicity

[17].

Fluktuace řídce se vyskytujících částic jsou velmi citlivou sondou stupně rovnováhy dosaženého v dané srážce. Takovéto měření může poskytnout první přímý experimentální důkaz pro chemickou rovnováhu v reakcích těžkých iontů [18].

### 3.3 Rovnice pro změnu multiplicity

Uvažujme binární proces  $a_1a_2 \longleftrightarrow b_1b_2$ , kde  $a \neq b$ . Rovnici pro změnu multiplicity částic typu  $b$  potom můžeme popsat rovnicí

$$\frac{d\langle N_{b_1} \rangle}{dt} = \frac{G}{V} \langle N_{a_1} \rangle \langle N_{a_2} \rangle - \frac{L}{V} \langle N_{b_1} \rangle \langle N_{b_2} \rangle, \quad (3.1)$$

kde  $G \equiv \langle \sigma_G v \rangle$  je kreační člen a  $L \equiv \langle \sigma_L v \rangle$  je anihilační člen, přičemž  $\sigma_G$  resp.  $\sigma_L$  je účinný průřez pro proces  $a_1a_2 \rightarrow b_1b_2$  resp. pro proces  $b_1b_2 \rightarrow a_1a_2$ ,  $v$  je relativní rychlosť mezi dvěma reagujícími částicemi,  $N_k$  určuje celkový počet částic  $k$ ,  $V$  je vlastní objem reakce (objem, ve kterém spolu částice interagují a "ví" o sobě). Součin  $\sigma v$  je následně ustředněn přes všechny relativní rychlosti reagujících částic. Typickým příkladem tohoto procesu je produkce/anhilace kaonu  $\pi^+\pi^- \leftrightarrow K^+K^-$ . Rovnice pro změnu multiplicity (3.1) však nemůže být použita v případě řídké produkce částic a silné korelace pomocí přesného zachování náboje.

Rovnice (3.1) obecně neobsahuje korelaci mezi produkci/anhilací  $b_1$  a  $b_2$ , která tam například bude, budou-li mít opačné náboje. Abychom mohli tuto korelaci zahrnout, definujeme pravděpodobnost  $P_{i,j}$ , která určuje pravděpodobnost nalezení  $i$  částic  $b_1$  a  $j$  částic  $b_2$  v 1 eventu. Dále definujeme pravděpodobnost  $P_i$ , že najdeme  $i$  částic typu  $b$  v 1 eventu. Průměrný počet částic  $b$  v jednom eventu je definován jako

$$\langle N_b \rangle = \sum_{i=0}^{\infty} i P_i. \quad (3.2)$$

Potom je obecná rovnice pro průměrnou částicovou multiplicitu dána vztahem

$$\frac{d\langle N_{b_1} \rangle}{d\tau} = \frac{G}{V} \langle N_{a_1} \rangle \langle N_{a_2} \rangle - \frac{L}{V} \sum_{i,j} ij P_{i,j}. \quad (3.3)$$

Aby byla zachována vnitřní symetrie U(1) (v případě kaonů podivnost), musí částice  $b_1$  a  $b_2$  nést opačný náboj. Aby platila U(1) nábojová neutralita systému, musí platit  $N \equiv N_{b_1} \equiv$

### 3. ROZDĚLENÍ MULTIPLICITY

$N_{b_2}$ . Počty částic  $b_1$  a  $b_2$  jsou tedy silně korelované.

Potom platí

$$P_{i,j} = P_i \delta_{ij}, \quad (3.4)$$

a

$$\sum_{i,j} ij P_{i,j} = \sum_i i^2 P_i \equiv \langle N^2 \rangle = \langle N \rangle^2 + \langle \delta N^2 \rangle, \quad (3.5)$$

kde  $\langle \delta N^2 \rangle$  reprezentuje fluktuace počtu  $b_1 b_2$  párů v jednotlivých srážkách.

Po celou dobu předpokládáme, že máme velký počet částic  $a_1$  a  $a_2$  (např. pionů nebo nukleonů), takže můžeme zanedbat "event-by-event" fluktuace jejich multiplicit a změnu jejich počtu během procesu.

Pomocí rovnic (3.4) a (3.5) můžeme přepsat rovnici (3.3) do tvaru

$$\frac{d \langle N \rangle}{d\tau} = \frac{G}{V} \langle N_{a_1} \rangle \langle N_{a_2} \rangle - \frac{L}{V} \langle N^2 \rangle. \quad (3.6)$$

Pokud vzniká velký počet párů  $b_1 b_2$ , tj.  $\langle N \rangle \gg 1$ , potom platí

$$\langle N^2 \rangle \approx \langle N \rangle^2 \quad (3.7)$$

a rovnice (3.6) přejde do následujícího tvaru

$$\frac{d \langle N \rangle}{d\tau} \approx \frac{G}{V} \langle N_{a_1} \rangle \langle N_{a_2} \rangle - \frac{L}{V} \langle N \rangle^2. \quad (3.8)$$

Pokud vzniká malý počet párů  $b_1 b_2$ , tj.  $\langle N \rangle \ll 1$ , rovnice (3.1) a (3.8) už dále neplatí. V tomto případě máme  $P_1 \gg P_i$  pro  $i \geq 2$ , potom

$$\langle N^2 \rangle \approx \langle N \rangle, \quad (3.9)$$

čímž přejde rovnice (3.6) do následujícího tvaru

$$\frac{d \langle N \rangle}{d\tau} = \frac{G}{V} \langle N_{a_1} \rangle \langle N_{a_2} \rangle - \frac{L}{V} \langle N \rangle. \quad (3.10)$$

Z rovnice (3.8) vidíme, že pro případ  $\langle N \rangle \gg 1$  závisí absorpční člen na počtu párů  $b_1 b_2$  kvadraticky, zatímco pro  $\langle N \rangle \ll 1$  pouze lineárně.

Vztahy v kapitole 3.3 byly převzaty z [17].

### 3.4 Multiplicita v rovnovážném stavu a relaxační čas

Abychom mohli ilustrovat rozdíly v časovém vývoji malého a velkého počtu částic, budeme předpokládat dva limitní případy:  $\langle N \rangle \gg 1$  a  $\langle N \rangle \ll 1$ . Toto rozdělení na dva limitní případy je ještě potřeba trochu upřesnit. Počet částic systému  $\langle N \rangle$  se s časem mění. Limitní případy se tedy liší tím, kolik částic typu  $b$  se během vývoje vyprodukuje, pokud systém necháme vyvijet dostatečně dlouho. Bude-li kreační člen velký v důsledku velkého účinného průřezu pro kreační reakci, bude nakonec velké i  $N$ . V opačném případě, kdy bude kreační člen malý oproti anihilačnímu členu (např. díky tomu, že budou částice  $b$  moc těžké), zůstane systém vždy u malého  $N$ . Budeme uvažovat systém se stálou teplotou, objemem a s nulovým počtem počátečních  $b_1 b_2$  párů, tj.  $\langle N \rangle(\tau = 0) = 0$ .

V limitě  $\langle N \rangle \gg 1$  platí rovnice (3.8) a její řešení má tvar

$$\langle N \rangle^{GC}(\tau) = N_{eq}^{GC} \tanh(\tau/\tau_0^{GC}), \quad (3.11)$$

kde  $N_{eq}^{GC}$  je rovnovážná hodnota pro počet párů  $b_1 b_2$  a  $\tau_0^{GC}$  je relaxační čas. Tyto konstanty jsou dány vztahy

$$N_{eq}^{GC} = \sqrt{\epsilon}, \quad \tau_0^{GC} = \frac{V}{L\sqrt{\epsilon}}, \quad (3.12)$$

kde

$$\epsilon = G \langle N_{a_1} \rangle \langle N_{a_2} \rangle / L. \quad (3.13)$$

V případě, kdy jsou rozdelení hybností částic tepelná, kreační člen (G) a anihilační člen (L) jsou tepelné průměry účinných průřezů pro produkci a absorpci. Potom po zanedbání kvantové statistiky platí

$$\frac{G}{L} = \frac{d_{b_1} \alpha_{b_1}^2 K_2(\alpha_{b_1}) d_{b_2} \alpha_{b_2}^2 K_2(\alpha_{b_2})}{d_{a_1} \alpha_{a_1}^2 K_2(\alpha_{a_1}) d_{a_2} \alpha_{a_2}^2 K_2(\alpha_{a_2})}, \quad (3.14)$$

kde  $d_k$  jsou degenerační faktory,  $\alpha_k \equiv \frac{m_k}{T}$  a  $K_2$  jsou modifikované Besselovy funkce.

Rovnovážná hodnota pro počet párů  $b_1 b_2$  pak přejde z rovnice (3.12) do tvaru

$$N_{eq}^{GC} = \frac{1}{2\pi^2} V T^3 \sqrt{d_{b_1} \alpha_{b_1}^2 K_2(\alpha_{b_1})} \sqrt{d_{b_2} \alpha_{b_2}^2 K_2(\alpha_{b_2})}. \quad (3.15)$$

### 3. ROZDĚLENÍ MULTIPLICITY

Rovnovážná hodnota je tedy popsána pomocí grandkanonických výsledků bez chemického potenciálu díky U(1) nábojové neutralitě systému.

V limitě  $\langle N \rangle \ll 1$  je časový vývoj popsán rovnicí (3.10), která má následující řešení

$$\langle N \rangle^C(\tau) = N_{eq}^C(1 - \exp(-\tau/\tau_0^C)), \quad (3.16)$$

s rovnovážnou hodnotou a relaxačním časem ve tvaru

$$N_{eq}^C = \epsilon, \quad \tau_0^C = \frac{V}{L}. \quad (3.17)$$

Pro tepelné rozdělení hybností má rovnovážná hodnota multiplicity páru  $b_1 b_2$  tvar

$$N_{eq}^C = \left[ \frac{d_{b_1}}{2\pi^2} V T^3 \alpha_{b_1}^2 K_2(\alpha_{b_1}) \right] \cdot \left[ \frac{d_{b_2}}{2\pi^2} V T^3 \alpha_{b_2}^2 K_2(\alpha_{b_2}) \right]. \quad (3.18)$$

Tato rovnice ukazuje lokální nábojové zachování U(1). Pro každou částici  $b_1$  je vyprodukována ve stejném eventu i částice  $b_2$  s opačným nábojem, aby se zachoval lokálně náboj. Tento výsledek je očekáván z kanonického formalismu, který vyjadřuje zákony zachování.

Rovnice (3.18) vyjadřuje pouze vedoucí člen rozvoje kanonického výsledku pro multiplicity částic nesoucích U(1) náboje. Obecný výraz má tvar

$$N_{eq}^C = N_{eq}^{GC} \frac{I_1(2N_e q^{GC})}{I_0(2N_e q^{GC})}, \quad (3.19)$$

kde hodnota  $N_{eq}^{GC}$  je dána rovnicí (3.15) a  $I_i$  jsou modifikované Besselovy funkce.

Nyní porovnáme rovnice (3.12) a (3.17).

Pro  $\langle N \rangle \ll 1$  je rovnovážná hodnota multiplicity v kanonickém formalismu mnohem menší než hodnota, která je předpokládána z grandkanonického výsledku

$$N_{eq}^C = (N_{eq}^{GC})^2 \ll N_{eq}^{GC}. \quad (3.20)$$

Z rovnice (3.20) vidíme, že kanonický formalismus je pro popis nábojového zachování pro malou multiplicitu nabitych částic velice důležitý.

Hustota částic v grandkanonické limitě nezávisí na objemu  $V$ , zatímco v kanonické limitě se hustota škáluje s  $1/V$ .

Dále platí, že relaxační čas pro kanonický systém je mnohem kratší než pro grandkanonický systém

$$\tau_0^C = \tau_0^{GC} N_{eq}^{GC} \ll \tau_0^{GC} \quad (3.21)$$

díky malému počtu částic ( $N_{eq}^{GC} \ll 1$ ).

Grandkanonické výsledky souhlasí s malými fluktuacemi počtu páru  $b_1 b_2$  ( $\langle \delta N^2 \rangle / \langle N \rangle^2 \ll 1$ ), zatímco kanonický popis vede k velkým fluktuacím počtu páru  $b_1 b_2$ .

Vztahy v kapitole 3.4 byly převzaty z [17].

### 3.5 Řídící rovnice

V této kapitole formulujeme obecnou rovnici vývoje rozdělení multiplicity systému, která je platná pro libovolnou hodnotu  $\langle N \rangle$ . Tato rovnice se nazývá řídící rovnice pro  $P_n(\tau)$ , pravděpodobnost nalezení  $n$  páru  $b_1 b_2$  v bezrozměrném čase  $\tau$ . Tato pravděpodobnost se zvětšuje přechodem systému ze stavu  $n - 1$  nebo  $n + 1$  do stavu  $n$ , a naopak zmenšuje se přechody systému ze stavu  $n$  do stavu  $n - 1$ , anebo  $n + 1$ .

Pro binární proces  $a_1 a_2 \rightarrow b_1 b_2$ , kde  $a \neq b$ , jako je např. reakce  $\pi + N \rightarrow K + \Lambda$ , má řídící rovnice tvar

$$\frac{dP_n(\tau)}{d\tau} = \epsilon [P_{n-1}(\tau) - P_n(\tau)] - [n^2 P_n(\tau) - (n+1)^2 P_{n+1}(\tau)], \quad (3.22)$$

kde  $n = 0, 1, 2, 3, \dots$ ,  $\epsilon$  je definováno vztahem (3.13). Bezrozměrná časová proměnná  $\tau$  má tvar

$$\tau = t \frac{L}{V}, \quad (3.23)$$

takže  $\tau$  je měřeno v jednotkách relaxačního času  $\tau_0^C = V/L$ .

Rovnice (3.22) musí být řešena numericky.

Vztahy v kapitole 3.5 byly převzaty z [18].

### 3.6 Generující funkce

Vynásobením rovnice (3.22)  $n$  a vysumováním přes  $n$  obdržíme obecnou rovnici pro střední hodnotu multiplicity (3.6). Rovnice (3.22) obsahuje ovšem mnohem více informací než rovnice pro střední hodnotu multiplicity (3.6).

### 3. ROZDĚLENÍ MULTIPLICITY

Rovnici (3.22) pro pravděpodobnosti  $P_n$  můžeme převést na parciální diferenciální rovnici pro generující funkci

$$g(x, \tau) = \sum_{n=0}^{\infty} x^n P_n(\tau). \quad (3.24)$$

Vynásobením rovnice (3.22)  $x^n$  a vysčítáním přes  $n$  dostaneme

$$\frac{\partial g(x, \tau)}{\partial \tau} = \frac{L}{V}(1-x)(xg'' + g' - \epsilon g), \quad (3.25)$$

kde  $g' \equiv \frac{\partial g}{\partial x}$ . Je zřejmé, že  $g(1, \tau)$  se nemění v čase, což je ekvivalentní zachování celkové pravděpodobnosti.

Řešení v rovnovážném stavu získáme po vyřešení rovnice

$$xg''_{eq} + g'_{eq} - \epsilon g_{eq} = 0. \quad (3.26)$$

Po zavedení substituce  $x = y^2/(4\epsilon)$  můžeme rovnici (3.26) redukovat na Besselovu rovnici. Řešení, které je regulérní v  $x = 0$  ( $g(0) = P_0 \leq 1$ ), je dáno vztahem

$$g_{eq}(x) = \frac{I_0(2\sqrt{\epsilon x})}{I_0(2\sqrt{\epsilon})} \quad (3.27)$$

s normalizací  $g(1) = \sum P_n = 1$ ,  $\epsilon$  bylo definováno v rovnici (3.13).

Detailní odvození rovnovážné hodnoty  $g_{eq}(x)$  je provedeno v Příloze B.1.

Rovnovážné rozdělení pravděpodobnosti  $P_n$  získáme z rovnic (3.24) a (3.27) ve tvaru

$$P_{n,eq} = \frac{\epsilon^n}{I_0(2\sqrt{\epsilon})(n!)^2} \quad (3.28)$$

a hodnota pro průměrný počet  $b_1 b_2$  párů v 1 eventu v rovnováze je dána jako

$$\langle N \rangle_{eq} = g'_{eq}(1). \quad (3.29)$$

Vztahy v kapitole 3.6 byly převzaty z [17].

### 3.7 Faktoriální momenty

Faktoriální momenty získáme pomocí derivací generující funkce.

Rovnovážné hodnoty druhého ( $F_2 = \langle N(N-1) \rangle$ ), třetího ( $F_3 = \langle N(N-1)(N-2) \rangle$ ) a čtvrtého ( $F_4 = \langle N(N-1)(N-2)(N-3) \rangle$ ) faktoriálního momentu jsou odvozeny v Příloze C.

Vztah pro rovnovážnou hodnotu středního počtu částic je dán jako

$$\langle N \rangle_{eq} = g'_{eq}(1) = \sqrt{\varepsilon} \frac{I'_0(2\sqrt{\varepsilon})}{I_0(2\sqrt{\varepsilon})} = \sqrt{\varepsilon} \frac{I_1(2\sqrt{\varepsilon})}{I_0(2\sqrt{\varepsilon})}. \quad (3.30)$$

Pro rovnovážnou hodnotu 2. faktoriálního momentu dostaneme vztah

$$\langle N(N-1) \rangle_{eq} = g''_{eq}(1) = -\frac{1}{2} \sqrt{\varepsilon} \frac{I_1(2\sqrt{\varepsilon})}{I_0(2\sqrt{\varepsilon})} + \frac{1}{2} \varepsilon \frac{I_2(2\sqrt{\varepsilon}) + I_0(2\sqrt{\varepsilon})}{I_0(2\sqrt{\varepsilon})}. \quad (3.31)$$

Rovnovážná hodnota 3. faktoriálního momentu je dána vztahem

$$\begin{aligned} \langle N(N-1)(N-2) \rangle_{eq} &= g'''_{eq}(1) \\ &= \frac{3}{4} \sqrt{\varepsilon} \frac{I_1(2\sqrt{\varepsilon})}{I_0(2\sqrt{\varepsilon})} - \frac{3}{4} \varepsilon \frac{I_0(2\sqrt{\varepsilon}) + I_2(2\sqrt{\varepsilon})}{I_0(2\sqrt{\varepsilon})} + \frac{1}{4} \varepsilon^{3/2} \frac{I_3(2\sqrt{\varepsilon}) + 3I_1(2\sqrt{\varepsilon})}{I_0(2\sqrt{\varepsilon})}. \end{aligned} \quad (3.32)$$

Pro rovnovážnou hodnotu 4. faktoriálního momentu jsme odvodili vztah

$$\begin{aligned} \langle N(N-1)(N-2)(N-3) \rangle_{eq} &= g^{IV}_{eq}(1) = -\frac{15}{8} \sqrt{\varepsilon} \frac{I_1(2\sqrt{\varepsilon})}{I_0(2\sqrt{\varepsilon})} + \frac{15}{8} \varepsilon \frac{I_2(2\sqrt{\varepsilon}) + I_0(2\sqrt{\varepsilon})}{I_0(2\sqrt{\varepsilon})} \\ &\quad - \frac{3}{4} \varepsilon^{3/2} \frac{3I_1(2\sqrt{\varepsilon}) + I_3(2\sqrt{\varepsilon})}{I_0(2\sqrt{\varepsilon})} + \frac{1}{8} \varepsilon^2 \frac{3I_0(2\sqrt{\varepsilon}) + 4I_2(2\sqrt{\varepsilon}) + I_4(2\sqrt{\varepsilon})}{I_0(2\sqrt{\varepsilon})}. \end{aligned} \quad (3.33)$$

#### 3.7.1 Centrální momenty

Postupnými úpravami lze z rovnic (C.3), (C.6), (C.9) a (C.12) vyjádřit centrální momenty  $\langle (N - \langle N \rangle) \rangle$ ,  $\langle (N - \langle N \rangle)^2 \rangle$ ,  $\langle (N - \langle N \rangle)^3 \rangle$  a  $\langle (N - \langle N \rangle)^4 \rangle$ . Z těchto hodnot pak můžeme vyjádřit koeficient šikmosti a koeficient špičatosti.

Koeficient šikmosti (Obr.3.1) je charakteristika rozdělení náhodné veličiny, která popisuje jeho asymetrii. Nulová šikmost značí, že hodnoty náhodné veličiny jsou symetricky rozděleny vlevo a vpravo od střední hodnoty. Kladná šikmost značí, že vpravo od průměru se vyskytují

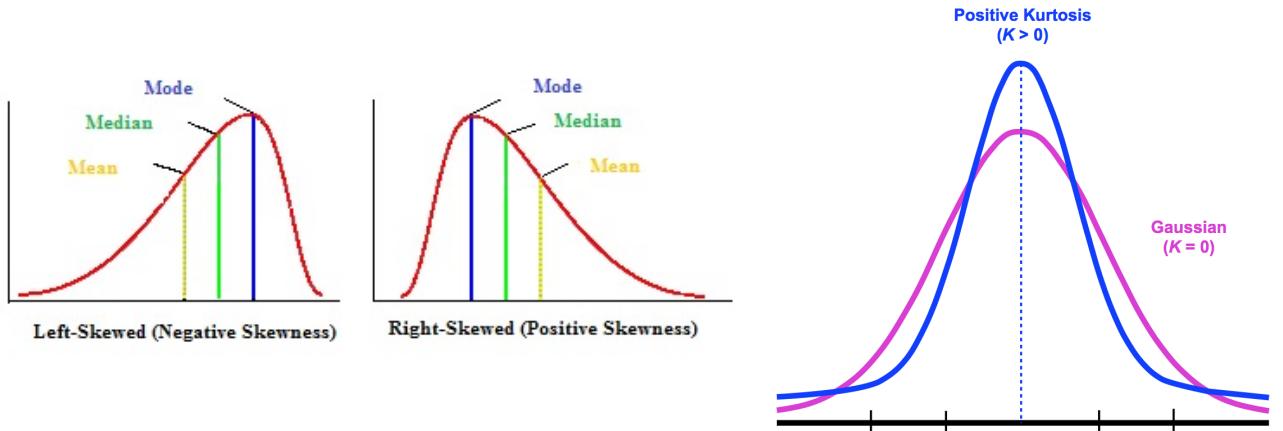
### 3. ROZDĚLENÍ MULTIPLICITY

odlehlejší hodnoty nežli vlevo (rozdělení má tzv. pravý ocas) a většina hodnot se nachází vlevo blízko od průměru. U záporné šiknosti je tomu naopak. Symetrická rozdělení včetně normálního rozdělení mají šikmost nula [23]. Koeficient šiknosti je definován vztahem

$$S = \frac{\langle (N - \langle N \rangle)^3 \rangle}{\langle (N - \langle N \rangle)^2 \rangle^{3/2}} \quad (3.34)$$

Koeficient špičatosti (Obr.3.2) je charakteristika rozdělení náhodné veličiny, která porovnává dané rozdělení s normálním rozdělením pravděpodobnosti. Normální rozdělení má špičatost nula. Kladná špičatost značí, že většina hodnot náhodné veličiny leží blízko její střední hodnoty a hlavní vliv na rozptyl mají málo pravděpodobné odlehle hodnoty. Křivka hustoty je špičatější, nežli u normálního rozdělení. Záporná špičatost značí, že rozdělení je rovnoměrnější a jeho křivka hustoty je plošší nežli u normálního rozdělení [23]. Pro koeficient špičatosti platí vztah

$$\kappa = \frac{\langle (N - \langle N \rangle)^4 \rangle}{\langle (N - \langle N \rangle)^2 \rangle^2} - 3. \quad (3.35)$$



Obrázek 3.1: Koeficient šiknosti [24].

Obrázek 3.2: Koeficient špičatosti [25].

Vztahy (3.34) a (3.35) byly převzaty z [22].

## 3.8 Numerické řešení řídící rovnice

### 3.8.1 Počáteční podmínky

Budeme uvažovat tyto dva případy:

1. Počáteční počet částic předpokládáme menší než je hodnota v rovnovážném stavu. Tomuto předpokladu odpovídá např. proces produkce kaonů v  $1A$  GeV srážce těžkých iontů.
2. Počáteční počet částic předpokládáme větší než je hodnota v rovnovážném stavu. Tento případ je např. produkce půvabu v  $200A$  GeV srážkách těžkých iontů [18].

V prvním případě můžeme předpokládat, že na počátku máme v daném eventu maximálně 1 částici. V tomto případě mají počáteční podmínky tvar

$$P_0(\tau = 0) = 1 - N_0, \quad (3.36)$$

$$P_1(\tau = 0) = N_0, \quad (3.37)$$

$$P_n(\tau = 0) = 0, \quad n > 1, \quad (3.38)$$

kde  $N_0$  je počáteční průměrný počet částic.

Tyto počáteční podmínky nazýváme binomickými počátečními podmínkami. V práci [18] bylo ukázáno, že druhý faktoriální moment začíná v nule. Na Obr. 3.3 vidíme, že třetí a čtvrtý faktoriální moment v tomto případě také začíná v 0 a poté rychle dosáhne svého maxima v čase

$$\tau_{max} = \frac{N_0}{\langle N \rangle_{eq}} \quad (3.39)$$

a pro  $N_0 / \langle N \rangle_{eq} \ll 1$  je maximální hodnota druhého faktoriálního momentu  $F_2^{max} \simeq 1$ .

Proto se faktoriální momenty blíží shora ke své rovnovážné hodnotě a měření momentů potom bude indikovat stupeň rovnováhy, které bylo dosaženo ve srážce těžkých iontů. Přesný čas, kdy momenty dosáhnou maxima, závisí na parametrech  $N_0$  a  $\varepsilon$ , [18].

V druhém případě můžeme předpokládat, že jsou na počátku pravděpodobnosti  $P_n$  rozdělené podle poissonovského rozdělení

$$P_n(\tau = 0) = \frac{N_0^n}{n!} e^{-N_0}. \quad (3.40)$$

### 3. ROZDĚLENÍ MULTIPLICITY

V tomto případě začínají faktoriální momenty v  $F_n(\tau = 0) = 1$ .

#### 3.8.2 Časový vývoj faktoriálních momentů

Necháme rozdelení multiplicity vyvijet v čase podle řídící rovnice (3.22).

Normovaný druhý faktoriální moment je dán vztahem

$$F_2(\tau) = \langle N(N-1) \rangle / \langle N \rangle^2, \quad (3.41)$$

normovaný třetí faktoriální moment má tvar

$$F_3(\tau) = \langle N(N-1)(N-2) \rangle / \langle N \rangle^3 \quad (3.42)$$

a normovaný čtvrtý faktoriální moment je potom

$$F_4(\tau) = \langle N(N-1)(N-2)(N-3) \rangle / \langle N \rangle^4. \quad (3.43)$$

Výsledky pro binomické a poissonovské počátení podmínky pro různé hodnoty parametrů  $N_0$  a  $\epsilon$  jsou v následující kapitole.

#### 3.8.3 Výsledky

Nejdříve se podívejme na případ termalizace, kde se teplota nebude měnit a tudíž rozdelení hybností a ustředněné účinné průřezy zůstávají konstantní.

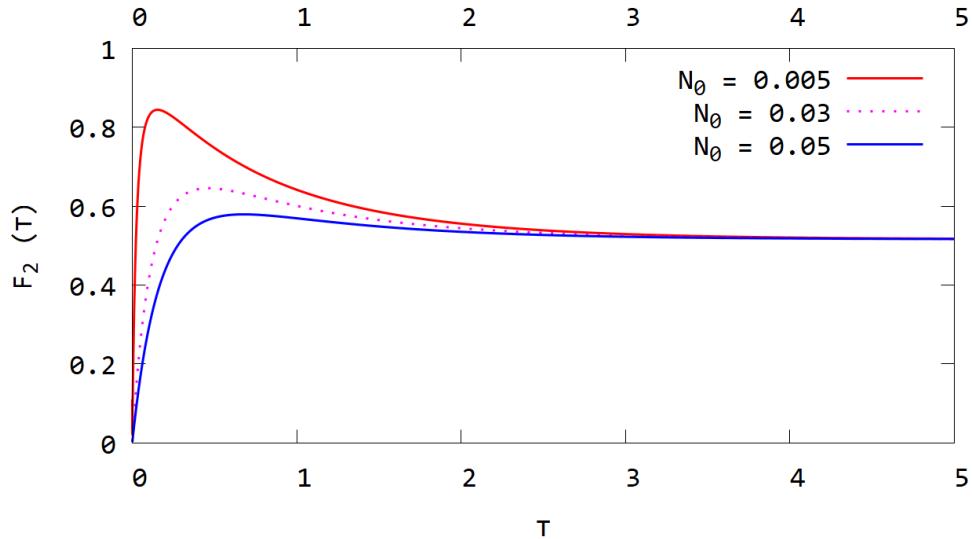
Na Obr. 3.3 vidíme 2. faktoriální moment pro různé hodnoty počátečního průměrného počtu  $N_0$  částic a pro binomické počáteční podmínky. Vidíme, že pro větší průměrný počet částic  $N_0$  dostaneme menší hodnotu  $F_2^{max}$ .

Rovnice (3.22) byla řešena s binomickými počátečními podmínkami (Obr. 3.3, Obr. 3.4, Obr. 3.6) a s poissonovskými počátečními podmínkami (Obr. 3.5).

Z těchto obrázků je vidět, že se všechny faktoriální momenty v případě konstantní teploty blíží k jejich rovnovážné hodnotě stejně rychle. Faktoriální momenty se však pro binomické počáteční podmínky odlišují jejich maximálními dosaženými hodnotami. Se zvyšujícím se řádem momentu rozdelení multiplicity se snižuje hodnota tohoto momentu. Pro poissonovské počáteční podmínky (Obr. 3.5) je maximální hodnota všech momentů rovna 1.

Na Obr. 3.6 vidíme časový vývoj 2., 3. a 4. faktoriálního momentu, které jsou předělené

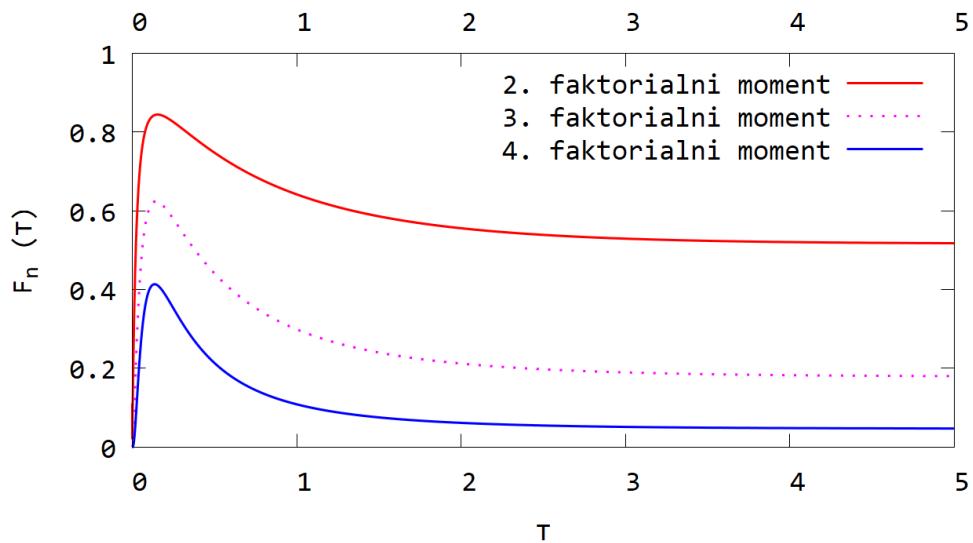
jejich rovnovážnými hodnotami odvozenými v Příloze C a tudíž všechny tyto momenty konvergují k 1.



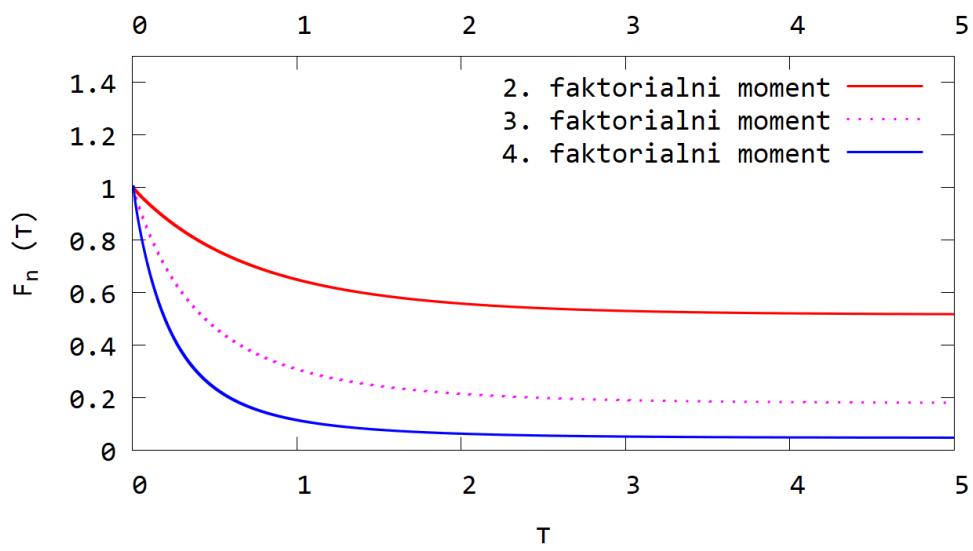
Obrázek 3.3: Časový vývoj druhého faktoriálního momentu pro binomické počáteční podmínky. Druhý faktoriální moment je ukázán pro různé hodnoty průměrného počtu částic  $N_0$  pro  $\varepsilon = 0, 1$ .

Za použití řídící rovnice nezávislé na teplotě jsem tedy zjistila, že při zvyšujícím se řádu momentu rozdělení multiplicity nenarůstá doba, za kterou tento moment dosáhne svého rovnovážného stavu.

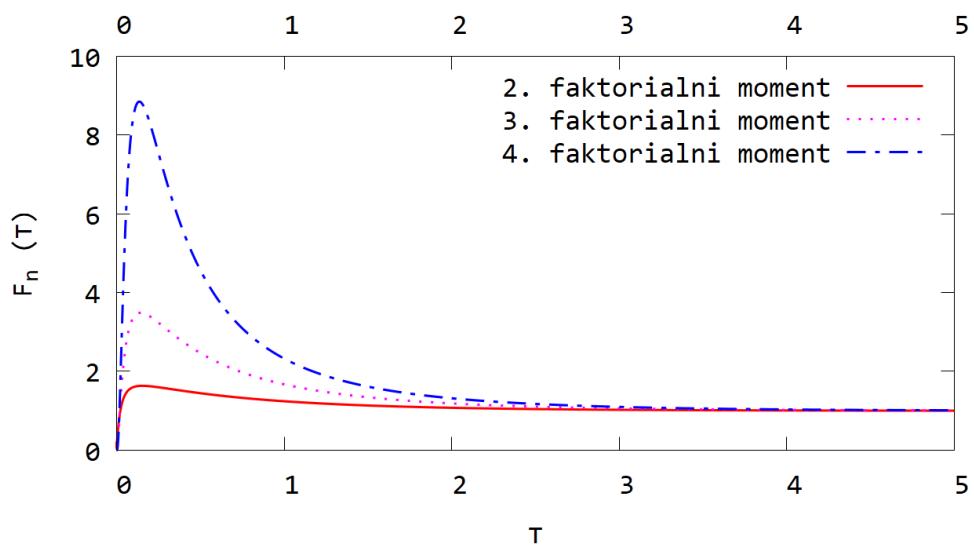
### 3. ROZDĚLENÍ MULTIPLICITY



Obrázek 3.4: Druhý, třetí a čtvrtý faktoriální moment pro binomické počáteční podmínky pro  $\varepsilon = 0,1$  a  $N_0 = 0,005$ .



Obrázek 3.5: Druhý, třetí a čtvrtý faktoriální moment pro poissonovské počáteční podmínky pro  $\varepsilon = 0,1$  a  $N_0 = 0,000009$ .



Obrázek 3.6: Časový vývoj druhého, třetího a čtvrtého faktoriálního momentu pro binomické počáteční podmínky, které jsou předělené jejich rovnovážnými hodnotami odvozenými v kapitole 3.7.

## 4 Řídící rovnice závislá na teplotě a reálném čase

### 4.1 Motivace

Na obrázkách Obr. 3.4, Obr. 3.5 a Obr. 3.6 v kapitole 3.8.3 jsme viděli, že relaxace faktoriálních momentů vypadá pro všechny tři momenty velice podobně. Pro další studium faktoriálních momentů chceme do řídící rovnice přidat závislost na teplotě a reálném čase. V případě, že se teplota nemění, je možné řídící rovnici formulovat v bezrozměrném čase, který vznikne tak, že se čas přeskáluje relaxačním časem. To jde v případě, že se relaxační čas nemění. To nastává v případě neměnné teploty. Ale mění-li se teplota, bude se také měnit i relaxační čas a tudíž se dříve použitá základní časová škála mění a nemůžeme zavést bezrozměrný čas. Také to znamená, že budeme muset vývoj počítat pro konkrétní chemickou reakci s konkrétními účinnými průřezy. Díky tepelnému průměrování účinných průřezu vstoupí do rovnice závislost na teplotě. Budeme se chtít podívat na to, co se stane s faktoriálními momenty, když se bude teplota měnit postupně. Chceme se podívat, zda-li se při změně teploty ukážou nějaké rozdíly mezi různými momenty. Řídící rovnice závislá na teplotě a reálném čase odpovídá reálné situaci, ve které se teplota fireballu snižuje.

### 4.2 Chemické složení a reakce

Pro potřeby průměrování přes relativní rychlosť budeme předpokládat, že jsou hybnosti rozděleny podle Boltzmannova rozdělení

$$n_i(p) \propto \exp\left(-\frac{\sqrt{m_i^2 + p^2}}{T}\right), \quad (4.1)$$

kde  $p$  je hybnost,  $m_i$  je hmotnost částice  $i$  a  $T$  je teplota.

Tím vytvoříme předpoklad tepelné rovnováhy, ale chemicky budeme systém považovat za systém v nerovnovážném stavu.

Relativní rychlosť je dána vztahem

$$v_{ij} = \frac{[(p_i p_j)^2 - m_i^2 m_j^2]^{1/2}}{E_i E_j}, \quad (4.2)$$

kde  $E_i$  a  $E_j$  jsou energie dvou částic.

Střední hodnota součinu účinného průřezu  $\sigma_{ij}^X$  a relativní rychlosti  $v_{ij}$  je definována jako

$$\langle \sigma_{ij}^X v_{ij} \rangle = \int d^3 p_i \int d^3 p_j n_i(p_i) n_j(p_j) \sigma_{ij}^X v_{ij}, \quad (4.3)$$

kde  $n_k(p_k)$  jsou rozdělení hybnosti častic.

Po vyintegrování rovnice (4.3) získáme požadovaný vztah pro střední hodnotu součinu účinného průřezu a relativní rychlosti ve tvaru

$$\langle v_{ij} \sigma_{ij}^X \rangle = \frac{\int_{\sqrt{s_0}}^{\infty} dx \sigma_{ij}^X(x) K_1\left(\frac{x}{T}\right) [x^2 - (m_i + m_j)^2] [x^2 - (m_i - m_j)^2]}{4m_i^2 m_j^2 T K_2(m_i/T) K_2(m_j/T)}, \quad (4.4)$$

kde  $K_i$  jsou modifikované Besselovy funkce definované vztahy

$$K_1(z) = \int_0^{\infty} e^{-z \cosh t} \cosh(t) dt, \quad (4.5)$$

$$K_2(z) = \int_0^{\infty} e^{-z \cosh t} \cosh(2t) dt. \quad (4.6)$$

Dále

$$\sqrt{s_0} = \max(m_i + m_j, \Sigma_{final} m_a) \quad (4.7)$$

je prahová energie reakce.

Vztahy v kapitole 4.2 byly převzaty z [19] a [20].

### 4.3 Účinné průřezy pro produkci kaonů

V následujících kapitolách specifikujeme účinné průřezy pro reakce s produkcí podivnosti, které jsou relevantní pro uvažované energie srážky. Budeme zanedbávat možnou změnu účinného průřezu v husté a horké hmotě a budeme uvažovat jeho vakuovou hodnotu. Tato approximace splňuje náš předpoklad, že se vlastnosti všech častic v médiu nemění.

Pro procesy s dvěma česticemi v konečném stavu musíme do výpočtu zahrnout i inverzní reakce.

Účinný průřez pro inverzní reakce se počítá z poměrů fázových prostorů v konečném stavu jako

$$\sigma_{34 \rightarrow 12}(\sqrt{s}) = \frac{(2J_3 + 1)(2J_4 + 1)}{(2J_1 + 1)(2J_2 + 1)} \frac{p_{cm}^2(s, m_1, m_2)}{p_{cm}^2(s, m_3, m_4)} \times \sigma_{12 \rightarrow 34}(\sqrt{s}) \quad (4.8)$$

## 4. ŘÍDÍCÍ ROVNICE ZÁVISLÁ NA TEPLITĚ A REÁLNÉM ČASE

kde  $J_i$  a  $m_i$  jsou spiny a hmotnosti částic, které se účastní reakce,  $\sigma_{12 \rightarrow 34}(\sqrt{s})$  je účinný průřez pro reakci  $a_1 a_2 \rightarrow b_1 b_2$  a  $p_{cm}$  je hybnost v soustavě hmotného středu definovaná jako

$$p_{cm}^2(s, m_1, m_2) = \frac{[s - (m_1^2 + m_2^2)]^2 - 4m_1^2 m_2^2}{4s}. \quad (4.9)$$

Vztahy v kapitole 4.3 byly převzány z [20].

### 4.4 Řídící rovnice závislá na reálném čase

Řídící rovnice závislá na teplotě a reálném čase má tvar

$$\frac{dP_n}{dt}(t) = \frac{G}{V} \langle N_{a_1} \rangle \langle N_{a_2} \rangle [P_{n-1}(t) - P_n(t)] - \frac{L}{V} [n^2 P_n(t) - (n+1)^2 P_{n+1}(t)], \quad (4.10)$$

kde  $G$  je "kreační člen" definovaný vztahem  $G \equiv \langle \sigma_G v \rangle$  a  $L$  je "anihilační člen" definovaný vztahem  $L \equiv \langle \sigma_L v \rangle$ . Tyto střední hodnoty dostaneme ze vztahu (4.4).

V rovnici (4.10) je  $V$  vlastní objem reakce,  $\langle N_{a_1} \rangle$  a  $\langle N_{a_2} \rangle$  jsou průměrné počáteční počty částic pro reakci  $a_1 a_2 \rightarrow b_1 b_2$ .

Rovnici (4.10) dostaneme upravením řídící rovnice (3.22), která je závislá pouze na bezrozměrném čase  $\tau$ . Nejprve dosadíme v rovnici (3.22) za  $\epsilon$  vztah (3.13), čímž dostaneme

$$\frac{dP_n}{d\tau}(\tau) = G \langle N_{a_1} \rangle \langle N_{a_2} \rangle / L [P_{n-1}(\tau) - P_n(\tau)] - [n^2 P_n(\tau) - (n+1)^2 P_{n+1}(\tau)]. \quad (4.11)$$

Rovnici (4.11) nyní přenásobíme  $L/V$  a dosadíme  $d\tau = dt \frac{L}{V}$  (ze vztahu (3.23)). Tedy

$$\begin{aligned} \frac{L}{V} \frac{dP_n}{dt} \left( t \frac{L}{V} \right) \frac{V}{L} &= \frac{G}{V} \langle N_{a_1} \rangle \langle N_{a_2} \rangle \left[ P_{n-1}\left(t \frac{L}{V}\right) - P_n\left(t \frac{L}{V}\right) \right] \\ &\quad - \frac{L}{V} \left[ n^2 P_n\left(t \frac{L}{V}\right) - (n+1)^2 P_{n+1}\left(t \frac{L}{V}\right) \right]. \end{aligned} \quad (4.12)$$

Po přeškálování  $\tau = t \frac{L}{V}$  a přejmenování  $\tau = t$  dostaneme rovnici (4.10).

## 4.5 Reakce $\pi N \rightarrow K\Lambda$

Řídící rovnici závislou na teplotě a reálném času budeme demonstrovat pro reakci



Pro hmotnosti platí

$$m_{\pi^+} = 139,570 \text{ MeV}/c^2, \quad (4.14)$$

$$m_n = 939,565 \text{ MeV}/c^2, \quad (4.15)$$

$$m_{\Lambda^0} = 1115,683 \text{ MeV}/c^2, \quad (4.16)$$

$$m_{K^+} = 493,677 \text{ MeV}/c^2 \quad (4.17)$$

a pro spinové degenerace platí

$$d_{\pi^+} = 1, \quad (4.18)$$

$$d_n = 2, \quad (4.19)$$

$$d_{\Lambda^0} = 2, \quad (4.20)$$

$$d_{K^+} = 1. \quad (4.21)$$

Hodnoty hmotností a spinů byly převzaty z [27].

Objem reakce uvažujeme  $V = 125 \text{ fm}^3$ .

Prahovou energii reakce získáme z rovnice (4.7)

$$\begin{aligned} \sqrt{s_0} &= \max(m_{\pi^+} + m_n, m_{\Lambda^0} + m_{K^+}) \\ &= \max(1079, 135 \text{ MeV}, 1609, 360 \text{ MeV}) \simeq 1,61 \text{ GeV}. \end{aligned} \quad (4.22)$$

## 4. ŘÍDÍCÍ ROVNICE ZÁVISLÁ NA TEPLITĚ A REÁLNÉM ČASE

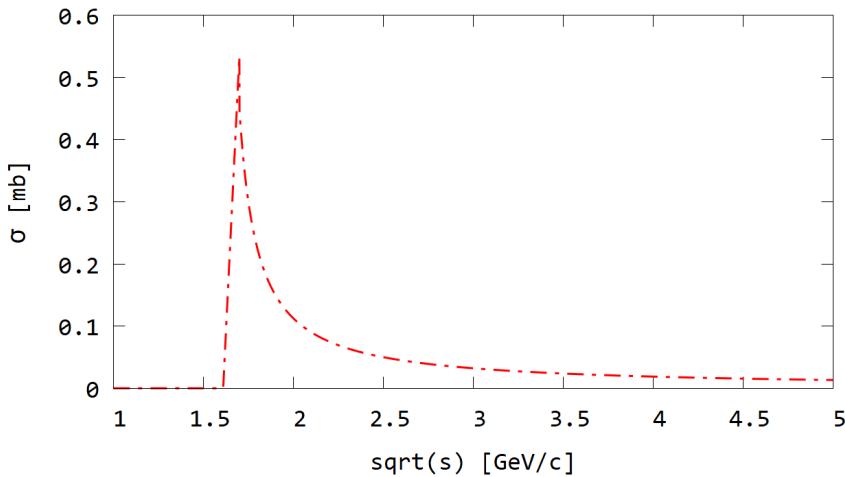
Účinný průřez pro reakci (4.13) je dán vztahy

$$\sigma_{\pi N}^{\Lambda K} = \frac{0,054 \cdot (s^{1/2} - 1,61)}{0,091} \text{ fm}^2, \quad 1,7 \geq s^{1/2} \geq 1,61 \text{ GeV}, \quad (4.23)$$

$$\sigma_{\pi N}^{\Lambda K} = \frac{0,0045}{s^{1/2} - 1,6} \text{ fm}^2, \quad s^{1/2} \geq 1,7 \text{ GeV}, \quad (4.24)$$

$$\sigma_{\pi N}^{\Lambda K} = 0 \text{ fm}^2, \quad s^{1/2} \leq 1,61 \text{ GeV}. \quad (4.25)$$

a je zobrazen na obrázku Obr. 4.1.



Obrázek 4.1: Účinný průřez pro reakci (4.13).

Účinný průřez pro inverzní reakci získáme z rovnice (4.8).

## 4.6 Výsledky

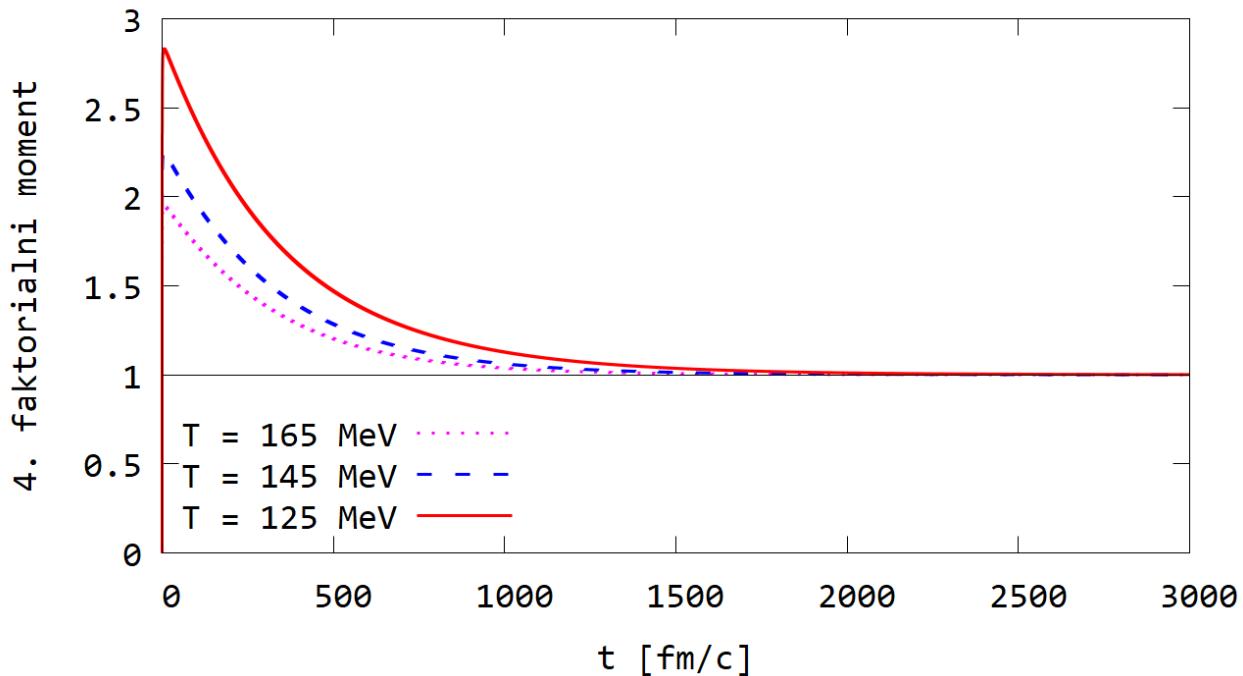
### 4.6.1 Konstantní teplota

Nejprve ukážeme, jak vypadají faktoriální momenty pro řídící rovnici závislou na konstantní teplotě  $T$  předělené svou rovnovážnou hodnotou, abychom mohli posoudit, jak rychle různé momenty termalizují.

Na Obr. 4.2 je 4. faktoriální moment předělený svou rovnovážnou hodnotou pro různé teploty  $T = 165$  MeV,  $T = 145$  MeV a  $T = 125$  MeV. Čtvrtý faktoriální moment jsem vykreslila proto, že jsou na něm nejvíce patrné veškeré změny (viz. Obr.3.6). Z tohoto grafu

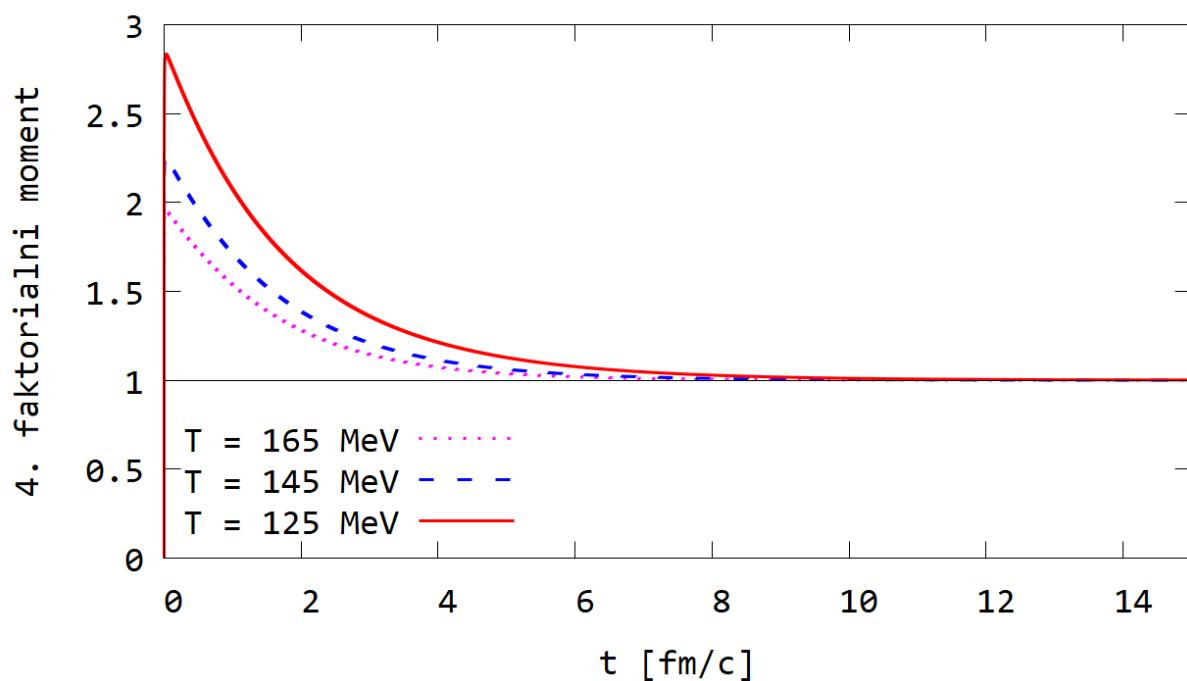
je vidět, že čas termalizace pro 4. faktoriální moment je okolo 1000 fm/c. Z femtoskopie ovšem víme, že doba života fireballu je okolo 10 fm/c. Pro naši chemickou reakci jsme ale dostali mnohonásobně vyšší čas relaxace. Čas 1000 fm/c je příliš dlouhý na to, aby se vývoj této chemické reakce projevil během doby vývoje fireballu. Chtěli bychom zkoumat situaci, ve které se náš chemický systém vyvíjí přibližně stejně rychle jako expanduje fireball. Tento rozdíl je způsoben tím, že v této práci uvažujeme pouze jednu reakci  $\pi N \rightarrow K\Lambda$ , avšak v reálném případě probíhá při vývoji plazmatu více reakcí. Dále tedy budeme používat účinný průřez definovaný v kapitole 4.5 různě přeskálovaný, abychom získali více reálné závislosti. Čtvrtý faktoriální moment předelený svou rovnovážnou hodnotou pro různé teploty  $T = 165$  MeV,  $T = 145$  MeV a  $T = 125$  MeV s 200krát větším účinným průřezem je na Obr. 4.3. Z tohoto grafu vidíme, že pro 200krát větší účinný průřez je doba termalizace okolo 3 fm/c. Grafy jsou vykresleny pro 15 pionů a 10 neutronů.

Pro numerické výpočty byly použity binomické počáteční podmínky s  $N_0 = 0,0005$  a objem byl uvažován  $V = 125$  fm<sup>3</sup>.



Obrázek 4.2: 4. faktoriální moment předelený svou rovnovážnou hodnotou pro různé teploty  $T = 165$  MeV,  $T = 145$  MeV a  $T = 125$  MeV.

#### 4. ŘÍDÍCÍ ROVNICE ZÁVISLÁ NA TEPLITĚ A REÁLNÉM ČASE

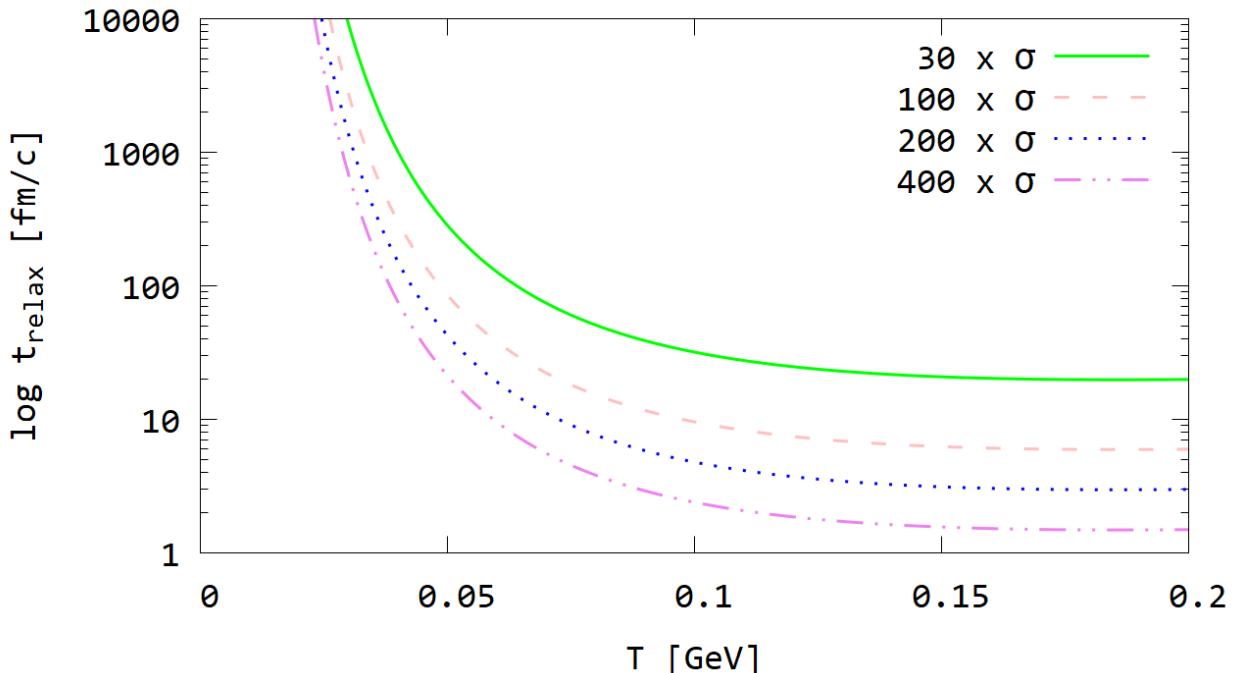


Obrázek 4.3: 4. faktoriální moment předělený svou rovnovážnou hodnotou pro různé teploty  $T = 165 \text{ MeV}$ ,  $T = 145 \text{ MeV}$  a  $T = 125 \text{ MeV}$  s 200krát větším účinným průřezem.

#### 4.6.2 Postupná změna teploty

Jak už bylo řečeno, fireball se vyvíjí v čase, rychle chladne a expanduje. Doba jeho života je okolo  $10 \text{ fm}/c$ . Relevantní jsou pro nás potom časy řádově porovnatelné s  $10 \text{ fm}/c$  a teploty mezi  $80 - 150 \text{ MeV}$ .

Nejprve se podíváme na závislost relaxačního času definovaného vztahem (3.12) na teplotě. Tato závislost je pro různé násobky účinného průřezu  $\sigma$  na Obr. 4.4.



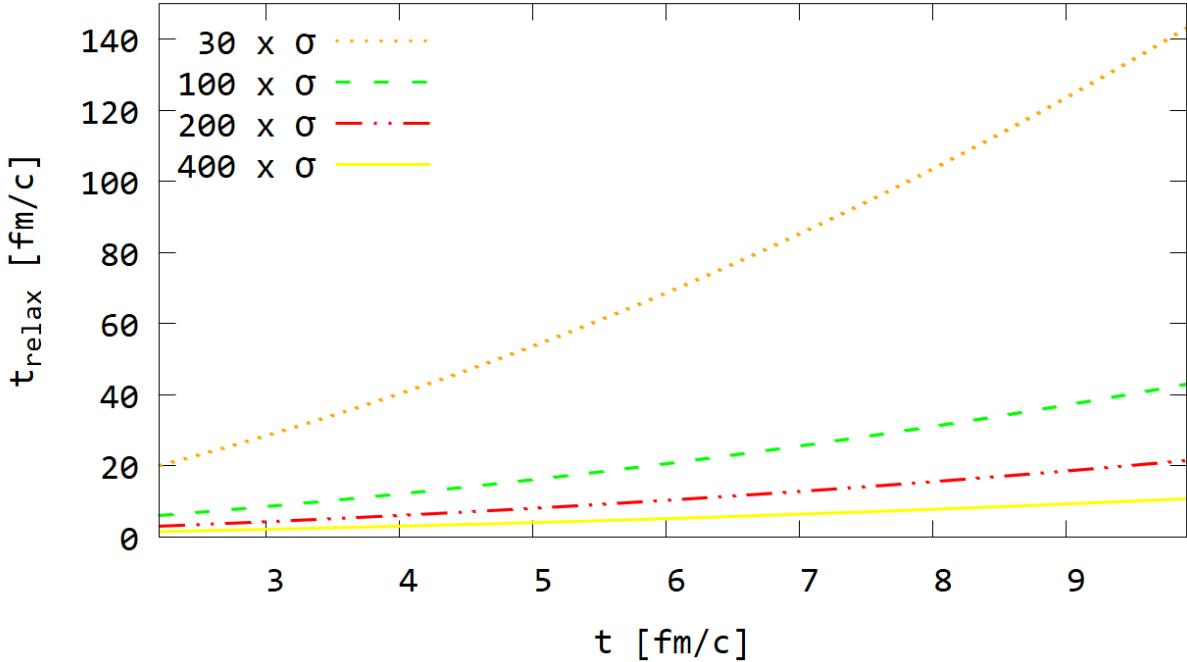
Obrázek 4.4: Závislost relaxačního času definovaného vztahem (3.12) na teplotě pro různé násobky účinného průřezu  $\sigma$ , pro 15 pionů a 10 neutronů.

Nejjednodušší model časového vývoje fireballu je Bjorkenův model [28], ve kterém se fireball rozpíná v podélném směru. Podélná boost-invariantní expanze vypadá stejně ve všech vztažných soustavách s jakoukoli podélnou rychlosí. V tomto modelu je teplota nepřímo úměrná podélnému času. Předpokládáme-li takovouto časovou závislost teploty, můžeme z ní určit, jak se s časem bude měnit relaxační čas.

Dále se tedy podíváme na závislost relaxačního času definovaného vztahem (3.12) na normálním čase a na závislost teploty na normálním čase. Tyto závislosti pro různé násobky účinného průřezu  $\sigma$  jsou na Obr. 4.5 a na Obr. 4.6. Z obrázku Obr. 4.5 vidíme, že nejvíce

#### 4. ŘÍDÍCÍ ROVNICE ZÁVISLÁ NA TEPLITĚ A REÁLNÉM ČASE

se relaxační čas vůči normálnímu času mění pro 30krát zvětšený účinný průřez. Závislost teploty  $T$  na normálním čase je daná Bjorkenovým modelem a definovaná vztahem (4.26). Vůbec tedy nezávisí na tom, kolikrát jsme účinný průřez zvětšili, což můžeme vidět na Obr. 4.6.



Obrázek 4.5: Závislost relaxačního času definovaného vztahem (3.12) na normálním čase pro různé násobky účinného průřezu, pro 15 pionů a 10 neutronů.

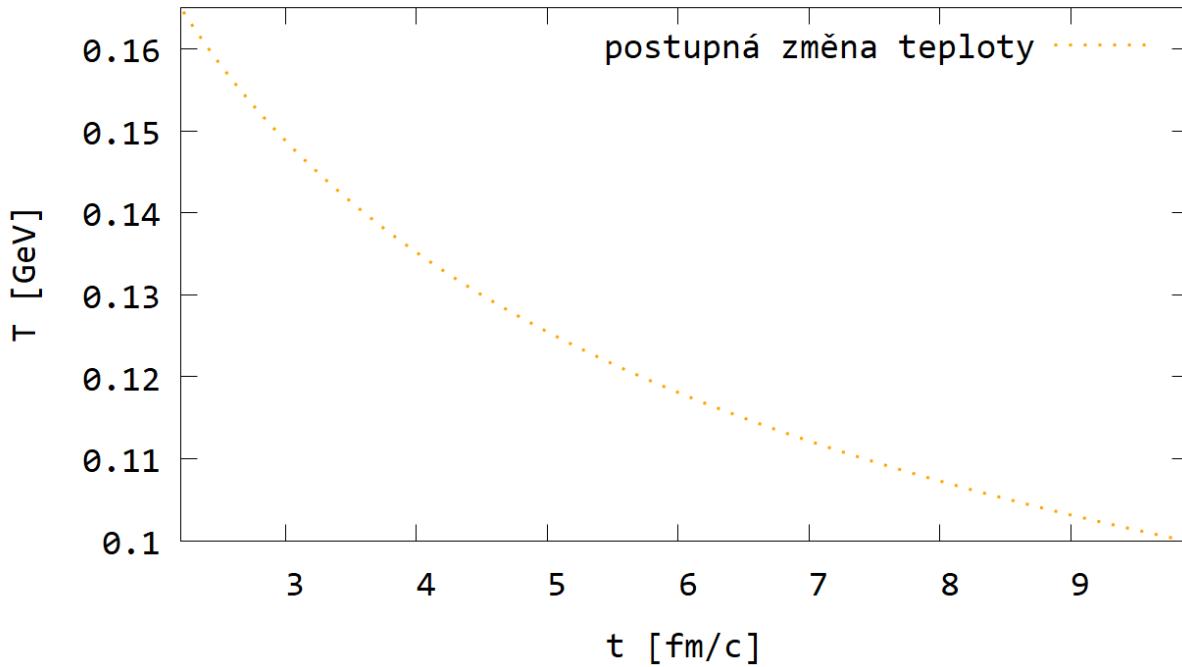
Pro postupnou změnu teploty si potřebujeme nastavit počáteční podmínky. Při teplotě chemického freeze-outu vzniká v chemické rovnováze fireball. Rozdělení multiplicity se potom vyvíjí podle řídící rovnice při měnících se podmínkách (teplotě a objemu). Na počátku při teplotě 165 MeV tedy nastavíme systém do termalizovaného stavu.

Nyní necháme teplotu po úplné termalizaci faktoriálních momentů klesat podle Bjorkenova modelu z počáteční teploty  $T_0 = 0, 165$  GeV podle vztahu

$$T^3 = T_0^3 \frac{t_0}{t} \quad (4.26)$$

až na teplotu  $T = 0, 100$  GeV.

Čas  $t_0$  je čas hadronizace pro teplotu  $T = 0, 165$  GeV. Z Bjorkenovy závislosti teploty na



Obrázek 4.6: Závislost teploty  $T$  na normálním čase, pro 15 pionů a 10 neutronů.

čase, která je na Obr. 4.6, dostaneme pro  $T = 0,165$  GeV  $t_0 = 2,2$  fm/c.

Relaxační čas zavedený v kapitole 3 je vlastnost systému. Kdybychom systém vychýlili z rovnováhy, po nějaké době se do ní vrátí. Relaxační čas je měřítkem toho, jak rychle to relaxuje.

Pro všechny násobky účinného průřezu jsou hodnoty relaxačního času  $t_{relax}$  pro teplotu 0,165 GeV shrnutý v tabulce 4.1.

Násobek účinného průřezu	30	100	200	400
$t_{relax}$ [fm/c]	20,05	6,01	3,01	1,50

Tabulka 4.1: Hodnoty relaxačního času  $t_{relax}$  pro různé násobky účinného průřezu pro teplotu 0,165 GeV.

Zároveň s teplotou se mění i objem systému podle vztahu

$$V = V_0 \frac{t}{t_0}, \quad (4.27)$$

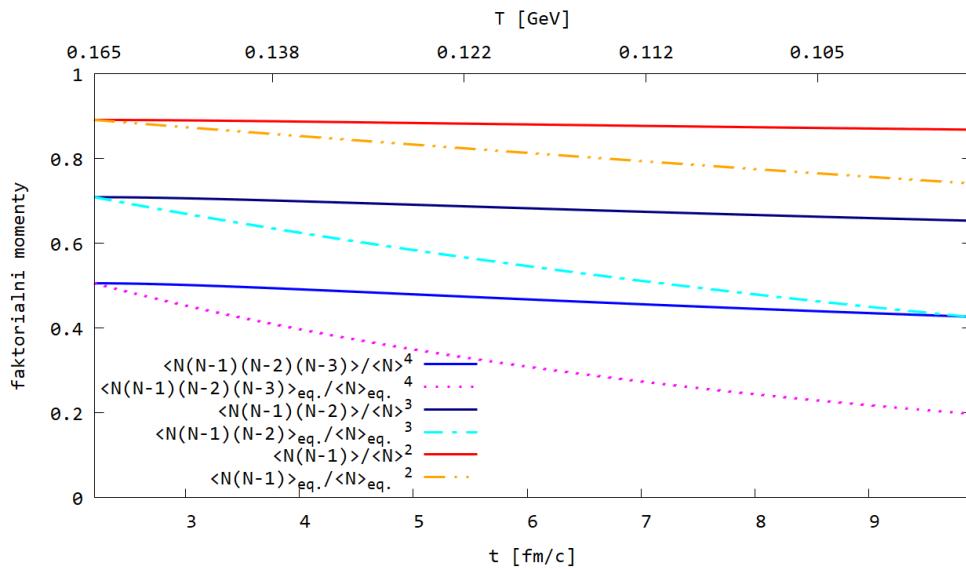
kde  $V_0 = 125$  fm<sup>3</sup>.

#### 4. ŘÍDÍCÍ ROVNICE ZÁVISLÁ NA TEPLITĚ A REÁLNÉM ČASE

Pro numerické výpočty byly použity binomické počáteční podmínky s  $N_0 = 0, 005$ .

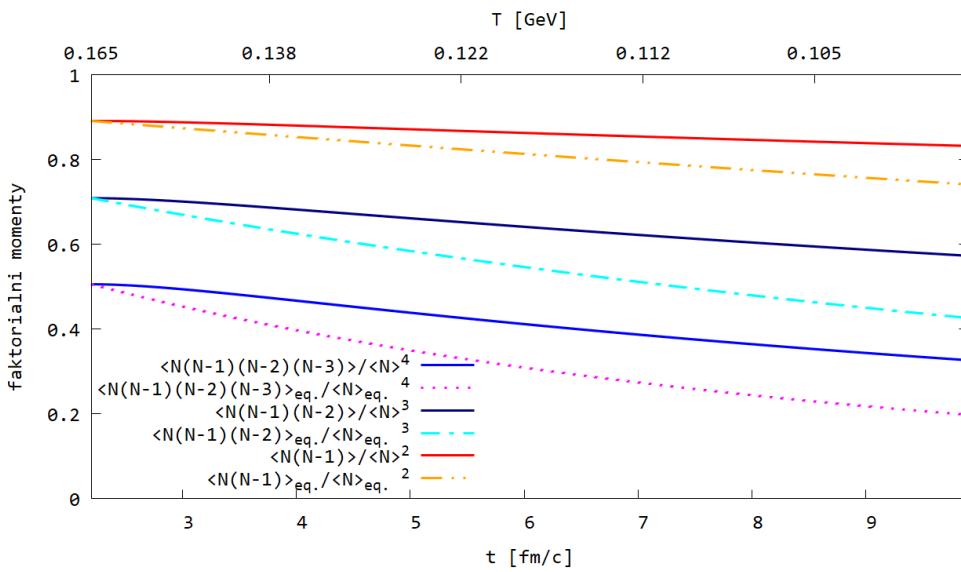
Výsledky jsou na obrázkách Obr. 4.7 pro 30krát zvětšený účinný průřez (čas termalizace okolo 1,5 fm/c), Obr. 4.8 pro 100krát zvětšený účinný průřez (čas termalizace okolo 6 fm/c), Obr. 4.9 pro 200krát zvětšený účinný průřez (čas termalizace okolo 20 fm/c) a Obr. 4.10 pro 400krát zvětšený účinný průřez (čas termalizace okolo 3 fm/c). Grafy jsou vykresleny pro 15 pionů a 10 neutronů.

Pro porovnání ukazujeme, jak by vypadaly hodnoty faktoriálních momentů v rovnováze (čerchovaná čára) a jak by vypadali ve skutečnosti, kdyby se vyvíjeli podle řídící rovnice (plná čára). Na obrázkách níže tedy vidíme odlišnost rovnovážné křivky od nerovnovážné křivky. Rozdíl je vidět především pro menší násobky účinných průřezů.

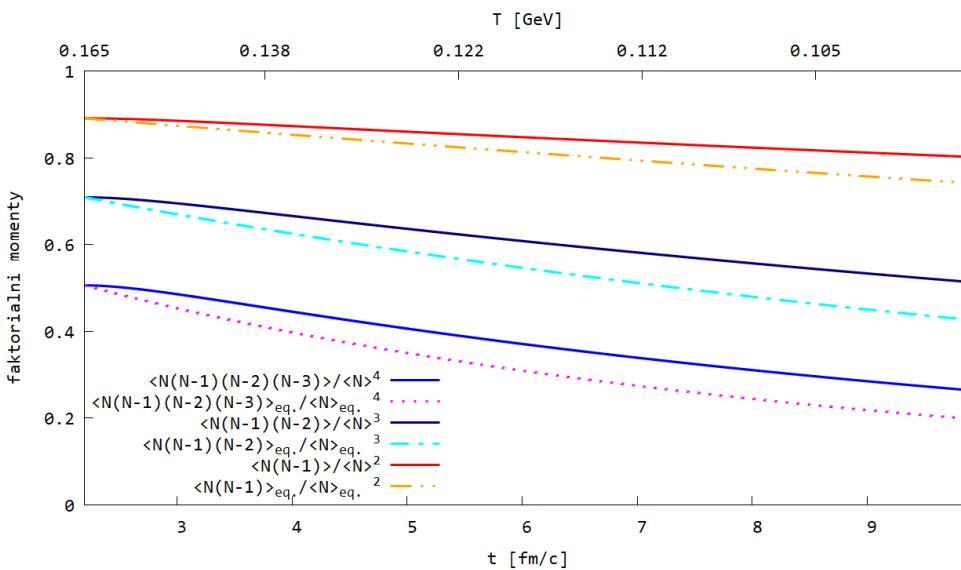


Obrázek 4.7: Normované faktoriální momenty pro postupnou změnu teploty ze 165 MeV na 100 MeV pro 30krát zvětšený účinný průřez.

Z Obr. 4.9 pro 200krát zvětšený účinný průřez, Obr. 4.8 pro 100krát zvětšený účinný průřez, Obr. 4.10 pro 400krát zvětšený účinný průřez a z Obr. 4.7 pro 30krát zvětšený účinný průřez vidíme, že vyšší momenty se více odlišují od svých rovnovážných hodnot.

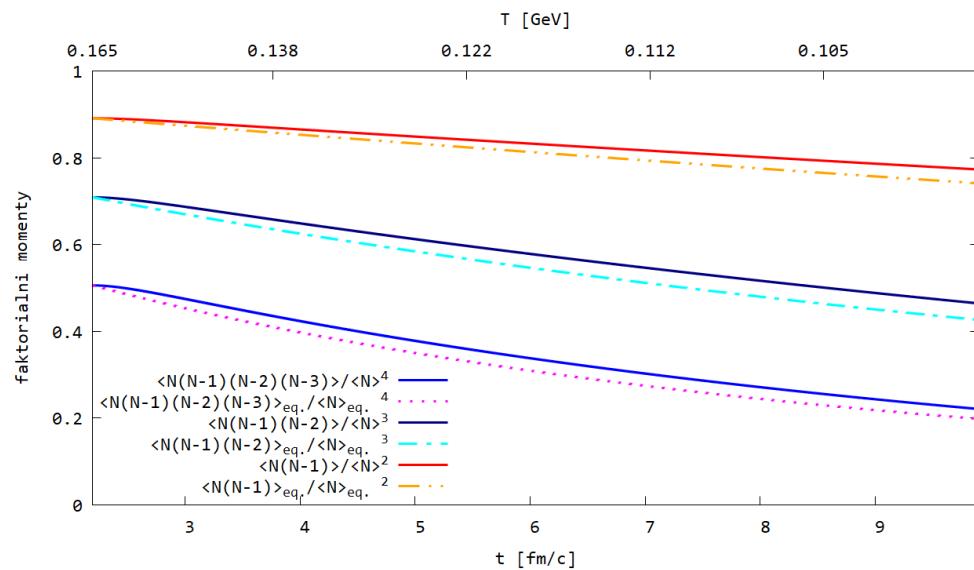


Obrázek 4.8: Normované faktoriální momenty pro postupnou změnu teploty ze 165 MeV na 100 MeV pro 100krát zvětšený účinný průřez.



Obrázek 4.9: Normované faktoriální momenty pro postupnou změnu teploty ze 165 MeV na 100 MeV pro 200krát zvětšený účinný průřez.

#### 4. ŘÍDÍCÍ ROVNICE ZÁVISLÁ NA TEPLITĚ A REÁLNÉM ČASE

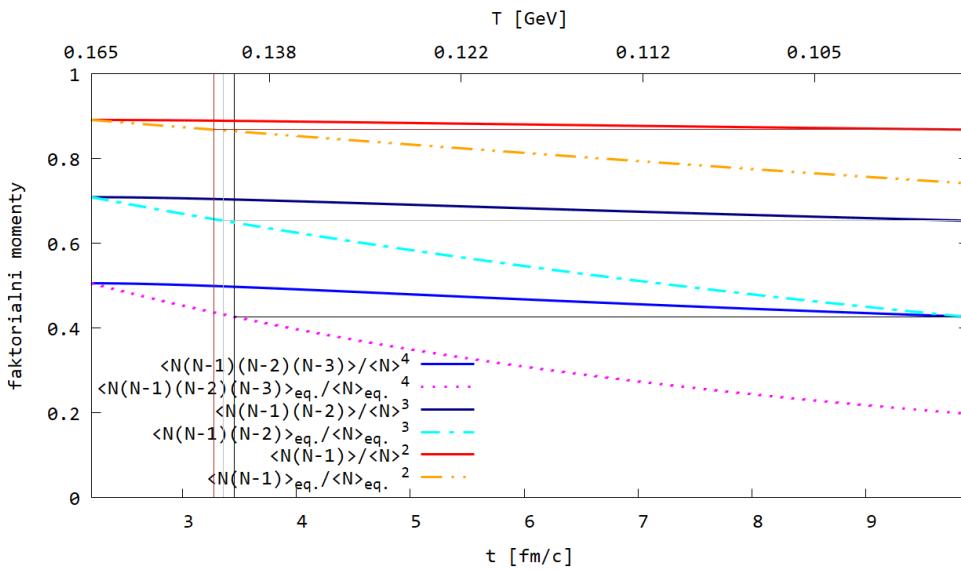


Obrázek 4.10: Normované faktoriální momenty pro postupnou změnu teploty ze 165 MeV na 100 MeV pro 400krát zvětšený účinný průřez.

#### 4.6.3 Zdánlivá teplota vymrznutí

Z obrázků Obr. 4.7, Obr. 4.8, Obr. 4.9 a Obr. 4.10 lze zpětně určit zdánlivou teplotu vymrznutí jednotlivých faktoriálních momentů pro různé násobky účinného průřezu. Předpokládejme, že pozorujeme konečné hodnoty faktoriálních momentů, kterých systém nakonec dosáhl při svém nerovnovážném vývoji v čase 10 fm/c. Myslíme si ale, že systém je pořád termalizovaný a budeme se tedy ptát, při jaké teplotě by termalizovaný systém vedl k dané hodnotě faktoriálního momentu v rovnovážném stavu. Tuto teplotu získáme tak, že v čase  $t = 10$  fm/c povedeme kolmici k ose  $y$  z bodu, kde daný faktoriální moment osu  $y$  protíná až do bodu, kde tato kolmice narazí na rovnovážnou křivku daného faktoriálního momentu. Pomocí kolmice k ose  $x$  v tomto bodě získáme zdánlivou teplotu vymrznutí daného faktoriálního momentu.

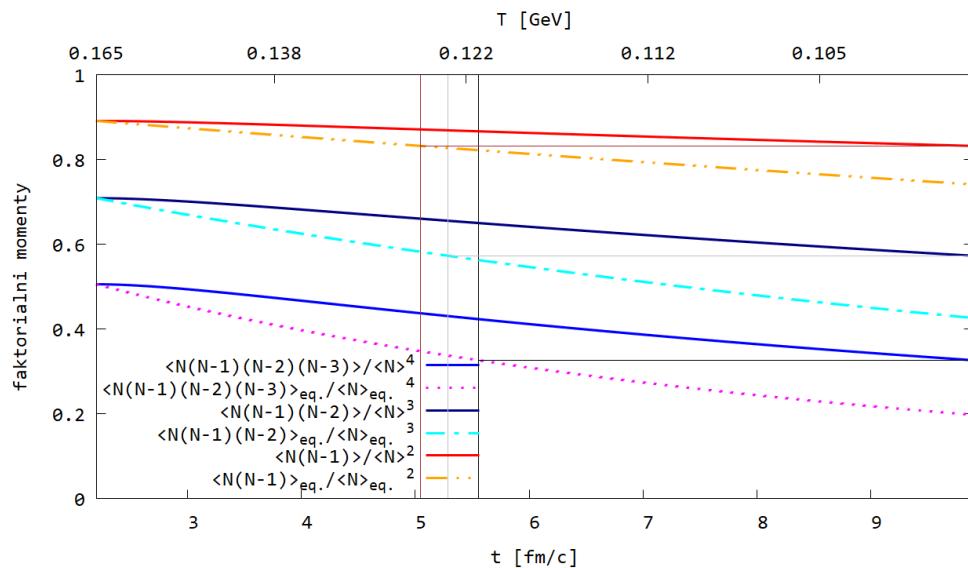
Výsledky jsou na obrázkách Obr. 4.11, Obr. 4.12, Obr. 4.13, Obr. 4.14 a v tabulkách D.1, D.2, D.3, D.4, viz. příloha D.



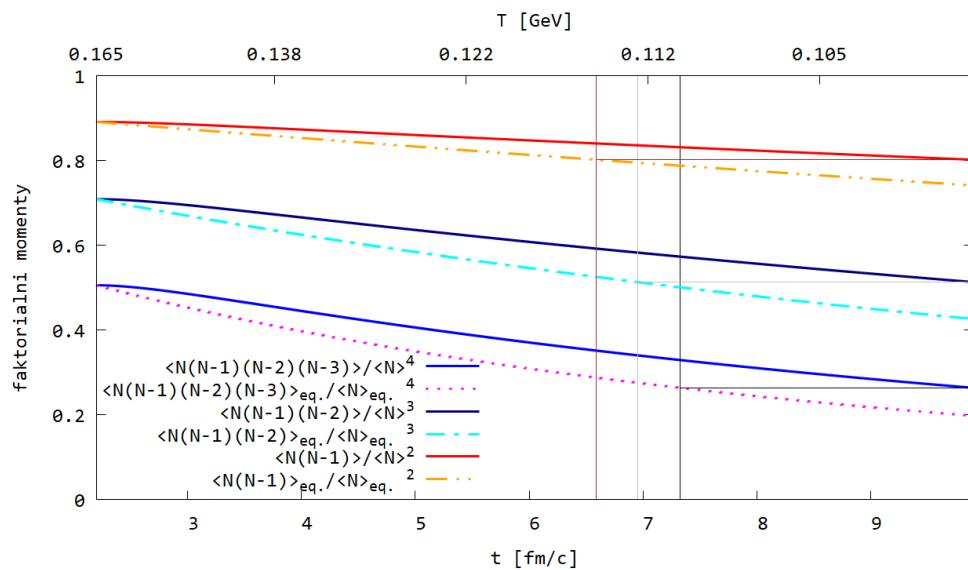
Obrázek 4.11: Zdánlivá teplota vymrznutí faktoriálních momentů pro postupnou změnu teploty ze 165 MeV na 100 MeV pro 30krát zvětšený účinný průřez.

Vidíme, že vyšší momenty vymrzají při nižší teplotě, tedy později než momenty nižší. Pro větší účinné průřezy se dedukované teploty neliší takřka jako pro menší účinné průřezy. Různé faktoriální momenty vedou k různým hodnotám teploty.

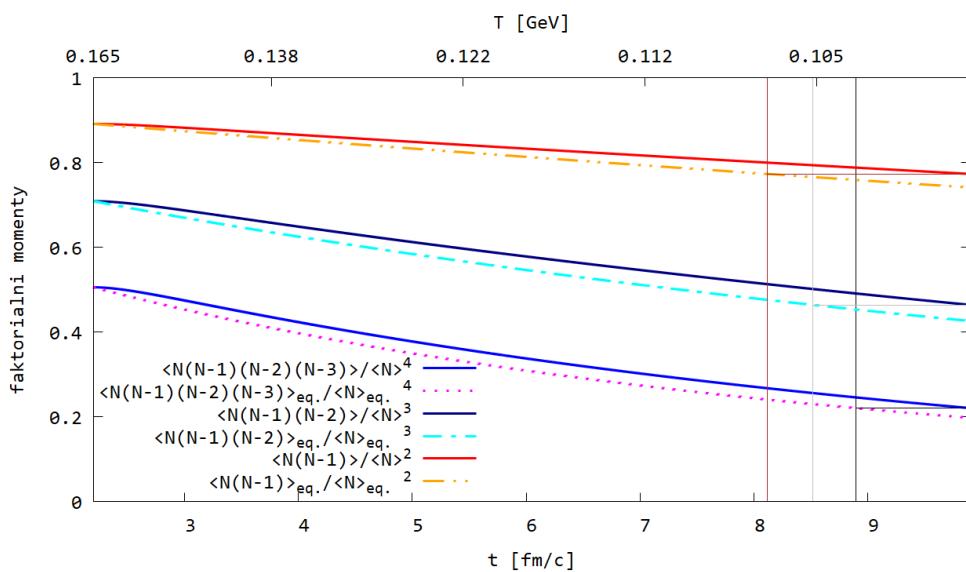
#### 4. ŘÍDÍCÍ ROVNICE ZÁVISLÁ NA TEPLITĚ A REÁLNÉM ČASE



Obrázek 4.12: Zdánlivá teplota vymrznutí faktoriálních momentů pro postupnou změnu teploty ze 165 MeV na 100 MeV pro 100krát zvětšený účinný průřez.



Obrázek 4.13: Zdánlivá teplota vymrznutí faktoriálních momentů pro postupnou změnu teploty ze 165 MeV na 100 MeV pro 200krát zvětšený účinný průřez.



Obrázek 4.14: Zdánlivá teplota vymrznutí faktoriálních momentů pro postupnou změnu teploty ze 165 MeV na 100 MeV pro 400krát zvětšený účinný průřez.

## 5. CENTRÁLNÍ MOMENTY

# 5 Centrální momenty

Při zpracování dat nás místo faktoriálních momentů zajímají momenty centrální, popřípadě jejich kombinace jako je např. koeficient šikmosti a špičatosti.

Podíváme se tedy na odvození rovnovážných hodnot centrálních momentů a na časový vývoj centrálních momentů a jejich kombinací.

## 5.1 Rovnovážné hodnoty centrálních momentů

Rovnovážná hodnota prvního faktoriálního momentu je definovaná vztahem (3.30) jako

$$\langle N \rangle_{eq} = \sqrt{\varepsilon} \frac{I_1(2\sqrt{\varepsilon})}{I_0(2\sqrt{\varepsilon})}, \quad (5.1)$$

kde  $\epsilon$  je definované vztahem

$$\epsilon = G \langle N_{a_1} \rangle \langle N_{a_2} \rangle / L. \quad (5.2)$$

Rovnovážná hodnota druhého faktoriálního momentu je dána vztahem (3.31) jako

$$\langle N(N-1) \rangle_{eq} = -\frac{1}{2} \sqrt{\varepsilon} \frac{I_1(2\sqrt{\varepsilon})}{I_0(2\sqrt{\varepsilon})} + \frac{1}{2} \varepsilon \frac{I_2(2\sqrt{\varepsilon}) + I_0(2\sqrt{\varepsilon})}{I_0(2\sqrt{\varepsilon})}. \quad (5.3)$$

Rozepíšeme-li levou stranu vztahu (5.3), dostaneme

$$\langle N(N-1) \rangle_{eq} = \langle N^2 \rangle_{eq} - \langle N \rangle_{eq}. \quad (5.4)$$

Rovnovážnou hodnotu střední hodnoty  $N^2$  tedy vyjádříme pomocí rovnosti vztahů (5.3) a (5.4) a dosazením vztahu (5.1) jako

$$\begin{aligned} \langle N^2 \rangle_{eq} &= -\frac{1}{2} \sqrt{\varepsilon} \frac{I_1(2\sqrt{\varepsilon})}{I_0(2\sqrt{\varepsilon})} + \frac{1}{2} \varepsilon \frac{I_2(2\sqrt{\varepsilon}) + I_0(2\sqrt{\varepsilon})}{I_0(2\sqrt{\varepsilon})} + \sqrt{\varepsilon} \frac{I_1(2\sqrt{\varepsilon})}{I_0(2\sqrt{\varepsilon})} \\ &= \frac{1}{2} \sqrt{\varepsilon} \frac{I_1(2\sqrt{\varepsilon})}{I_0(2\sqrt{\varepsilon})} + \frac{1}{2} \varepsilon \frac{I_2(2\sqrt{\varepsilon}) + I_0(2\sqrt{\varepsilon})}{I_0(2\sqrt{\varepsilon})}. \end{aligned} \quad (5.5)$$

Rovnovážná hodnota třetího faktoriálního momentu je daná vztahem (3.32) jako

$$\begin{aligned} \langle N(N-1)(N-2) \rangle_{eq} &= \frac{3}{4}\sqrt{\varepsilon} \frac{I_1(2\sqrt{\varepsilon})}{I_0(2\sqrt{\varepsilon})} - \frac{3}{4}\varepsilon \frac{I_0(2\sqrt{\varepsilon}) + I_2(2\sqrt{\varepsilon})}{I_0(2\sqrt{\varepsilon})} + \frac{1}{4}\varepsilon^{3/2} \frac{I_3(2\sqrt{\varepsilon}) + 3I_1(2\sqrt{\varepsilon})}{I_0(2\sqrt{\varepsilon})}. \end{aligned} \quad (5.6)$$

Rozepsáním levé strany vztahu (5.6) dostaneme výraz

$$\begin{aligned} \langle N(N-1)(N-2) \rangle_{eq} &= \langle (N^2 - N)(N-2) \rangle_{eq} = \langle N^3 - 2N^2 - N^2 + 2N \rangle_{eq} \\ &= \langle N^3 - 3N^2 + 2N \rangle_{eq} = \langle N^3 \rangle_{eq} - 3\langle N^2 \rangle_{eq} + 2\langle N \rangle_{eq}. \end{aligned} \quad (5.7)$$

Rovnovážnou hodnotu střední hodnoty  $N^3$  dostaneme tak, že dáme do rovnosti vztahy (5.6) a (5.7) a dosadíme výrazy (5.1) a (5.5)

$$\begin{aligned} \langle N^3 \rangle_{eq} &= \frac{3}{4}\sqrt{\varepsilon} \frac{I_1(2\sqrt{\varepsilon})}{I_0(2\sqrt{\varepsilon})} - \frac{3}{4}\varepsilon \frac{I_0(2\sqrt{\varepsilon}) + I_2(2\sqrt{\varepsilon})}{I_0(2\sqrt{\varepsilon})} \\ &\quad + \frac{1}{4}\varepsilon^{3/2} \frac{I_3(2\sqrt{\varepsilon}) + 3I_1(2\sqrt{\varepsilon})}{I_0(2\sqrt{\varepsilon})} + 3\langle N^2 \rangle_{eq} - 2\langle N \rangle_{eq} \\ &= \frac{3}{4}\sqrt{\varepsilon} \frac{I_1(2\sqrt{\varepsilon})}{I_0(2\sqrt{\varepsilon})} - \frac{3}{4}\varepsilon \frac{I_0(2\sqrt{\varepsilon}) + I_2(2\sqrt{\varepsilon})}{I_0(2\sqrt{\varepsilon})} + \frac{1}{4}\varepsilon^{3/2} \frac{I_3(2\sqrt{\varepsilon}) + 3I_1(2\sqrt{\varepsilon})}{I_0(2\sqrt{\varepsilon})} \\ &\quad + \frac{3}{2}\sqrt{\varepsilon} \frac{I_1(2\sqrt{\varepsilon})}{I_0(2\sqrt{\varepsilon})} + \frac{3}{2}\varepsilon \frac{I_0(2\sqrt{\varepsilon}) + I_2(2\sqrt{\varepsilon})}{I_0(2\sqrt{\varepsilon})} - 2\sqrt{\varepsilon} \frac{I_1(2\sqrt{\varepsilon})}{I_0(2\sqrt{\varepsilon})} \\ &= \frac{1}{4}\sqrt{\varepsilon} \frac{I_1(2\sqrt{\varepsilon})}{I_0(2\sqrt{\varepsilon})} + \frac{3}{4}\varepsilon \frac{I_0(2\sqrt{\varepsilon}) + I_2(2\sqrt{\varepsilon})}{I_0(2\sqrt{\varepsilon})} + \frac{1}{4}\varepsilon^{3/2} \frac{I_3(2\sqrt{\varepsilon}) + 3I_1(2\sqrt{\varepsilon})}{I_0(2\sqrt{\varepsilon})}. \end{aligned} \quad (5.8)$$

Rovnovážná hodnota čtvrtého faktoriálního momentu je dána vztahem (3.33) jako

$$\begin{aligned} \langle N(N-1)(N-2)(N-3) \rangle_{eq} &= -\frac{15}{8}\sqrt{\varepsilon} \frac{I_1(2\sqrt{\varepsilon})}{I_0(2\sqrt{\varepsilon})} + \frac{15}{8}\varepsilon \frac{I_2(2\sqrt{\varepsilon}) + I_0(2\sqrt{\varepsilon})}{I_0(2\sqrt{\varepsilon})} \\ &\quad - \frac{3}{4}\varepsilon^{3/2} \frac{3I_1(2\sqrt{\varepsilon}) + I_3(2\sqrt{\varepsilon})}{I_0(2\sqrt{\varepsilon})} + \frac{1}{8}\varepsilon^2 \frac{3I_0(2\sqrt{\varepsilon}) + 4I_2(2\sqrt{\varepsilon}) + I_4(2\sqrt{\varepsilon})}{I_0(2\sqrt{\varepsilon})}. \end{aligned} \quad (5.9)$$

## 5. CENTRÁLNÍ MOMENTY

Rozepíšeme-li levou stranu vztahu (5.9), získáme výraz

$$\begin{aligned} \langle N(N-1)(N-2)(N-3) \rangle_{eq} \\ = \langle (N^2 - N)(N^2 - 5N + 6) \rangle_{eq} = \langle N^4 - 5N^3 + 6N^2 - N^3 + 5N^2 - 6N \rangle_{eq} \\ = \langle N^4 \rangle_{eq} - 6 \langle N^3 \rangle_{eq} + 11 \langle N^2 \rangle_{eq} - 6 \langle N \rangle_{eq}. \quad (5.10) \end{aligned}$$

Rovnovážnou hodnotu střední hodnoty  $N^4$  dostaneme z rovnosti vztahů (5.9) a (5.10) a dosazením (5.1), (5.5) a (5.8)

$$\begin{aligned} \langle N^4 \rangle_{eq} &= -\frac{15}{8}\sqrt{\varepsilon}\frac{I_1(2\sqrt{\varepsilon})}{I_0(2\sqrt{\varepsilon})} + \frac{15}{8}\varepsilon\frac{I_2(2\sqrt{\varepsilon}) + I_0(2\sqrt{\varepsilon})}{I_0(2\sqrt{\varepsilon})} - \frac{3}{4}\varepsilon^{3/2}\frac{3I_1(2\sqrt{\varepsilon}) + I_3(2\sqrt{\varepsilon})}{I_0(2\sqrt{\varepsilon})} \\ &\quad + \frac{1}{8}\varepsilon^2\frac{3I_0(2\sqrt{\varepsilon}) + 4I_2(2\sqrt{\varepsilon}) + I_4(2\sqrt{\varepsilon})}{I_0(2\sqrt{\varepsilon})} + \frac{6}{4}\sqrt{\varepsilon}\frac{I_1(2\sqrt{\varepsilon})}{I_0(2\sqrt{\varepsilon})} + \frac{18}{4}\varepsilon\frac{I_2(2\sqrt{\varepsilon}) + I_0(2\sqrt{\varepsilon})}{I_0(2\sqrt{\varepsilon})} \\ &\quad + \frac{6}{4}\varepsilon^{3/2}\frac{3I_1(2\sqrt{\varepsilon}) + I_3(2\sqrt{\varepsilon})}{I_0(2\sqrt{\varepsilon})} - \frac{11}{2}\sqrt{\varepsilon}\frac{I_1(2\sqrt{\varepsilon})}{I_0(2\sqrt{\varepsilon})} - \frac{11}{2}\varepsilon\frac{I_2(2\sqrt{\varepsilon}) + I_0(2\sqrt{\varepsilon})}{I_0(2\sqrt{\varepsilon})} + 6\sqrt{\varepsilon}\frac{I_1(2\sqrt{\varepsilon})}{I_0(2\sqrt{\varepsilon})} \\ &= \frac{1}{8}\sqrt{\varepsilon}\frac{I_1(2\sqrt{\varepsilon})}{I_0(2\sqrt{\varepsilon})} + \frac{7}{8}\varepsilon\frac{I_2(2\sqrt{\varepsilon}) + I_0(2\sqrt{\varepsilon})}{I_0(2\sqrt{\varepsilon})} + \frac{3}{4}\varepsilon^{3/2}\frac{3I_1(2\sqrt{\varepsilon}) + I_3(2\sqrt{\varepsilon})}{I_0(2\sqrt{\varepsilon})} \\ &\quad + \frac{1}{8}\varepsilon^2\frac{3I_0(2\sqrt{\varepsilon}) + 4I_2(2\sqrt{\varepsilon}) + I_4(2\sqrt{\varepsilon})}{I_0(2\sqrt{\varepsilon})}. \quad (5.11) \end{aligned}$$

Dále platí, že:

První centrální moment je vždy roven 0.

Druhý centrální moment (variance) je definován vztahem

$$\begin{aligned} \mu_2 = varN &= \langle (N - \langle N \rangle)^2 \rangle = \langle N^2 - 2N\langle N \rangle + \langle N \rangle^2 \rangle \\ &= \langle N^2 \rangle - 2\langle N \rangle \langle N \rangle + \langle N \rangle^2 = \langle N^2 \rangle - \langle N \rangle^2. \quad (5.12) \end{aligned}$$

Směrodatná odchylka  $\sigma$  je definována jako odmocnina z variance (2. centrálního momentu), tedy

$$\sigma = \sqrt{varN} = \sqrt{\langle N^2 \rangle - \langle N \rangle^2}. \quad (5.13)$$

Třetí centrální moment je dán vztahem

$$\begin{aligned}\mu_3 &= \langle (N - \langle N \rangle)^3 \rangle = \langle N^3 - 3N^2 \langle N \rangle + 3N \langle N \rangle^2 - \langle N \rangle^3 \rangle \\ &= \langle N^3 \rangle - 3 \langle N^2 \rangle \langle N \rangle + 3 \langle N \rangle \langle N \rangle^2 - \langle N \rangle^3 = \langle N^3 \rangle - 3 \langle N^2 \rangle \langle N \rangle + 2 \langle N \rangle^3.\end{aligned}\quad (5.14)$$

Čtvrtý centrální moment je definovaný jako

$$\begin{aligned}\mu_4 &= \langle (N - \langle N \rangle)^4 \rangle = \langle N^4 - 4N^3 \langle N \rangle + 6N^2 \langle N \rangle^2 - 4N \langle N \rangle^3 + \langle N \rangle^4 \rangle \\ &= \langle N^4 \rangle - 4 \langle N^3 \rangle \langle N \rangle + 6 \langle N^2 \rangle \langle N \rangle^2 - 4 \langle N \rangle \langle N \rangle^3 + \langle N \rangle^4 \\ &= \langle N^4 \rangle - 4 \langle N^3 \rangle \langle N \rangle + 6 \langle N^2 \rangle \langle N \rangle^2 - 3 \langle N \rangle^4.\end{aligned}\quad (5.15)$$

Koeficient šikmosti je definován vztahem

$$S = \frac{\mu_3}{\sigma^3} = \frac{\langle (N - \langle N \rangle)^3 \rangle}{(varN)^{3/2}} = \frac{\langle (N - \langle N \rangle)^3 \rangle}{\langle (N - \langle N \rangle)^2 \rangle^{3/2}}\quad (5.16)$$

a pro koeficient špičatosti platí vztah

$$\kappa = \frac{\mu_4}{\sigma^4} - 3 = \frac{\langle (N - \langle N \rangle)^4 \rangle}{(varN)^2} - 3 = \frac{\langle (N - \langle N \rangle)^4 \rangle}{\langle (N - \langle N \rangle)^2 \rangle^2} - 3.\quad (5.17)$$

## 5. CENTRÁLNÍ MOMENTY

### 5.2 Časový vývoj centrálních momentů

Nyní z vývoje pro faktoriální momenty odvodíme chování centrálních momentů a jejich poměrů jako je koeficient šiknosti a koeficient špičatosti. Centrální momenty a jejich rovnovážné hodnoty jsou definovány v kapitole 5.1.

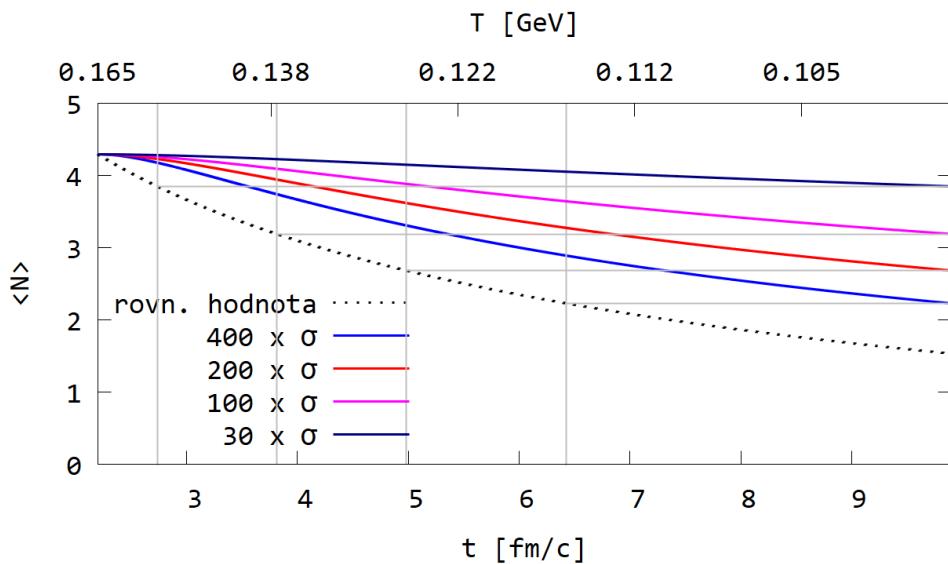
Pro časový vývoj centrálních momentů byl uvažován stejný model pro expanzi fireballu jako v případě faktoriálních momentů v předešlé kapitole. Pro numerické výpočty byly použity binomické počáteční podmínky s  $N_0 = 0,005$ .

Výsledky jsou uvedeny na obrázkách níže.

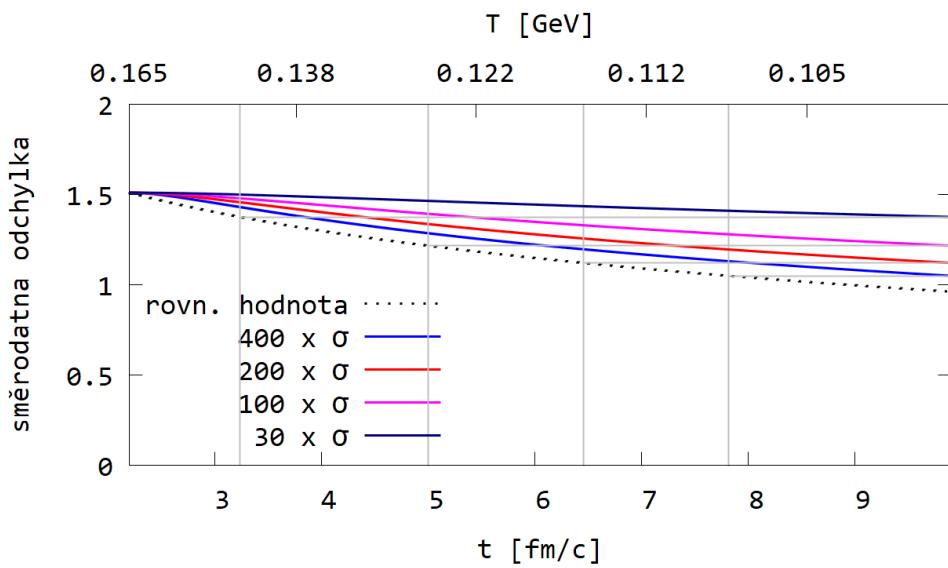
Na Obr. 5.1 je znázorněn počet částic  $\langle N \rangle$ , jehož zdánlivé teploty vymrznutí jsou uvedeny v tabulce D.5. Na Obr. 5.2 je vykreslena směrodatná odchylka  $\sigma$  (druhá odmocnina variance), která je definována vztahem (5.13) a jejíž zdánlivé teploty vymrznutí jsou v tabulce D.6. Zdánlivé teploty vymrznutí 2. centrálního momentu  $\mu_2$  (variance), který je definovaný vztahem (5.12) jsou potom stejné jako zdánlivé teploty vymrznutí směrodatné odchylky. Jediným rozdílem mezi téměř dvěma grafy jsou hodnoty dosažené na ose  $y$ , protože směrodatná odchylka je druhou odmocninou 2. centrálního momentu. Na Obr. 5.3, resp. Obr. 5.4 vidíme 3. centrální moment  $\mu_3$ , resp. 4. centrální moment  $\mu_4$ , který je definovaný vztahem (5.14), resp. (5.15). Jeho zdánlivé teploty vymrznutí jsou v tabulce D.7, resp. D.8.

Dále na obrázkách Obr. 5.5, resp. Obr. 5.6 jsou vykresleny dva důležité poměry centrálních momentů, koeficient šiknosti a koeficient špičatosti. Tyto koeficienty jsou definovány vztahy (5.16), resp. (5.17). Zdánlivé teploty vymrznutí pro koeficient šiknosti a koeficient špičatosti nebylo možno určit, protože tyto poměry pomalu klesají s klesající teplotou, zatímco rovnovážná hodnota roste s klesající teplotou a tudíž není možné extrapolovat žádnou zdánlivou teplotu vymrznutí. Tabulky jsou v příloze D.

Z obrázků tedy vidíme, že centrální momenty, norma a směrodatná odchylka klesají s rostoucím časem  $t$ , zatímco koeficient šiknosti a koeficient špičatosti rostou s rostoucím časem  $t$ .

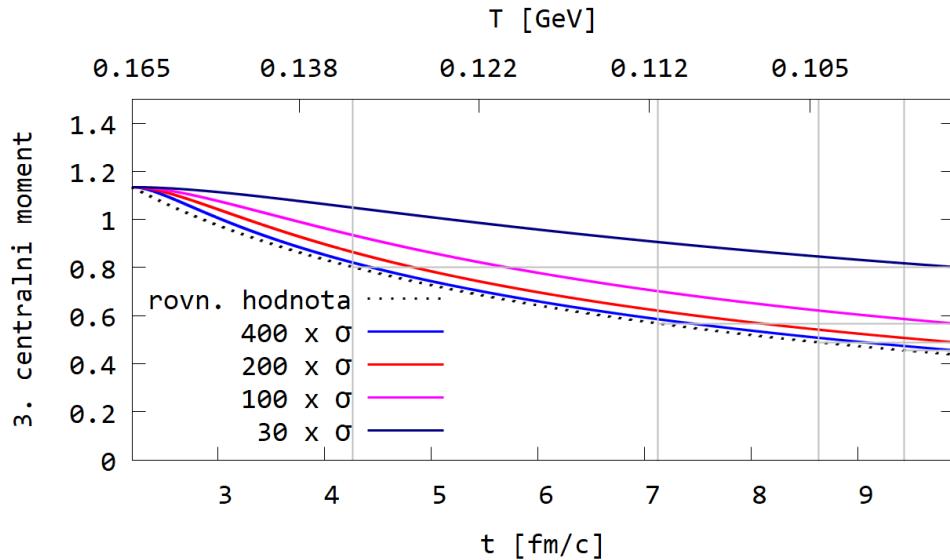


Obrázek 5.1: Zdánlivá teplota vymrznutí počtu částic pro postupnou změnu teploty ze 165 MeV na 100 MeV pro různé účinné průřezy, pro 15 pionů a 10 neutronů.

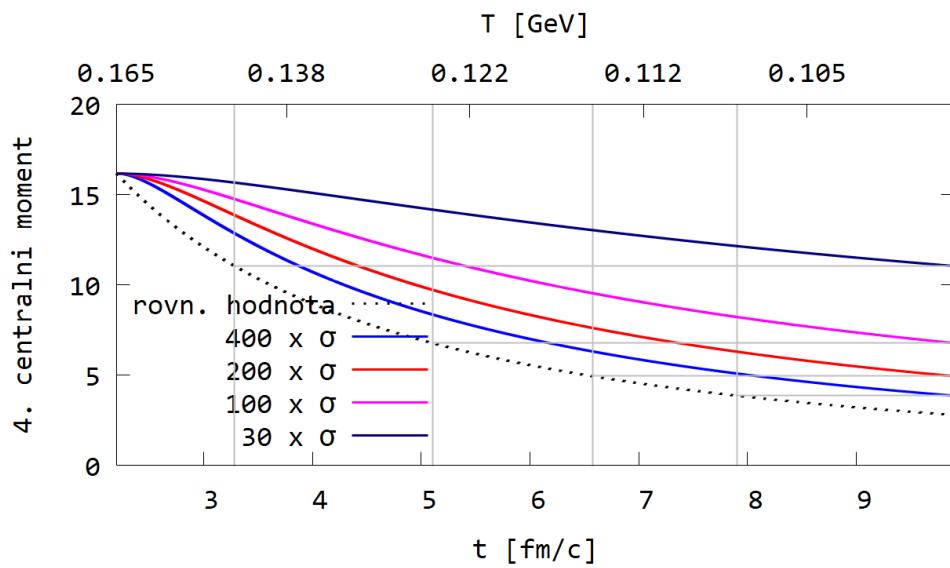


Obrázek 5.2: Zdánlivá teplota vymrznutí směrodatné odchylky pro postupnou změnu teploty ze 165 MeV na 100 MeV pro různé účinné průřezy, pro 15 pionů a 10 neutronů.

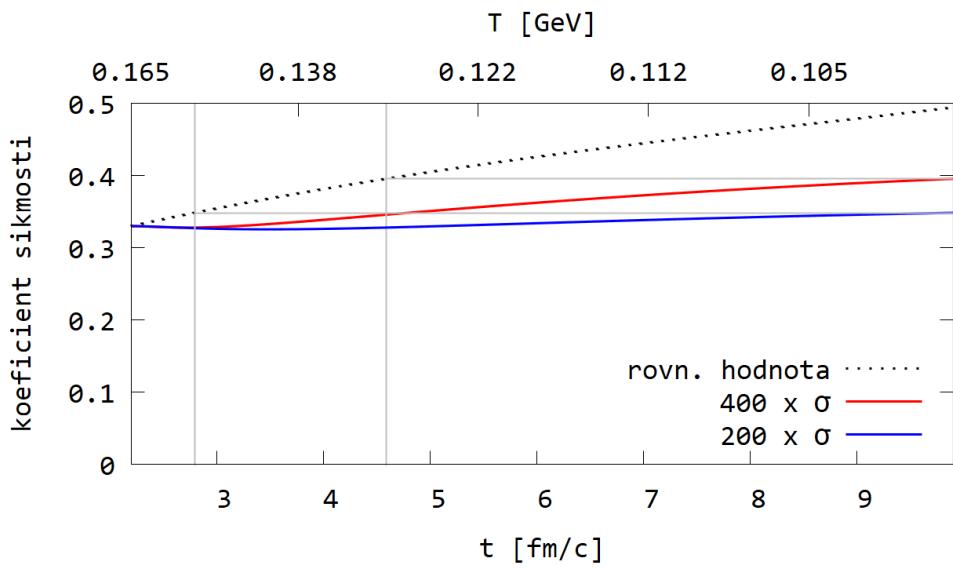
## 5. CENTRÁLNÍ MOMENTY



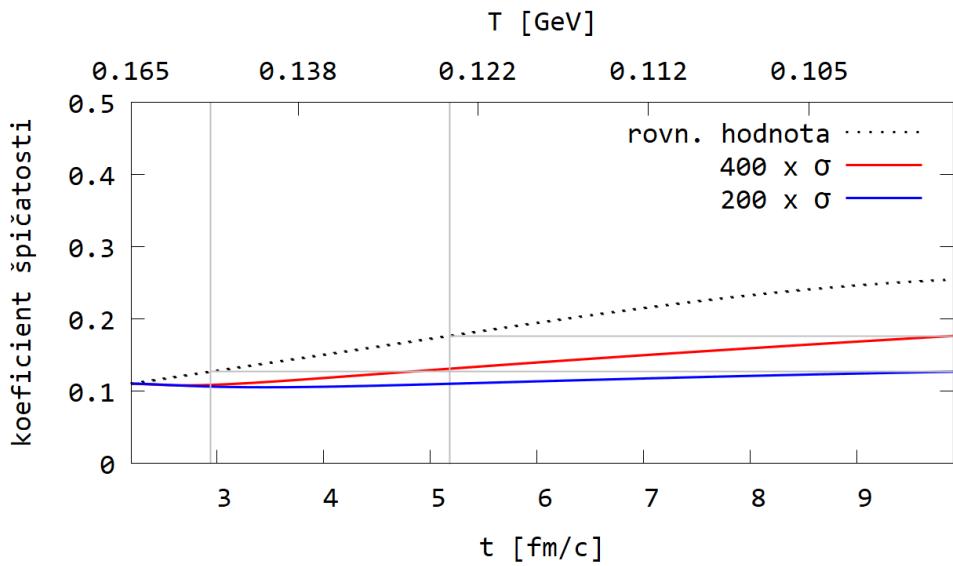
Obrázek 5.3: Zdánlivá teplota vymrznutí 3. centrálního momentu pro postupnou změnu teploty ze 165 MeV na 100 MeV pro různé účinné průřezy, pro 15 pionů a 10 neutronů.



Obrázek 5.4: Zdánlivá teplota vymrznutí 4. centrálního momentu pro postupnou změnu teploty ze 165 MeV na 100 MeV pro různé účinné průřezy, pro 15 pionů a 10 neutronů.



Obrázek 5.5: Zdánlivá teplota vymrznutí koeficientu šikmosti pro postupnou změnu teploty ze 165 MeV na 100 MeV pro různé účinné průřezy, pro 15 pionů a 10 neutronů.



Obrázek 5.6: Zdánlivá teplota vymrznutí koeficientu špičatosti pro postupnou změnu teploty ze 165 MeV na 100 MeV pro různé účinné průřezy, pro 15 pionů a 10 neutronů.

## 5. CENTRÁLNÍ MOMENTY

### 5.2.1 Další poměry centrálních momentů

Zatímco 2., 3. a 4. centrální moment klesají, jak je vidět z obrázků 5.2, 5.3 a 5.4, koeficient šikmosti a špičatosti rostou (Obr. 5.5, Obr. 5.6). Ukázalo se tedy, že by mohlo záviset na tom, jaké poměry centrálních momentů zvolíme. Proto prozkoumáme ještě další poměry centrálních momentů [29]. Tyto poměry nezávisí na objemu a jsou užitečné pro srovnání s experimentálními daty.

Budeme zkoumat následující poměry

$$R_{32} = \frac{\mu_3}{\mu_2} = S\sigma, \quad (5.18)$$

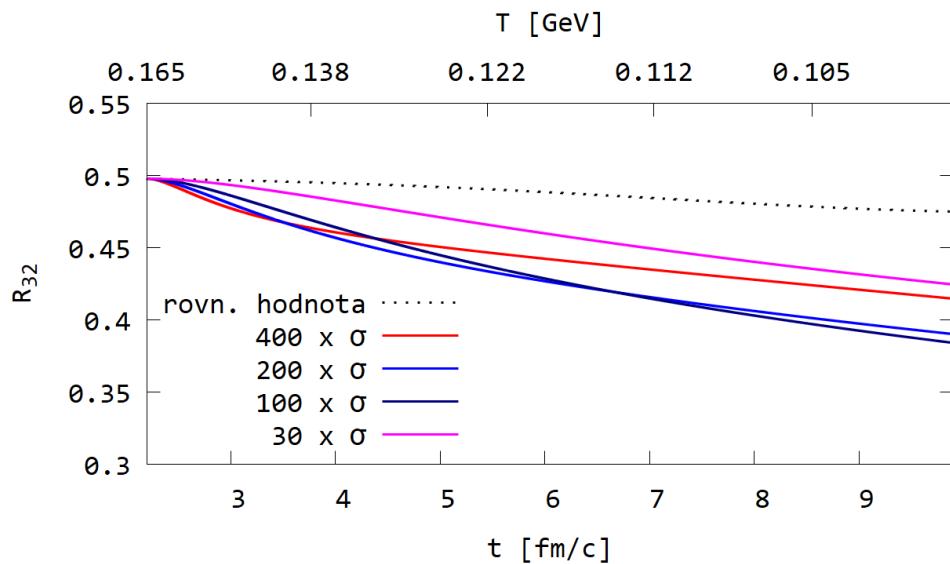
$$R_{42} = \frac{\mu_4}{\mu_2} - 3\sigma^2 = \kappa\sigma^2, \quad (5.19)$$

$$R_{12} = \frac{\mu_1}{\mu_2} = M/\sigma^2, \quad (5.20)$$

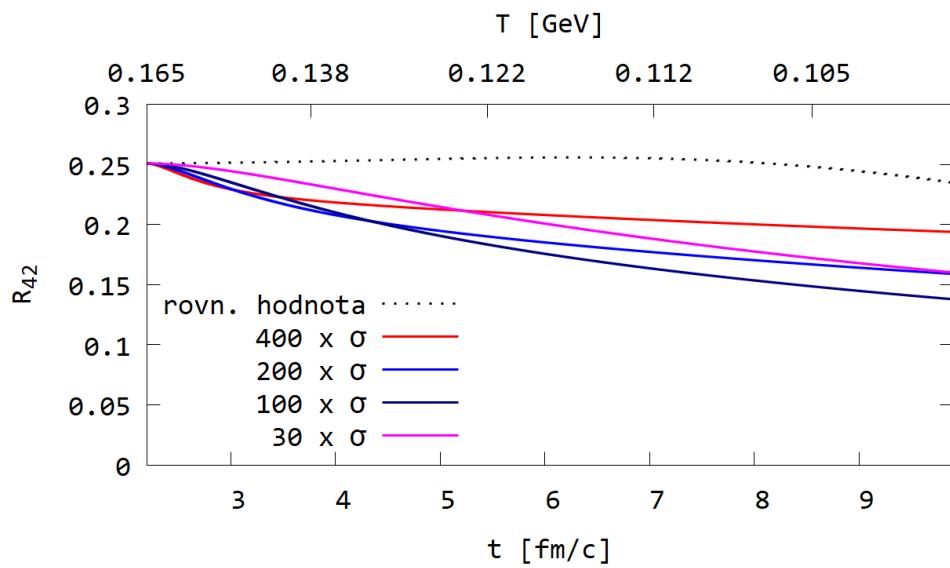
$$R_{31} = \frac{\mu_3}{\mu_1} = S\sigma^3/M, \quad (5.21)$$

kde  $S$  je koeficient šikmosti,  $\kappa$  je koeficient špičatosti,  $\sigma$  je směrodatná odchylka,  $M$  je počet částic  $\langle N \rangle$  a centrální momenty  $\mu_i$  jsou definované v kapitole 5.1.

Koeficient  $R_{32}$  je na Obr. 5.7, koeficient  $R_{42}$  na Obr. 5.8, koeficient  $R_{12}$  na Obr. 5.9 a koeficient  $R_{31}$  na Obr. 5.10.

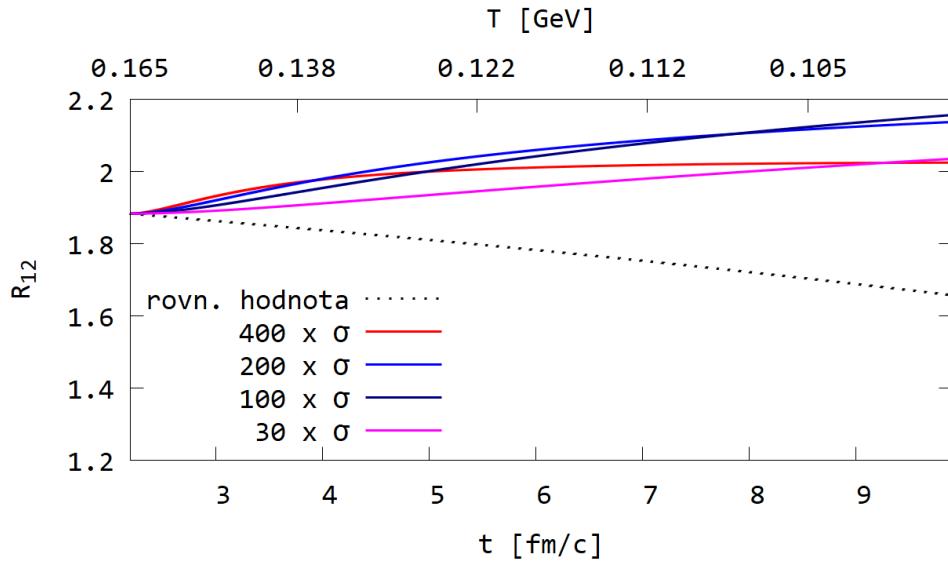


Obrázek 5.7: Koeficient  $R_{32}$  pro postupnou změnu teploty ze 165 MeV na 100 MeV pro různé účinné průřezy, pro 15 pionů a 10 neutronů.

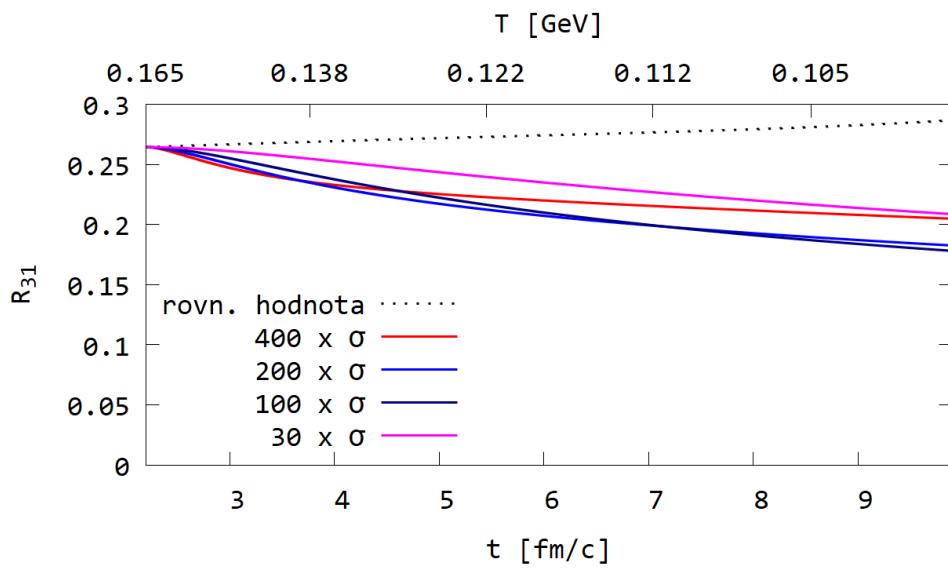


Obrázek 5.8: Koeficient  $R_{42}$  pro postupnou změnu teploty ze 165 MeV na 100 MeV pro různé účinné průřezy, pro 15 pionů a 10 neutronů.

## 5. CENTRÁLNÍ MOMENTY



Obrázek 5.9: Koeficient  $R_{12}$  pro postupnou změnu teploty ze 165 MeV na 100 MeV pro různé účinné průřezy, pro 15 pionů a 10 neutronů.



Obrázek 5.10: Koeficient  $R_{31}$  pro postupnou změnu teploty ze 165 MeV na 100 MeV pro různé účinné průřezy, pro 15 pionů a 10 neutronů.

Z obrázků 5.7, 5.8 a 5.10 vidíme, že poměry  $R_{32}$ ,  $R_{42}$  a  $R_{31}$  klesají s rostoucím časem  $t$ , zatímco poměr  $R_{12}$  roste s rostoucím časem  $t$ .

Jelikož jsou poměry  $R_{32}$ ,  $R_{42}$  a  $R_{31}$  klesající a jejich rovnovážné hodnoty klesají pomaleji než samotné poměry nebo jsou v případě  $R_{31}$  a  $R_{42}$  téměř konstantní, nelze zpětně určit příslušné zdánlivé teploty vymrznutí.

Z Obr. 5.9 vidíme, že poměr  $R_{12}$  roste s rostoucím časem  $t$ , zatímco jeho rovnovážná hodnota pomalu klesá s rostoucím časem  $t$ . Ani v případě poměru  $R_{12}$  tedy nelze zpětně určit příslušné zdánlivé teploty vymrznutí.

Poměry  $R_{42}$ ,  $R_{32}$  a  $R_{31}$  tedy všechny klesají s rostoucím časem  $t$ , zatímco poměr  $R_{12}$  roste. Tento rozdíl je zřejmě způsoben tím, že poměry  $R_{42}$  (tedy podíl 4. centrálního momentu a 2. centrálního momentu),  $R_{32}$  (tedy poměr 3. centrálního momentu a 2. centrálního momentu) a  $R_{31}$  (tedy poměr 3. centrálního momentu a počtu částic  $\langle N \rangle$ ) jsou vždy podílem vyššího centrálního momentu ku nižšímu, zatímco poměr  $R_{12}$  je poměrem nižšího centrálního momentu, resp. počtu částic, ku vyššímu centrálnímu momentu.

## 6. ŘÍDÍCÍ ROVNICE PRO REAKCI $P + \pi^- \rightarrow \Delta^0 \rightarrow N + \pi^0$

# 6 Řídící rovnice pro reakci $p + \pi^- \rightarrow \Delta^0 \rightarrow n + \pi^0$

## 6.1 Motivace

V předešlých kapitolách jsme zjistili, že chování kombinací centrálních momentů jako např. koeficientu šikmosti a špičatosti nebo poměrů nezávislých na objemu  $R_{12}, R_{31}, R_{32}$  a  $R_{42}$  závisí na tom, jakou kombinaci momentů zvolíme. V kapitolách 4 a 5 jsme se zabývali reakcí  $\pi^+ + p \rightarrow K^+ + \Lambda$ , ve které se produkovala podivnost a pro kterou byla hodnota prahové energie velice vysoká. Nyní se podíváme na reakci  $p + \pi^- \rightarrow \Delta^0 \rightarrow \pi^0 + n$ , která je díky své malé hodnotě prahové energie mnohem více pravděpodobná ve srážkách těžkých iontů než rovnice s produkci podivnosti. Nyní bychom tedy chtěli měřit fluktuace baryonového čísla. To lze udělat pouze tak, že se měří fluktuace protonů, a proto je zajímavé se podívat na to, co se děje s rozdělením multiplicity protonů po chemickém vymrznutí. V této kapitole se nejprve podíváme na jednodušší systém jedné reakce, v následující kapitole se potom budeme zabývat dvojicí reakcí, kde jeden z produktů první reakce je zároveň reaktantem reakce druhé. Systém těchto dvou reakcí odpovídá mnohem více realitě.

## 6.2 Řídící rovnice

Stejně jako v předešlých kapitolách budeme používat řídící rovnici závislou na reálném čase. Pro binární proces  $p + \pi^- \rightarrow \pi^0 + n$  má řídící rovnice potom tvar

$$\frac{dP_n}{dt}(t) = \frac{G}{V} \langle N_p \rangle \langle N_{\pi^-} \rangle [P_{n-1}(t) - P_n(t)] - \frac{L}{V} [n^2 P_n(t) - (n+1)^2 P_{n+1}(t)], \quad (6.1)$$

kde  $G$  je ”kreační člen” definovaný vztahem  $G \equiv \langle \sigma_G v \rangle$  pro reakci  $p + \pi^- \rightarrow \pi^0 + n$  a  $L$  je ”anihilační člen” definovaný vztahem  $L \equiv \langle \sigma_L v \rangle$  pro reakci  $\pi^0 + n \rightarrow p + \pi^-$ . Tato řídící rovnice popisuje pravděpodobnost, že v čase  $t$  nalezneme  $n$  páru  $\pi^0 n$ .

Pro hmotnosti a degenerační faktory částic, které se účastní reakce platí

$$m_{\pi^-} = 139,570 \text{ MeV}/c^2, \quad (6.2)$$

$$m_{\pi^0} = 134,977 \text{ MeV}/c^2, \quad (6.3)$$

$$m_n = 939,565 \text{ MeV}/c^2, \quad (6.4)$$

$$m_p = 938,272 \text{ MeV}/c^2, \quad (6.5)$$

$$d_{\pi^-} = 1, \quad (6.6)$$

$$d_{\pi^0} = 1, \quad (6.7)$$

$$d_n = 2, \quad (6.8)$$

$$d_p = 2. \quad (6.9)$$

Hodnoty hmotností a degeneračních faktorů byly převzaty z [27].

### 6.3 Parametrizace pion-nukleonových účinných průřezů

Piony jsou produkovány skrze  $\Delta$ -rezonance, které se poté rozpadají. Předpokládá se, že emitované piony interagují s dalšími nukleony a tvoří tak nové  $\Delta$ -rezonance. Časový vývoj populace pionů a  $\Delta$ -rezonancí je předmětem výzkumu. Zjistilo se, že  $\Delta$ -rezonancí je během sekvence baryon-baryonových srážek více než pionů. Přítomnost  $\Delta$ -rezonancí se zdá být důležitá pro chlazení pionového systému [32].

Pro pion-nukleonové interakce je dominantní produkce přes  $\Delta$  rezonanci. V tomto případě lze použít čistý izobarický model. Parametrizace účinného průřezu v [mb] pro pion-nukleonovou interakci za vzniku  $\Delta^{++}$  rezonance je následující

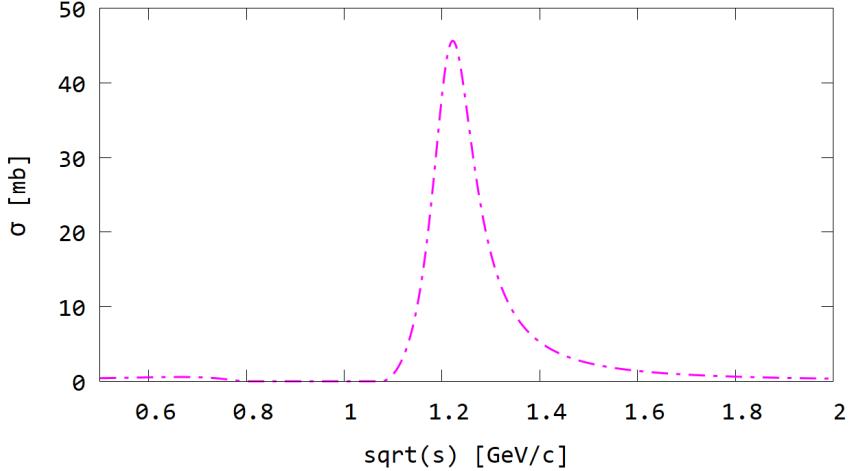
$$\sigma(\pi^+ p \rightarrow \Delta^{++}) = \frac{326,5}{1 + 4 \left( \frac{\sqrt{s} - 1,215}{0,110} \right)^2} \frac{q^3}{q^3 + (0,18)^3}, \quad (6.10)$$

kde  $\sqrt{s}$  je v jednotkách [GeV] a  $q$  v [GeV/c] je *cm*-hybnost. Platí pro ni vztah

$$q = \left[ \frac{(s - (m_\pi + m_p)^2)(s - (m_\pi - m_p)^2)}{4s} \right]^{1/2} = \frac{m_p}{\sqrt{s}} p_{lab}. \quad (6.11)$$

## 6. ŘÍDÍCÍ ROVNICE PRO REAKCI $P + \pi^- \rightarrow \Delta^0 \rightarrow N + \pi^0$

Tato parametrisace účinného průřezu je vykreslena na obrázku 6.1.



Obrázek 6.1: Účinný průřez daný rovnicí (6.10).

Účinné průřezy pro ostatní izospinové kanály lze snadno získat z izobarického modelu. Platí tedy

$$\begin{aligned} \sigma(\pi^+ p \rightarrow \Delta^{++}) &= \frac{3}{2} \sigma(\pi^0 p \rightarrow \Delta^+) = 3\sigma(\pi^- p \rightarrow \Delta^0) \\ &= \frac{3}{2} \sigma(\pi^0 n \rightarrow \Delta^0) = 3\sigma(\pi^+ n \rightarrow \Delta^+) \\ &= \sigma(\pi^- n \rightarrow \Delta^-). \end{aligned} \quad (6.12)$$

Dále uvedeme vztah pro poměry rozpadových šírek pro rozpad  $\Delta$ -rezonance, které jsou dané izobarickým modelem

$$\frac{\Gamma(\Delta^+ \rightarrow \pi^+ n)}{\Gamma(\Delta^+ \rightarrow \pi^0 p)} = \frac{\Gamma(\Delta^0 \rightarrow \pi^- p)}{\Gamma(\Delta^0 \rightarrow \pi^0 n)} = \frac{1}{2}. \quad (6.13)$$

Pro reakci  $p + \pi^- \rightarrow \Delta^0 \rightarrow \pi^0 + n$  budeme potřebovat následující dva účinné průřezy

$$\sigma(\pi^- p \rightarrow \Delta^0) = \frac{1}{3} \sigma(\pi^+ p \rightarrow \Delta^{++}) \quad (6.14)$$

a

$$\sigma(\pi^0 n \rightarrow \Delta^0) = \frac{2}{3} \sigma(\pi^+ p \rightarrow \Delta^{++}), \quad (6.15)$$

kde účinný průřez  $\sigma(\pi^+ p \rightarrow \Delta^{++})$  je definovaný vztahem (6.10).

Vztahy (6.10), (6.11), (6.12) a (6.13) byly převzaty z [30].

## 6.4 Clebsch-Gordanovy koeficienty

Izospin a jeho projekce jsou pro jednotlivé částice dány vztahy

$$\Delta^0 = |3/2, -1/2\rangle, \quad (6.16)$$

$$p = |1/2, 1/2\rangle, \quad (6.17)$$

$$n = |1/2, -1/2\rangle, \quad (6.18)$$

$$\pi^0 = |1, 0\rangle, \quad (6.19)$$

$$\pi^- = |1, -1\rangle. \quad (6.20)$$

Obecně pro skládání izospinu platí

$$|j_1, \mu_1\rangle |j_2, \mu_2\rangle = \sum_{J=|j_1-j_2|}^{|j_1+j_2|} \begin{bmatrix} j_1 & j_2 & J \\ \mu_1 & \mu_2 & M \end{bmatrix} |J, M\rangle, \quad (6.21)$$

kde  $M = \mu_1 + \mu_2$ ,  $j_1$  a  $j_2$  jsou izospiny částic a  $\mu_1$  a  $\mu_2$  jsou jejich projekce. Ve vztahu (6.21) představuje hranatá závorka Clebsch-Gordanův koeficient, který určíme z tabulky [33].

Pro pravou stranu reakce  $\Delta^0 \rightarrow n + \pi^0$  při použití vztahu (6.21) platí

$$\begin{aligned} PS : |1, 0\rangle |1/2, -1/2\rangle &= \begin{bmatrix} 1 & 1/2 & 1/2 \\ 0 & -1/2 & -1/2 \end{bmatrix} |1/2, -1/2\rangle + \begin{bmatrix} 1 & 1/2 & 3/2 \\ 0 & -1/2 & -1/2 \end{bmatrix} |3/2, -1/2\rangle \\ &= \sqrt{\frac{1}{3}} |1/2, -1/2\rangle + \sqrt{\frac{2}{3}} |3/2, -1/2\rangle \end{aligned} \quad (6.22)$$

a pro levou stranu

$$LS : |3/2, -1/2\rangle. \quad (6.23)$$

Pro pravděpodobnost výskytu procesu  $\Delta^0 \rightarrow n + \pi^0$  potom platí vztah

$$|\langle \Delta^0 | n + \pi^0 \rangle|^2 = \left| \sqrt{\frac{2}{3}} \langle 3/2, -1/2 | 3/2, -1/2 \rangle \right|^2 = \frac{2}{3}. \quad (6.24)$$

## 6. ŘÍDÍCÍ ROVNICE PRO REAKCI $P + \pi^- \rightarrow \Delta^0 \rightarrow N + \pi^0$

Účinný průřez (6.14) pro reakci  $p + \pi^- \rightarrow \Delta^0 \rightarrow n + \pi^0$  přenásobíme ještě koeficientem  $2/3$ , který nám podle (6.24) určuje pravděpodobnost, že se  $\Delta^0$  následně rozpadne na  $n + \pi^0$ .

Pro pravou stranu zpětné reakce  $\Delta^0 \rightarrow p + \pi^-$  platí

$$\begin{aligned} PS : |1/2, 1/2\rangle |1, -1\rangle &= \begin{bmatrix} 1/2 & 1 & 1/2 \\ 1/2 & -1 & -1/2 \end{bmatrix} |1/2, -1/2\rangle + \begin{bmatrix} 1/2 & 1 & 3/2 \\ 1/2 & -1 & -1/2 \end{bmatrix} |3/2, -1/2\rangle \\ &= -\sqrt{\frac{2}{3}} |1/2, -1/2\rangle + \sqrt{\frac{1}{3}} |3/2, -1/2\rangle \end{aligned} \quad (6.25)$$

a pro levou stranu

$$LS : |3/2, -1/2\rangle. \quad (6.26)$$

Pro pravděpodobnost výskytu procesu  $\Delta^0 \rightarrow p + \pi^-$  pak platí

$$|\langle \Delta^0 | p + \pi^- \rangle|^2 = \left| \sqrt{\frac{1}{3}} \langle 3/2, -1/2 | 3/2, -1/2 \rangle \right|^2 = \frac{1}{3}. \quad (6.27)$$

Účinný průřez (6.15) pro reakci  $n + \pi^0 \rightarrow \Delta^0 \rightarrow p + \pi^-$  přenásobíme ještě koeficientem  $1/3$ , který nám podle (6.27) určuje pravděpodobnost, že se  $\Delta^0$  následně rozpadne na  $p + \pi^-$ .

Účinné průřezy pro reakce  $p + \pi^- \rightarrow \Delta^0 \rightarrow n + \pi^0$  a  $n + \pi^0 \rightarrow \Delta^0 \rightarrow p + \pi^-$  mají nakonec následující tvar

$$\sigma(\pi^- p \rightarrow \Delta^0) = \frac{1}{3} \cdot \frac{2}{3} \sigma(\pi^+ p \rightarrow \Delta^{++}) = \frac{2}{9} \sigma(\pi^+ p \rightarrow \Delta^{++}) \quad (6.28)$$

a

$$\sigma(\pi^0 n \rightarrow \Delta^0) = \frac{2}{3} \cdot \frac{1}{3} \sigma(\pi^+ p \rightarrow \Delta^{++}) = \frac{2}{9} \sigma(\pi^+ p \rightarrow \Delta^{++}). \quad (6.29)$$

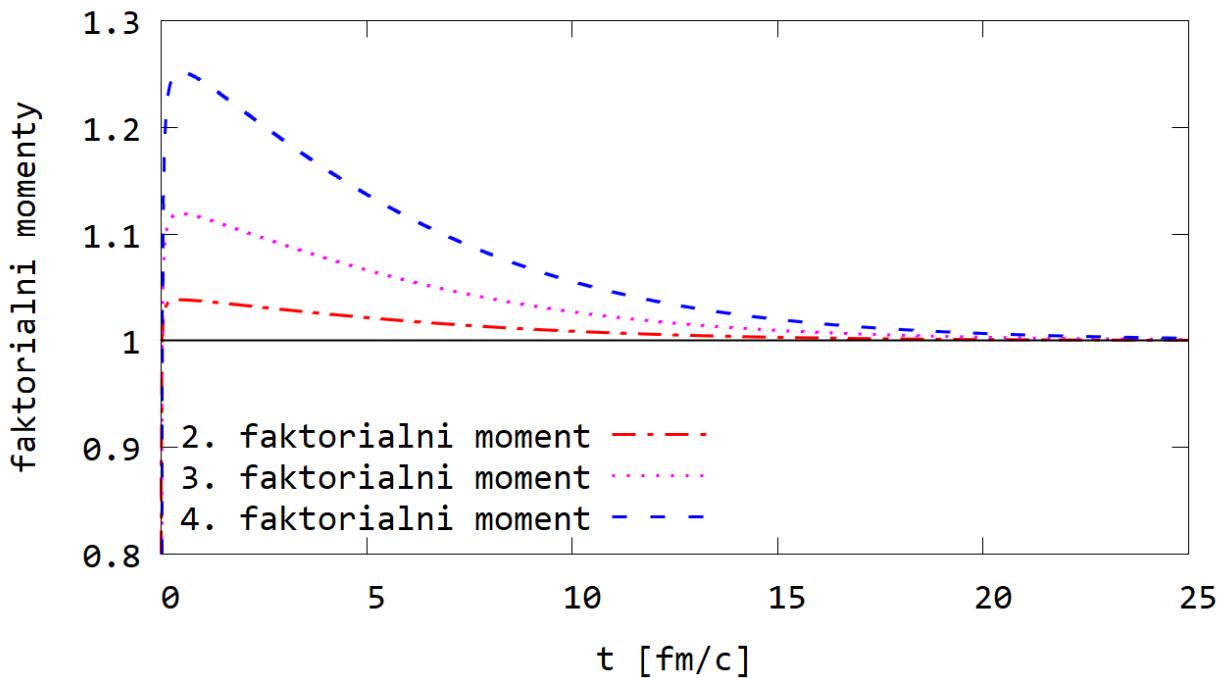
Pro prahovou energii reakce [20] dostaneme hodnotu

$$\begin{aligned} \sqrt{s_0} &= \max(m_i + m_j, \Sigma_{final} m_a) = \max(m_{\pi^-} + m_p, m_{\pi^0} + m_n) \\ &= \max(1077, 8 \text{ MeV}, 1074, 5 \text{ MeV}) \simeq 1,0778 \text{ GeV.} \end{aligned} \quad (6.30)$$

#### 6.4.1 Konstantní teplota

Nejprve ukážeme, jak vypadají faktoriální momenty pro řídící rovnici závislou na konstantní teplotě  $T$  předělené svou rovnovážnou hodnotou, abychom mohli posoudit, jak rychle termalizují.

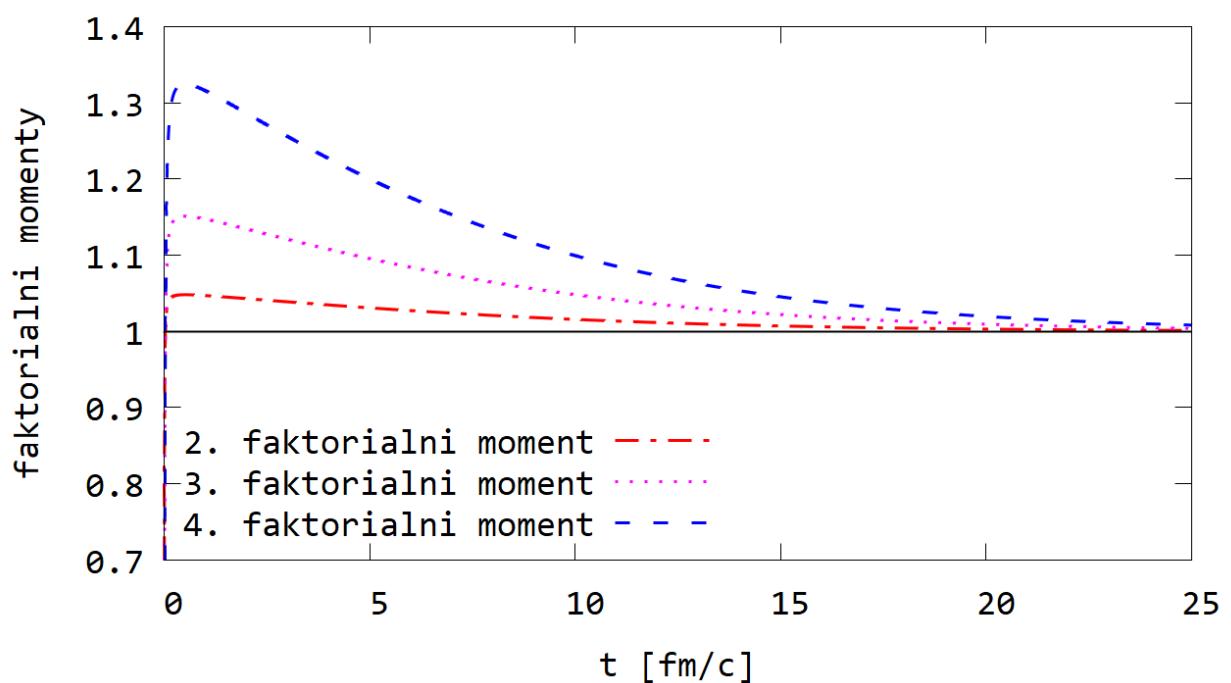
Na Obr. 6.2 je druhý, třetí a čtvrtý faktoriální moment předělený svou rovnovážnou hodnotou pro teplotu 165 MeV. Tento graf je vykreslen pro 15 protonů a 10 pionů a vidíme z něj, že čas termalizace všech momentů je okolo 10 MeV. Jelikož jsou všechny momenty předělené svými rovnovážnými hodnotami, vidíme, že konvergují k jedné. Na Obr. 6.3 je vykreslena stejná situace jako na Obr. 6.2 s tím rozdílem, že jsme na počátku měli 10 protonů a 10 pionů. Vidíme, že pro 10 protonů a 10 pionů dosahují faktoriáloní momenty vyšších hodnot na ose  $y$  než pro 15 protonů a 10 pionů, ale čas termalizace se tím nezměnil.



Obrázek 6.2: Faktoriální momenty předělené svými rovnovážnými hodnotami pro teplotu  $T = 165$  MeV pro 15 protonů a 10 pionů.

Pro numerické výpočty byly použity binomické počáteční podmínky s  $N_0 = 0,0005$ . Objem reakce uvažujeme  $V = 125$  fm<sup>3</sup>.

6. ŘÍDÍCÍ ROVNICE PRO REAKCI  $P + \pi^- \rightarrow \Delta^0 \rightarrow N + \pi^0$



Obrázek 6.3: Faktoriální momenty předělené svými rovnovážnými hodnotami pro teplotu  $T = 165$  MeV pro 10 protonů a 10 pionů.

### 6.4.2 Postupná změna teploty

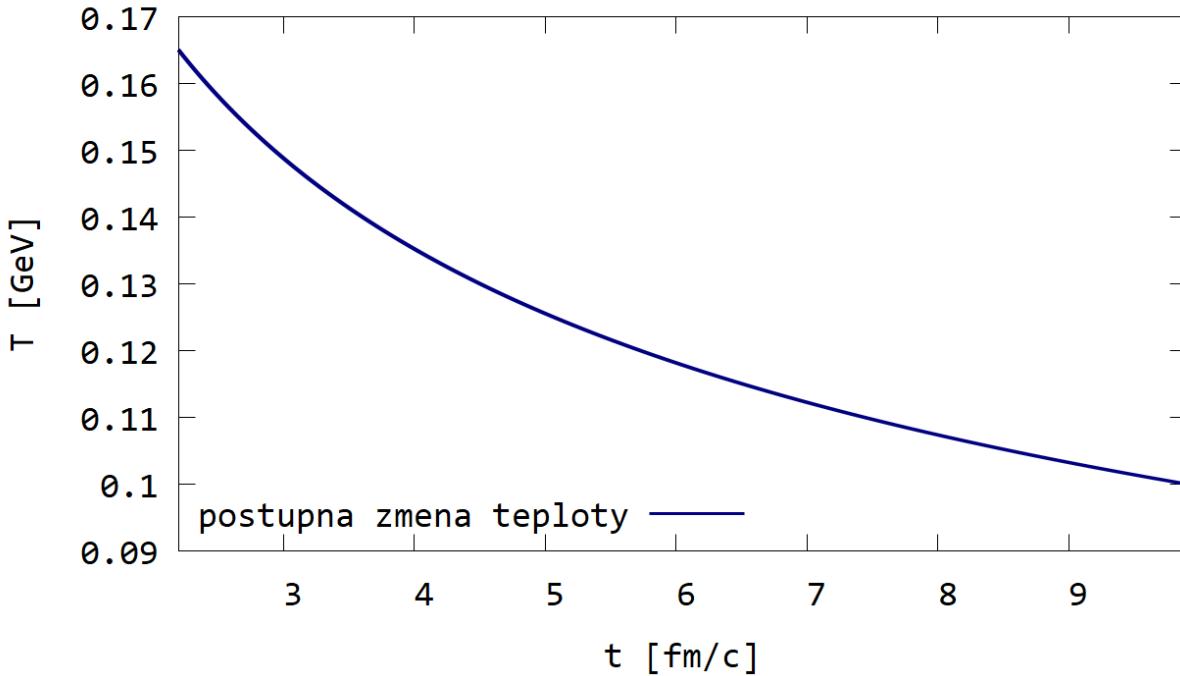
Nyní necháme teplotu po úplné termalizaci faktoriálních momentů klesat podle Bjorkenova modelu stejně jako v předešlých kapitolách z počáteční teploty  $T_0 = 0,165 \text{ GeV}$  podle vztahu

$$T^3 = T_0^3 \frac{t_0}{t} \quad (6.31)$$

až na teplotu  $T = 0,100 \text{ GeV}$ .

Čas  $t_0$  je čas hadronizace pro teplotu  $T_0$ . Z Bjorkenovy závislosti teploty na čase je  $t_0 = 2,2 \text{ fm/c}$ .

Závislost teploty systému na reálném čase je vykreslena na Obr. 6.4.



Obrázek 6.4: Závislost teploty systému, která klesá z 165 MeV na 100 MeV, na reálném čase.

Zároveň s teplotou se mění i objem systému podle vztahu

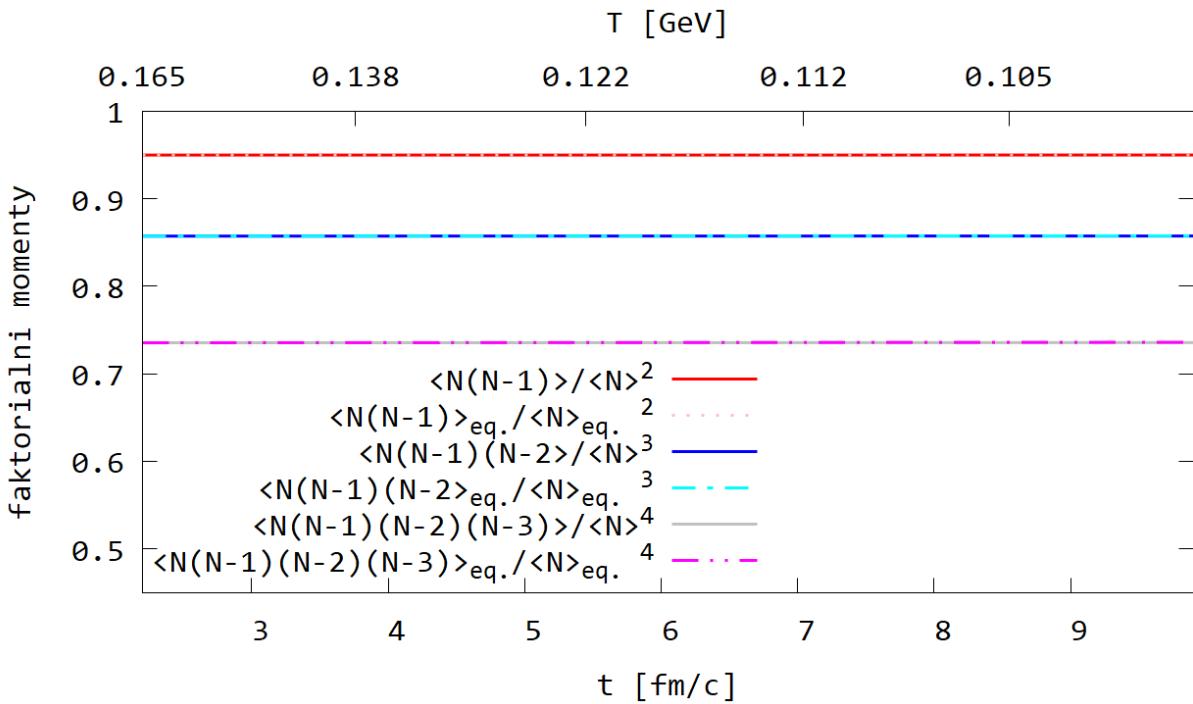
$$V = V_0 \frac{t}{t_0}, \quad (6.32)$$

## 6. ŘÍDÍCÍ ROVNICE PRO REAKCI $P + \pi^- \rightarrow \Delta^0 \rightarrow N + \pi^0$

kde  $V_0 = 125 \text{ fm}^3$ .

Pro numerické výpočty byly použity binomické počáteční podmínky s  $N_0 = 0,005$ .

Na Obr. 6.5 jsou pro porovnání vykresleny hodnoty 2., 3. a 4. faktoriálního momentu v rovnovážném stavu (přerušované čáry) a mimo rovnovážnou polohu (plné čáry). Z obrázku je patrné, že faktoriální momenty pro reakci  $p + \pi^- \rightarrow \Delta^0 \rightarrow \pi^0 + n$  se nemění v čase, pokud postupně snižujeme teplotu ze 165 MeV na 100 MeV. To znamená, že když fireball expanduje a chladne, nemění se fluktuace v protonovém a neutronovém čísle. Ke stejnemu závěru došli M. Kitazawa a M. Asakawa ve svých článkách [34] a [35].



Obrázek 6.5: Normované faktoriální momenty pro postupnou změnu teploty ze 165 MeV na 100 MeV pro čas termalizace okolo 10 fm/c a pro 15 protonů a 10 pionů.



7. ŘÍDÍCÍ ROVNICE PRO DVOJICI REAKCÍ  $P + \pi^- \rightarrow \Delta^0 \rightarrow N + \pi^0$ ,  
 $P + \pi^0 \rightarrow \Delta^+ \rightarrow N + \pi^+$

## 7 Řídící rovnice pro dvojici reakcí $p + \pi^- \rightarrow \Delta^0 \rightarrow n + \pi^0$ ,



### 7.1 Motivace

V kapitole 6 jsme zkoumali rovnici  $p + \pi^- \rightarrow \Delta^0 \rightarrow \pi^0 + n$  a zjistili jsme, že když fireball expanduje a chladne, nemění se fluktuace v protonovém a neutronovém čísle. Nyní se podíváme na případ dvojice rovnic, kde jeden z produktů jedné rovnice je zároveň reaktantem druhé rovnice. V tomto případě budeme sledovat časový vývoj počtu protonů, protože nás zajímají fluktuace baryonového čísla. Mohli bychom sledovat i časový vývoj neutronů, ale neutrony nemají náboj a proto nejsou přímo detekovatelné a tudíž pro nás nevhodné pro porovnání s experimentálními daty.

V předchozích kapitolách jsme používali řídící rovnici, která popisovala časový vývoj částic na pravé straně reakce. Nyní budeme muset odvodit novou řídící rovnici, protože ve dvojici reakcí  $p + \pi^- \rightarrow \Delta^0 \rightarrow n + \pi^0$ ,  $p + \pi^0 \rightarrow \Delta^+ \rightarrow n + \pi^+$  chceme sledovat protony a ty jsou na levých stranách těchto reakcí. Produktem první reakce, který je zároveň reaktantem druhé reakce je tedy  $\pi^0$ .

### 7.2 Řídící rovnice pro reakci $A + B \rightleftharpoons C + D$

Nejprve budeme demonstrovat odvození nové řídící rovnice na následující reversibilní reakci



kde reakce směrem  $\rightarrow$  probíhá s rychlostním parametrem  $k$  a reakce směrem  $\leftarrow$  probíhá s rychlostním parametrem  $l$ .

Nechť  $A(t) = a$ ,  $B(t) = b$ ,  $C(t) = c$  a  $D(t) = d$  jsou náhodné proměnné, které representují počet částic  $A$ ,  $B$ ,  $C$  a  $D$  v čase  $t$ . A nechť  $a$ ,  $b$ ,  $c$  a  $d$  jsou hodnoty, kterých těchto proměnné můžou dosáhnout.

Pro  $P(a, b, c, d; t)$ , pravděpodobnost nalezení  $a$ ,  $b$ ,  $c$ ,  $d$  částic v čase  $t$  platí

$$\begin{aligned}
P(a, b, c, d; t + \Delta t) &= k(a+1)(b+1)\Delta t P(a+1, b+1, c-1, d-1; t) \\
&\quad + l(c+1)(d+1)\Delta t P(a-1, b-1, c+1, d+1; t) \\
&\quad + [1 - (kab + lcd)\Delta t] P(a, b, c, d; t) + O(\Delta t^2).
\end{aligned} \tag{7.2}$$

Protože je systém konzervativní, čtyři náhodné proměnné spolu souvisí skrze počáteční koncentrace jednotlivých druhů částic, které jsou dané jako

$$A(0) = \alpha, \quad B(0) = \beta, \quad C(0) = \gamma, \quad D(0) = \delta, \tag{7.3}$$

Z tohoto vyjádření plyne

$$\alpha - a = \beta - b = c - \gamma = d - \delta. \tag{7.4}$$

A tudíž může být časově závislá pravděpodobnost reakce popsána pomocí jediné náhodné proměnné. Řídící rovnici vyjádříme například pro proměnnou  $A(t)$ , která popisuje počet částic  $A$  nacházejících se v čase  $t$ .

Pro vyjádření řídící rovnice pouze v proměnné  $a$  budeme potřebovat následující vztahy plynoucí z výrazu (7.4)

$$(b+1) = \beta - \alpha + a + 1, \quad b = \beta - \alpha + a, \tag{7.5}$$

$$(c+1) = \gamma + \alpha - a + 1, \quad c = \gamma + \alpha - a, \tag{7.6}$$

$$(d+1) = \delta + \alpha - a + 1, \quad d = \delta + \alpha - a. \tag{7.7}$$

Rovnice (7.2) pak přejde do tvaru

$$\begin{aligned}
P_a(t + \Delta t) &= k(a+1)(\beta - \alpha + a + 1)\Delta t P_{a+1}(t) \\
&\quad + l(\gamma + \alpha - a + 1)(\delta + \alpha - a + 1)\Delta t P_{a-1}(t) \\
&\quad + [1 - ka(\beta - \alpha + a)\Delta t - l(\gamma + \alpha - a)(\delta + \alpha - a)\Delta t] P_a(t) + O(t),
\end{aligned} \tag{7.8}$$

kde pravděpodobnost  $P_a(t)$  nahradila  $P(a, b, c, d; t)$ .

## 7. ŘÍDÍCÍ ROVNICE PRO DVOJICI REAKCÍ $P + \pi^- \rightarrow \Delta^0 \rightarrow N + \pi^0$ , $P + \pi^0 \rightarrow \Delta^+ \rightarrow N + \pi^+$

Řídící rovnice závislá na reálném čase má potom tvar

$$\begin{aligned} dP_a(t)/dt = & k [(a+1)(\beta - \alpha + a + 1)P_{a+1}(t) - a(\beta - \alpha + a)P_a(t)] \\ & + l [(\gamma + \alpha - a + 1)(\delta + \alpha - a + 1)P_{a-1}(t) - (\gamma + \alpha - a)(\delta + \alpha - a)P_a(t)], \end{aligned} \quad (7.9)$$

Počáteční podmínky pro řídící rovnici (7.9) mají následující tvar

$$P_a(0) = 1, \quad a = \alpha, \quad (7.10)$$

$$P_a(0) = 0, \quad \text{v ostatních případech.} \quad (7.11)$$

Vztahy v kapitole 7.2 byly převzaty z [36].

## 7.3 Řídící rovnice pro dvojici reakcí

Nyní tedy přejdeme k odvození řídící rovnice pro dvojici reakcí



kde tedy produkt první rovnice (7.12)  $\pi^0$  je zároveň reaktantem druhé rovnice (7.13).

Pro hmotnosti a degenerační faktory částic platí vztahy (6.2) až (6.6). A pro  $\pi^+$  platí

$$m_{\pi^+} = 139,570 \text{ MeV}/c^2, \quad (7.14)$$

$$d_{\pi^+} = 0. \quad (7.15)$$

Vztahy (7.14) a (7.15) byly převzaty z [27].

Účinné průřezy pro reakci  $p + \pi^0 \rightarrow \Delta^+ \rightarrow n + \pi^+$  odvodíme stejným způsobem jako účinné průřezy pro reakci  $p + \pi^- \rightarrow \Delta^0 \rightarrow \pi^0 + n$  v kapitole 6.

Pro účinné průřezy pro reakci  $p + \pi^0 \rightarrow \Delta^+ \rightarrow \pi^+ + n$ , resp. pro reakci  $\pi^+ + n \rightarrow \Delta^+ \rightarrow p + \pi^0$  dostaneme

$$\sigma(p + \pi^0 \rightarrow \Delta^+) = \frac{1}{3} \cdot \frac{2}{3} \sigma(\pi^+ p \rightarrow \Delta^{++}) = \frac{2}{9} \sigma(\pi^+ p \rightarrow \Delta^{++}), \quad (7.16)$$

resp.

$$\sigma(\pi^+n \rightarrow \Delta^+) = \frac{2}{3} \cdot \frac{1}{3} \sigma(\pi^+p \rightarrow \Delta^{++}) = \frac{2}{9} \sigma(\pi^+p \rightarrow \Delta^{++}). \quad (7.17)$$

Dvojici reakcí si přepíšeme schematicky jako



kde  $A$  = proton,  $B = \pi^-$ ,  $C$  = neutron,  $D = \pi^0$  a  $E = \pi^+$  a podíváme se na přesné odvození řídící rovnice pro tuto dvojici reakcí.

### 7.3.1 Přesné odvození

Nyní budeme předpokládat, že jelikož je pionů mnoho a tvoří tedy rezervoár, nejsou chemickými reakcemi příliš ovlivněny.

Pro reakci potom (7.18) platí

$$\alpha - a = c - \gamma, \quad (7.20)$$

$$b + 1 \sim b \sim < N_{\pi^-} >, \quad (7.21)$$

$$d + 1 \sim d \sim < N_{\pi^0} >, \quad (7.22)$$

kde  $\alpha$  a  $\gamma$  jsou počáteční počty částic  $A$  a  $C$ .

A pro reakci (7.19) platí

$$\alpha - a = c - \gamma, \quad (7.23)$$

$$d + 1 \sim d \sim < N_{\pi^0} >, \quad (7.24)$$

$$e + 1 \sim e \sim < N_{\pi^+} >, \quad (7.25)$$

kde  $\alpha$  a  $\gamma$  jsou počáteční počty částic  $A$  a  $C$ .

## 7. ŘÍDÍCÍ ROVNICE PRO DVOJICI REAKCÍ $P + \pi^- \rightarrow \Delta^0 \rightarrow N + \pi^0$ , $P + \pi^0 \rightarrow \Delta^+ \rightarrow N + \pi^+$

Budeme-li sledovat časový vývoj počtu protonů, pak dostaneme řídící rovnici ve tvaru

$$\begin{aligned} dP_a(t)/dt = & k < N_{\pi^-} > [(a+1)P_{a+1}(t) - aP_a(t)] \\ & + l < N_{\pi^0} > [(\gamma + \alpha - a + 1)P_{a-1}(t) - (\gamma + \alpha - a)P_a(t)] \\ & + m < N_{\pi^0} > [(a+1)P_{a+1}(t) - aP_a(t)] \\ & + n < N_{\pi^+} > [(\gamma + \alpha - a + 1)P_{a-1}(t) - (\gamma + \alpha - a)P_a(t)], \end{aligned} \quad (7.26)$$

kde  $k$ , resp.  $l$  je rychlostní parametr pro rovnici (7.18) pro směr  $\rightarrow$ , resp. pro  $\leftarrow$  a  $m$ , resp.  $n$  je rychlostní parametr pro rovnici (7.19) pro směr  $\rightarrow$ , resp. pro směr  $\leftarrow$ .

Rovnovážné řešení řídící rovnice (7.26) je odvozeno v Příloze B.2.

### 7.3.2 Počáteční počty částic

Pro numerické výpočty byly použity následující hodnoty pro počáteční počty částic

$$\langle N_p \rangle = \langle N_n \rangle = 30, \quad (7.27)$$

kde  $N_p$  je počet protonů a  $N_n$  je počet neutronů a pro počty pionů platí

$$\langle N_{\pi^+} \rangle = \langle N_{\pi^-} \rangle = \langle N_{\pi^0} \rangle = 300. \quad (7.28)$$

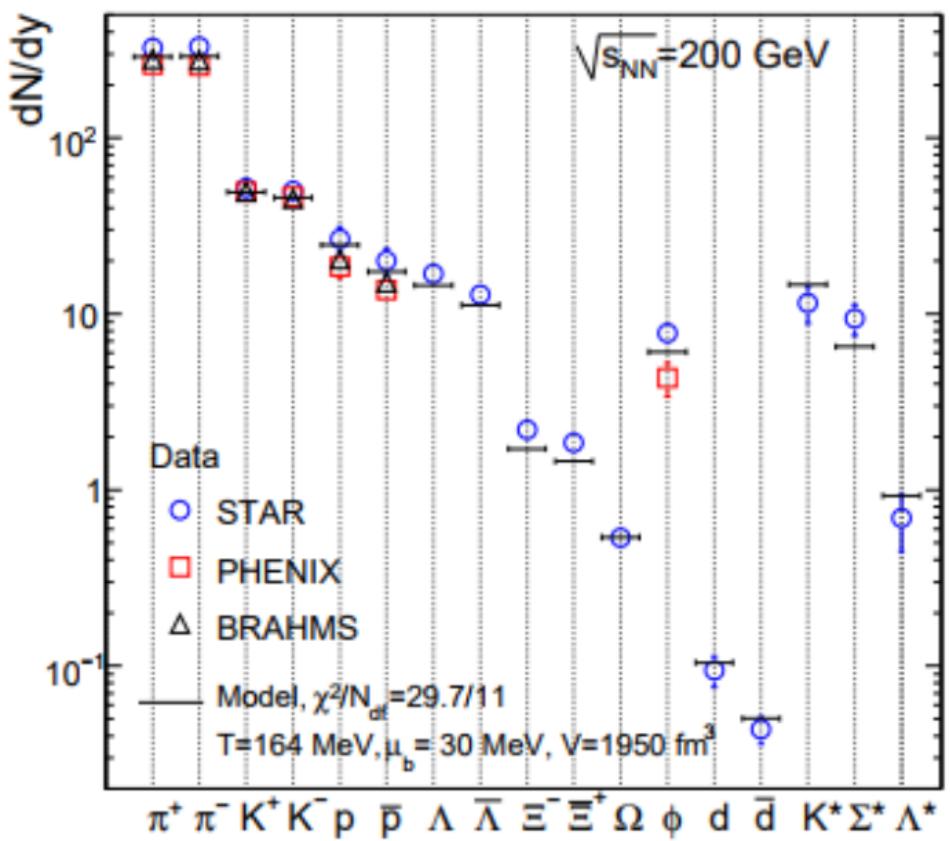
Vlastní objem reakce  $V$  je

$$V = 1950 \text{ fm}^3 \quad (7.29)$$

a baryochemický potenciál je roven

$$\mu_b = 30 \text{ MeV}. \quad (7.30)$$

Tyto hodnoty jsou platné pro teplotu 164 MeV a pro energii srážky  $\sqrt{s_{NN}} = 200 \text{ GeV}$ . Hodnoty pro počáteční počty částic byly určeny z Obr.7.1 a hodnoty (7.29) a (7.30) byly převzaty z [31].



Obrázek 7.1: Experimentální hadronové výtěžky a výtěžky spočítané z modelu pro energii srážky  $\sqrt{s_{NN}} = 200 \text{ GeV}$ . Převzato z [31].

## 7. ŘÍDÍCÍ ROVNICE PRO DVOJICI REAKCÍ $P + \pi^- \rightarrow \Delta^0 \rightarrow N + \pi^0$ , $P + \pi^0 \rightarrow \Delta^+ \rightarrow N + \pi^+$

### 7.4 Výsledky

#### 7.4.1 Konstantní teplota

Nejprve ukážeme, jak vypadají faktoriální momenty pro řídící rovnici závislou na konstantní teplotě  $T$  pro dvojici reakcí  $p + \pi^- \rightarrow \Delta^0 \rightarrow n + \pi^0$ ,  $p + \pi^0 \rightarrow \Delta^+ \rightarrow n + \pi^+$ , abychom mohli posoudit, jak rychle tyto momenty termalizují.

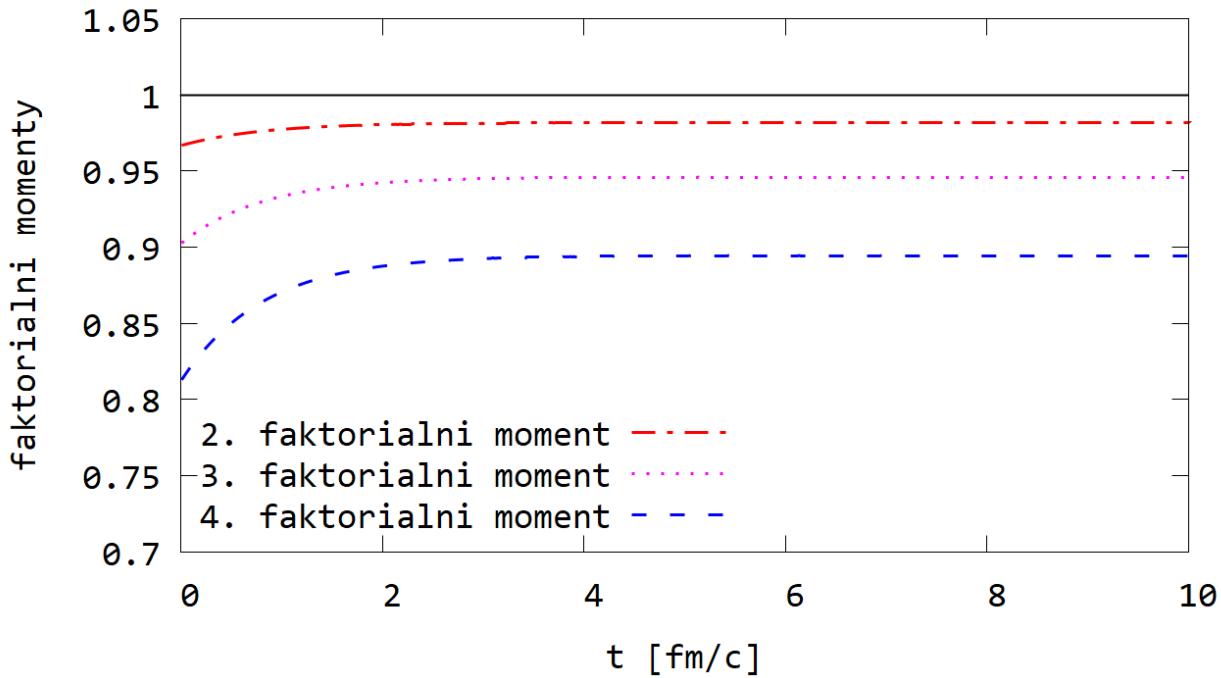
Stejně jako pro reakci  $A + B \rightleftharpoons C + D$  budeme i pro systém dvou reakcí uvažovat tyto počáteční podmínky

$$P_a(0) = 1, \quad a = \alpha, \quad (7.31)$$

$$P_a(0) = 0, \quad \text{v ostatních případech}, \quad (7.32)$$

kde  $\alpha$  je počáteční počet protonů.

Na Obr. 7.2 je vykreslený druhý, třetí a čtvrtý faktoriální moment pro konstantní teplotu  $T = 165$  MeV. Z tohoto grafu vidíme, že čas termalizace je v tomto případě okolo 4 fm/c. Na Obr. 7.3 jsou pak faktoriální momenty pro konstantní teplotu  $T = 165$  MeV předělené svými rovnovážnými hodnotami.



Obrázek 7.2: Normované faktoriální momenty pro konstantní teplotu 165 MeV pro rovnici (7.26). Tento graf je vykreslen pro 30 protonů a 300 pionů.

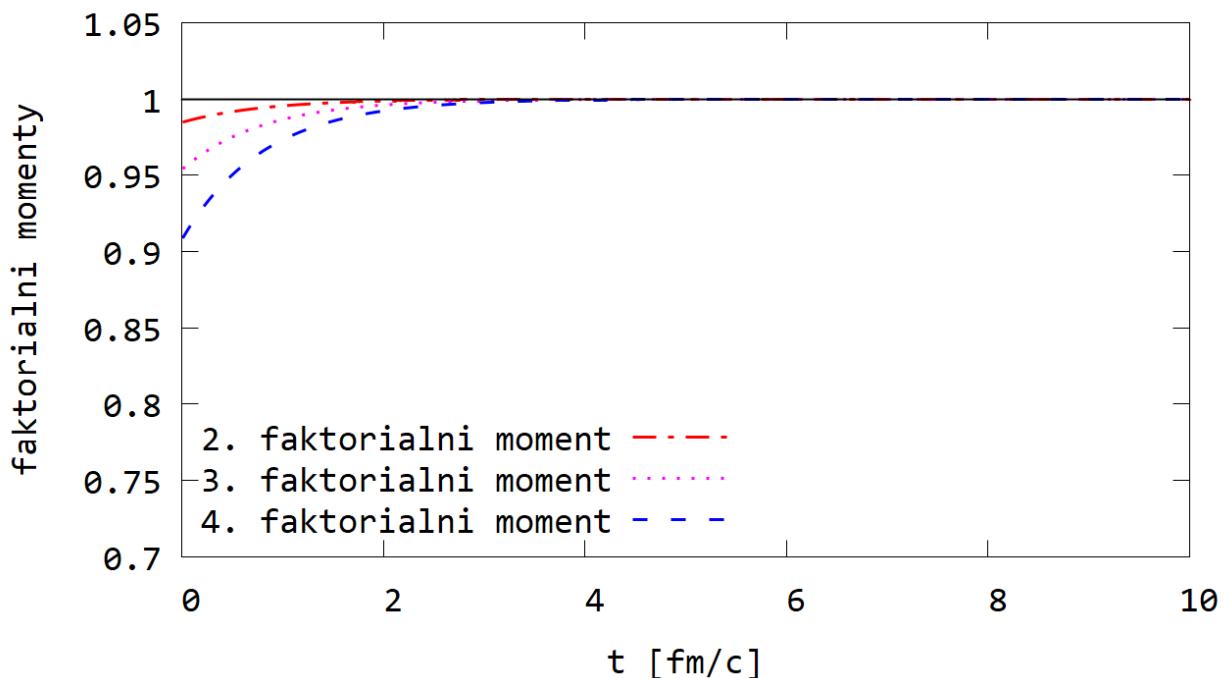
#### 7.4.2 Postupná změna teploty

Nyní necháme teplotu po úplné termalizaci faktoriálních momentů klesat podle Bjorkenova modelu z počáteční teploty  $T_0 = 0, 165$  GeV až na teplotu  $T = 0, 100$  GeV stejně jako v kapitole 6. Zároveň s klesající se teplotou se zvětšuje objem systému. Oproti kapitole 6 zde byla pro počáteční hodnotu objemu zvolena hodnota  $V_0 = 1950$  fm<sup>3</sup>, která byla převzata ze článku [31].

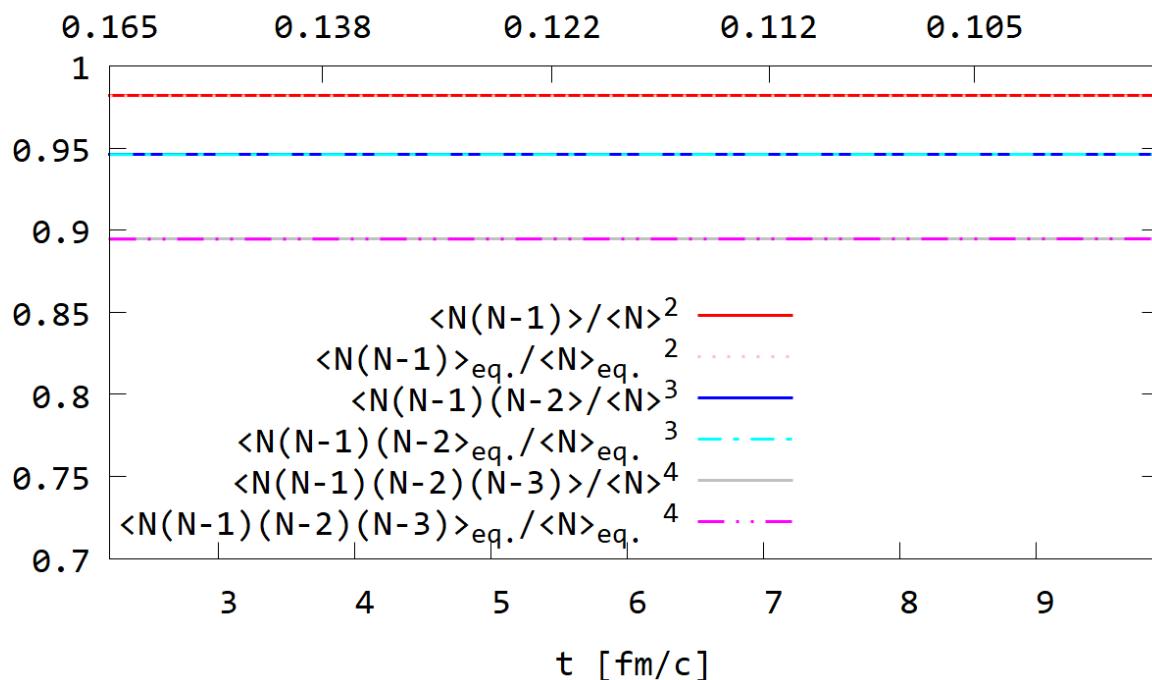
Pro numerické výpočty byly uvažovány stejné počáteční podmínky jako pro konstantní teplotu  $T$ .

Na Obr. 7.4 jsou pro porovnání vykresleny hodnoty 2., 3. a 4. faktoriálního momentu v rovnovážném stavu (přerušované čáry) a mimo rovnováznou polohu (plné čáry). Z obrázku je patrné, že faktoriální momenty pro dvojici reakcí  $p + \pi^- \rightarrow \Delta^0 \rightarrow \pi^0 + n$  a  $p + \pi^0 \rightarrow \Delta^+ \rightarrow n + \pi^+$  se nemění v čase, pokud postupně snižujeme teplotu ze 165 MeV na 100 MeV. To znamená, že ani v případě, kdy uvažujeme dvojici reakcí  $p + \pi^- \rightarrow \Delta^0 \rightarrow n + \pi^0$ ,  $p + \pi^0 \rightarrow \Delta^+ \rightarrow n + \pi^+$ , nenastávají fluktuace v protonovém ani neutronovém čísle.

7. ŘÍDÍCÍ ROVNICE PRO DVOJICI REAKCÍ  $P + \pi^- \rightarrow \Delta^0 \rightarrow N + \pi^0$ ,  
 $P + \pi^0 \rightarrow \Delta^+ \rightarrow N + \pi^+$



Obrázek 7.3: Normované faktoriální momenty pro konstantní teplotu 165 MeV pro rovnici (7.26) předělené svými rovnovážnými hodnotami. Tento graf je vykreslen pro 30 protonů a 300 pionů.



Obrázek 7.4: Normované faktoriální momenty pro postupnou změnu teploty pro rovnici (7.26). Tento graf je vykreslen pro čas termalizace okolo 4 fm/c a pro 30 protonů a 300 pionů.

## 8. POROVNÁNÍ VÝSLEDKŮ S EXPERIMENTÁLNÍMI DATY

# 8 Porovnání výsledků s experimentálními daty

## 8.1 Motivace

V této kapitole bychom se chtěli podívat na to, zda náš jednoduchý model pro reakci  $\pi^+ + n \rightarrow K^+ + \Lambda^0$  dokáže vysvětlit výsledky z experimentu RHIC v BNL, které jsou publikovány v článku [40]. Fluktuace počtu podivných částic, které jsou měřeny na experimentu STAR, mohou být ovlivněny různými efekty. My se zde však zaměříme pouze na jeden z nich, a sice na změnu rozdělení multiplicity podivných částic v důsledku chemických reakcí produkujících a anihilujících podivnost.

## 8.2 Počáteční podmínky

Objem fireballu určíme přibližně jako objem válce o výšce  $2\tau \sinh(\eta)$  a poloměru podstavy  $r = 10 \text{ fm}/c$ , kde  $\tau$  je doba vývoje fireballu, která je přibližně  $10 \text{ fm}/c$ . Budeme předpokládat, že se fireball vyvíjí pouze v podélném směru. Počty částic byly převzaty z [41] pro midrapiditu  $|y| < 0.1$ . Dále budeme uvažovat, že  $\eta \sim y$ .

Objem našeho uvažovaného fireballu je pak přibližně

$$V = \pi r^2 2\tau \sinh(\eta) = 628,32 \text{ fm}^3. \quad (8.1)$$

Tento objem je ovšem objem systému na konci vývoje našeho systému (při kinetickém freeze-outu), tedy při teplotě 100 MeV. Na počátku našeho vývoje (v době chemického freeze-outu) při teplotě 165 MeV je potom objem

$$V_0 = 138,23 \text{ fm}^3, \quad (8.2)$$

pokud uvažujeme, že se fireball rozpíná s klesající teplotou a pro objem platí vztah

$$V = V_0 \frac{t}{t_0}, \quad (8.3)$$

kde  $t_0 = 2,2 \text{ fm}/c$ .

V článku [41] je uvedena pouze multiplicita protonů a nikoliv neutronů, které potřebujeme.

Jelikož byly sráženy ionty  $Au$  ( $A = 197$ ), ve kterém je poměr neutronů k protonům dán jako

$$\frac{N_n}{N_p} = \frac{118}{79} = 1,4937, \quad (8.4)$$

získáme pomocí tohoto poměru počet neutronů.

Jednotlivé počty částic (pro počet participantů  $N_{part} \sim 338$ ) pro různé energie srážky  $\sqrt{s_{NN}}$  jsou dány v tabulce 8.1.

$\sqrt{s_{NN}}[\text{GeV}]$	$N_p$	$N_n$	$N_{\pi^+}$	$N_{K^+}$
7,7	54,96	82,10	93,46	20,80
11,5	44,00	65,72	123,78	24,99
19,6	34,22	51,12	161,40	29,56

Tabulka 8.1: Počty jednotlivých druhů částic pro různé energie srážky  $\sqrt{s_{NN}}$  pro midrapidity  $|y| < 0,1$  [41]

Výsledky budeme srovnávat s grafy na Obr. 8.1. Naměřená data odpovídají době kinetického freeze-outu, což je v našem případě v času 10 fm/c a při teplotě 100 MeV. Počáteční počty neutronů a pionů nastavíme tak, abychom v čase 10 fm/c dostali počty kaonů uvedené v tabulce 8.1, protože ty odpovídají počtu kaonů, které pozorujeme za daných podmínek.

Jelikož neznáme rozdělení počátečního počtu částic v době chemického freeze-outu, budeme uvažovat Poissonovské rozdělení počtu částic (toto rozdělení je definované v kapitole 3 pomocí rovnice (3.40)).

Budeme tedy srovnávat následující poměry centrálních momentů

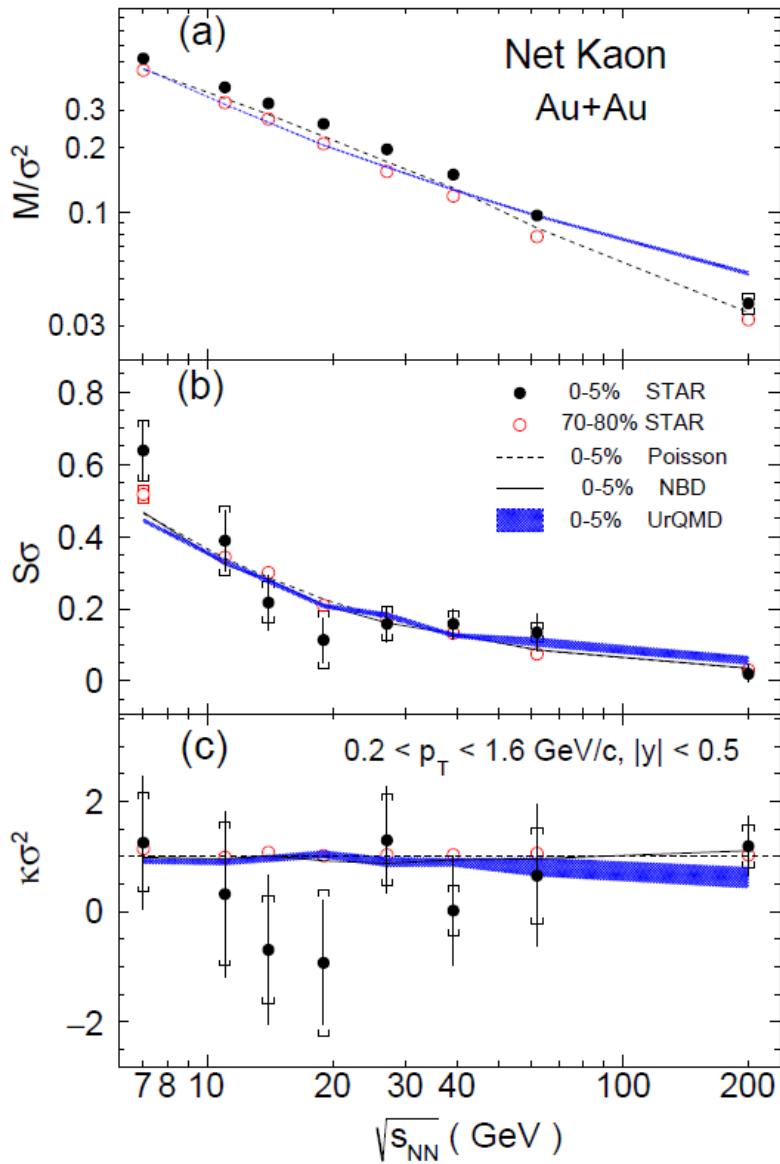
$$R_{32} = \frac{\mu_3}{\mu_2} = S\sigma, \quad (8.5)$$

$$R_{42} = \frac{\mu_4}{\mu_2} - 3\sigma^2 = \kappa\sigma^2, \quad (8.6)$$

$$R_{12} = \frac{\mu_1}{\mu_2} = M/\sigma^2, \quad (8.7)$$

kde  $S$  je koeficient šikmosti,  $\kappa$  je koeficient špičatosti,  $\sigma$  je směrodatná odchylka,  $M$  je počet částic  $\langle N \rangle$  a centrální momenty  $\mu_i$  jsou definované v kapitole 5.1.

## 8. POROVNÁNÍ VÝSLEDKŮ S EXPERIMENTÁLNÍMI DATY

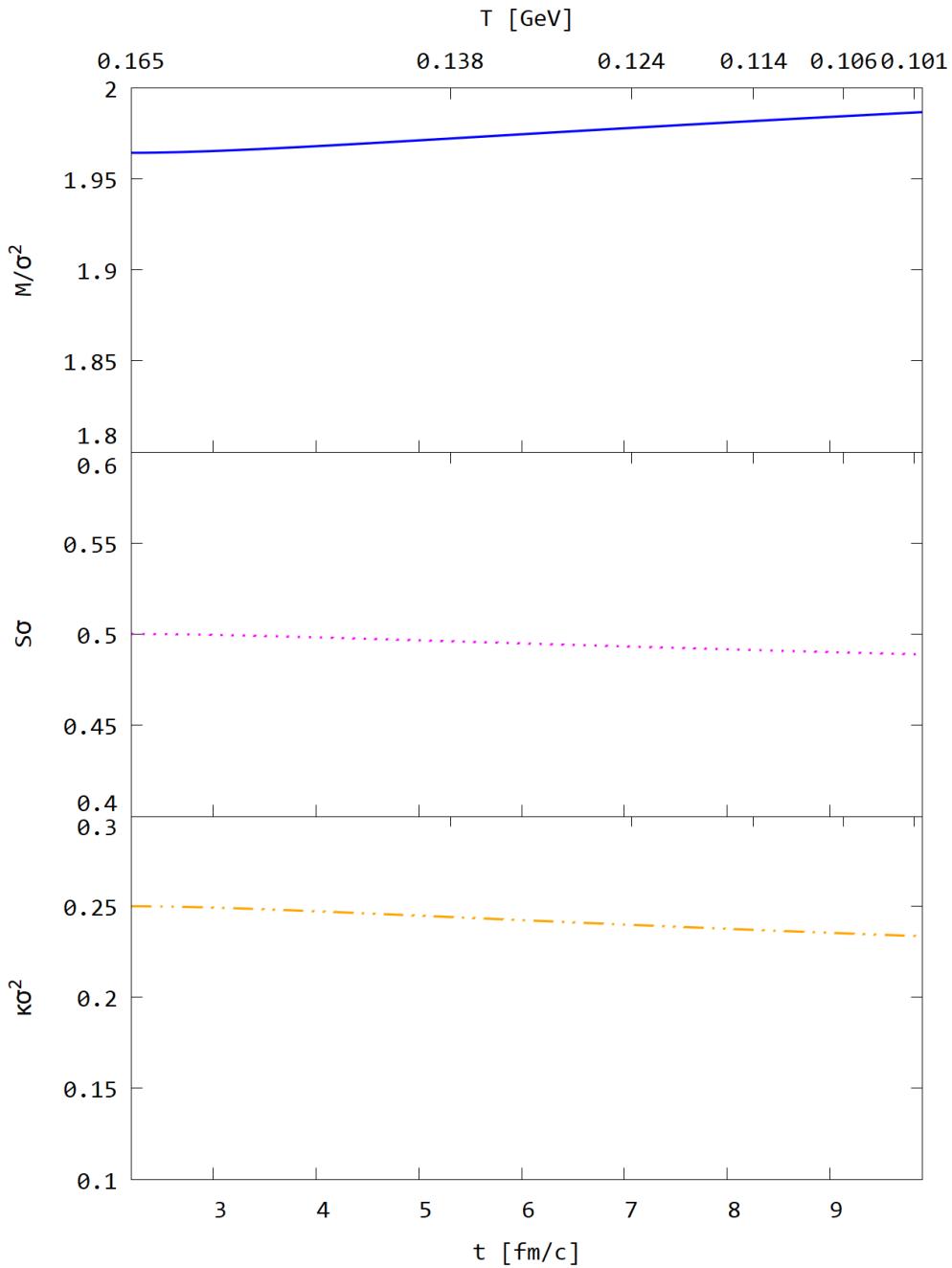


Obrázek 8.1: Závislost  $M/\sigma^2$ ,  $S\sigma$  a  $\kappa\sigma^2$  na energii srážky  $\sqrt{s_{NN}}$ . [40].

### 8.3 Výsledky

Na Obr. 8.2 jsou zobrazeny poměry  $M/\sigma^2$ ,  $S\sigma$ ,  $\kappa\sigma^2$  v závislosti na klesající teplotě.

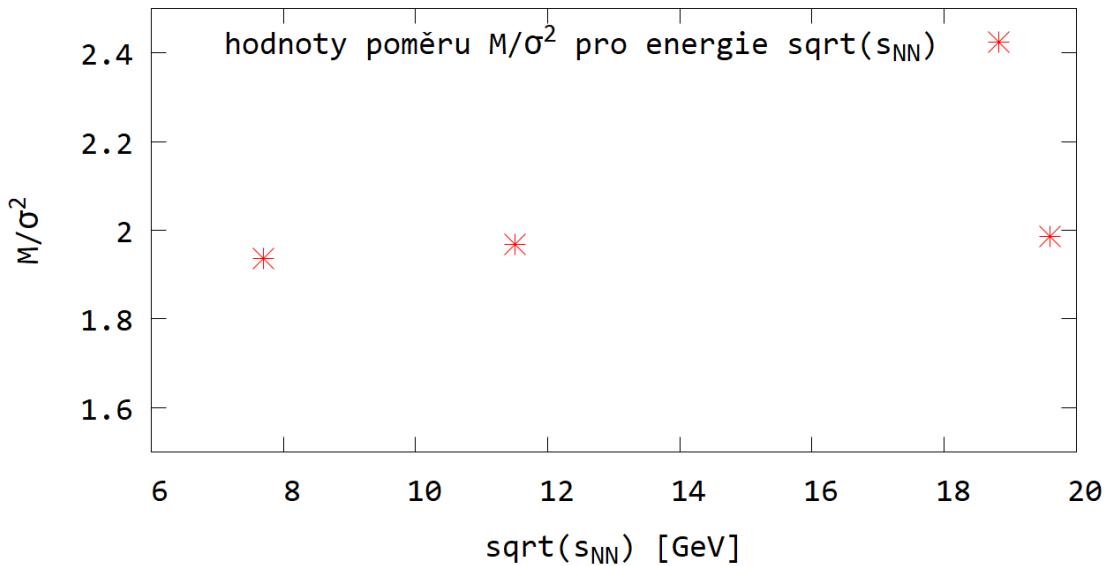
Na Obr. 8.3 je zobrazen poměr  $M/\sigma^2$ , na Obr. 8.4 je poměr  $S\sigma$  a na Obr. 8.5 je poměr  $\kappa\sigma^2$  pro energie srážky  $\sqrt{s_{NN}} = 7, 7 \text{ GeV}, 11, 5 \text{ GeV}, 19, 6 \text{ GeV}$ . Při těchto energiích jsou poměry měřeny na experimentu STAR.



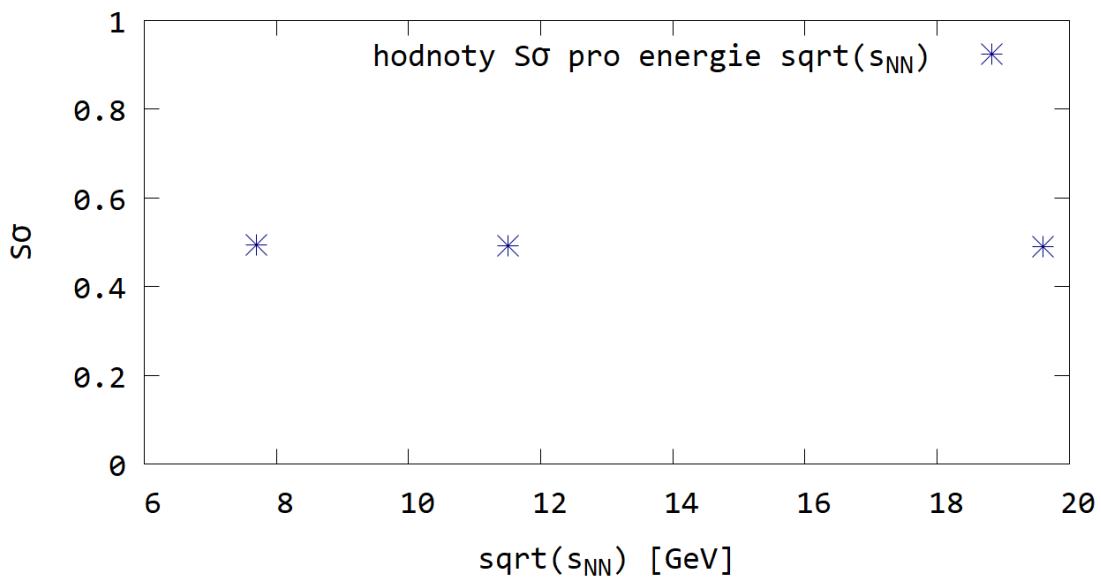
Obrázek 8.2: Závislost poměrů  $M/\sigma^2$ ,  $S\sigma$ ,  $\kappa\sigma^2$  na klesající teplotě.

Ze závislostí jednotlivých poměrů na energii srážky  $\sqrt{s_{NN}}$  vidíme, že náš model není schopen popsat veškeré efekty, které data ovlivňují a které pozorujeme. Hlavním problémem srovnání s experimentálními daty je fakt, že nevíme, jak vypadá rozdělení částic v době che-

## 8. POROVNÁNÍ VÝSLEDKŮ S EXPERIMENTÁLNÍMI DATY

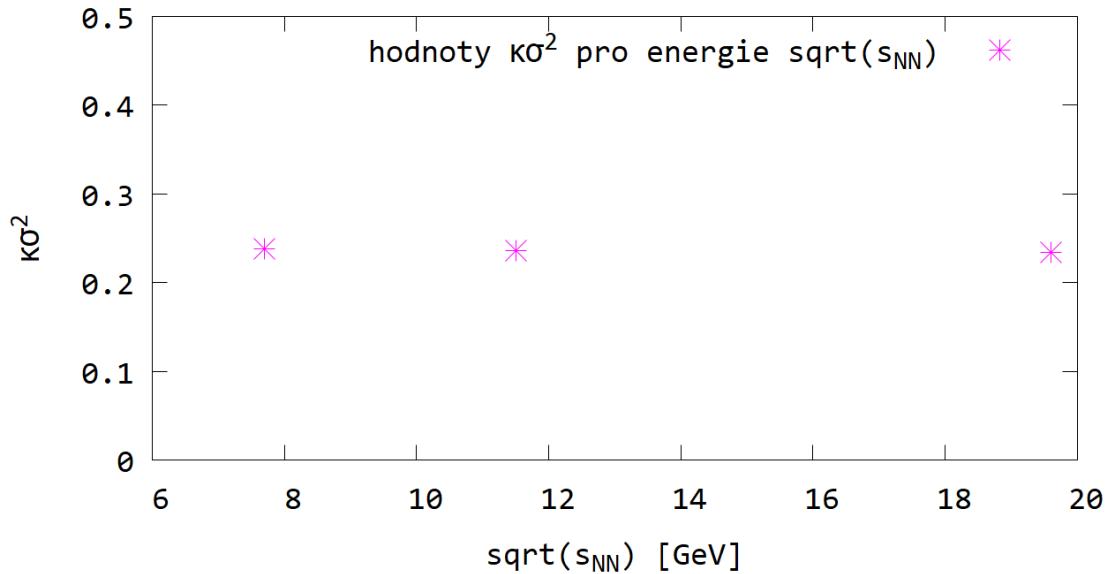


Obrázek 8.3: Závislost  $M/\sigma^2$  na energii srážky  $\sqrt{s_{NN}}$ .



Obrázek 8.4: Závislost  $S\sigma$  na energii srážky  $\sqrt{s_{NN}}$ .

mického freeze-outu a tudíž nevíme, s jakým rozdelením máme naše simulace spustit. Proto jsme je rozhodli spustit simulace s jednoduchým Poissonovským rozdelením počtu částic. Dále



Obrázek 8.5: Závislost  $\kappa\sigma^2$  na energii srážky  $\sqrt{s_{NN}}$ .

$\sqrt{s_{NN}}$ [GeV]	$N_n$	$N_{\pi^+}$	$N_{K^+}$
7, 7	24	35	21
11, 5	30	41	24,99
19, 6	37	48	29,56

Tabulka 8.2: Počty jednotlivých druhů částic pro různé energie srážky  $\sqrt{s_{NN}}$ , které byly použity pro simulace.

je vidět, že pokud bychom řídící rovnici, kterou k simulacím využíváme, spustili tak, abychom dostali počty neutronů a pionů dané tabulkou 8.1, potom je zároveň vyprodukováno mnohem více kaonů, než kolik jich je produkováno v datech. Z toho vyplývá, že nám na počátku vývoje v době chemického freeze-outu stačí nastavit mnohem menší počty neutronů a pionů tak, abychom v době kinetického freeze-outu měli počet kaonů srovnatelný s daty, což je vidět z tabulky 8.2.

Dalším cílem tedy bude předělat řídící rovnici tak, abychom ji mohli pustit v čase pozpátku. Ze získaných hodnot se potom pokusíme určit počáteční rozdělení částic a s tímto získaným rozdělením spustíme naše simulace.

## 8. POROVNÁNÍ VÝSLEDKŮ S EXPERIMENTÁLNÍMI DATY

# Závěr

Motivací této diplomové práce je pozorování, že celkové pozorované multiplicity jednotlivých druhů častic z ultrarelativistických srážek těžkých iontů souhlasí se statistickým modelem nad 160 MeV. Na druhé straně je možné teplotu fázového přechodu stanovit tak, že se měří vyšší momenty (druhý, třetí a čtvrtý) rozdelení multiplicit protonů a ty se potom porovnávají s výsledky pro susceptibility baryonového čísla, které máme z QCD na mřížce. Tímto způsobem můžeme najít teploty, při kterých se teoretické a experimentální výsledky shodují. Problém je v tom, že fluktuace počtu baryonů obvykle vedou k zdánlivě nižší teplotě fázového přechodu než zkoumání počtu častic. Naše simulace s postupným poklesem teploty pro reakce produkující podivnost ukazují, že to tak může být proto, že vyšší momenty zdánlivě ukazují jinou teplotu, než při jakém systém opravdu máme, protože nedosahují rovnovážné hodnoty.

V první kapitole jsme uvedli základní poznatky o ultrarelativistických srážkách těžkých iontů, tj. o procesu produkce častic, o času termalizace, hydrodynamické expanzi, chemickém a kinetickém vymrznutí. Dále jsme se zaměřili na základní vlastnosti kvark-gluonového plazmatu a kvantové chromodynamiky. Ve druhé kapitole je popsáno, co víme o fázovém diagramu QCD, jak se hledá jeho struktura a jak se hledá poloha kritického bodu. Ve třetí kapitole je uvedena rovnice pro rozdelení multiplicit, řídící rovnice a je zaveden pojem generující funkce. S pomocí generující funkce jsme odvodili rovnovážné řešení řídící rovnice (Příloha B) a následně rovnovážné hodnoty faktoriálních momentů (Příloha C). Řídící rovnici jsme následně řešili numericky. Ve čtvrté kapitole jsme do řídící rovnice zavedli závislost na reálném čase. V takovém to případě je nutné řešit řídící rovnici pro konkrétní reakci. Vybrali jsme reakci, ve které se produkuje podivnost  $\pi + N \rightarrow \Lambda + K$ . Zavedením konkrétních účinných průřezů (resp. jejich tepelných průměrů) vznikla v řídící rovnici přímá závislost na teplotě. Z časového vývoje řídící rovnice pro fixní hodnotu kinetické teploty jsme určili časy termalizace jednotlivých momentů. Díky závislosti na teplotě jsme mohli studovat, jak se budou momenty chovat při postupné změně teploty. Došli jsme k závěru, že po snížení teploty (v ne-rovnovážném stavu) se vyšší faktoriální momenty více liší od svých rovnovážných hodnot než momenty nižší. Musíme být tedy obezřetní, pokud chceme zpětně určovat teplotu systému z chování vyšších momentů pocházejících z rychle se ochlazujícího fireballu. V páté kapitole jsme se zaměřili na centrální momenty a také na jejich kombinace jako je koeficient šikmosti

a koeficient špičatosti, které nás zajímají při zpracování experimentálních dat. Odvodili jsme rovnovážné hodnoty centrálních momentů a jejich kombinací a vykreslili jsme jejich časový vývoj. Dále jsme se v této kapitole podívali na poměry, které jsou nezávislé na objemu a tudíž se snadněji porovnávají s experimentálními daty. Zjistili jsme, že chování kombinací těchto centrálních momentů závisí na tom, jakou kombinaci momentů si zvolíme. Důležité je zde také zmínit, že naše výsledky jsou spíše kvalitativní, protože uvažujeme pouze jeden druh reakce, zatímco ve skutečném fireballu probíhá mnohem více druhů reakcí. Proto jsme se v šesté a sedmé kapitole zaměřili na studium fluktuací baryonového čísla resp. počtu protonů skrze reakci  $\pi + N \rightarrow \Delta \rightarrow \pi + N$ . Fluktuace baryonového čísla nás zajímají proto, že je měříme na experimentech. V šesté kapitole jsme zkoumali časový vývoj řídící rovnice pro jednu vybranou reakci  $p + \pi^- \rightarrow \Delta^0 \rightarrow \pi^0 + n$ . Zjistili jsme, že se při postupném snižování teploty faktoriální momenty pro tuto reakci nemění v čase. To znamená, že nedochází ke změně fluktuací v protonovém ani neutronovém čísle. Ke stejnemu závěru došli i M. Kitazawa a M. Asakawa v článcích [34], [35]. Zjistili jsme, že mechanismus, který ke studiu fluktuací používáme, nemá na fluktuace protonů vliv. V sedmé kapitole je odvozena řídící rovnice pro více sofistikovaný a komplikovanější systém dvojice reakcí, kde jeden z produktů první reakce je zároveň reaktantem druhé reakce. Zjistili jsme, že ani pro dvojici reakcí  $p + \pi^- \rightarrow \Delta^0 \rightarrow \pi^0 + n$ ,  $p + \pi^0 \rightarrow \Delta^+ \rightarrow \pi^+ + n$  se faktoriální momenty nemění pro postupnou změnu teploty. Tudíž můžeme říci, že je bezpečné určovat teplotu vymrznutí pomocí studia protonových momentů. V osmé kapitole jsme se pokusili vysvětlit chování poměrů centrálních momentů, které byly naměřené na experimentu RHIC. Ukázalo se, že náš model není schopný vysvětlit efekty, které v datech pozorujeme. Problémem při srovnání daty byl hlavně fakt, že nevíme, jak fluktuace vypadají v době chemického freeze-outu, a proto naše simulace nemůžeme pustit s takovým počátečním rozdelením částic, které by odpovídalo naměřeným datům. Dalším cílem tedy bude předělat řídící rovnici tak, abyhom ji mohli pustit pozpátku. Ze získaných hodnot potom zkusíme určit počáteční rozdelení částic a s tímto rozdelením spustíme naše simulace.

## A. PŘÍLOHA: VZTAHY PRO MODIFIKOVANÉ BESSELOVY FUNKCE

### A Příloha: Vztahy pro modifikované Besselovy funkce

Obecné vztahy pro modifikované Besselovy funkce mají tvar

$$I_0(z) = \frac{1}{\pi} \int_0^\pi e^{\pm z \cos \theta} d\theta = \frac{1}{\pi} \int_0^\pi \cosh(z \cos \theta) d\theta, \quad (\text{A.1})$$

$$I_n(z) = \frac{1}{\pi} \int_0^\pi e^{z \cos \theta} \cos(n\theta) d\theta \quad (\text{A.2})$$

Derivace funkce  $I_0(z)$  je dána vztahem

$$I'_0(z) = \frac{1}{\pi} \int_0^\pi \cos \theta e^{z \cos \theta} d\theta. \quad (\text{A.3})$$

Vidíme, že pravá strana vztahu (A.3) je pro  $n = 1$  stejná jako pravá strana vztahu (A.2) a tudíž pro modifikovanou Besselovu funkci  $I_1(z)$  platí

$$I_1(z) = I'_0(z). \quad (\text{A.4})$$

Derivace funkce  $I_1(z)$  je dána vztahem

$$I'_1(z) = \frac{1}{\pi} \int_0^\pi e^{z \cos \theta} \cos^2 \theta d\theta. \quad (\text{A.5})$$

Z rovnice (A.2) dostáváme pro  $n = 2$  vztah pro modifikovanou Besselovu funkci  $I_2(z)$

$$I_2(z) = \frac{1}{\pi} \int_0^\pi e^{z \cos \theta} \cos(2\theta) d\theta. \quad (\text{A.6})$$

Při využití vztahů

$$\cos(2\theta) = \cos^2 \theta - \sin^2 \theta, \quad (\text{A.7})$$

$$\sin^2 \theta = 1 - \cos^2 \theta \quad (\text{A.8})$$

dostaneme

$$\begin{aligned}
I_2(z) &= \frac{1}{\pi} \int_0^\pi e^{z \cos \theta} \cos^2 \theta d\theta - \frac{1}{\pi} \int_0^\pi e^{z \cos \theta} \sin^2 \theta d\theta \\
&= \frac{1}{\pi} \int_0^\pi e^{z \cos \theta} \cos^2 \theta d\theta - \frac{1}{\pi} \int_0^\pi e^{z \cos \theta} (1 - \cos^2 \theta) d\theta \\
&= \frac{2}{\pi} \int_0^\pi e^{z \cos \theta} \cos^2 \theta d\theta - \frac{1}{\pi} \int_0^\pi e^{z \cos \theta} d\theta = 2I'_1(z) - I_0(z). \quad (\text{A.9})
\end{aligned}$$

Potom

$$I'_1(z) = \frac{1}{2} I_2(z) + \frac{1}{2} I_0(z). \quad (\text{A.10})$$

Ze vztahu (A.2) dostaneme pro  $n = 3$  modifikovanou Besselovu funkci  $I_3(z)$  ve tvaru

$$I_3(z) = \frac{1}{\pi} \int_0^\pi e^{z \cos \theta} \cos(3\theta) d\theta. \quad (\text{A.11})$$

Pro úpravu tohtoto vztahu budeme potřebovat výraz

$$\cos(3\theta) = 4 \cos^3 \theta - 3 \cos \theta \quad (\text{A.12})$$

a derivaci modifikované Besselovy funkce  $I_2(z)$

$$I'_2(z) = \frac{2}{\pi} \int_0^\pi e^{z \cos \theta} \cos^3 \theta d\theta - \frac{1}{\pi} \int_0^\pi e^{z \cos \theta} \cos \theta d\theta. \quad (\text{A.13})$$

Úpravou vztahu (A.11) popmocí vztahů (A.12) a (A.13) dostaneme

$$I_3(z) = \frac{4}{\pi} \int_0^\pi e^{z \cos \theta} \cos^3 \theta d\theta - \frac{3}{\pi} \int_0^\pi e^{z \cos \theta} \cos \theta d\theta = 2I'_2(z) - I_1(z). \quad (\text{A.14})$$

Ze vztahu (A.14) potom získáme derivaci modifikované Besselovy funkce  $I'_2(z)$

$$I'_2(z) = \frac{1}{2} I_3(z) + \frac{1}{2} I_1(z). \quad (\text{A.15})$$

Ze vztahu (A.2) dostaneme pro  $n = 4$  modifikovanou Besselovu funkci  $I_4(z)$  ve tvaru

$$I_4(z) = \frac{1}{\pi} \int_0^\pi e^{z \cos \theta} \cos(4\theta) d\theta. \quad (\text{A.16})$$

Pro úpravu vztahu (A.16) využijeme vztah

## A. PŘÍLOHA: VZTAHY PRO MODIFIKOVANÉ BESSELOVY FUNKCE

$$\begin{aligned}\cos(4\theta) &= \sin^4 \theta - 6 \cos^2 \theta \sin^2 \theta + \cos^4 \theta = (1 - \cos^2 \theta)^2 - 6 \cos^2 \theta (1 - \cos^2 \theta) + \cos^4 \theta \\ &= 1 - 2 \cos^2 \theta + 2 \cos^4 \theta - 6 \cos^2 \theta + 6 \cos^4 \theta = 1 - 8 \cos^2 \theta + 8 \cos^4 \theta\end{aligned}\quad (\text{A.17})$$

a derivaci modifikované Besselovy funkce  $I_3(z)$

$$I'_3(z) = \frac{4}{\pi} \int_0^\pi e^{z \cos \theta} \cos^4 \theta d\theta - \frac{3}{\pi} \int_0^\pi e^{z \cos \theta} \cos^2 \theta d\theta. \quad (\text{A.18})$$

Ze vztahů (A.16) dostaneme pomocí vztahů (A.17) a (A.18) výraz

$$I_4(z) = \frac{1}{\pi} \int_0^\pi e^{z \cos \theta} d\theta - \frac{8}{\pi} \int_0^\pi e^{z \cos \theta} \cos^2 \theta d\theta + \frac{8}{\pi} \int_0^\pi e^{z \cos \theta} \cos^4 \theta d\theta = 2I'_3(z) - I_2(z). \quad (\text{A.19})$$

Potom ze vztahu (A.19) dostaneme vztah pro derivaci modifikované Besselovy funkce  $I_3(z)$

$$I'_3(z) = \frac{1}{2} I_4(z) + \frac{1}{2} I_2(z). \quad (\text{A.20})$$

Pro odvození faktoriálních momentů v rovnovážném stavu v kapitole 3.7 se nám budou hudit vztahy

$$I_1(z) = I'_0(z), \quad (\text{A.21})$$

$$I'_1(z) = \frac{1}{2} I_2(z) + \frac{1}{2} I_0(z), \quad (\text{A.22})$$

$$I'_2(z) = \frac{1}{2} I_3(z) + \frac{1}{2} I_1(z), \quad (\text{A.23})$$

$$I'_3(z) = \frac{1}{2} I_4(z) + \frac{1}{2} I_2(z). \quad (\text{A.24})$$

Vztahy pro modifikované Besselovy funkce (A.1), (A.2) a (A.4) byly převzaty z [26].



B. PŘÍLOHA: ODVOZENÍ ROVNOVÁŽNÉHO ŘEŠENÍ PRO DVOJICI ŘÍDÍCÍCH ROVNIC

## B Příloha: Odvození rovnovážného řešení pro dvojici řídících rovnic

### B.1 Odvození rovnovážného řešení pro jednu řídící rovnice

Řídící rovnice pro reakci  $a_1 + a_2 \rightarrow b_1 + b_2$ , kde  $a \neq b$  má tvar

$$\frac{dP_n}{dt} = \frac{G}{V} \langle N_{a_1} \rangle \langle N_{a_2} \rangle [P_{n-1}(t) - P_n(t)] - \frac{L}{V} [n^2 P_n(t) - (n+1)^2 P_{n+1}(t)]. \quad (\text{B.1})$$

Rovnici (B.1) přenásobíme podílem  $\frac{V}{L}$  a po upravení máme

$$\frac{dP_n}{dt} = \frac{L}{V} \epsilon [P_{n-1} - P_n] - \frac{L}{V} [n^2 P_n - (n+1)^2 P_{n+1}] \quad (\text{B.2})$$

Po vynásobení rovnice (B.2)  $x^n$  a sumování přes  $n$  dostaneme

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{dP_n}{dt} x^n = \frac{L}{V} \epsilon [P_{n-1} x^n - P_n x^n] - \frac{L}{V} [n^2 P_n x^n - (n+1)^2 P_{n+1} x^n] \quad (\text{B.3})$$

Nyní rovnici v několika krocích upravíme do tvaru, kdy bude možné použít generující funkci a její derivace

$$g(x, t) = \sum_{n=0}^{\infty} x^n P_n(t), \quad (\text{B.4})$$

$$g'(x, t) = \sum_{n=0}^{\infty} nx^{n-1} P_n(t) = \frac{1}{x} \sum_{n=0}^{\infty} nx^n p_n(t), \quad (\text{B.5})$$

$$g''(x, t) = \sum_{n=0}^{\infty} n(n-1)x^{n-2} P_n(t) = \sum_{n=0}^{\infty} (n^2 - n)x^{n-2} P_n(t) \quad (\text{B.6})$$

$$= \frac{1}{x^2} \sum_{n=0}^{\infty} n^2 x^n P_n(t) - \frac{1}{x^2} \sum_{n=0}^{\infty} nx^n P_n(t). \quad (\text{B.7})$$

Ze vztahu (B.5) vyplývá rovnost

$$\sum_{n=0}^{\infty} nx^n P_n(t) = x g'(x, t) \quad (\text{B.8})$$

a ze vztahu (B.6) potom vyplývá

$$\sum_{n=0}^{\infty} n^2 x^n P_n(t) = x^2 g''(x, t) + x g'(x, t). \quad (\text{B.9})$$

Rovnici (B.3) budeme tedy postupně upravovat

$$\frac{\partial g(x, t)}{\partial t} = \frac{L}{V} \epsilon [x^n P_{n-1}(t) - g(x, t)] - \frac{L}{V} [n^2 x^n P_n(t) - (n+1)^2 x^n P_{n+1}(t)] \quad (\text{B.10})$$

$$= \frac{L}{V} \epsilon [x x^{n-1} P_{n-1}(t) - g(x, t)] - \frac{L}{V} [n^2 x^n P_n(t) - \frac{1}{x} (n+1)^2 x^{n+1} P_{n+1}(t)] \quad (\text{B.11})$$

$$= \frac{L}{V} [x g''(x, t) + g'(x, t) - \epsilon g(x, t) - x^2 g''(x, t) - x g'(x, t) + \epsilon x g(x, t)] \quad (\text{B.12})$$

$$= \frac{L}{V} [-(1-x) \epsilon g(x, t) + x(1-x) g''(x, t) + (1-x) g'(x, t)] \quad (\text{B.13})$$

$$= \frac{L}{V} (1-x) [x g''(x, t) + g'(x, t) - \epsilon g(x, t)]. \quad (\text{B.14})$$

Pro rovnovážné řešení pak dostáváme tvar

$$\frac{\partial g(x, t)}{\partial t} = 0 = \frac{L}{V} [x g''(x, t) + g'(x, t) - \epsilon g(x, t)], \quad (\text{B.15})$$

po upravě získáme obyčejnou diferenciální rovnici ve tvaru

$$x g''_{eq}(x, t) + g'_{eq}(x, t) - \epsilon g_{eq}(x, t) = 0. \quad (\text{B.16})$$

Řešením rovnice (B.16), které je regulérní v  $x = 0$  ( $g(0) = P_0 \leq 1$ ) je funkce

$$g_{eq}(x, t) = \frac{I_0(2\sqrt{\epsilon x})}{I_0(2\sqrt{\epsilon})}. \quad (\text{B.17})$$

## B.2 Odvození rovnovážného řešení pro dvojici řídících rovnic

Budeme uvažovat tyto dvě reakce



Dvojici reakcí si přepíšeme schematicky jako

## B. PŘÍLOHA: ODVOZENÍ ROVNOVÁŽNÉHO ŘEŠENÍ PRO DVOJICI ŘÍDÍCÍCH ROVNIC

$$A + B \rightleftharpoons C + D, \quad (\text{B.20})$$

$$A + D \rightleftharpoons C + E, \quad (\text{B.21})$$

kde  $A = \text{proton}$ ,  $B = \pi^-$ ,  $C = \text{neutron}$ ,  $D = \pi^0$  a  $E = \pi^+$ .

Budeme-li sledovat časový vývoj počtu protonů, pak dostaneme řídící rovnici ve tvaru

$$\begin{aligned} dP_a(t)/dt &= k < N_{\pi^-} > [(a+1)P_{a+1}(t) - aP_a(t)] \\ &+ l < N_{\pi^0} > [(\gamma + \alpha - a + 1)P_{a-1}(t) - (\gamma + \alpha - a)P_a(t)] \\ &+ m < N_{\pi^0} > [(a+1)P_{a+1}(t) - aP_a(t)] \\ &+ n < N_{\pi^+} > [(\gamma + \alpha - a + 1)P_{a-1}(t) - (\gamma + \alpha - a)P_a(t)], \end{aligned} \quad (\text{B.22})$$

kde  $G$ , resp.  $L$  je rychlostní parametr pro rovnici (B.20) pro směr  $\rightarrow$ , resp. pro  $\leftarrow$  a  $M$ , resp.  $N$  je rychlostní parametr pro rovnici (B.21) pro směr  $\rightarrow$ , resp. pro směr  $\leftarrow$ .

Dále si zavedeme označení

$$< N_{\pi^-} > = < N_{\pi^+} > = < N_{\pi^0} > = N_\pi. \quad (\text{B.23})$$

$$\gamma + \alpha = N_N, \quad (\text{B.24})$$

kde  $N_N$  je počet nukleonů.

Po vynásobení rovnice (B.22)  $x^n$  a sumování přes  $n$  dostaneme

$$\begin{aligned} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{dP_n}{dt} x^n &= GN_\pi [(n+1)P_{n+1} - nP_n]x^n \\ &+ LN_\pi [(\gamma + \alpha)P_{n-1} - (n-1)P_{n-1} - (\gamma + \alpha)P_n + nP_n]x^n \\ &+ MN_\pi [(n+1)P_{n+1} - nP_n]x^n \\ &+ NN_\pi [(\gamma + \alpha)P_{n-1} - (n-1)P_{n-1} - (\gamma + \alpha)P_n + nP_n]x^n \end{aligned} \quad (\text{B.25})$$

Rovnici (B.25) budeme tedy postupně upravovat

$$\begin{aligned} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{dP_n}{dt} x^n &= GN_\pi \left[ \frac{1}{x} (n+1)x^{n+1}P_{n+1} - nx^n P_n \right] \\ &+ LN_\pi [N_N x x^{n-1} P_{n-1} - (n-1)x x^{n-1} P_{n-1} - N_N x^n P_n + n x^n P_n] \\ &+ MN_\pi \left[ \frac{1}{x} (n+1)x^{n+1}P_{n+1} - nx^n P_n \right] \\ &+ NN_\pi [N_N x x^{n-1} P_{n-1} - (n-1)x x^{n-1} P_{n-1} - N_N x^n P_n + n x^n P_n]. \end{aligned} \quad (\text{B.26})$$

Nyní za použití vztahů (B.4), (B.8) a (B.9) upravíme rovnici (B.26) do tvaru

$$\begin{aligned} \frac{\partial g(x, t)}{\partial t} &= GN_\pi[g'(x, t) - xg'(x, t)] + LN_\pi[xN_N g(x, t) - x^2 g'(x, t) - N_N g(x, t) + xg'(x, t)] \\ &\quad + MN_\pi[g'(x, t) - xg'(x, t)] + NN_\pi[xN_N g(x, t) - x^2 g'(x, t) - N_N g(x, t) + xg'(x, t)]. \end{aligned} \quad (\text{B.27})$$

Po další úpravě rovnice (B.27) dostaneme

$$\begin{aligned} \frac{\partial g(x, t)}{\partial t} &= (1-x)[GN_\pi g'(x, t) + LN_\pi[xg'(x, t) - N_N g(x, t)] \\ &\quad + MN_\pi g'(x, t) + NN_\pi[xg'(x, t) - N_N g(x, t)]] \\ &= (1-x)[Ag'(x, t) + B[xg'(x, t) - N_N g(x, t)]], \end{aligned} \quad (\text{B.28})$$

kde

$$A = GN_\pi + MN_\pi, \quad (\text{B.29})$$

$$B = LN_\pi + NN_\pi, \quad (\text{B.30})$$

Jelikož hledáme rovnovážné řešení rovnice (B.28), řešíme vlastně následující diferenciální rovnici

$$0 = (A + Bx)g'_{eq}(x, t) - N_N B g_{eq}(x, t), \quad (\text{B.31})$$

kde  $N_N$  je počet nukleonů (součet počtu protonů a neutronů).

Řešením rovnice (B.31) je

$$g_{eq}(x, t) = (A + Bx)^{N_N} C_1, \quad (\text{B.32})$$

kde  $C_1$  je konstanta z integrace.

## C. PŘÍLOHA: ODVOZENÍ ROVNOVÁŽNÝCH HODNOT FAKTORIÁLNÍCH MOMENTŮ

### C Příloha: Odvození rovnovážných hodnot faktoriálních momentů

Abychom získali rovnovážnou hodnotu 1. faktoriálního momentu (normy)  $\langle N \rangle_{eq}$ , musíme zderivovat funkci (3.27). První derivace funkce (3.27) má tvar

$$g'_{eq}(x) = \sqrt{\varepsilon} \frac{1}{\sqrt{x}} \frac{I'_0(2\sqrt{\varepsilon}x)}{I_0(2\sqrt{\varepsilon})}. \quad (\text{C.1})$$

Po použití vztahu (A.21) odvozeného v Příloze A pro derivaci modifikované Besselovy funkce  $I_0$

$$I'_0(z) = I_1(z) \quad (\text{C.2})$$

dostaneme vztah pro 1. faktoriální moment (střední hodnotu  $\langle N \rangle$ ) ve tvaru

$$\langle N \rangle_{eq} = g'_{eq}(1) = \sqrt{\varepsilon} \frac{I'_0(2\sqrt{\varepsilon})}{I_0(2\sqrt{\varepsilon})} = \sqrt{\varepsilon} \frac{I_1(2\sqrt{\varepsilon})}{I_0(2\sqrt{\varepsilon})}. \quad (\text{C.3})$$

Druhá derivace generující funkce (3.27) je rovna

$$\begin{aligned} g''_{eq}(x) &= -\frac{1}{2} \sqrt{\varepsilon} x^{-3/2} \frac{I'_0(2\sqrt{\varepsilon}x)}{I_0(2\sqrt{\varepsilon})} + \sqrt{\varepsilon} \frac{1}{\sqrt{x}} \sqrt{\varepsilon} \frac{1}{\sqrt{x}} \frac{I''_0(2\sqrt{\varepsilon}x)}{I_0(2\sqrt{\varepsilon})} = \\ &\quad -\frac{1}{2} \sqrt{\varepsilon} x^{-3/2} \frac{I_1(2\sqrt{\varepsilon}x)}{I_0(2\sqrt{\varepsilon})} + \varepsilon \frac{1}{x} \frac{I'_1(2\sqrt{\varepsilon}x)}{I_0(2\sqrt{\varepsilon})}. \end{aligned} \quad (\text{C.4})$$

Po použití vztahu (A.22) odvozeného v Příloze A pro derivaci modifikované Besselovy funkce  $I_1$

$$I'_1(z) = \frac{1}{2}(I_2(z) + I_0(z)) \quad (\text{C.5})$$

dostaneme vztah pro 2. faktoriální moment (střední hodnotu  $\langle N(N-1) \rangle$ ) ve tvaru

$$\langle N(N-1) \rangle_{eq} = g''_{eq}(1) = -\frac{1}{2} \sqrt{\varepsilon} \frac{I_1(2\sqrt{\varepsilon})}{I_0(2\sqrt{\varepsilon})} + \frac{1}{2} \varepsilon \frac{I_2(2\sqrt{\varepsilon}) + I_0(2\sqrt{\varepsilon})}{I_0(2\sqrt{\varepsilon})}. \quad (\text{C.6})$$

Třetí derivace generující funkce (3.27) je rovna

$$\begin{aligned}
g_{eq}'''(x) &= -\frac{1}{2}\sqrt{\varepsilon}\left(-\frac{3}{2}\right)x^{-5/2}\frac{I_0'(2\sqrt{\varepsilon}x)}{I_0(2\sqrt{\varepsilon})} - \frac{1}{2}\sqrt{\varepsilon}x^{-3/2}\sqrt{\varepsilon}\frac{1}{\sqrt{x}}\frac{I_1'(2\sqrt{\varepsilon}x)}{I_0(2\sqrt{\varepsilon})} \\
&\quad + \varepsilon\left(-\frac{1}{x^2}\right)\frac{I_2(2\sqrt{\varepsilon}x) + I_0(2\sqrt{\varepsilon}x)}{2I_0(2\sqrt{\varepsilon})} + \varepsilon\frac{1}{x}\sqrt{\varepsilon}\frac{1}{\sqrt{x}}\frac{I_2'(2\sqrt{\varepsilon}x) + I_0'(2\sqrt{\varepsilon}x)}{2I_0(2\sqrt{\varepsilon})} \\
&= \frac{3}{4}\sqrt{\varepsilon}x^{-5/2}\frac{I_1(2\sqrt{\varepsilon}x)}{I_0(2\sqrt{\varepsilon})} - \frac{1}{2}\varepsilon\frac{1}{x^2}\frac{I_0(2\sqrt{\varepsilon}x) + I_2(2\sqrt{\varepsilon}x)}{I_0(2\sqrt{\varepsilon})} \\
&\quad - \varepsilon\left(\frac{1}{x^2}\right)\frac{I_2(2\sqrt{\varepsilon}x) + I_0(2\sqrt{\varepsilon}x)}{2I_0(2\sqrt{\varepsilon})} + \varepsilon^{3/2}x^{-3/2}\frac{I_2'(2\sqrt{\varepsilon}x) + I_1(2\sqrt{\varepsilon}x)}{2I_0(2\sqrt{\varepsilon})}. \quad (\text{C.7})
\end{aligned}$$

Po použití vztahu (A.23) odvozeného v Příloze A pro derivaci modifikované Besselovy funkce  $I_2$

$$I_2'(z) = \frac{1}{2}(I_3(z) + I_1(z)) \quad (\text{C.8})$$

dostaneme vztah pro 3. faktoriální moment (střední hodnotu  $\langle N(N-1)(N-2) \rangle$ ) ve tvaru

$$\begin{aligned}
\langle N(N-1)(N-2) \rangle_{eq} &= g_{eq}'''(1) = \\
&= \frac{3}{4}\sqrt{\varepsilon}\frac{I_1(2\sqrt{\varepsilon})}{I_0(2\sqrt{\varepsilon})} - \frac{1}{2}\varepsilon\frac{I_0(2\sqrt{\varepsilon}) + I_2(2\sqrt{\varepsilon})}{2I_0(2\sqrt{\varepsilon})} - \varepsilon\frac{I_2(2\sqrt{\varepsilon}) + I_0(2\sqrt{\varepsilon})}{2I_0(2\sqrt{\varepsilon})} \\
&\quad + \varepsilon^{3/2}\frac{I_3(2\sqrt{\varepsilon}) + I_1(2\sqrt{\varepsilon})}{4I_0(2\sqrt{\varepsilon})} + \varepsilon^{3/2}\frac{I_1(2\sqrt{\varepsilon})}{2I_0(2\sqrt{\varepsilon})} \\
&= \frac{3}{4}\sqrt{\varepsilon}\frac{I_1(2\sqrt{\varepsilon})}{I_0(2\sqrt{\varepsilon})} - \frac{3}{4}\varepsilon\frac{I_0(2\sqrt{\varepsilon}) + I_2(2\sqrt{\varepsilon})}{I_0(2\sqrt{\varepsilon})} + \varepsilon^{3/2}\frac{I_3(2\sqrt{\varepsilon}) + 3I_1(2\sqrt{\varepsilon})}{4I_0(2\sqrt{\varepsilon})}. \quad (\text{C.9})
\end{aligned}$$

## C. PŘÍLOHA: ODVOZENÍ ROVNOVÁŽNÝCH HODNOT FAKTORIÁLNÍCH MOMENTŮ

Čtvrtá derivace generující funkce (3.27) je rovna

$$\begin{aligned}
g_{eq}^{IV.}(x) &= \frac{3}{4}\sqrt{\varepsilon}\left(-\frac{5}{2}\right)x^{-7/2}\frac{I_1(2\sqrt{\varepsilon}x)}{I_0(2\sqrt{\varepsilon})} + \frac{3}{4}\sqrt{\varepsilon}x^{-5/2}\sqrt{\varepsilon}\frac{1}{\sqrt{x}}\frac{I'_1(2\sqrt{\varepsilon}x)}{I_0(2\sqrt{\varepsilon})} \\
&\quad - \frac{3}{4}\varepsilon\frac{1}{x^2}\sqrt{\varepsilon}\frac{1}{\sqrt{x}}\frac{I'_2(2\sqrt{\varepsilon}x) + I'_0(2\sqrt{\varepsilon}x)}{I_0(2\sqrt{\varepsilon})} - \frac{3}{4}\varepsilon(-2)\frac{1}{x^3}\frac{I_2(2\sqrt{\varepsilon}x) + I_0(2\sqrt{\varepsilon}x)}{I_0(2\sqrt{\varepsilon})} \\
&\quad + \varepsilon^{3/2}\left(-\frac{3}{2}\right)x^{-5/2}\frac{3I_1(2\sqrt{\varepsilon}x) + I_3(2\sqrt{\varepsilon}x)}{4I_0(2\sqrt{\varepsilon})} + \varepsilon^{3/2}x^{-3/2}\sqrt{\varepsilon}\frac{1}{\sqrt{x}}\frac{3I'_1(2\sqrt{\varepsilon}x) + I'_3(2\sqrt{\varepsilon}x)}{4I_0(2\sqrt{\varepsilon})} \\
&= -\frac{15}{8}\sqrt{\varepsilon}x^{-7/2}\frac{I_1(2\sqrt{\varepsilon}x)}{I_0(2\sqrt{\varepsilon})} + \frac{3}{4}\varepsilon\frac{1}{x^3}\frac{I_2(2\sqrt{\varepsilon}x) + I_0(2\sqrt{\varepsilon}x)}{2I_0(2\sqrt{\varepsilon})} - \frac{3}{4}\varepsilon^{3/2}x^{-5/2}\frac{3I_1(2\sqrt{\varepsilon}x) + I_3(2\sqrt{\varepsilon}x)}{2I_0(2\sqrt{\varepsilon})} \\
&\quad + \frac{3}{2}\varepsilon\frac{1}{x^3}\frac{I_2(2\sqrt{\varepsilon}x) + I_0(2\sqrt{\varepsilon}x)}{I_0(2\sqrt{\varepsilon})} - \frac{3}{2}\varepsilon^{3/2}x^{-5/2}\frac{3I_1(2\sqrt{\varepsilon}x) + I_3(2\sqrt{\varepsilon}x)}{4I_0(2\sqrt{\varepsilon})} \\
&\quad + \varepsilon^2\frac{1}{x^2}\frac{3I_0(2\sqrt{\varepsilon}x) + 3I_2(2\sqrt{\varepsilon}x) + 2I'_3(2\sqrt{\varepsilon}x)}{8I_0(2\sqrt{\varepsilon})} = -\frac{15}{8}\sqrt{\varepsilon}x^{-7/2}\frac{I_1(2\sqrt{\varepsilon}x)}{I_0(2\sqrt{\varepsilon})} \\
&\quad + \frac{15}{8}\varepsilon\frac{1}{x^3}\frac{I_2(2\sqrt{\varepsilon}x) + I_0(2\sqrt{\varepsilon}x)}{I_0(2\sqrt{\varepsilon})} - \frac{3}{4}\varepsilon^{3/2}x^{-5/2}\frac{3I_1(2\sqrt{\varepsilon}x) + I_3(2\sqrt{\varepsilon}x)}{I_0(2\sqrt{\varepsilon})} \\
&\quad + \frac{1}{4}\varepsilon^2\frac{1}{x^2}\frac{3I_0(2\sqrt{\varepsilon}x) + 3I_2(2\sqrt{\varepsilon}x) + 2I'_3(2\sqrt{\varepsilon}x)}{2I_0(2\sqrt{\varepsilon})}. \quad (\text{C.10})
\end{aligned}$$

Po použití vztahu (A.24) odvozeného v Příloze A pro derivaci modifikované Besselovy funkce  $I_3$

$$I'_3(z) = \frac{1}{2}(I_4(z) + I_2(z)) \quad (\text{C.11})$$

dostaneme vztah pro 4. faktoriální moment (střední hodnotu  $\langle N(N-1)(N-2)(N-3) \rangle$ ) ve tvaru

$$\begin{aligned}
\langle N(N-1)(N-2)(N-3) \rangle_{eq} &= g_{eq}^{IV.}(1) = -\frac{15}{8}\sqrt{\varepsilon}\frac{I_1(2\sqrt{\varepsilon})}{I_0(2\sqrt{\varepsilon})} + \frac{15}{8}\varepsilon\frac{I_2(2\sqrt{\varepsilon}) + I_0(2\sqrt{\varepsilon})}{I_0(2\sqrt{\varepsilon})} \\
&\quad - \frac{3}{4}\varepsilon^{3/2}\frac{3I_1(2\sqrt{\varepsilon}) + I_3(2\sqrt{\varepsilon})}{I_0(2\sqrt{\varepsilon})} + \frac{1}{4}\varepsilon^2\frac{3I_0(2\sqrt{\varepsilon}) + 4I_2(2\sqrt{\varepsilon}) + I_4(2\sqrt{\varepsilon})}{2I_0(2\sqrt{\varepsilon})}. \quad (\text{C.12})
\end{aligned}$$



D. PŘÍLOHA: TABULKY ZDÁNLIVÝCH TEPLIT A ZDÁNLIVÝCH ČASŮ  
VYMRZNUTÍ PRO FAKTORIÁLNÍ A CENTRÁLNÍ MOMENTY

## D Příloha: Tabulky zdánlivých teplot a zdánlivých časů vymrznutí pro faktoriální a centrální momenty

Tabulky pro faktoriální momenty:

Moment	$\langle N \rangle$	2. faktoriální moment	3. faktoriální moment	4. faktoriální moment
$t[\text{fm}/\text{c}]$	2,7352	3,2720	3,3572	3,4506
$T[\text{GeV}]$	0,1535	0,1446	0,1433	0,1420

Tabulka D.1: Hodnoty zdánlivého času  $t$  a zdánlivé teploty vymrznutí  $T$  pro 30 krát větší účinný průřez.

Moment	$\langle N \rangle$	2. faktoriální moment	3. faktoriální moment	4. faktoriální moment
$t[\text{fm}/\text{c}]$	3,8134	5,0458	5,2878	5,5520
$T[\text{GeV}]$	0,1374	0,1251	0,1232	0,1212

Tabulka D.2: Hodnoty zdánlivého času  $t$  a zdánlivé teploty vymrznutí  $T$  pro 100 krát větší účinný průřez.

Moment	$\langle N \rangle$	2. faktoriální moment	3. faktoriální moment	4. faktoriální moment
$t[\text{fm}/\text{c}]$	4,9810	6,5860	6,9490	7,3276
$T[\text{GeV}]$	0,1257	0,1145	0,1125	0,1105

Tabulka D.3: Hodnoty zdánlivého času  $t$  a zdánlivé teploty vymrznutí  $T$  pro 200 krát větší účinný průřez.

Moment	$\langle N \rangle$	2. faktoriální moment	3. faktoriální moment	4. faktoriální moment
$t[\text{fm}/\text{c}]$	6,4272	8,1170	8,5146	8,8924
$T[\text{GeV}]$	0,1155	0,1068	0,1051	0,1036

Tabulka D.4: Hodnoty zdánlivého času  $t$  a zdánlivé teploty vymrznutí  $T$  pro 400 krát větší účinný průřez.

Tabulky pro centrální momenty a jejich poměry:

Násobek účinného průřezu	30	100	200	400
$t[\text{fm}/\text{c}]$	2,7352	3,8134	4,9810	6,4272
$T[\text{GeV}]$	0,1535	0,137383	0,1257	0,1155

Tabulka D.5: Hodnoty zdánlivého času  $t$  a zdánlivé teploty vymrznutí  $T$  pro různé násobky účinného průřezu pro normu.

Násobek účinného průřezu	30	100	200	400
$t[\text{fm}/\text{c}]$	3,2360	4,9968	6,4518	7,8118
$T[\text{GeV}]$	0,1451	0,1256	0,1153	0,1082

Tabulka D.6: Hodnoty zdánlivého času  $t$  a zdánlivé teploty vymrznutí  $T$  pro různé násobky účinného průřezu pro směrodatnou odchylku.

Násobek účinného průřezu	30	100	200	400
$t[\text{fm}/\text{c}]$	4,2652	7,1264	8,6260	9,4272
$T[\text{GeV}]$	0,1324	0,1116	0,1047	0,1016

Tabulka D.7: Hodnoty zdánlivého času  $t$  a zdánlivé teploty vymrznutí  $T$  pro různé násobky účinného průřezu pro 3. centrální moment.

Násobek účinného průřezu	30	100	200	400
$t[\text{fm}/\text{c}]$	3,2856	5,1034	6,5740	7,9064
$T[\text{GeV}]$	0,1444	0,1247	0,1146	0,1078

Tabulka D.8: Hodnoty zdánlivého času  $t$  a zdánlivé teploty vymrznutí  $T$  pro různé násobky účinného průřezu pro 4. centrální moment.

Násobek účinného průřezu	30	100	200	400
$t[\text{fm}/\text{c}]$	-	-	2,7940	4,5900
$T[\text{GeV}]$	-	-	0,1524	0,1292

Tabulka D.9: Hodnoty zdánlivého času  $t$  a zdánlivé teploty vymrznutí  $T$  pro různé násobky účinného průřezu pro koeficient šiknosti.

D. PŘÍLOHA: TABULKY ZDÁNLIVÝCH TEPLIT A ZDÁNLIVÝCH ČASŮ  
VYMRZNUTÍ PRO FAKTORIÁLNÍ A CENTRÁLNÍ MOMENTY

Násobek účinného průřezu	30	100	200	400
$t[\text{fm}/c]$	-	-	2,9428	5,1804
$T[\text{GeV}]$	-	-	0,1498	0,1241

Tabulka D.10: Hodnoty zdánlivého času  $t$  a zdánlivé teploty vymrznutí  $T$  pro různé násobky účinného průřezu pro koeficient špičatosti.



## Reference

- [1] Francois Gelis, *Color Glass Condensate and Glasma*, International Journal of Modern Physics A **28** (2012) 1330001, arXiv:1211.3327v2.
- [2] M. Kliemant et al., *Global Properties of Nucleus-Nucleus Collisions*, Lect. Notes Phys. **785** (2010) 23-103.
- [3] A. Andronic, *An overview of the experimental study of quark-gluon matter in high-energy nucleus-nucleus collision*, arXiv:1407.5003v1 [nucl-ex] (2014)
- [4] W. Florkowski, *Phenomenology of ultra-relativistic heavy-ion collisions*, London: World Scientific, 2010, ISBN 98-142-8066-6.
- [5] Chapline, Johnson, Teller, Weiss, *Highly excited nuclear matter* (1973)
- [6] Fázový diagram QCD:  
<https://cds.cern.ch/record/1955819/files/TUOAA2f1-eps-converted-to.png>  
[online 24/07/2017].
- [7] "Columbia plot":  
<https://www.hindawi.com/journals/ahep/2013/452978/fig1/>  
[online 15/04/2018]
- [8] Y. Aoki, G. Endrodi, Z. Fodor, S. D. Katz and K. K. Szabo, *The order of the quantum chromodynamics transition predicted by the standard model of particle physics*, Nature **443** (2006) 675.
- [9] Y. Aoki, Z. Fodor, S. D. Katz and K. K. Szabo, *The QCD transition temperature: Results with physical masses in the continuum limit*, Phys. Lett B **643** (2006) 46.
- [10] A. Bzdak, V. Koch, *Cumulants and Correlation Functions vs the QCD phase diagram*, arXiv:1607.07375v2 [nucl-th] (2017)
- [11] A. Bzdak, V. Koch, V. Skokov, *Correlated stopping, proton clusters and higher order proton cumulants*, arXiv:1612.0512v1 [nucl-th] (2016)
- [12] M. Stephanov, *QCD phase diagram and the critical point*, arXiv:hep-ph/0402115v1 (2006)

## REFERENCE

- [13] S. Sarkar, H. Satz, B. Sinha, *The Physics of the Quark-Gluon Plasma: Introductory Lectures*, Lect. Notes Phys. **785**, Springer, Berlin Heidelberg 2010, ISBN 978-3-642-02286-9.
- [14] Časoprostorový vývoj:  
[https://www.physics.ohio-state.edu/~ntg/6805/figures/RHIC\\_timescales\\_Strickland.png](https://www.physics.ohio-state.edu/~ntg/6805/figures/RHIC_timescales_Strickland.png)  
[online 11/04/2017].
- [15] P. Alba, W. Alberico, R. Bellwied, M. Bluhm, V. Mantovani Sarti, M. Nahrgang and C. Ratti, *Freeze-out conditions from net-proton and net-charge fluctuations at RHIC*, Phys. Lett. B **738** (2014) 305, arXiv:1403.4903.
- [16] B. Tomášik, F. Sannino, I. Bearden a T. Dossing, *Topics in modern nuclear physics: Flow and Sizes*, Kobenhavns Universitet, Niels Bohr Institutet, 2004.
- [17] C. M. Ko, V. Koch, Z.-W. Lin, K. Redlich, M. Stephanov, X.-N. Wang, *Kinetic Equation with Exact Charge Conservation*, Phys. Rev. Lett. **86** (2001) 5438.
- [18] S. Jeon, V. Koch, K. Redlich, X.-N. Wang, *Fluctuations of rare particles as a measure of chemical equilibration*, Nucl. Phys. A **697** (2002) 546-562.
- [19] C. M. Ko and L. Xia,  *$K^+/\pi^+$  enhancement in heavy-ion collisions*, Phys. Rev. C **38** (1988) 179.
- [20] B. Tomášik and E. E. Kolomeitsev, *Strangeness dynamics in heavy-ion collisions: The  $K/\pi$  ratios and the lifetime of a fireball*, arXiv:nucl-th/0512088v1 (2005).
- [21] K. Fukushima and T. Hatsuda, *The phase diagram of dense QCD*, (2010), arXiv:1005.4814v2 [hep-ph]
- [22] Koeficienty: <http://www.itl.nist.gov/div898/handbook/eda/section3/eda35b.htm>  
[online 17/04/2017].
- [23] Koeficienty: <https://brownmath.com/stat/shape.htm>  
[online 28/03/2018]
- [24] Koeficient šíkmosti: <http://www.statisticshowto.com/pearson-mode-skewness/>  
[online 28/03/2018]
- [25] Koeficient špičatosti: <http://mriquestions.com/diffusion-kurtosis.html>  
[online 28/03/2018]

## REFERENCE

- [26] Modifikované Besselovy funkce: [http://people.math.sfu.ca/~cbm/aands/page\\_376.htm](http://people.math.sfu.ca/~cbm/aands/page_376.htm) [online 17/04/2017].
- [27] Particle Data Group:  
[http://pdg.lbl.gov/2016/tables/contents\\_tables.html](http://pdg.lbl.gov/2016/tables/contents_tables.html) [online 17/04/2017].
- [28] J. D. Bjorken, *Highly relativistic nucleus-nucleus collisions: The central rapidity region*, Phys. Rev. D **27** (1983) 140.
- [29] S. Borsanyi, Z. Fodor, S. D. Katz, S. Krieg, C. Ratti and K. K. Szabo, *Freeze-out Parameters from Electric Charge and Baryon Number Fluctuations: Is there Consistence?*, Phys. Rev. Lett. **113** (2014) 052301.
- [30] J. Cugnon, D. L'Hôte, J. Vandermeulen, *Simple parametrization of cross-sections for nuclear transport studies up to GeV range*, Nucl. Instr. in Phys. Res. B **111** (1996) 215-220.
- [31] A. Andronic, P. Braun - Munzinger, J. Stachel, *Thermal hadron production in relativistic nuclear collisions: the hadron mass spectrum, the horn, and the QCD phase transition*, (2009), arXiv:0812.1186v3.
- [32] J. Cugnon, D. Kinet, J. Vandermeulen, *Pion production in central high energy nuclear collisions*, Nucl. Phys. A **379** (1982) 553.
- [33] Clebsch-Gordanovy koeficienty:  
<http://pdg.lbl.gov/2011/reviews/rpp2011-rev-clebsch-gordan-coefs.pdf>  
[online 15/11/2017]
- [34] M. Kitazawa, M. Asakawa, *Revealing baryon number fluctuations from proton number fluctuations in relativistic heavy ion collisions*, Phys. Rev. C **85** (2012) 021901(R).
- [35] M. Kitazawa, M. Asakawa, *Relation between baryon number fluctuations and experimentally observed proton number fluctuations in relativistic heavy ion collisions*, Phys. Rev. C **86** (2012) 024904.
- [36] I. G. Darvey, B. W. Ninhan, P. J. Staff, *Stochastic Models for Second- Order Chemical Reaction Kinetics. The Equilibrium State*, The Journal of Chemical Physics **45** (1966) 2145.
- [37] Donald A. McQuarrie, *Kinetics of Small Systems. I*, The Journal of Chemical Physics **38** (1963) 433.

## REFERENCE

- [38] Donald A. McQuarrie, C. J. Jachimowski and M. E. Russell, *Kinetics of Small Systems. II*, The Journal of Chemical Physics **40** (1964) 2914.
- [39] G. Nicolis, *Fluctuations Around Nonequilibrium States in Open Nonlinear Systems*, Journal of Statistical Physics **6** (1972) 195.
- [40] STAR Collaboration, *Collision Energy Dependence of Moments of Net-Kaon Multiplicity Distributions at RHIC* (2017), arXiv:1709.00773v1.
- [41] STAR Collaboration, *Bulk Properties of the Medium Produced in Relativistic Heavy-Ion Collisions from the Beam Energy Scan Program* (2017), arXiv:1701.07065v2.