

ČESKÉ VYSOKÉ UČENÍ TECHNICKÉ V PRAZE

Fakulta jaderná a fyzikálně inženýrská

# **BAKALÁŘSKÁ PRÁCE**

2010

Lenka Hrazdilová

České vysoké učení technické v Praze  
Fakulta jaderná a fyzikálně inženýrská

Katedra fyziky  
Obor: Jaderné inženýrství  
Zaměření: Experimentální jaderná fyzika



**Aplikace přístupu Glaubera  
mnohonásobného rozptylu pro popis  
procesů v hadron–nukleonových a  
hadron(jádro)–jaderných srážkách**

**Application of the Glauber's multiple-scattering  
approach to description of hadron-nucleon and  
hadron(nucleus)-nucleus collisions**

BAKALÁŘSKÁ PRÁCE  
Vypracoval: Lenka Hrazdilová  
Vedoucí práce: RNDr. Ján Nemčík, CSc.  
Rok: 2010

Na toto místo přijde svázat **zadání bakalářské práce!**

V jednom z výtisků musí být **originál** zadání, v ostatních kopie.

### **Čestné prohlášení**

Prohlašuji, že jsem svou bakalářskou práci vypracovala samostatně a použila jsem pouze podklady uvedené v příloženém seznamu.

Nemám závažný důvod proti užití tohoto školního díla ve smyslu §60 Zákona č. 121/2000 Sb., o právu autorském, o právech souvisejících s právem autorským a o změně některých zákonů (autorský zákon).

V Praze dne 1. ledna 2010

.....  
Lenka Hrazdilová

## **Poděkování**

Děkuji RNDr. Jánu Nemčíkovi, CSc. za vedení mé bakalářské práce a za podnětné návrhy, které ji obohatily. Také bych chtěla poděkovat Ing. Janu Čepilovy za užitečné rady a nápomocné diskuse.

Lenka Hrazdilová

*Název práce:*

**Aplikace přístupu Glaubera mnohonásobného rozptylu pro popis procesů v hadron–nukleonových a hadron(jádro)–jaderných srážkách**

*Autor:* Lenka Hrazdilová

*Obor:* Jaderné inženýrství

*Druh práce:* Bakalářská práce

*Vedoucí práce:* RNDr. Ján Nemčík, CSc.

Katedra fyziky, Fakulta jaderná a fyzikálně inženýrská, České vysoké učení technické v Praze

*Konzultant:* —

*Abstrakt:* Tato práce se věnuje Glauberově modelu pro popis hadron(jádro)–jaderných srážek pomocí hadron–nukleonových srážek, které jsou použity jako vstupy do tohoto modelu. V první části se zabývám teoretickým popisem Glauberova modelu a eikonálové aproximace. Dále, jako jedno z možných použití vysokoenergetické aproximace, jsou zde uvedeny výpočty počtu participantů srážky, počet binárních srážek nukleonů a určení centrality srážky. Transparentnost jádra je další možnou aplikací Glauberova přístupu, která nám umožňuje posoudit vznik nových efektů v jaderných srážkách oproti elementárním srážkám částic. Předpovědi pro transparentnost různých jaderných terčů v závislosti na energii a typu nalétávající částice jsou uvedeny v poslední kapitole.

*Klíčová slova:* Glauberův model, eikonálová aproximace, počet účastníků, počet binárních srážek, centralita srážky, transparentnost jádra

*Title:*

**Application of the Glauber's multiple-scattering approach to description of hadron-nucleon and hadron(nucleus)-nucleus collisions**

*Author:* Lenka Hrazdilová

*Abstract:* This thesis handles the Glauber model describing hadron(nucleus)-nucleus and collisions by means of hadron-nucleon collisions used as the model input. In the first part a theoretical description of the Glauber model and eikonal approximation are provided. As an example of possible application of the high-energy approximation, we calculate the number of participants in a collision, the number of binary nucleon collisions and then we determine the collision centrality. Another use of the Glauber approach is the nucleus transparency allowing us to study new effects in nuclei collisions compared to the collisions of elementary particles. Predictions for transparency of some nucleus targets with respect to their energy and projectile type are shown in the last chapter.

*Key words:* Glauber model, eikonal approximation, number of participants, number of binary collisions, centrality of collision, nuclear transparency.

# Obsah

<b>1</b>	<b>Úvod</b>	<b>1</b>
<b>2</b>	<b>Glauberův model</b>	<b>3</b>
2.1	Obecná formulace roptylové úlohy . . . . .	4
2.2	Eikonálová aproximace . . . . .	6
2.2.1	Eikonálová aproximace pro srážku s potenciálovou jámou . . .	6
2.2.2	Eikonálová aproximace pro složený systém . . . . .	8
2.3	Elastický a neelastický rozptyl . . . . .	10
2.3.1	Optický model pro elastický rozptyl . . . . .	10
2.3.2	Optický model pro neelastický rozptyl . . . . .	12
<b>3</b>	<b>Vstupy do Glauberových výpočtů</b>	<b>15</b>
3.1	Hustota jádra . . . . .	15
3.2	Neelastický hadron–nukleonový účinný průřez . . . . .	16
<b>4</b>	<b>Geometrie srážky</b>	<b>19</b>
4.1	Optická tloušťka . . . . .	20
4.2	Pravděpodobnost srážky, účinný průřez . . . . .	22
4.3	Počet binárních srážek a participantů . . . . .	23
4.3.1	Jádro–jaderná srážka . . . . .	23
4.3.2	Hadron–jaderná srážka . . . . .	25
4.4	Průměrný a maximální počet binárních srážek, participantů . . . . .	27
4.4.1	Střední počet binárních srážek . . . . .	27
4.4.2	Střední počet participantů . . . . .	28
4.4.3	Maximální počet binárních srážek, participantů . . . . .	29



---

4.5	Určení centrality jádro–jaderné srážky . . . . .	30
<b>5</b>	<b>Transparentnost jádra</b>	<b>34</b>
5.1	Nízkoenergetická a vysokoenergetická limita . . . . .	34
<b>6</b>	<b>Závěr</b>	<b>39</b>

# Seznam obrázků

2.1	Mnohonásobný rozptyl projektilu na nukleonech terčového jádra s výsledným úhlem rozptylu $\theta$ . . . . .	4
2.2	Diagramy znázorňující přímý a reversibilní proces. . . . .	5
2.3	Souřadný systém polohy nukleonu v jádře . . . . .	7
3.1	Průběh elementárních účinných průřezů pro nalétávající proton, $\pi^\pm$ , $K^\pm$ a $\gamma$ v závislosti na těžištové energii srážky $\sqrt{s}$ [12]. . . . .	18
4.1	Nákres srážky projektilu A s jádrem B při srážkovém parametru $\mathbf{b}$ za a) z bočního pohledu, b) z frontálního pohledu ve směru osy z. . . . .	20
4.2	Počet binárních srážek nukleonů při srážce jader: $O^{16} + O^{16}$ , $Al^{27} + Al^{27}$ , $O^{16} + Au^{197}$ , $Au^{197} + Au^{197}$ a $Pb^{208} + Pb^{208}$ při hodnotě neelastického nukleon–nukleonového účinném průřezu $\sigma_{inel}^{NN} = 4 \text{ fm}^2$ . . . . .	24
4.3	Počet participantů při srážce jader: $O^{16} + O^{16}$ , $Al^{27} + Al^{27}$ , $O^{16} + Au^{197}$ , $Au^{197} + Au^{197}$ a $Pb^{208} + Pb^{208}$ při hodnotě neelastického nukleon–nukleonového účinném průřezu $\sigma_{inel}^{NN} = 4 \text{ fm}^2$ . . . . .	25
4.4	Počet participantů a počet binárních srážek pro $p + O^{16}$ , $p + Au^{197}$ při nukleon–nukleonovém účinném průřezu $\sigma_{inel}^{NN} = 4 \text{ fm}^2$ . . . . .	26
4.5	Ilustrace korelací mezi pozorovatelnými měřeními v detektoru $n_{ch}$ a veličinami počítanými Glauberovým modelem jako srážkový parametr $b$ , počet participantů srážky $N_{part}$ [11]. . . . .	31
4.6	Neelastický diferenciální účinný průřez pro srážku $Au + Au$ při $\sqrt{s} = 200 \text{ GeV}$ [11] . . . . .	32

---

5.1	Transparentnost v závislosti na nukleonovém čísle pro různé typy nalétávajících částic: $\pi^+$ , $K^-$ a proton . . . . .	36
5.2	Transparentnost v závislosti na těžiškové energii nalétávající částice $\sqrt{s}$ pro nalétávající piony $\pi^+$ na jádra $C^{12}$ a $Cu^{63}$ . . . . .	37

# Kapitola 1

## Úvod

Orientace na srážkové experimenty s jádry je v posledních třech desetiletích zřejmým trendem částicové fyziky. QCD tvoří základní teorii pro popis elementárních částic. V rámci této teorie se lze na srážku elementárních částic i jader dívat na nejzákladnější úrovni jako na interakce kvarků a gluonů, z kterých se pak formují konečné stavy pozorovatelné v detektorech. Tento proces formování pozorovatelných částic z kvarků a gluonů se nazývá hadronizace a jeho porozumění je hlavním cílem fyziků poslední doby. Pokud srážíme elementární částice, můžeme pozorovat finální stavy v detektoru v makroskopické vzdálenosti od místa vzniku částice. Problémem je, že částice po uplynutí takové doby nenesou již dostatečnou informaci o hadronizační dynamice. Řešením mohou být právě srážky s jádry, při kterých se částice po svém vzniku na vzdálenostech řádově několika fermi rozptyluje na dalších nukleonech jádra. Jádro tudíž může posloužit jako malý detektor umístěný přímo u místa vzniku srážky a my můžeme díky němu sledovat i počáteční vývoj hadronizace [19].

Tato práce se věnuje tomu nejzákladnějšímu přístupu, jak hadron-jaderné srážky popsat, a to je mnohonásobná difrakční teorie, kterou navrhl Roi Glauber v roce 1950, přičemž navázal na Molièrovu práci z roku 1947 o elektronové difrakci. Glauberovo původní odvození vychází z optického modelu, jenž jádro popisuje jako sféru spojitě hustoty, která částečně absorbuje a částečně rozptyluje dopadající částice [6]. V tomto jeho přístupu je vidět podobnost s Franhouferovou difrakční teorií z optiky, popisující rozptyl na pevné překážce. Důležitým rozdílným rysem jaderného terče je to, že jádro jako systém je složeno z nukleonů, které se v jádře pohybují. Je třeba tudíž řešit klasickou kvantově-mechanickou rozptylovou úlohu. V tomto bodě si Glauber pomohl zavedením vysokoenergetické nebo také eikonálové aproximace,

díky níž se výpočet podstatně zjednoduší. Podmínky této aproximace, její důsledky a navíc i některé další aproximace pro vysoké energie jsou spolu s celý podrobným odvozením uvedeny v [3] a dále v jeho přednáškách [4], [5]. Shrnutí tohoto teoretického odvození Glauberova modelu je uvedeno v kapitole 2.

Protože Glauberův přístup řeší srážky jader jako srážku určitého počtu nukleonů, je třeba znát neelastický nukleon–nukleonový účinný průřez jako vstup do výpočtů. Tyto hodnoty získáme z naměřených experimentálních dat [12]. Všechny vstupy do Glauberova modelu jsou uvedeny v kapitole 3.

Využití Glauberovy eikonálové aproximace také spočívá v možnosti různých výpočtů na základě konfigurace jader před srážkou. Důsledkem eikonálové aproximace je předpoklad přímé dráhy nukleonu v jádře. Tento předpoklad a znalost nukleon–nukleonového účinného průřezu nám umožňuje vyvozovat některé informace o srážce pouze z geometrie srážky. Důležitou veličinou charakterizující srážky jader je srážkový parametr nalétávajících jader. Geometrický přístup, řešený například v článkách [10], [15], [16], je založen na hledání pravděpodobnosti interakce na základě relativní vzdálenosti mezi nukleony. Z této pravděpodobnosti interakce lze pak odvozovat nejen účinné průřezy pro srážku hadronu s nukleonem a pro jádro–jadernou srážku, ale i další veličiny, jako počet nukleonů účastnících se srážky a počet binárních nukleon–nukleonových srážek. Odvození všech používaných vztahů na základě tohoto přístupu a výpočty počtu participantů a počtu binárních srážek jsou uvedeny v kapitole 4. Souvislost centrality srážky s počtem účastníků srážky, počtem binárních srážek a srážkovým parametrem je uvedena v poslední části kapitoly 4 .

Cílem poslední kapitoly 5 je prezentovat srovnání rozptylu na nukleonech a rozptylu na složeném systému – jádře. Pomocí výpočtu účinného průřezu jader lze porovnat, jak se liší oproti účinnému průřezu na odpovídajícím počtu nukleonů. Ukáže se, že v jádrech se uplatňuje efekt vzájemného stínění nukleonů a že účinný průřez jader bude menší, než bychom triviálně očekávali. K tomuto vzájemnému porovnání budeme používat veličinu nazývanou transparentnost, nebo-li průsvitnost jádra [20]. Tato veličina srovnává srážku jádra s odpovídajícím počtem nukleonů pomocí účinných průřezů. Transparentnost jádra budeme počítat ve vysokoenergetické a nízkoenergetické limitě a pro různě velká jádra. V závěru prezentujeme základní myšlenky a výsledky plynoucí z Glauberova modelu.

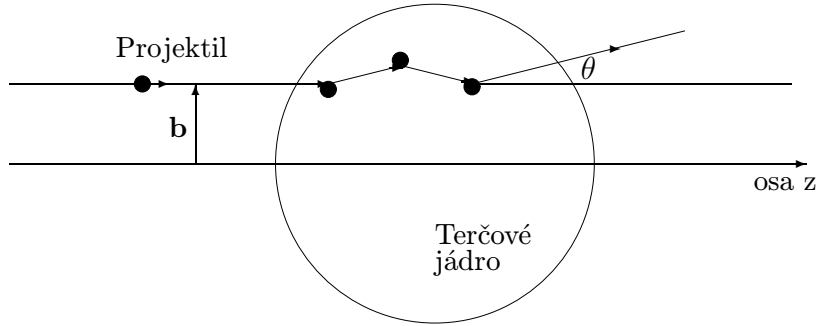
## Glauberův model

Rozdílným rysem srážek jader oproti elementárním srážkám je to, že při srážkách jader dochází k mnohonásobnému rozptylu nalétávající částice na jednotlivých nukleonech. Glauberův model přistupuje k tomuto problému tak, že se na srážku dvou jader dívá jako na srážku jednotlivých nukleonů, ale ne všechny nukleony se musí srážky účastnit.

Jedním ze způsobů, jak řešit srážku jader, je geometrický přístup, který umožňuje snadno počítat různé veličiny charakterizující geometrii srážky, jako například počet účastníků srážky, často nazývaných „participantů“, a počet elementárních srážek nukleonů. Správně bychom ale měli pohlížet na srážku s jádrem jako kvantově-mechanickou rozptylovou úlohu. Převážná část textu v této kapitole čerpá z původní Glauberovy práce [3], [4], [5], pokud nebude uvedeno jinak.

Glauber ve svém původním odvození využil aproximace optickou limitou, která spočívá v rozšíření Fraunhoferovy difrakční teorie na pevné překážce na difrakční teorii pro mnohonásobný rozptyl na jádře. V tomto případě si jádro představujeme pomocí optického modelu jako částečně absorbující, částečně rozptylující sféru [6]. Hustotu jádra považujeme za spojitou a konkrétní korelace polohy nukleonů neuvažujeme. To lze díky eikonálové (nebo také vysokoenergetické) aproximaci, ve které se rychle nalétávajícímu projektilu jeví pohyb nukleonů uvnitř jádra jako zanedbatelný. Navíc při vysokých energiích bude projektil předaná energie jednotlivým nukleonům malá oproti nalétávající energii, tudíž jako další zjednodušení můžeme předpokládat, že se projektil v důsledku srážek od své původní dráhy nijak podstatně neodchýlí. Dráhu můžeme považovat za přímou a úhel rozptylu  $\theta$  za velmi malý, jak je vidět na obrázku 2. Předpokládáme také, že dopadající projektil je

nukleony z jádra bržděn rovnoměrně. To znamená, že nestane případ, že by projektil předal velkou část své kinetické energie například prvnímu nukleonu a na další srážky by mu zbyla pouze nepatrná část energie.



**Obrázek 2.1:** Mnohonásobný rozptyl projektilu na nukleonech terčového jádra s výsledným úhlem rozptylu  $\theta$ .

## 2.1 Obecná formulace roptylové úlohy

Úvod do roptylové úlohy s ohledem na Glauberův přístup k problému je čerpán z [3] a [14]. Uvažujme nukleon hmotnosti  $m$  nalétávající na jádro, jehož energie a hybnost jsou dány jako  $E = \frac{\hbar k^2}{2m}$  a  $p = \hbar k$ , kde  $\mathbf{k}$  je vlnový vektor částice před srážkou a  $\mathbf{k}'$  budeme značit vlnový vektor částice po srážce. Statické silové pole terčového jádra budeme značit  $V(\mathbf{r})$ , přičemž  $V_0$  bude jeho typická síla interakce.

Hamiltonián reprezentující systém bude tedy vypadat takto

$$H = -\frac{\hbar^2 \nabla^2}{2m} + V(\mathbf{r}) \quad (2.1)$$

a budeme chtít řešit Schrödingerovu rovnici  $H\psi(\mathbf{r}) = E\psi(\mathbf{r})$ . Pokud si označíme efektivní potenciál jako  $U(\mathbf{r}) = 2mV(\mathbf{r})/\hbar^2$  získáme po úpravě rovnici

$$[\nabla^2 + k^2]\psi(\mathbf{r}) = U(\mathbf{r})\psi(\mathbf{r}). \quad (2.2)$$

Tuto diferenciální rovnici lze přepsat jako integrální Lippmann-Schwingerovu rovnici

$$\psi(\mathbf{r}) = \phi(\mathbf{r}) + \int d^3r' G_0^+(\mathbf{r}, \mathbf{r}')\psi(\mathbf{r}'). \quad (2.3)$$

Dopadající vlna  $\phi_k(\mathbf{r})$  bude mít tvar rovinné vlny  $\phi(\mathbf{r}) \sim \exp(i\mathbf{k}\mathbf{r})$  a pokud bychom dosadili do Lippmann-Schwingerovy rovnice i tvar Greenovy funkce

$$G_0^+(\mathbf{r}, \mathbf{r}') = -\frac{1}{4\pi} \frac{\exp(ik|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|)}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|}, \quad (2.4)$$

můžeme porovnáním s asymptotickým tvarem rozptýlené vlny

$$\psi(\mathbf{r}_{(t \rightarrow \infty)}) = e^{i\mathbf{k}\mathbf{r}} + f(\mathbf{k}, \mathbf{k}') \frac{e^{ikr}}{r} \quad (2.5)$$

získat tento tvar rozptylové amplitudy

$$f(\mathbf{k}, \mathbf{k}') = -\frac{2m}{4\pi\hbar^2} \int e^{-i\mathbf{k}'\mathbf{r}} U(\mathbf{r}) \psi_{\mathbf{k}}(\mathbf{r}) d\mathbf{r}. \quad (2.6)$$

Rozptylová amplituda bude splňovat dvě důležité identity. První z nich je teorém reversibility

$$f(\mathbf{k}', \mathbf{k}) = f(-\mathbf{k}, \mathbf{k}'), \quad (2.7)$$

který nám říká, že dvěma procesům šíření vlnového vektoru přísluší stejná hodnota rozptylové amplitudy. Proces přímý a reversibilní je znázorněn na obrázku 2.1.



**Obrázek 2.2:** Diagramy znázorňující přímý a reversibilní proces.

Druhou z identit, kterou splňuje rozptylová amplituda, je optický teorém, který definuje vztah mezi celkovým účinným průřezem a imaginární částí rozptylové amplitudy

$$\text{Im } f(\mathbf{k}, \mathbf{k}') = \frac{k}{4\pi} \sigma_{tot}, \quad (2.8)$$

přičemž celkový účinný průřez  $\sigma_{tot}$  je součtem rozptylového a absorpčního účinného průřezu

$$\sigma_{tot} = \sigma_{scatt} + \sigma_{abs}. \quad (2.9)$$

Rozptylový účinný průřez získáme zintegrováním kvadrátu rozptylové amplitudy, která při axiální symetrii úlohy závisí pouze rozptylovém úhlu  $\theta$ , přes celý prostorový úhel  $d\Omega$ .

$$\sigma_{scatt} = \int |f(\theta)|^2 d\Omega. \quad (2.10)$$



Vztah (2.8) vyjadřuje, že při rozptylu je zeslabení nalétávajícího svazku způsobeno jednak absorpcí dopadající vlny a jednak rozptylem z původního směru.

Přesnou hodnotu rozptylové amplitudy bychom také mohli získat pomocí rozvoje do parciálních vln [14]

$$f(\theta) = \frac{1}{2ik} \sum_{l=0}^{\infty} P_l(\cos \theta) [e^{2i\delta_l} - 1], \quad (2.11)$$

kde  $\delta_l$  je fázový posuv a  $P_l$  je Legendův polynom  $l$ -tého stupně. Princip spočívá v tom, že nalétávající vlna je rozložena do nekonečného součtu sférických vln a celková rozptylová amplituda je součtem parciálních rozptylových amplitud přes kvantové číslo  $l$ . Problémem při vysokých energiích by bylo, že bychom museli počítat přes velký rozsah hodnot  $l$ . Abychom zjednodušili numerický výpočet, použijeme různé aproximace, které si naopak při vysokých energiích můžeme dovolit. Pomocí vztahu (2.10) pak můžeme vyjádřit vztah pro rozptylový účinný průřez takto

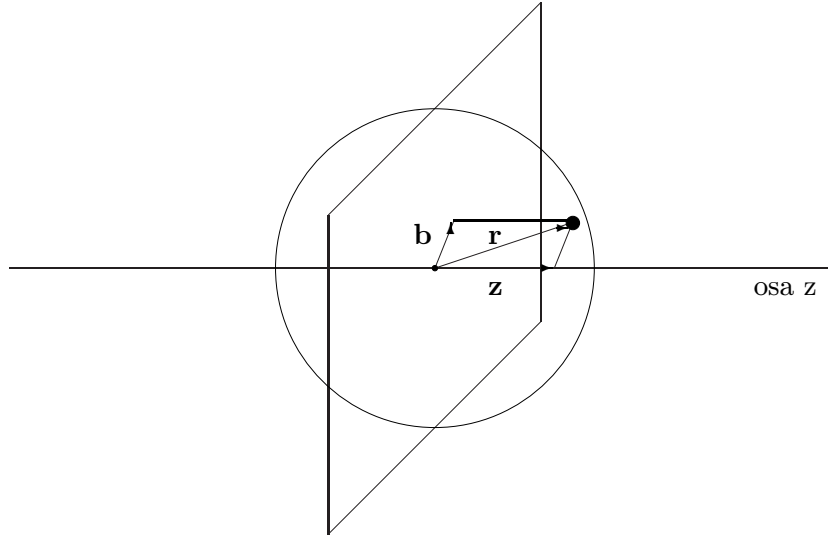
$$\sigma_{scatt} = \frac{\pi}{k^2} \sum_{l=0}^{\infty} (2l+1) |e^{2i\delta_l} - 1|. \quad (2.12)$$

## 2.2 Eikonálová aproximace

Výpočet pomocí vysokoenergetické aproximace spočívá v tom, že při dostatečně vysokých energiích si lze představit, že nalétávající částice reaguje v daný moment pouze s jedním nukleonem a ostatní nukleony můžeme považovat za stacionární. Je to proto, že vzájemný pohyb nukleonů v jádře je zanedbatelný ve srovnání s rychlostí nalétávající částice. Lze si to představit jako fotku v okamžiku průletu částice. Eikonálová aproximace je kromě již uvedených [3], [4], [5], dobře popsána také v [7] a [9] včetně aproximace pro složený systém.

### 2.2.1 Eikonálová aproximace pro srážku s potenciálovou jámou

Pro platnost eikonálové aproximace je třeba splnit dvě podmínky. První podmínka požaduje, aby velikost energie  $E$  nalétávající částice byla mnohem větší než střední síla interakce potenciálu  $V_0$ , tedy musí platit  $\frac{V_0}{E} \ll 1$ . Za druhé požadujeme, aby vlnová délka, jejíž velikost je dána jako  $\lambda = k^{-1}$ , byla mnohem menší než dosah potenciálu  $a$ . Z toho plyne podmínka  $ka \gg 1$ .



**Obrázek 2.3:** Souřadný systém polohy nukleonu v jádře

Pro naše účely se bude hodit cylindrický souřadný systém. Směr šíření nalétávající částice s hybností  $\mathbf{k}$  bude souhlasný s kladným směrem osy  $z$ , srážkový parametr  $\mathbf{b}$  bude kolmý na tuto osu. Dále si označíme jednotkový vektor  $\mathbf{K}$ , který bude také mířit v kladném směru osy  $z$ . Potom vektor označující pozici nukleonu v jádře můžeme rozložit do složek takto

$$\mathbf{r} = \mathbf{b} + \mathbf{K}z. \quad (2.13)$$

Z vlnové funkce (2.3) po dosazení Greenovy funkce (2.4) a použitím vysokoenergetické aproximace získáme tvar vlnové funkce

$$\psi(\mathbf{r}) = e^{i\mathbf{k}\mathbf{r}} - \frac{i}{\hbar v} \int_{-\infty}^z V(\mathbf{b} + \mathbf{K}z') dz', \quad (2.14)$$

který bude platný pouze pro malé úhly rozptylu  $\theta$ . Pokud tento tvar dosadíme do výrazu pro rozptylovou amplitudu (2.6) a upravíme, získáme elastickou rozptylovou amplitudu pro přenesenou hybnost  $\hbar\mathbf{q} = \hbar\mathbf{k} - \hbar\mathbf{k}'$  ve tvaru

$$f(\mathbf{q}) = \frac{ik}{2\pi} \int e^{i(\mathbf{q})\mathbf{b}} [1 - e^{i\chi(\mathbf{b})}] d^2b, \quad (2.15)$$

kde  $\chi(\mathbf{b})$  je fázový posuv. Je třeba zdůraznit, že tento tvar rozptylové amplitudy platí pouze pro malou přenesenou hybnost. Fázový posuv  $\chi(\mathbf{b})$  lze vyjádřit z tvaru potenciálu

$$\chi(\mathbf{b}) = \frac{i}{\hbar v} \int_{-\infty}^{\infty} V(\mathbf{b} + \mathbf{K}z) dz, \quad (2.16)$$

kde  $v$  je velikost rychlosti nalétávající částice. Pokud je fázový posuv sféricky symetrický, lze přepsat rozptylovou amplitudu do jednoduššího tvaru

$$f(\mathbf{q}) = ik \int J_0(|\mathbf{k} - \mathbf{k}'|)[1 - e^{i\chi(\mathbf{b})}]b db, \quad (2.17)$$

kde  $J_0$  je Besselova funkce nultého řádu. Rozptylový účinný průřez odvozený pomocí eikonálové aproximace získáme dosazením výrazu (2.15) do vztahu (2.10). Máme tedy vztah

$$\sigma_{scatt} = \int [e^{i\chi(\mathbf{b})} - 1]^2 d^2b. \quad (2.18)$$

Souvislost eikonálové aproximace s rozvojem do parciálních vln je vidět z porovnání předchozího výrazu (2.18) s rozptylovým účinným průřezem z rozvoje do parciálních vln (2.12). Tím získáme korespondence  $l + \frac{1}{2} \leftrightarrow kb$  a  $2\delta_l = \chi(\mathbf{b})$ , kde  $\delta_l$  je fázový posuv  $l$ -té parciální vlny.

Zavedeme si profilovou funkci definovanou takto

$$\Gamma(\mathbf{b}) = 1 - e^{i\chi(\mathbf{b})}. \quad (2.19)$$

Potom rozptylovou amplitudu lze chápat jako Fourierovu transformaci profilové funkce (2.15) a naopak profilová funkce bude inverzní Fourierovou transformací rozptylové amplitudy

$$\Gamma(\mathbf{b}) = \frac{1}{2\pi ik} \int e^{-i\mathbf{q}\mathbf{b}} f(\mathbf{q}) d^2q. \quad (2.20)$$

### 2.2.2 Eikonálová aproximace pro složený systém

Pomocí veličin  $\chi(\mathbf{b})$  a  $\Gamma(\mathbf{b})$ , které jsme odvodili v minulé části, se nyní pokusíme popsat složený systém. Samozřejmě fázový posuv jádra nebude záviset jen na srážkovém parametru  $\mathbf{b}$ , ale i na pozicích jednotlivých nukleonů v terčovém jádře. Souřadnice nukleonů budeme značit  $r_1, r_2, \dots, r_A$ , přičemž  $A$  bude počet nukleonů. Projekce těchto souřadnic do směru kolmého ke směru nalétávající částice budeme značit  $s_1, s_2, \dots, s_A$ .

Prvním krokem bude zavedení fázového posuvu na celém jádře  $\chi(\mathbf{b}, s_1, s_2, \dots, s_A)$  jako součtu fázových posuvů na jednotlivých nukleonech

$$\chi(\mathbf{b}, \mathbf{s}_1, \dots, \mathbf{s}_A) = \sum_{j=1}^A \chi_j(\mathbf{b} - \mathbf{s}_j). \quad (2.21)$$

Aditivita fázového posuvu plyne z několika skutečností [7]. První z nich je předpoklad, že nalétávající nukleon reaguje v dané chvíli pouze s jedním nukleonem,

interakce mezi více částicemi zanedbáváme. Také zanedbáme podélnou přenesenou hybnost  $\mathbf{q}$  a budeme uvažovat, že vektor přenesené hybnosti bude mířit pouze ve směru kolmém k rovině dopadu. Poslední předpoklad je, že jádro lze popsat v základním stavu nezávislým částicovým modelem. To znamená, že lze zanedbat korelace polohy nukleonů vzniklé jejich vzájemným pohybem v jádře. Pohyb v jádře vypadá z pohledu nalétávající částice jakoby zmražen. Tudíž vlnovou funkci jádra v počátečním stavu  $\Psi_i(\mathbf{r}_1, \dots, \mathbf{r}_A)$  lze psát jako součin vlnových funkcí jednotlivých nukleonů

$$|\Psi_i(\mathbf{r}_1, \dots, \mathbf{r}_A)|^2 = \prod_{j=1}^A \rho_j(\mathbf{r}_j), \quad (2.22)$$

kde  $\rho_j(\mathbf{r}_j)$  jsou jednočásticové hustoty nukleonů. Normalizační podmínka pro jednočásticové hustoty bude

$$\int \rho_j(\mathbf{r}_j) d^3 r_j = 1 \quad (2.23)$$

a celková jaderná hustota, která je součtem jednočásticových hustot bude potom normalizována na celkový počet nukleonů v jádře  $A$ .

Formfaktor je pomocí jednočásticové hustoty definován jako

$$S_j(\mathbf{q}) = \int e^{i\mathbf{q}\mathbf{r}_j} \rho_j(\mathbf{r}_j) d^3 r_j. \quad (2.24)$$

Pro výpočty účinných průřezů se hustoty jádra, různě parametrizované, používají jako vstup do výpočtů.

Nyní nás bude zajímat, jak bude vypadat profilová funkce celého jádra. Vyjádříme si ji pomocí fázového posuvu a upravíme použitím aditivity fázového posuvu

$$\begin{aligned} \Gamma(\mathbf{b}, \mathbf{s}_1, \dots, \mathbf{s}_A) &= 1 - e^{i\chi(\mathbf{b}, \mathbf{s}_1, \dots, \mathbf{s}_A)} \\ &= 1 - \prod_j e^{i\chi_j(\mathbf{b} - \mathbf{s}_j)} \\ &= 1 - \prod_{j=1}^A [1 - \Gamma_j(\mathbf{b} - \mathbf{s}_j)]. \end{aligned} \quad (2.25)$$

Pokud rozvineme produkt v předchozím vztahu do řady, získáme vztah

$$\Gamma(\mathbf{b}, \mathbf{s}_1, \dots, \mathbf{s}_A) = \sum_j \Gamma_j(\mathbf{b} - \mathbf{s}_j) - \sum_{j < m} \Gamma_j(\mathbf{b} - \mathbf{s}_j) \Gamma_j(\mathbf{b} - \mathbf{s}_m) + \dots, \quad (2.26)$$

který reprezentuje srážku pomocí rozvoje mnohonásobného rozptylu. Je vidět, že první aproximace profilové funkce pro jádro je součet profilových funkcí jednotlivých nukleonů, což vyjadřuje jednonásobný rozptyl. Další členy odpovídají postupně

dvojnému, trojnému až do  $A$ -tému rozptylu. Počet členů nepřekročí  $A$  díky předpokladu, že rozptyl probíhá převážně v dopředném směru. Projektil se tedy při průchodu jádrem nevrací a na každém nukleonu se rozptýlí maximálně jedenkrát[7].

## 2.3 Elastický a neelastický rozptyl

Při srážce částice s jádrem může docházet jak k elastickému, tak k neelastickému rozptylu. Neelastický rozptyl lze dělit na dva možné případy. První případ je mírně neelastický rozptyl, při kterém se pouze excituje terčové jádro. Druhý případ je silně neelastický rozptyl, při kterém se mění počet nalétávajících částic nebo vznikají nové částice. Glauberův model umí popsat elastický rozptyl a lehce neelastický rozptyl, protože jak už bylo zmíněno, funguje pouze v případě, kdy je přenesená hybnost malá. Nejprve se budeme věnovat elastickému rozptylu.

### 2.3.1 Optický model pro elastický rozptyl

Při elastickém rozptylu máme situaci zjednodušenou v tom smyslu, že počáteční a koncový stav jádra je stejný  $\psi_i(\mathbf{s}_1, \dots, \mathbf{s}_A)$ , tudíž rozptylová amplituda bude

$$F_{ii}(\mathbf{q}) = \frac{ik}{2\pi} \int 1 - e^{i\mathbf{q}\mathbf{b}} |\psi_i(\mathbf{s}_1, \mathbf{s}_2, \dots, \mathbf{s}_A)|^2 [e^{\chi(\mathbf{b}, \mathbf{s}_1, \dots, \mathbf{s}_A)} - 1] \prod_{j=1}^A ds_j d\mathbf{b}. \quad (2.27)$$

Nyní jsme se ale dostali do stádia, kdy se chceme zbavit fázových posunů na jednotlivých nukleonech a bude se nám více hodit počítat s celkovým efektivním fázovým posuvem, který způsobí jádro nalétávající vlně. S tímto problémem nám pomůže optický model, který chápe rozptyl na jádře jako rozptyl na komplexním potenciálu, přičemž imaginární část tohoto potenciálu způsobuje absorpci a reálná část způsobuje rozptyl. Abychom zjistili, jak bude takový efektivní fázový posuv vypadat, porovnáme amplitudu pro elastický rozptyl (2.27) s rozptylovou amplitudou na jámě (2.15) a získáme vztah

$$e^{i\chi_{opt}(\mathbf{b})} = \int |\psi(\mathbf{s}_1, \mathbf{s}_2, \dots, \mathbf{s}_A)|^2 e^{i\chi(\mathbf{b}, \mathbf{s}_1, \dots, \mathbf{s}_A)} \prod_j^A ds_j. \quad (2.28)$$

Z toho plyne, že výraz pro optický fázový posuv  $\chi_{opt}(\mathbf{b})$  bude mít tvar

$$\chi_{opt}(\mathbf{b}) = -i \ln \langle e^{i\chi(\mathbf{b}, \mathbf{s}_1, \dots, \mathbf{s}_A)} \rangle_i, \quad (2.29)$$

kde středování probíhá přes všechny možné počáteční stavy jádra. Tento efektivní fázový posun  $\chi_{opt}(\mathbf{b})$  budeme nazývat optickým fázovým posunem. Pokud provedeme rozvoj  $\chi_{opt}(\mathbf{b})$  do řady, zjistíme, že jeho první aproximace je reálná a jako porucha druhého řádu se v důsledku toho, že nukleony nemají fixní polohu, vyskytuje imaginární část, což vyjadřuje, že při rozptylu může docházet k excitaci jádra. Jak souvisí optický fázový posuv s optickým potenciálem, je vidět z následujících vztahů [3]:

$$\chi_{opt}(b) = -\frac{1}{\hbar v} \int_{-\infty}^{\infty} V_{opt}(\sqrt{b^2 + z^2}) dz, \quad (2.30)$$

$$V_{opt} = \frac{\hbar v}{\pi} \frac{1}{r} \frac{d}{dr} \int_r^{\infty} \frac{\chi_{opt}(b) b db}{\sqrt{b^2 - r^2}}. \quad (2.31)$$

Reprezentace pomocí optického fázového posuvu a optického potenciálu jsou ekvivalentní, přičemž předchozí vztahy platí, pokud můžeme považovat potenciál za symetrický.

Také může být užitečné se podívat, jak souvisí optický fázový posuv na jádře  $\chi_{opt}(\mathbf{b})$  s veličinami, které jsme si zavedli nebo které budeme později používat. První způsob vyjádření optického fázového posuvu pomocí dopředné rozptylové amplitudy pro jeden nukleon [4]

$$f(0) = \frac{ik}{2\pi} \int \Gamma(\mathbf{b}) d^2b \quad (2.32)$$

a pomocí optické tloušťky

$$T(\mathbf{b}) = \int \rho(\mathbf{b}, z) dz \quad (2.33)$$

vypadá takto

$$\chi(\mathbf{b}) = \frac{A}{2\pi k} f(0) T(\mathbf{b}). \quad (2.34)$$

Tento vztah platí pouze pro velká jádra s nukleonovým číslem  $A \gg 1$ , kde dosah interakce mezi nukleonem a nalétávající částicí  $a$  je mnohem menší než poloměr jádra  $R$ . Při této aproximaci bude mít formfaktor  $S(\mathbf{q})$  v dopředném směru výrazný pík. Potom lze také optický fázový posuv  $\chi_{opt}(\mathbf{b})$  vyjádřit pomocí formfaktoru jádra  $S(\mathbf{q})$  a rozptylové amplitudy pro potenciálovou jámu  $f(\mathbf{q})$

$$i\chi_{opt}(\mathbf{b}) = -\frac{1}{2\pi ik} \int e^{-i\mathbf{q}\mathbf{b}} f(\mathbf{q}) S(\mathbf{q}) d^2q. \quad (2.35)$$

Vyjádření pro rozptylovou amplitudu pomocí optického fázového posuvu bude tedy vypadat takto

$$F_{ii}(\mathbf{q}) = \frac{ik}{2\pi} \int [1 - e^{i\chi_{opt}(\mathbf{b})}] d^2b. \quad (2.36)$$

### 2.3.2 Optický model pro neelastický rozptyl

Tato část čerpá převážně z [3], kde je odvození pro neelastický rozptyl provedeno nejdětalněji. Při neelastickém rozptylu se mění počáteční stav jádra  $\psi_i$  na koncový stav  $\psi_f$ . Rozptylové amplituda pro malou přenesenou hybnost, tedy pokud se počáteční  $\psi_i$  a koncový stav  $\psi_f$  nijak výrazně neliší, bude

$$F_{fi}(\mathbf{q}) = \frac{ik}{2\pi} \int e^{i\mathbf{q}\mathbf{b}} d^2b \int \psi_f(\mathbf{s}_1, \dots, \mathbf{s}_A) \{1 - e^{i\chi(\mathbf{b}, \mathbf{s}_1, \dots, \mathbf{s}_A)}\} \psi_i(\mathbf{s}_1, \dots, \mathbf{s}_A) \prod_j^A d\mathbf{s}_j. \quad (2.37)$$

Odpovídající diferenciální účinný průřez pro srážku, při které jádro přechází ze stavu  $\psi_i$  do stavu  $\psi_f$ , je

$$\left(\frac{d\sigma_{fi}}{d\Omega}\right)^{p+A} = \frac{k'}{k} \sum_f |F_{fi}|^2. \quad (2.38)$$

Je třeba zdůraznit, že v poslední sumě je zahrnut jak neelastický rozptyl, kde  $f \neq i$ , tak elastický rozptyl, kde  $f = i$  a  $k = k'$ .

Totální účinný průřez získáme integrací přes všechny prostorové úhly v hybnostním prostoru

$$\sigma_{fi}^{p+A} = \int \frac{k'}{k} |F_{fi}(\mathbf{k}', \mathbf{k})|^2 d\Omega_{k'}. \quad (2.39)$$

Člen  $\frac{k'}{k}$  v integrálu se redukuje na jedničku, pokud dopadající částice předá pouze zanedbatelnou část energie terčové částici. Totální účinný průřez získáme jako součet přes všechny finální stavy

$$\sigma_{tot}^{p+A} = \sum_f \sigma_{fi}^{p+A}, \quad (2.40)$$

přičemž pokud budeme chtít pouze neelastický účinný průřez, tak vyscítáme pouze přes stavy, kde se koncový a počáteční stav liší

$$\sigma_{inel}^{p+A} = \sum_{f \neq i} \sigma_{fi}^{p+A} = \sigma_{tot}^{p+A} - \sigma_{ii}^{p+A}. \quad (2.41)$$

Pokud chceme aplikovat optický model na neelastický rozptyl, můžeme uvažovat tak, že nalétávající projektil se nepružně rozptýlí pouze na malém počtu nukleonů a zbylé nukleony, které se srážky neúčastní, budou vytvářet optický potenciál, ve kterém se bude rozptyl odehrávat. Protože se stav jádra po srážce změní, nelze nadále popisovat jádro pomocí statické funkce hustoty. Proto vlnové funkce nukleonů, jejichž stav se bude při srážce měnit, musíme oddělit od zbylých. Pro jednoduchost

budeme nejprve uvažovat, že pouze jeden nukleon z jádra (předpokládejme, že ten první) při srážce mění svůj stav

$$\begin{aligned}\psi_i(\mathbf{s}_1, \dots, \mathbf{s}_A) &= \varphi_i(\mathbf{s}_1)\psi(\mathbf{s}_2, \dots, \mathbf{s}_A), \\ \psi_f(\mathbf{s}_1, \dots, \mathbf{s}_A) &= \varphi_f(\mathbf{s}_1)\psi(\mathbf{s}_2, \dots, \mathbf{s}_A).\end{aligned}\quad (2.42)$$

Optický fázový posun  $\chi_{opt}^{(A-1)}(\mathbf{b})$  vytvořený  $A-1$  netečnými částicemi je definován takto

$$e^{i\chi_{opt}^{(A-1)}}(\mathbf{b}) = \int |\psi(\mathbf{s}_2, \dots, \mathbf{s}_A)|^2 e^{i\sum_{j=2}^A \chi_j(\mathbf{b}-\mathbf{s}_j)} \prod_{j=2}^A d\mathbf{s}_j. \quad (2.43)$$

Rozptylová amplituda přeepsaná pomocí této definice a vztahu (2.42)

$$F_{fi}(\mathbf{k}, \mathbf{k}') = \frac{k}{2\pi i} \int e^{i(\mathbf{k}-\mathbf{k}')\mathbf{b}} d^2b \int \varphi_f(\mathbf{s}_1) \{e^{i\chi_{opt}^{(A-1)}(\mathbf{b})+i\chi_1(\mathbf{b}-\mathbf{s})} - 1\} \varphi_i(\mathbf{s}_1) d\mathbf{s}_1. \quad (2.44)$$

Toto zjednodušení se nazývá optická limita [1].

Pro získání diferenciálního účinného průřezu neelastického rozptylu použijeme vztahu (2.38) a pouze odečteme rozptylovou amplitudu elastického rozptylu

$$\left(\frac{d\sigma}{d\Omega}\right)_{inel}^{p+A} = \sum_f |F_{fi}(\mathbf{k}', \mathbf{k})|^2 - |F_{ii}(\mathbf{k}', \mathbf{k})|^2 \quad (2.45)$$

Výsledný diferenciální účinný průřez můžeme psát jako

$$\left(\frac{d\sigma}{d\Omega}\right)_{inel}^{p+A} = \left(\frac{k}{2\pi}\right)^2 \int d^2B e^{-\sigma T(\mathbf{B})} \int d^2B' e^{i(\mathbf{k}-\mathbf{k}')\mathbf{B}'} \left\{ e^{\frac{T(\mathbf{B})}{k^2} \int e^{-i\mathbf{q}\mathbf{B}'} |f(\mathbf{q})| d^2q} - 1 \right\}, \quad (2.46)$$

kde  $T(\mathbf{B}) = \int \rho(\mathbf{B}, z) dz$  a integrace probíhala přes nové proměnné, které jsou dány vztahy  $\mathbf{B} = \frac{1}{2}(\mathbf{b} + \mathbf{b}')$  a  $\mathbf{B}' = \frac{1}{2}(\mathbf{b} - \mathbf{b}')$ . Pokud bychom diferenciální účinný průřez rozvinuli do řady podle nukleonového účinného průřezu, první řád rozvoje by odpovídal jednoduchému rozptylu a další řády pak vícenásobnému rozptylu na nukleonech jádra.

Pokud úhlové rozdělení zintegrujeme přes všechny směry  $\mathbf{k}'$  ve významu přibližného vztahu  $d\Omega_{k'} \approx \frac{d^2k'}{k'^2}$ , získáme integrální neelastický účinný průřez

$$\sigma_{inel}^{p+A} = \int d^2B e^{-\sigma_{abs}^{NN} T(\mathbf{B})} \left\{ 1 - e^{-T(\mathbf{B}) \int |f(\mathbf{q})| \frac{d^2q}{k^2}} \right\}. \quad (2.47)$$

Protože platí přibližný vztah  $\frac{d^2q}{k^2} \approx d\Omega_q$  a použijeme-li vztah (2.10), dostaneme ve vztahu (2.47) výraz pro rozptylový nukleon-nukleonový účinný průřez a lze tedy psát [3]

$$\sigma_{inel}^{p+A} = \int d^2B e^{-\sigma_{abs}^{NN} T(\mathbf{B})} \left\{ 1 - e^{-T(\mathbf{B}) \sigma_{scatt}^{NN}} \right\}. \quad (2.48)$$



Pokud neprobíhá absorpce,  $\sigma_{abs} = 0$ , získáme tento vztah pro neelastický účinný průřez hadron-jaderné srážky

$$\sigma_{inel}^{p+A} = \int d^2B \{1 - e^{-T(\mathbf{B})\sigma_{scatt}^{NN}}\}. \quad (2.49)$$

Tento vztah je ještě diskutován za rovnicí (4.12) a srovnán se vztahem, jenž popisuje lépe neelastický účinný průřez menších jader, pro které optická limita není dobrou aproximací.

## Vstupy do Glauberových výpočtů

Pro výpočet účinného průřezu jádra i geometrických veličin, které budou popsány v příští kapitole, je třeba znát určitá experimentální data jako vstup. V zásadě jde o hustotu jádra, která je známá z rozptylových experimentů s elektrony, a fitované hodnoty hadron–nukleonových účinných průřezů.

### 3.1 Hustota jádra

Hustota jádra může být parametrizována různými způsoby v závislosti na tom, zda počítáme lehká nebo těžká jádra. Pro těžká jádra jako  $\text{Al}^{27}$ ,  $\text{Cu}^{63}$ ,  $\text{I}^{110}$ ,  $\text{Au}^{197}$ ,  $\text{Pb}^{208}$ ,  $\text{U}^{238}$  je vhodné použít Wood–Saxonovou parametrizaci [10], [13]

$$\rho(r) = \rho_0 \frac{1 + w\left(\frac{r}{R_A}\right)^2}{1 + e^{\frac{r-R_A}{c}}}. \quad (3.1)$$

Hodnoty všech parametrů jsou vypsány v tabulce 3.1. Při použití Wood–Saxonovy parametrizace potřebujeme znát pro každé jádro vždy tři parametry:  $R_A$  charakterizuje poloměr jádra,  $c$  je tloušťka povrchu a  $w$  charakterizuje odchylky od sférického tvaru. Pro všechna jádra, která byla při výpočtech použita, je hodnota parametru  $w$  rovna nule, tudíž její hodnota ani není v tabulce 3.1 uvedena.

Konstanta  $\rho_0$  odpovídá hustotě nukleonů v centru jádra a lze ji určit z normalizace

$$\int \rho(r) d^3r = A. \quad (3.2)$$

Pro lehká jádra jako  $\text{C}^{12}$ ,  $\text{O}^{16}$  je vhodnější použít parametrizaci harmonického oscilátoru (dále HO), která má Gaussovský průběh [16]. Parametrizace HO má tento

Jádro	Parametrizace	$R_A[fm]$	$\alpha[fm]$	$c[fm]$
$C^{12}$	HO	1,692	1,082	–
$O^{16}$	HO	1,833	1,544	–
$Al^{27}$	WS	3,480	–	0,519
$Cu^{63}$	WS	4,616	–	0,596
$I^{110}$	WS	5,558	–	0,535
$Au^{197}$	WS	6,750	–	0,535
$Pb^{208}$	WS	6,873	–	0,549
$U^{238}$	WS	7,189	–	0,600

**Tabulka 3.1:** Parametry jaderných hustot podle různých parametrizací. HO značí parametrizaci harmonického oscilátoru, WS značí Wood–Saxonovu parametrizaci [16], [13].

tvar

$$\rho_0(b) = \rho_0 \left( 1 + \alpha \frac{r^2}{R_A^2} \right) \exp \left( -\frac{r^2}{R_A^2} \right), \quad (3.3)$$

kde  $\rho_0 = (\sqrt{\pi}R_A)^{-3}(1 + 1,5\alpha)$ . Pro tuto parametrizaci je potřeba znát jen parametr  $\alpha$  a poloměr jádra  $R_A$ . Hodnoty parametrů jsou opět vyznačeny v tabulce 3.1. Souhrnný přehled různých parametrizací hustot jádra je včetně všech parametrů je také uveden v [17].

## 3.2 Neelastický hadron–nukleonový účinný průřez

Glauberův model řeší srážku hadronu s jádrem jako postupný mnohonásobný rozptyl na jednotlivých nukleonech. Tento přístup vyžaduje jako vstup změřený neelastický hadron–nukleonový účinný průřez. Protože hadron–nukleonový účinný průřez závisí na energii, zaneseme nám do výpočtu energetickou závislost na těžiškové energii  $\sqrt{s}$  [12]

$$\sigma^{ab} = Z^{ab} + B \log^2(s/s_0) + Y_1^{ab}(s_1/s)^{\eta_1} - Y_2^{ab}(s_1/s)^{\eta_2}, \quad (3.4)$$

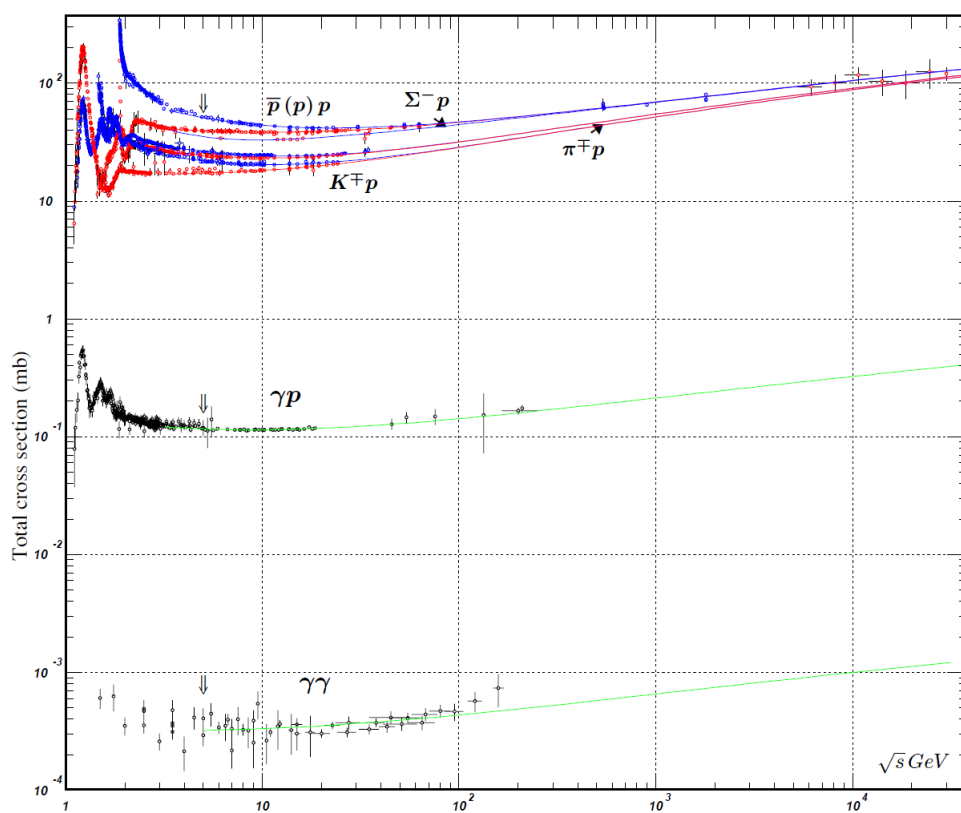
kde  $Z^{ab}$ ,  $B$ ,  $Y_i^{ab}$  jsou v mb a  $s$ ,  $s_1$  a  $s_0$  jsou v  $\text{GeV}^2$ . Exponenty  $\eta_1$  a  $\eta_2$  nezávisí na srážejících se částicích. Škála  $s_1$  je fixována na hodnotě  $1 \text{ GeV}^2$  a  $\sqrt{s_0}$  na hodnotě  $5,38 \text{ GeV}$ . Průběh účinných průřezů v závislosti na energii je vykreslen na obrázku 3.2. Všechny fity jsou provedeny pro data nad  $\sqrt{s} \geq 5 \text{ GeV}$ .

Projektíl/Terč	Z	$Y_1$	$Y_2$	B [mb]	$\eta_1$	$\eta_2$	$\sqrt{s_0}$ [GeV]
$p/p$	35,45	42,53	33,34				
$\pi^+/p$	28,86	19,24	6,03	0,308	0,458	0,545	5,38
$K^-/p$	17,87	7,14	13,45				

**Tabulka 3.2:** Parametry jaderných hustot podle různých parametrizací. HO značí parametrizaci harmonického oscilátoru, WS značí Wood–Saxonovu parametrizaci [12].

Elastický nukleon–nukleonový rozptyl lze při dostatečně vysokých energiích zanedbat, ale pro nižší energie jsme od celkového účinného průřezu (3.4) elastický účinný průřez odečítali (opět z naměřených dat dostupných na [12]).

Pro srovnání zde uvádíme některé hodnoty účinných průřezů proton–protonové srážky. Pro energii  $\sqrt{s} = 20$  GeV (CERN SPS) dostaneme 32 mb, 40 mb odpovídá energii  $\sqrt{s} = 200$  GeV (RHIC) a energii  $\sqrt{s} = 5000$  GeV (LHC) by měl odpovídat neelastický účinný průřez asi 46 mb.



**Obrázek 3.1:** Průběh elementárních účinných průřezů pro nalétávající proton,  $\pi^\pm$ ,  $K^\pm$  a  $\gamma$  v závislosti na těžišťové energii srážky  $\sqrt{s}$  [12].

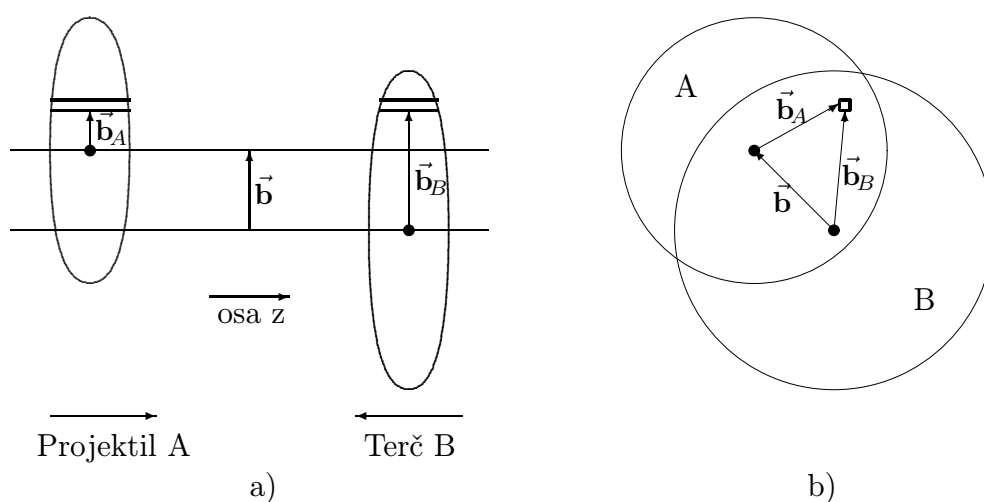
## Geometrie srážky

Přirozený způsob, jak zkoumat nukleon–jaderné srážky, je snažit se je porovnat s elementárními nukleon–nukleonovými a ptát se, kolik nukleonů z jádra se srážky účastní (označujeme  $N_{part}$ ) nebo kolik elementárních nukleon–nukleonových srážek (označujeme  $N_{coll}$ ) nastane při srážce dvou jader. Tyto pozorovatelné související s geometrií srážky jsou jednou ze základních vlastností zkoumaných při srážkových experimentech.

V této kapitole se budeme zabývat takovou aproximací jádro–jaderné srážky, kdy se nemění geometrické uspořádání nukleonů při srážce. To znamená, že budeme zanedbávat rychlost pohybu nukleonů v jádře oproti rychlosti nalétávající částice. Pro zjednodušení nebudeme odlišovat nukleony na protony a neutrony. Jako vstup do těchto výpočtů je třeba znát fitovaný nukleon–nukleonový neelastický průřez a hustotu jader parametrizovanou různými způsoby, které budou uvedeny v předchozí kapitole 3. Veličiny, které popisují srážku, například účinný průřez, lze určit pouze z pravděpodobnosti jejich srážky při určité vzájemné poloze nalétávajících jader a dané poloze nukleonů v jádře. Převážná část textu v této kapitole, pokud nebude uvedeno jinak, čerpá z materiálů [13] a [18].

Mějme uspořádání takové, že jedno jádro, budeme ho nazývat jádro  $A$ , nalétává na terčové jádro  $B$  se srážkovým parametrem  $b$ . Počet nukleonů v prvním jádře si označme  $A$ , počet nukleonů v druhém jádře budeme značit  $B$ . Srážku těchto dvou jader budeme popisovat pomocí binárních srážek jednotlivých nukleonů a přitom budeme předpokládat, že dochází k mnohonásobnému rozptylu nalétávajícího nukleonu na nukleonech z terčového jádra. Konfigurace jader před srážkou je zobrazena na obr. 4. Při dostatečně vysokých energiích lze předpokládat, že jednotlivé srážky

nezmění trajektorii nalétávajícího nukleonu a lze ji tedy považovat zjednodušeně za přímou, rovnoběžnou s osou  $z$ . Za nukleony, které se při kolizi jader vzájemně srazí, budeme proto uvažovat ty ležící v úzkých pásech přímo naproti sobě (vyznačený na nákresu). Na obr. 4b je zobrazena srážka z pohledu směru nalétávající částice. Zde je vidět, že nukleony, které se srazí budou ležet uvnitř kruhové výseče (tyto nukleony budeme nazývat participanty) a nukleony, které se neúčastní srážky budou ležet mimo (tyto nukleony se nazývají diváky).



**Obrázek 4.1:** Nákres srážky projektilu A s jádrem B při srážkovém parametru  $\mathbf{b}$  za a) z bočního pohledu, b) z frontálního pohledu ve směru osy  $z$ .

V dalším kroku je potřeba definovat pravděpodobnost, že při daných pozicích nukleonů a daném srážkovém parametru ke srážce nukleonů v jádrech dojde.

## 4.1 Optická tloušťka

Pokud budou od sebe nukleony z nalétávajících jader vzájemně vzdáleny v příčné rovině ve vzdálenosti  $b$ , potom pravděpodobnost, že dojde k nukleon–nukleonové srážce v elementu příčné plochy  $d\mathbf{b}$ , bude  $t(\mathbf{b})d\mathbf{b}$ . Tato funkce vyjadřuje efektivní tloušťku nukleonu [18], má rozměr inverzní plochy a je normovaná k jedné

$$\int t(\mathbf{b})d^2b = 1. \quad (4.1)$$

Pro nepolarizované nukleony bude srážkový parametr záviset pouze na velikosti, nikoli na jeho orientaci. Bude tedy platit  $|\mathbf{b}| = b$  a tudíž lze psát  $t(\mathbf{b}) = t(b)$ .

Pravděpodobnost, že nukleon najdeme v jádře A na souřadnicích  $(\mathbf{b}_A, z_A)$  v elementu objemu  $d^2b_A dz_A$ , budeme značit  $\rho_A(\mathbf{b}_A, z_A) d_A^2 dz_A$ , kde  $\rho$  je spojitá funkce hustoty nukleonů. Tato funkce je normalizovaná na počet nukleonů v jádře

$$\int \rho_A(\mathbf{b}_A, z_A) d^2b_A dz_A = A. \quad (4.2)$$

Stejně tak bude pravděpodobnost nalezení nukleonu v pozici  $(\mathbf{b}_B, z_B)$  v elementu objemu  $d^2b_B dz_B$  v jádře B  $\rho_B(\mathbf{b}_B, z_B) d_B^2 dz_B$  opět normovaná na počet nukleonů jádra B

$$\int \rho_B(\mathbf{b}_B, z_B) d^2b_B dz_B = B. \quad (4.3)$$

Zavedeme si funkci  $T_A(\mathbf{b}) = \int \rho_A(\mathbf{b}_A, z_A) dz_A$ , která vyjadřuje jakou efektivní tloušťku má nalétávající jádro při srážce. Tuto funkci budeme nazývat optickou tloušťkou jádra A. Analogicky pro jádro B bude optická tloušťka  $T_B(\mathbf{b}) = \int \rho_B(\mathbf{b}_B, z_B) dz_B$ .

Pravděpodobnost, že při kolizi jader v uspořádání, jako je na obrázku 4 dojde ke srážce nukleonů, které jsou ve svých souřadnicích ve vyznačených pásech, je

$$T_{AB}(\mathbf{b}) \sigma_{neel}^{NN} = \int \rho_A(\mathbf{b}_A, z_A) d^2b_A dz_A \rho_B(\mathbf{b}_B, z_B) d^2b_B dz_B t(\mathbf{b} - \mathbf{b}_A - \mathbf{b}_B) \sigma_{inel}^{NN}, \quad (4.4)$$

kde v první závorce je pravděpodobnost, že nukleon z jádra A je v souřadnicích  $(\mathbf{b}_A, z_A)$  v elementu objemu  $d^2b_A dz_A$ , v druhé závorce je pravděpodobnost umístění nukleonu z jádra B v souřadnicích  $(\mathbf{b}_B, z_B)$  v elementu objemu  $d^2b_B dz_B$  a poslední člen  $t(\mathbf{b} - \mathbf{b}_A - \mathbf{b}_B) \sigma_{inel}^{NN}$  vyjadřuje pravděpodobnost, že nastane nukleon–nukleonová srážka, přičemž  $\sigma_{inel}^{NN}$  je neelastický účinný průřez pro srážku nukleonů. Elastické srážky neuvažujeme, protože se při nich přenáší pouze malá část energie a tudíž je lze ve výsledném efektu zanedbat. Funkce  $T_{AB}$  se nazývá funkcí překryvu jader A a B.

Pokud budeme považovat nukleony za bodové částice, tak funkce  $t(\mathbf{b} - \mathbf{b}_A - \mathbf{b}_B)$  přejde v  $\delta$ -funkci, přes kterou můžeme ve vztahu (4.4) zintegrovat. Potom lze vztah pro funkci překryvu jader (4.4) přepsat pomocí optických tloušťek jednotlivých jader [10]

$$T_{AB}(\mathbf{b}) = \int T_A(\mathbf{b}_A) T_B(\mathbf{b}_A - \mathbf{b}) d^2b_A. \quad (4.5)$$

Pro jádra, která nejsou deformovaná ani orientovaná, platí  $T_A(\mathbf{b}_A) = T_A(b_A)$  a tedy i  $T_{AB}(\mathbf{b}) = T_{AB}(b)$ . Funkce  $T_{AB}$  je normalizovaná na  $AB$  takto

$$\int T_{AB}(\mathbf{b}) d^2b = AB \quad (4.6)$$



Pokud nukleony za bodové částice nepovažujeme, pak obecný tvar funkce  $t(b)$  bude mít Gaussovský průběh [15], [16]

$$t(b) = \frac{(-b^2/r_0^2)}{\pi r_0^2}, \quad (4.7)$$

kde  $r_0$  je parametr rozsahu působení, jehož velikost se jen málo mění s energií a lze ho brát konstantní v intervalu asi 2 – 200 MeV,  $r_0^2 = 0.439 \text{ fm}^2$ .

## 4.2 Pravděpodobnost srážky, účinný průřez

Při studiu srážek nás bude zajímat, jaká je pravděpodobnost, že při srážce jader při srážkovém parametru  $b$  nastane právě  $n$  srážek z  $AB$  možných [18]. Pokud předpokládáme, že počet srážek má binomické rozdělení pravděpodobnosti, získáme vztah

$$P(n, \mathbf{b}) = \binom{AB}{n} \left[ \frac{T_{AB}(\mathbf{b})}{AB} \sigma_{inel}^{NN} \right]^n \left[ 1 - \frac{T_{AB}(\mathbf{b})}{AB} \sigma_{inel}^{NN} \right]^{AB-n}, \quad (4.8)$$

kde první člen je počet všech možných kombinací počtu srážek, které mohou nastat, z  $AB$  možných. Druhý člen vyjadřuje pravděpodobnost, že se  $n$  nukleonů srazí a třetí člen je pravděpodobnost, že  $AB - n$  srážek nenastane. Celková pravděpodobnost, že nastane srážka při srážkovém parametru  $b$ , je dána součtem předchozích pravděpodobností přes všechny možné počty srážek od  $n = 1$  do  $n = AB$ . Pokud bychom chtěli znát pravděpodobnost, že nastane  $n$  srážek při srážce pouze protonu s jádrem B, stačí položit v předchozím vztahu  $A = 1$  a dostaneme

$$P(n, \mathbf{b}) = \binom{B}{n} \left[ \frac{T_B(\mathbf{b})}{B} \sigma_{inel}^{NN} \right]^n \left[ 1 - \frac{T_B(\mathbf{b})}{B} \sigma_{inel}^{NN} \right]^{B-n} \quad (4.9)$$

Celkovou pravděpodobnost, že nastane alespoň jedna srážka, získáme vysčítáním přes všechny možnosti, tedy

$$\frac{d\sigma_{inel}^{A+B}}{d^2b} = \sum_{AB}^{n=1} P(n, \mathbf{b}) = 1 - \left[ 1 - \frac{T_{AB}(\mathbf{b})}{AB} \sigma_{inel}^{NN} \right]^{AB}. \quad (4.10)$$

Abychom získali celkový neelastický účinný průřez pro srážku jader, integrujeme předchozí vztah přes všechny možné hodnoty srážkových parametrů nalétávajícího jádra a získáme

$$\sigma_{inel}^{A+B} = \int_0^\infty 2\pi b db \left\{ 1 - \left[ 1 - \frac{T_{AB}(b)}{AB} \sigma_{inel}^{NN} \right]^{AB} \right\}. \quad (4.11)$$

Pokud bychom chtěli celkový účinný průřez pro srážku nukleonu s jádrem B, položíme  $A = 1$  a protože místo nalétávajícího jádra A máme bodovou částici, jejíž efektivní plocha pro srážku je jeden jediný bod, tak dosazením delta funkce místo optické tloušťky  $T_A(b)$  jádra A do vztahu (4.5) získáme místo funkce překryvu pouze optickou tloušťku terčového jádra  $T_B(b)$ .

$$\sigma_{inel}^{p+B} = \int_0^\infty 2\pi b db \left\{ 1 - \left[ 1 - \frac{T_B(b)}{B} \sigma_{inel}^{NN} \right]^B \right\} \quad (4.12)$$

Pro snadnější numerický výpočet lze v limitě místo výrazu  $\left[ 1 - \frac{T_B(b)}{B} \sigma_{inel}^{NN} \right]^B$  počítat s exponenciálou  $\exp(-T_B(b) \sigma_{inel}^{NN})$ . Toto zjednodušení aproximuje nejlépe při výpočtech účinných průřezů těžkých jader s dostatečně velkým nukleonovým číslem  $B$  a nazývá se optická limita. Právě vyjádření účinného průřezu pomocí optické limity jsme získali v kapitole 2, vztah (2.49).

## 4.3 Počet binárních srážek a participantů

### 4.3.1 Jádro–jaderná srážka

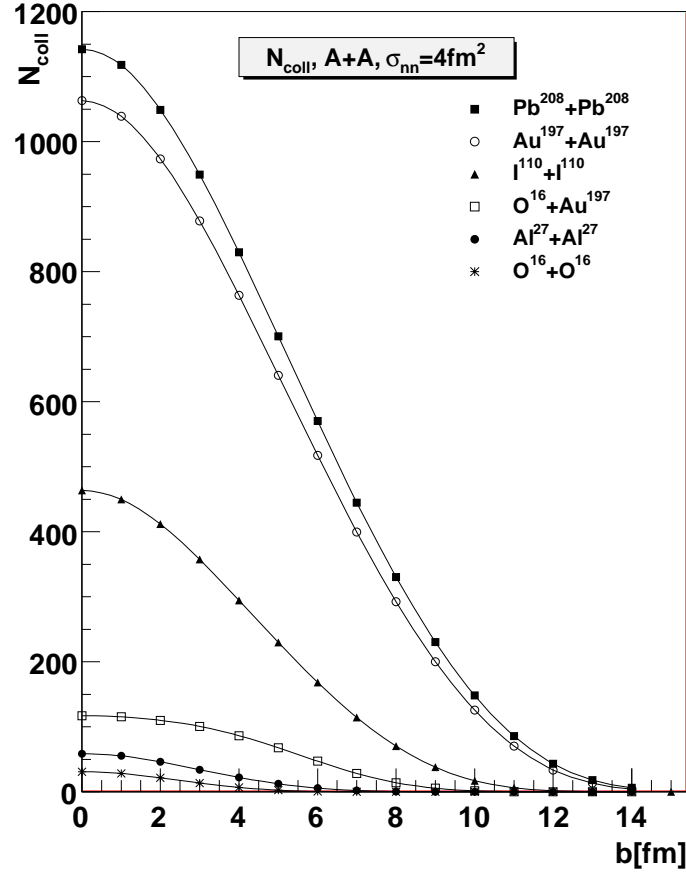
Chceme-li znát střední počet srážek pro jádro–jadernou srážku, použijeme vztahu (4.9) pro pravděpodobnost srážky  $n$  nukleonů při srážkovém parametru  $b$  a vysčítáme přes všechny možnosti počtu srážek s vahou této pravděpodobnosti.

Počet binárních srážek při srážce jader A a B v závislosti na srážkovém parametru  $b$  vpadá takto [18].

$$N_{coll}(b) = \sum_{n=1}^{AB} n P(n, b) = T_{AB}(b) \sigma_{inel}^{NN}. \quad (4.13)$$

Pro různá srážející se jádra je počet binárních srážek v závislosti na srážkovém parametru nalétávajícího jádra vykreslen na obr. 4.3.2. Z obrázku je zřejmé, že největší počet binárních srážek nastává pro centrální srážku ( $b = 0$ ). Při výpočtu byl použit nukleon–nukleonový účinný průřez  $\sigma_{inel}^{NN} = 40$  mb, což odpovídá težišťové energii při srážce nukleonů asi  $\sqrt{s} = 200$  GeV. Protože počet binárních srážek je přímo úměrný účinnému průřezu, bude se v závislosti na energii nezanedbatelně měnit.

Chceme-li získat počet nukleonů účastnících se srážky při daném srážkovém parametru, můžeme uvažovat zvlášť participanty z jádra A a z jádra B. Počet participantů

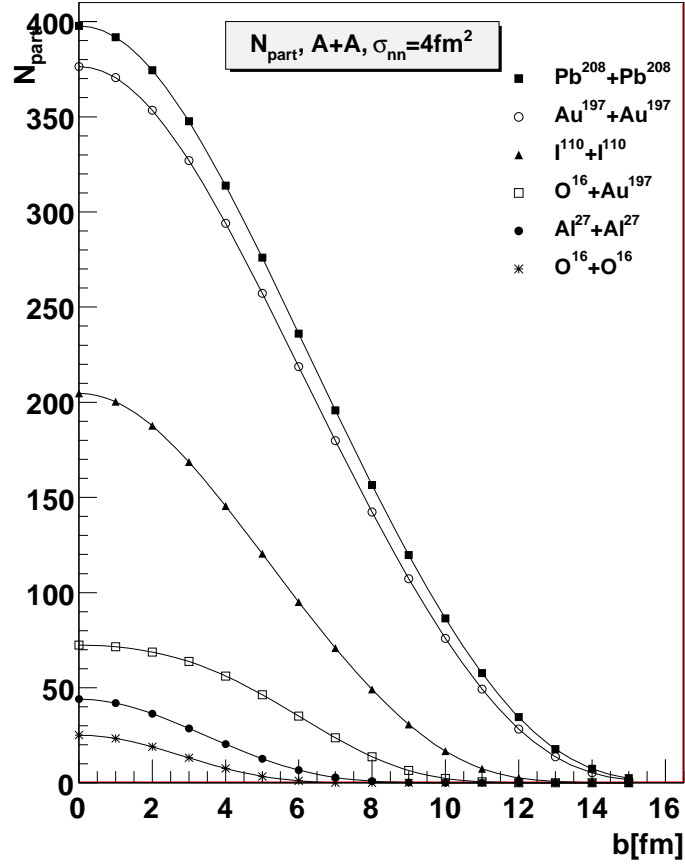


**Obrázek 4.2:** Počet binárních srážek nukleonů při srážce jader:  $O^{16} + O^{16}$ ,  $Al^{27} + Al^{27}$ ,  $O^{16} + Au^{197}$ ,  $Au^{197} + Au^{197}$  a  $Pb^{208} + Pb^{208}$  při hodnotě neelastického nukleon–nukleonového účinném průřezu  $\sigma_{inel}^{NN} = 4 \text{ fm}^2$ .

v jádře A bude úměrný optické tloušťce  $T_A(s)$  jádra A v příčné poloze  $s$  s vahou pravděpodobnosti, že nukleon v té dané poloze bude účastníkem srážky, tedy že nastane nukleon–jaderná srážka s jádrem B při vzájemné příčné poloze jeho nukleonů  $s - \mathbf{b}$  [13]. Obdobně získáme počet participantů pro jádro B.

Pro celkový počet participantů z jádra A i B při srážkovém parametru  $b$  máme potom vztah

$$\begin{aligned}
 N_{part}(\mathbf{b}) = & \int T_A(s) \left\{ 1 - \left[ 1 - \frac{T_B(s - \mathbf{b})}{B} \sigma_{inel}^{NN} \right]^B \right\} d^2s + \\
 & + \int T_B(s - \mathbf{b}) \left\{ 1 - \left[ 1 - \frac{T_A(s)}{A} \sigma_{inel}^{NN} \right]^A \right\} d^2s.
 \end{aligned} \tag{4.14}$$



**Obrázek 4.3:** Počet participantů při srážce jader:  $O^{16} + O^{16}$ ,  $Al^{27} + Al^{27}$ ,  $O^{16} + Au^{197}$ ,  $Au^{197} + Au^{197}$  a  $Pb^{208} + Pb^{208}$  při hodnotě neelastického nukleon–nukleonového účinném průřezu  $\sigma_{inel}^{NN} = 4 \text{ fm}^2$ .

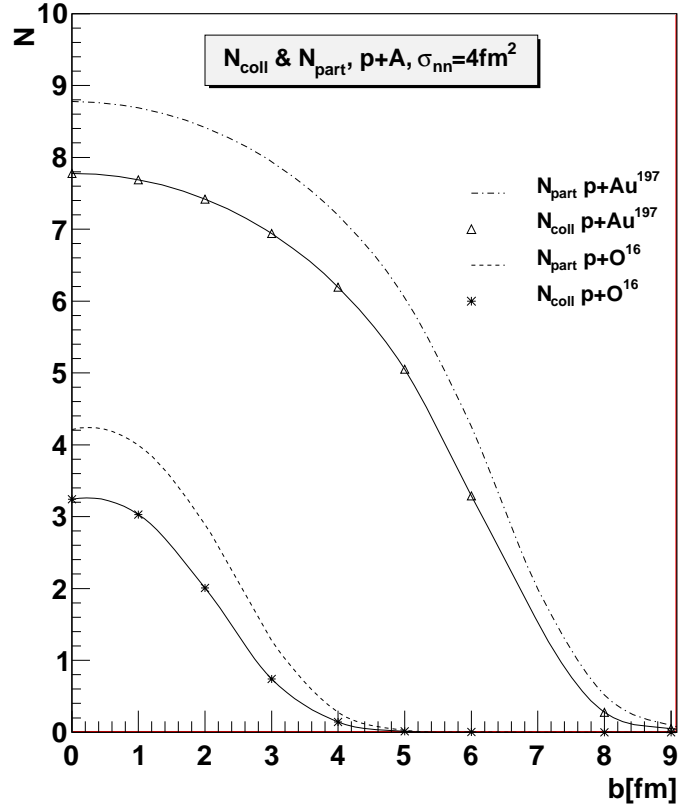
### 4.3.2 Hadron–jaderná srážka

Pokud budeme chtít znát počet binárních srážek nebo počet participantů pro nukleon–jadernou srážku, stačí položit ve vztazích (4.13) a (4.14) optickou tloušťku nalétávajícího jádra  $T_A$  rovnou  $\delta$ -funkci a  $A = 1$ , což vyjadřuje to, že místo jádra  $A$  budeme uvažovat bodovou částici.

Počet binárních srážek v hadron–jaderné srážce bude potom

$$N_{coll}(b)^{p+B} = T_B(b)\sigma_{inel}^{NN}. \quad (4.15)$$

Pro počet participantů v hadron–jaderné srážce budeme mít po zintegrování přes



**Obrázek 4.4:** Počet participantů a počet binárních srážek pro  $p + O^{16}$ ,  $p + Au^{197}$  při nukleon–nukleonovém účinném průřezu  $\sigma_{inel}^{NN} = 4 \text{ fm}^2$ .

$\delta$ -funkci vztah

$$N_{part}(b)^{p+B} = \left[ 1 - \left( 1 - \frac{T_B(b)}{B} \sigma_{inel}^{NN} \right) \right]^B + \sigma_{inel}^{NN} T_B(b). \quad (4.16)$$

Srovnání počtu binárních srážek a počtu participantů pro srážku protonu s jádrem  $Au^{197}$  a protonu s jádrem  $O^{16}$  je vidět na obrázku 4.3.2.

Pro centrální srážku platí, že pokud místo jádra  $A$  uvažují nukleon, pak počet participantů z jádra  $B$  bude roven počtu binárních srážek a celkový počet participantů je tedy

$$N_{part}^{p+A} = N_{coll}^{p+A} + 1 \quad (4.17)$$

Pro jádro–jaderné srážky žádná podobná rovnost neplatí.

Hlavním rozdílem mezi hadron–jadernými a jádro–jadernými srážkami je ten, že v hadron–jaderných srážkách je počet participantů větší než počet binárních srážek,

zatím co v jádro–jaderných srážkách je počet binárních srážek větší než počet participantů díky mnohonásobnému rozptylu.

## 4.4 Průměrný a maximální počet binárních srážek, participantů

Při reálných srážkových experimentech většinou nevíme, při jakém srážkovém parametru srážka nastala, proto potřebujeme zjistit, jaký je střední počet participantů a střední počet binárních srážek.

### 4.4.1 Střední počet binárních srážek

Pokud chceme zjistit střední počet binárních srážek, můžeme postupovat dvěma způsoby [18].

První možností je použít již odvozený vztah pro počet binárních srážek závislý na srážkovém parametru (4.13) (nebo (4.15) pro nukleon–jadernou srážku) a vysčítat přes všechny srážkové parametry s vahou pravděpodobnosti, že při srážkovém parametru  $\mathbf{b}$  nastane ve srážce jader alespoň jedna neelastická srážka nukleonů. Počet nukleon–nukleonových srážek za podmínky, že srážka jader  $A$  a  $B$  nastane, je

$$N'_{coll}(b) = \frac{N_{coll}(b)}{1 - \left[1 - \frac{T_{AB}(b)}{AB} \sigma_{inel}^{NN}\right]^{AB}} = \frac{T_{AB}(b) \sigma_{inel}^{NN}}{1 - \left[1 - \frac{T_{AB}(b)}{AB} \sigma_{inel}^{NN}\right]^{AB}}. \quad (4.18)$$

Poté budeme chtít získat střední hodnotu této veličiny vysčítáním přes všechny možné srážkové parametry s vahou pravděpodobnosti diferenciálního účinného průřezu, který dosadíme ze vztahu (4.10). Dále použijeme vyjádření celkového účinného průřezu pro srážku jader  $A$  a  $B$  (4.11) a postupně tedy získáme vztah

$$\langle N_{coll} \rangle = \frac{\int d^2b N'_{coll}(b) \frac{d\sigma_{inel}^{A+B}}{d^2b}}{\int d^2b \frac{d\sigma_{inel}^{A+B}}{d^2b}} = \frac{\int d^2b N'_{coll}(b) \{1 - [1 - \frac{T_{AB}(b)}{AB} \sigma_{inel}^{NN}]^{AB}\}}{\int d^2b \{1 - [1 - \frac{T_{AB}(b)}{AB} \sigma_{inel}^{NN}]^{AB}\}} = \frac{AB \sigma_{inel}}{\sigma_{inel}^{A+B}}. \quad (4.19)$$

Druhou možností je odvodit si vztah pro pravděpodobnost, že  $n$  srážek nastane při libovolném srážkovém parametru  $\mathbf{b}$  a vysčítat počet srážejících se nukleonů s vahou této pravděpodobnosti. Pravděpodobnostní rozdělení počtu nukleon–nukleonových srážek získáme integrací přes všechny srážkové parametry

$$\mathcal{P}(n) = \frac{\int d^2b P(n, \mathbf{b})}{\sum_{n=1}^{AB} \int d^2b P(n, \mathbf{b})}, \quad (4.20)$$

přičemž ve jmenovateli po přehození sumy a integrálu lze využít vztahu (4.11), a tak získat vztah

$$\mathcal{P}(n) = \frac{\int d^2b \binom{AB}{n} \left[ \frac{T_{AB}(b)}{AB} \sigma_{inel} \right]^n \left[ 1 - \frac{T_{AB}(b)}{AB} \sigma_{inel} \right]^{AB-n}}{\sigma_{inel}^{AB}}. \quad (4.21)$$

Pro toto pravděpodobnostní rozdělení samozřejmě platí, že celková pravděpodobnost, tedy součet pravděpodobností při všech možných počtech srážek, musí dát 100%

$$\sum_{n=1}^{AB} \mathcal{P}(n) = 1. \quad (4.22)$$

Abychom tedy získali střední počet binárních srážek v jádro–jaderné srážce, vysčítáme počet srážek  $n$  s vahou této pravděpodobnosti

$$\sum_{n=1}^{AB} n \mathcal{P}(n) = \frac{AB \sigma_{inel}}{\sigma_{inel}^{AB}} \quad (4.23)$$

Je vidět, že jsme získali stejný tvar jako v případě (4.19).

Dále nás bude zajímat, jak střední počet binárních srážek bude vypadat pro nukleon–jadernou srážku. Jak už bylo zmíněno nukleon–jaderná srážka je pouze speciálním případem jádro–jaderné srážky a stačí položit  $B = 1$  a  $T_B(\mathbf{b}) = \delta(\mathbf{b})$ , tedy  $T_{AB}(\mathbf{b}) = T_A(\mathbf{b})$ . Tím získáme vztah pro průměrný počet srážek nukleonů v h+A srážce [2]

$$\langle N_{coll} \rangle = \frac{A \sigma_{inel}}{\sigma_{inel}^{pA}}. \quad (4.24)$$

#### 4.4.2 Střední počet participantů

Podobně budeme chtít zjistit střední počet participantů nezávislý na srážkovém parametru. Nejprve si opět vyjádříme počet participantů srážky za podmínky, že srážka jader  $A$  a  $B$  nastane

$$N'_{part}(b) = \frac{N_{part}(b)}{1 - \left[ 1 - \frac{T_{AB}(b)}{AB} \sigma_{inel}^{NN} \right]^{AB}}. \quad (4.25)$$

Využijeme vztahu (4.14) a opět vysčítáme přes všechny srážkové parametry s vahou diferenciálního účinného průřezu (4.10).

$$\langle N_{part} \rangle = \frac{\int d^2b N'_{part}(b) \frac{d\sigma_{inel}^{A+B}}{d^2b}}{\int d^2b \frac{d\sigma_{inel}^{A+B}}{d^2b}} = \frac{\int d^2b N'_{part}(b) \left\{ 1 - \left[ 1 - \frac{T_{AB}(b)}{AB} \sigma_{inel}^{NN} \right]^{AB} \right\}}{\int d^2b \left\{ 1 - \left[ 1 - \frac{T_{AB}(b)}{AB} \sigma_{inel}^{NN} \right]^{AB} \right\}}. \quad (4.26)$$

Ve jmenovateli je opět vidět vztah pro celkový účinný průřez pro srážku jader A a B (4.11) a čítec lze rozepsat. Je zřejmé, že střední počet participantů v jádro–jaderné srážce jader A a B je součet počtu participantů v jádře A a participantů v jádře B

$$\langle N_{part} \rangle = \langle N_{part}^A \rangle + \langle N_{part}^B \rangle. \quad (4.27)$$

Pro jednoduchost se budeme snažit spočítat pouze střední počet participantů v jádře B. Ve vztahu (4.26) si ve jmenovateli uvědomíme vztah pro celkový účinný průřez (4.11) a podle vztahu (4.25) a (4.14) si rozepíšeme člen  $N_{part}(b)$ . Získáme vztah pro průměrný počet participantů v jádro–jaderné srážce

$$\langle N_{part}^B \rangle = \frac{\int \overbrace{ds T_B(s)}^{=B} d^2b \left\{ 1 - \left[ 1 - \frac{T_A(b)}{A} \sigma_{inel}^{NN} \right]^A \right\}}{\sigma_{inel}^{A+B}} = \frac{B \sigma_{inel}^{h+A}}{\sigma_{inel}^{A+B}}, \quad (4.28)$$

kde bylo využito toho že optická tloušťka  $T_A(s)$  jádra A je normalizovaná k jedné při integraci přes všechny prostorové proměnné. Celkově tedy střední počet participantů v jádro–jaderné srážce bude [2]

$$N_{part} = \frac{B \sigma_{inel}^{h+A} + A \sigma_{inel}^{h+B}}{\sigma_{inel}^{A+B}}. \quad (4.29)$$

### 4.4.3 Maximální počet binárních srážek, participantů

Chceme-li zjistit, jaký bude maximální počet binárních srážek musíme maximalizovat hodnotu vztahu pro počet binárních srážek v závislosti na srážkovém parametru (4.13). Jediný člen, který by šlo nějakým způsobem odhadnout je funkce překryvu jader  $T_{AB}(b)$ . O této funkci vím, že je při vyscítání přes všechny srážkové parametry rovna  $AB$ , v extrémním případě by tedy její maximální hodnota mohla být  $AB$ . Největší počet binárních srážek při srážce jader A a B, který může nastat je tudíž

$$N_{coll}^{max} = AB \sigma_{inel}^{NN}. \quad (4.30)$$

Pro představu, jaký můžeme získat maximálního počtu participantů použijeme vztahu (4.14) a podíváme se, kdy jeho hodnota bude největší. Vidíme, že pod integrálem je vždy optická tloušťka jednoho z jader a výraz pro diferenciální účinný průřez druhého jádra – tento diferenciální účinný průřez mi vyjadřuje celkovou pravděpodobnost, že srážka jader při daném srážkovém parametru nastane. Je jasné, že



největší hodnota této pravděpodobnost může být jedna. Pokud si tam tuto největší hodnotu dosadíme, získáme vztah

$$N_{part} = \int d^2s T_A(\mathbf{s}) + \int d^2s T_B(\mathbf{s} - \mathbf{b}). \quad (4.31)$$

Dále můžeme použít úvahu, že největší počet participantů nastane při centrální srážce jader, dosadíme tedy  $b = 0$  a využijeme toho, že optická tloušťka je normalizovaná k počtu nukleonů jádra. Celkově tedy maximální počet participantů bude

$$N_{part}^{max} = A + B \quad (4.32)$$

Úvahy o maximálním počtu binárních srážek a počtu participantů jsou uvedeny v [13].

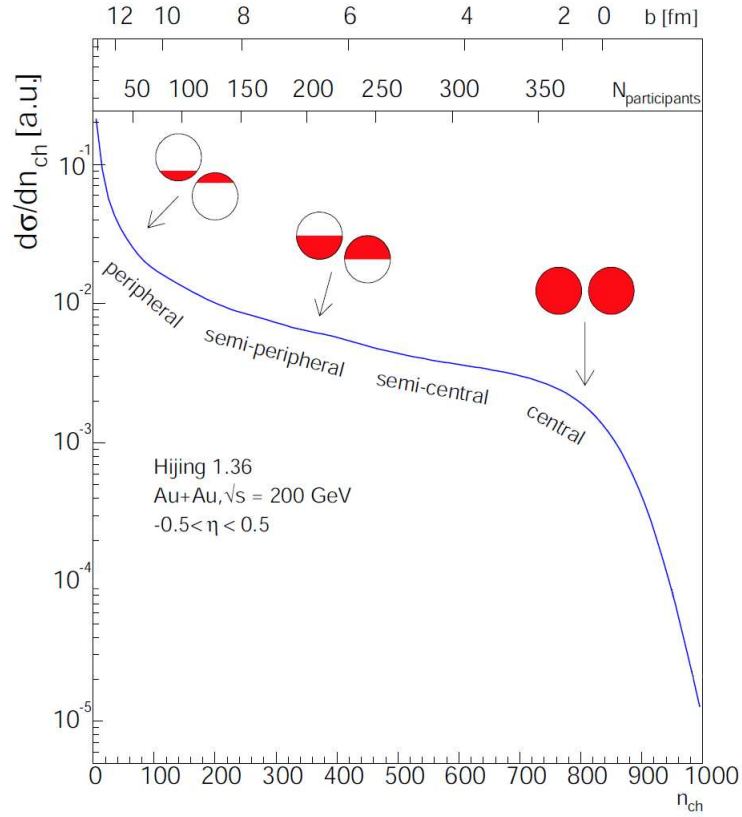
## 4.5 Určení centrality jádro–jaderné srážky

Jednou z významných veličin počítaných při srážkových procesech je právě centralita srážky. Centralita je hodnocením toho, jak moc čelní srážka nastala. Pokud se jádra sráží přímo, tj. se srážkovým parametrem blížícím se nule, říkáme, že nastala centrální srážka. Pokud se naopak jádra jen letmo minou, nazýváme srážku periferní. Centralita se většinou udává v nějakém procentuelním rozmezí, mluvíme o takzvaných třídách centrality. Například centrální srážku uvažujeme, pokud je centralita 0 – 10%.

Motivace pro počítání této veličiny spočívá v tom, že nám pomáhá rozhodnout, jaké efekty mohly při dané srážce nastat.

Reálně ve srážkových experimentech potřebujeme pro určení centrality měřit nějakou vhodnou pozorovatelnou, pro kterou předpokládáme korelaci s centralitou. Touto pozorovatelnou bývá multiplicita částic  $n$ , což je celkový počet částic vyprodukovaných při srážce, resp.  $n_{ch}$ -celkový počet nabitých částic. Při centrálnější srážce bývá multiplicita větší a naopak [10].

Pro danou třídu centrality můžeme pak dopočítat, kolik binárních nukleon–nukleonových srážek  $N_{coll}$  mohlo při srážce jader nastat nebo kolik předpokládáme, že se účastnilo nukleonů  $N_{part}$ . Abychom to mohli udělat, je třeba nejprve zjistit hraniční hodnoty srážkových parametrů pro danou třídu centrality. Předpokládejme, že nás bude zajímat třída centrality  $x_d - x_h\%$ . Využijeme znalosti diferenciálního účinného průřezu, jehož průběh je zobrazen na obrázku 4.5 a postupně dopočítáme



**Obrázek 4.5:** Ilustrace korelací mezi pozorovatelnými měřeními v detektoru  $n_{ch}$  a veličinami počítanými Glauberovým modelem jako srážkový parametr  $b$ , počet participantů srážky  $N_{part}$  [11].

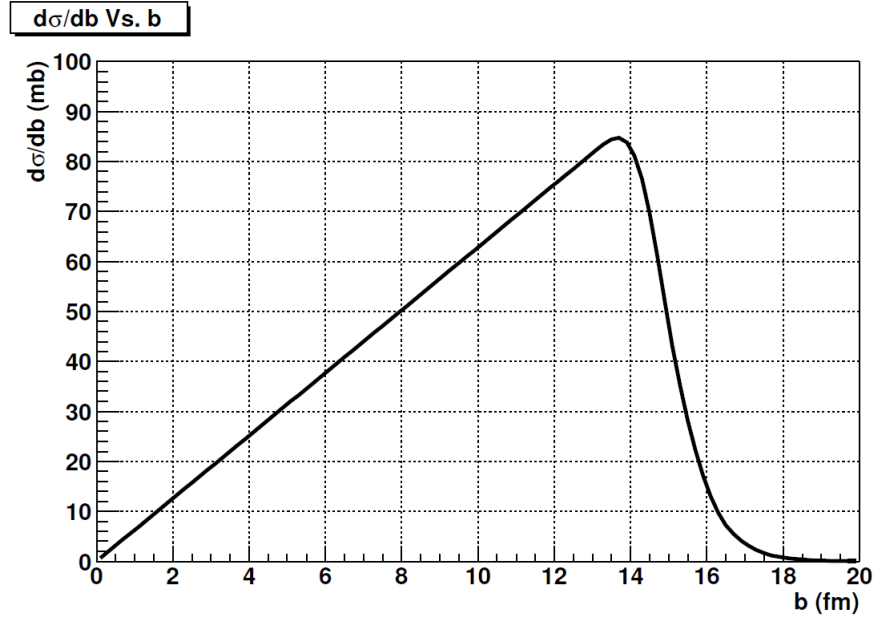
odpovídající hodnoty srážkových parametrů. Nejprve v prvním kroku budeme počítat pro třídu centrality  $0 - x_h\%$  první hranici srážkového parametru  $b_{max}$ , která odpovídá horní hranici centrality  $x_h\%$

$$\frac{\int_0^{b_{max}} d^2b \frac{d\sigma_{inel}^{A+B}}{d^2b}}{\int_0^\infty d^2b \frac{d\sigma_{inel}^{A+B}}{d^2b}} = x_h\%. \quad (4.33)$$

Pokud známe tuto krajní hodnotu  $b_{max}$ , můžeme dopočítat druhou hranici  $b_{min}$  odpovídající dolní hranici centrality  $x_d\%$

$$\frac{\int_{b_{min}}^{b_{max}} d^2b \frac{d\sigma_{inel}^{A+B}}{d^2b}}{\int_0^\infty d^2b \frac{d\sigma_{inel}^{A+B}}{d^2b}} = x_d\%. \quad (4.34)$$

Tímto způsobem lze získat krajní hodnoty srážkového parametru  $b_{min}$  a  $b_{max}$  pro požadovanou centralitu třídu  $x_d - x_h\%$  pro srážku jader A a B.



**Obrázek 4.6:** Neelastický diferenciální účinný průřez pro srážku Au + Au při  $\sqrt{s} = 200$  GeV [11]

Dále lze dopočítat průměrný počet binárních nukleon–nukleonových srážek v dané třídě centrality [10]

$$\langle N_{coll} \rangle_{x_d-x_h\%} = \frac{\sigma_{inel}^{NN} \int_{b_{min}}^{b_{max}} d^2b T_{AB}(b)}{\int_{b_{min}}^{b_{max}} d^2b \frac{d\sigma_{in}^{AB}}{d^2b}} = \frac{\sigma_{inel}^{NN} \int_{b_{min}}^{b_{max}} d^2b T_{AB}(b)}{\int_{b_{min}}^{b_{max}} d^2b \left\{ 1 - \left[ 1 - \frac{T_{AB}(b)}{AB} \sigma_{inel}^{NN} \right]^{AB} \right\}}. \quad (4.35)$$

Pokud nalistujete o pár stran zpět ke vztahu pro průměrný počet srážek (4.19) je vidět, že průměrný počet nukleon–nukleonových srážek v dané třídě centrality je analogický vztahu (4.19) pouze s odlišnými mezemi.

Vztah pro počet participantů v dané třídě centrality bude opět analogie se vztahem pro průměrný počet participantů (4.26) s tím rozdílem, že budeme integrovat pouze přes krajní hodnoty srážkových parametrů  $b_{min}$ ,  $b_{max}$ , které dané třídě cent-

rality odpovídají

$$\begin{aligned}
 \langle N_{part} \rangle_{x_d-x_h\%} = & \frac{B \int_{b_{min}}^{b_{max}} \left\{ 1 - \left[ 1 - \frac{T_A(b)}{A} \sigma_{inel}^{NN} \right]^A \right\} d^2b}{\int_{b_{min}}^{b_{max}} \left\{ 1 - \left[ 1 - \frac{T_{AB}(b)}{AB} \sigma_{inel}^{NN} \right]^{AB} \right\} d^2b} + \\
 & \frac{A \int_{b_{min}}^{b_{max}} \left\{ 1 - \left[ 1 - \frac{T_B(b)}{B} \sigma_{inel}^{NN} \right]^B \right\} d^2b}{\int_{b_{min}}^{b_{max}} \left\{ 1 - \left[ 1 - \frac{T_{AB}(b)}{AB} \sigma_{inel}^{NN} \right]^{AB} \right\} d^2b}.
 \end{aligned} \tag{4.36}$$

## Transparentnost jádra

Pokud chceme zjistit, jaké nové efekty, resp. nová fyzika, může být v jaderných srážkách obsažena, musíme je nějakým způsobem s elementárními srážkami porovnat. Toto porovnání vyjadřuje právě transparentnost nebo také průsvitnost jádra [8],[20], definovaná jako

$$Tr_A = \frac{\sigma_{inel}^{h+A}}{A\sigma_{inel}^{h+N}}, \quad (5.1)$$

kde  $\sigma_{hA}$  je celkový účinný průřez pro srážku hadronu s jádrem,  $\sigma_{hN}$  je celkový účinný průřez hadron–nukleonové srážky a  $A$  je počet nukleonů v srážce. Veličina  $Tr_A$  se také někdy nazývá koeficient propustnosti jádra, protože vlastně vyjadřuje kolikrát jádro propustí méně částic oproti terči  $A$  volných nukleonů. Účinný průřez pro hadron–jadernou srážku je menší než pro srážku s volným terčem  $A$ -nukleonů, v důsledku vzájemného stínění nukleonů v jádře. Z toho vyplývá, že transparentnost může nabývat hodnot  $0 < Tr_A \leq 1$ , kde případ  $Tr_A \rightarrow 1$  odpovídá limitně terči  $A$  volných nukleonů. Ze vztahu (5.1) je vidět, že transparentnost jádra závisí na účinném průřezu pro srážku projektilu s nukleonem, tzn. na typu částice a její energii, a také na nukleonovém čísle  $A$ , tedy na velikosti jádra.

### 5.1 Nízkoenergetická a vysokoenergetická limita

Závislost průsvitnosti jádra na energii jádra bude mít dva limitní případy, ve kterých lze tuto veličinu počítat, a to vysokoenergetickou a nízkoenergetickou limitu [8]. Rozdíl pro srážku při nízkých a vysokých energiích je způsoben rozdílným bodem vzniku částice. Při vysokých energiích vzniká částice již daleko před jádrem a tudíž „zažije“ při svém pohybu celou tloušťku jádra, zatímco při nízkých energiích vzniká

částice někde uvnitř jádra, tudíž při vystředování přes všechny možnosti vzniká průměrně v polovině jádra.

Pro rozlišení toho, kdy můžeme mluvit o vysokoenergetické a kdy o nízkoenergetické limitě, použijeme srovnání veličiny zvané koherenční délka  $l_c$  [19] s poloměrem jádra  $R_A$ . Protože hadron je složen z kvarků, můžeme se na elementární úrovni dívat na srážku jako na interakci kvarku s jaderným terčem. Dopadající kvark vyzařuje gluony, přičemž délka těchto fluktuací se nazývá koherenční čas. Po tento čas je nalétávající kvark se svými vyzářenými gluony v koherenci a my je nemůžeme pozorovat jednotlivě. V případě vysokých energií je délka této fluktuace, která se nazývá koherenční délka  $l_c$ , mnohem větší než poloměr jádra  $l_c \gg R_A$ . Pro nízké energie je koherenční délka je menší než střední vzdálenost mezi nukleony  $l_c < 1 - 2$  fm.

Abychom zjistili hranici těchto dvou limitních případů, podíváme se na závislost koherenční délky na energii. Koherenční délka je definovaná takto

$$l_c = \frac{1}{m_N x_2}, \quad (5.2)$$

přičemž  $m_N$  je hmotnost nukleonu a  $x_2$  se nazývá Bjorkenova škála a vyjadřuje, jaká část podélné hybnosti kvarků se účastní rozptylového procesu. Abychom odhadli těžišťovou energii srážky  $\sqrt{s}$ , která odpovídá dané koherenční délce  $l_c$ , lze psát velikost Bjorkenova  $x_2$  jako podíl škály a těžišťové energie

$$x_2 \cong \frac{0.5}{\sqrt{s}}. \quad (5.3)$$

Z těchto úvah získáme rozdělení kinematických režimů podle energií. Režim vysokých energií bude pro těžišťovou energii nad 100 GeV a nízkoenergetická limita bude platná zhruba do 5-20 GeV. Pro každý limitní případ bude platit jiný vztah pro transparentnost jádra. Souhrnně lze psát vztah pro transparentnost jádra takto [8]:

$$Tr_A = \frac{1}{A} \int d^2b \int dz \rho(b, z) \begin{cases} \exp(-\sigma_{tot}^{hN} T_z(b)) & \text{nízké energie } l_c < 2\text{fm} \\ \exp(-\sigma_{tot}^{hN} T(b)) & \text{vysoké energie } l_c \gg R_A \end{cases}, \quad (5.4)$$

kde faktor v exponenciále udává velikost ztenčení dopadajícího svazku v jádře, které závisí jednak na velikosti účinného průřezu dopadající částice a jednak na dráze, kterou vzniklá částice absolvuje v jádře. Protože při vysokých energiích vzniká částice daleko před jádrem, dráha, kterou potom proletí jádrem, bude odpovídat celé optické tloušťce jádra

$$T(b) = \int_{-\infty}^{+\infty} \rho(b, z) dz. \quad (5.5)$$

Naopak při nízkých energiích vzniká částice v jádře, takže bude započítána tloušťka pouze od bodu vzniku částice

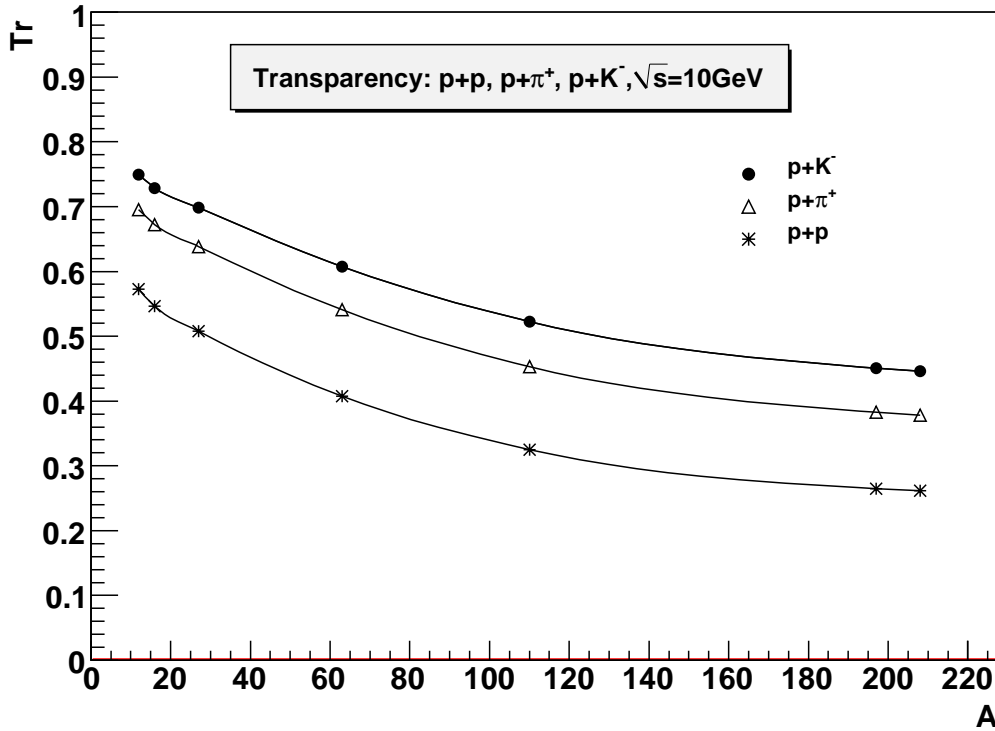
$$T_z(b) = \int_z^{+\infty} \rho(b, z) dz. \quad (5.6)$$

Celkově lze průsvitnost jádra ve vysokoenergetické limitě psát jako

$$Tr_{A, l_c \gg R_A} = \frac{\int d^2b T(b) e^{-\sigma_{tot}^{hN} T(b)}}{A} \quad (5.7)$$

a vztah pro nízkoenergetickou limitu lze upravit na [20]

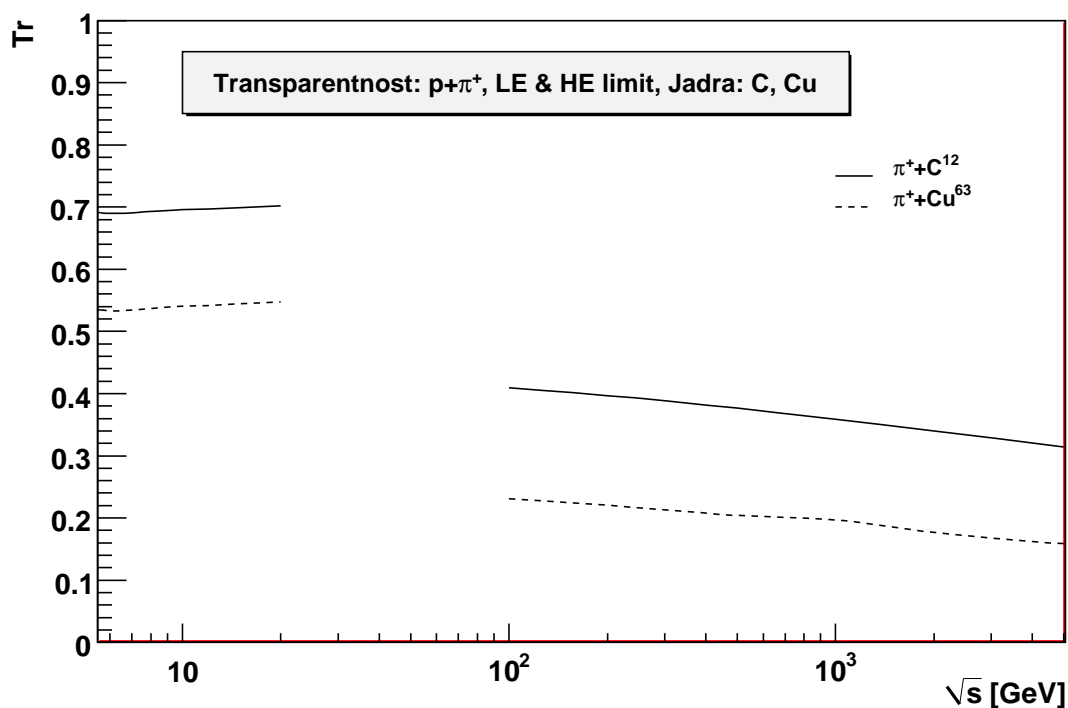
$$Tr_{A, l_c < 2fm} = \frac{\int d^2b (1 - e^{-\sigma_{tot}^{hN} T(b)})}{A \sigma_{tot}^{hN}}. \quad (5.8)$$



**Obrázek 5.1:** Transparentnost v závislosti na nukleonovém čísle pro různé typy nalétávajících částic: π<sup>+</sup>, K<sup>-</sup> a proton

Srovnání transparentnosti v závislosti na typu jádra pro různé nalétávající částice je vidět na obrázku 5.1 při fixní energii  $\sqrt{s} = 10 \text{ GeV}$ . Je zde vykresleno srovnání

pro kaony  $K^-$  s neelastickým účinným průřezem okolo  $\sigma_{inel}^{K^-p} \simeq 17$  mb, piony  $\pi^+$  s účinným průřezem okolo  $\sigma_{inel}^{\pi^+p} = 20 - 25$  mb a protony s účinným průřezem okolo  $\sigma_{inel}^{pp} = 30 - 40$  mb. Z obrázku 5.1 je vidět, že jádro je transparentnější pro částice s menším účinným průřezem. Podle QCD existuje korelace mezi velikostí částice a jejím účinným průřezem. Tedy čím větší částice, tím větší je účinný průřez a tím je větší pravděpodobnost, že částice bude absorbována a jádro bude tudíž pro takovou částici méně průsvitné. Dále je z obrázku 5.1 vidět, že čím větší jádro, tím je méně transparentní pro dopadající částice. To správně odpovídá úvaze, že při delší dráze, kterou musí vzniklá částice absolvovat v jádře, je větší pravděpodobnost pohlcení částice.



**Obrázek 5.2:** Transparentnost v závislosti na těžišťové energii nalétávající částice  $\sqrt{s}$  pro nalétávající piony  $\pi^+$  na jádra  $C^{12}$  a  $Cu^{63}$ .

Vykreslení transparentnosti pro dvě energetické limity v závislosti na energii nalétávající částice je na obrázku 5.1. Průběh transparentnosti jádra je takový, že je zpočátku pro nízké energie vidět mírný růst a pak pro vysoké energie pokles transparentnosti jádra. To je důsledkem závislosti transparentnosti na velikosti



nukleon–nukleonového účinného průřezu (3.2), který zpočátku roste až do energií řádově desítky GeV a pro vysoké energii nad 100 GeV klesá.

## Závěr

Cílem této bakalářské práce bylo porozumění Glauberově modelu srážek s jádry a jeho aplikace na výpočet různých pozorovatelných v jaderných srážkách. Glauberův model tvoří základní přístup pro srážky s jádry – počítá srážku s jádrem jako srážku určitého počtu nukleonů a využívá přitom eikonálové aproximace, která právě při vyšších energiích umožňuje určité zjednodušení rozptylové úlohy. V první kapitole byla shrnuta teorie Glauberova modelu a předpokladů za jakých platí eikonálová aproximace. Jako vstup do tohoto modelu bylo potřeba znát hodnoty neelastických nukleon–nukleonových účinných průřezů a parametrizace hustoty jádra, které jsou uvedeny v kapitole 2.

Jako jedna z možných aplikací eikonálové aproximace byly spočítány počty účastnících se nukleonů a počty binárních srážek pro různé kombinace srážejících se jader v závislosti na srážkovém parametru. Výsledky správně ukazují, že při jádro–jaderné srážce je počet účastnících se nukleonů (tj. nukleonů zasažených při srážce alespoň jednou) je menší než počet binárních srážek z důvodu mnohonásobného rozptylu nukleonů v jádře. Naopak při srážce hadronu s jádrem výsledky ukazují, že počet participantů je větší než počet binárních srážek a při centrální srážce je počet participantů přesně o jeden větší než počet binárních srážek.

Protože Glauberův model nám také poskytuje vztah pro neelastický účinný průřez hadron–jaderné srážky, jako další aplikace se nabízel výpočet transparentnosti jádra, která je fakticky poměrem neelastického účinného průřezu hadron–jaderné srážky a neelastického účinného průřezu  $A$  nukleonů. Transparentnost byla počítána pro různé druhy nalétávajících částic při různých energiích a různé typy terčových jader. Z výsledků je vidět, že jádro je méně transparentní pro větší částice, pro které

je větší pravděpodobnost pohlcení v důsledku jejich většího účinného průřezu. Dále se ukazuje, že ve vysokoenergetické limitě je transparentnost jádra menší než při nízkoenergetické, ale pokud se podíváme na závislost transparentnosti na energii pouze pro nízkoenergetickou limitu, tak vidíme, že průsvitnost jádra s energií roste. Tento růst transparentnosti je způsoben poklesem hodnoty neelastického účinného průřezu v tomto rozsahu energií. Čím větší je jádro, tím je méně transparentní pro nalétávající částici, protože částice v jádře musí urazit delší dráhu a tudíž je větší pravděpodobnost, že bude absorbována.

Pomocí Glauberova modelu lze snadno získat rychlý odhad efektů na nukleonové úrovni. Pro složitější aplikace jaderných efektů na partonové úrovni je Glauberův model základním přístupem. Možná návaznost této práce by spočívala v použití realističtějších modelů založených na QCD, které by umožňovaly lepší popis efektů v jádro–jaderných srážkách na urychlovači LHC.

# Literatura

- [1] G.D.Alkhazov, S.L. Belostotsky, A.A. Vorobyov (1978) *Scattering of 1GeV protons on nuclei*, Phys. Rep. C 42, 89
- [2] A. Bialas, M. Bleszynski and W. Czyz (1976) *Multiplicity distribution in nucleus–nucleus collisions at high energies*, Nucl. Phys. B 111, 461
- [3] R. J. Glauber (1959), *Lectures on Theoretical Physics* , Interscience, New York, Vol. I.
- [4] R. J. Glauber (1967), *High Energy Physics and Nuclear Structure* , ed. G. Alexander, North Holland Publishing Co., Amsterdam
- [5] R. J. Glauber (1970), *High Energy Physics and Nuclear Structure*, ed. S. Devons, Plenum Press, New York
- [6] R. J. Glauber (2006), *Quantum optics and Heavy Ion Physics*, Nucl. Phys. A 774, [www.sciencedirect.com](http://www.sciencedirect.com)
- [7] Charles J. Joachain, C. Quigg (1974), *Multiple scattering expansion in several particle dynamics*, Rev. Mod. Phys., Vol. 46, No 2
- [8] B.Z. Kopeliovich<sup>1</sup>, J. Nemchik, Ivan Schmidt (2007), *Production of Polarized Vector Mesons off Nuclei*, Phys. Rev. C 76, 025210
- [9] R. J. Glauber and G. Matthiae (1970), Nucl. Phys. B 21, 135
- [10] Michael L. Miller, Klaus Reygers, Stephen J. Sanders, Peter Steinberg (2007) *Glauber Modeling in High-Energy Nuclear Collisions*, Annu. Rev. Nucl. Part. Sci. 57

- 
- [11] M. L. Miller (2004), *Measurement of Jets and Jet Quenching at RHIC1*, Dissertation thesis, Yale University
- [12] *Particle data Group, Plots of cross sections and related quantities*, <http://pdg.lbl.gov/2007/reviews/hadronicrpp.pdf>
- [13] R. Vogt (2007), *Heavy Ion Physics*, Elsevier
- [14] K. V. Shajesh (2008), *Eikonal approximation*, <http://www.nhn.ou.edu/shajesh/eikonal/sp.pdf>
- [15] P. Shukla (2001), *Glauber model for heavy ion collisions from low energies to high energies*, nucl-th/0112039
- [16] P. Shukla (2003), *Glauber model and heavy ion reaction cross section*, Phys. Rev. C 67, 054607
- [17] H. de Vries, C.W. de Jager, and C. de Vries (1987), *Nuclear charge-density-distribution parameters from elastic electron scattering*, At. Data Nucl. Data Tables 36, 495
- [18] C. Y. Wong (1994), *Introduction to High Energy Heavy Ion Collisions*, World Scientific, Singapore
- [19] J. Raufeisen (2000), *QCD Coherence Effects in High-Energy Reactions with Nuclei*, Ph.D. Thesis, e-Print: hep-ph/0009358
- [20] N.N. Nikolaev (1993), *Colour transparency: a novel test of QCD in nuclear interactions*, e-Print: nucl-th/9304015