České vysoké učení technické v Praze
Fakulta jaderná a fyzikálně inženýrská

Katedra fyziky
Obor: Experimentální jaderná a částicová fyzika

Statistický model produkce hadronů

BAKALÁŘSKÁ PRÁCE

Vypracoval: Josef Uchytil
Vedoucí práce: doc. Mgr. Boris Tomášik, Ph.D.
Akademický rok: 2015/2016

Před svázáním místo téhle stránky $\boxed{\text{vložíte zadání práce}}$ s podpisem děkana.

Prohlášení

Prohlašuji, že jsem svou bakalářskou práci vypracoval samostatně a použil jsem pouze podklady (literaturu, projekty) uvedené v přiloženém seznamu.

Nemám závažný důvod proti použití tohoto školního díla ve smyslu § 60 Zákona č. 121/200 Sb., o právech souvisejících s právem autorským a o změně některých zákonů (autorský zákon).

V Praze dne 8. 7. 2016

....

Josef Uchytil

Poděkování

Děkuji doc. Mgr. Borisi Tomášikovi, Ph.D. za vedení mé bakalářské práce a za podnětné návrhy, které ji obohatily.

Josef Uchytil

Název práce:
Statistický model produkce hadronů

Autor: Josef Uchytil

Obor: Experimentální jaderná a částicová fyzika
Druh práce: Bakalářská práce

Vedoucí práce: doc. Mgr. Boris Tomášik, Ph.D.
Katedra fyziky, Fakulta jaderná a fyzikálně inženýrská, České vysoké učení technické v Praze

Abstrakt:

Ultrarelativistické těžko-iontové srážky nám umožňují studovat vlastnosti silně interagující hmoty vystavené extrémním podmínkám, čímž obvykle rozumíme extrémně vysokou hustotu energie. Podle kvantové chromodynamiky (QCD) dochází v této silně interagující hmotě k fázové přeměně ze stavu, kdy jsou hadronové konstituenty (kvarky a gluony) vázány, do stavu, kdy jsou tyto konstituenty dekonfinované. O tomto stavu hovoříme jako o kvark-gluonovém plazmatu (QGP). Tohoto je možno dosáhnout kolizí dvou těžkých iontů urychlených na ultrarelativistické energie.

Na urychlovačích SPS a LHC v CERN a RHIC v BNL bylo provedeno mnoho experimentů, které měly za úkol zkoumat podmínky vhodné k tomu, aby došlo k dekonfinaci (osvobození kvarků). Informace o vlastnostech, složení a velikosti původníha média mohou být získány z analýzy hadronových multiplicitních spekter a jejich korelací.

Cílem této práce je popsat statistický model a jeho základní výsledky. Nerovnovážné modely spolu s chemickými potenciály jsou rovněž představeny. Navíc je zkoumán vliv rezonancí a jejich konečné šířky na teplotu souboru, což je provedeno pomocí programu SHAREv3, jehož dokumentace je součástí této práce. Rovněž zkoumáme vliv zahrnutí rezonancí o různé hmotnosti.

Klíčová slova: Kvark-gluonové plazma, těžko-iontové srážky, grand-kanonický model, kanonické potlačení, SHAREv3

Title:
Statistical Model of Hadron Production

Author: Josef Uchytil

Abstract:
Ultrarelativistic heavy-ion collisions are performed with the aim to study the properties of strongly interacting matter which is exposed to extreme conditions of high energy density. According to the Quantum Chromodynamics (QCD), a phase transition from a state of hadrons to a plasma of deconfined quarks and gluons (QGP) takes place within the strongly interacting matter. This can be achieved by colliding heavy ions at ultrarelativistic energies.

Various experiments which were supposed to explore the conditions that are sufficient for deconfinement have been carried out at SPS and LHC/CERN and RHIC/BNL. Information on nature, composition and size of the medium of origin can be deduced from the hadron multiplicity distributions and their correlations.

The aim of this thesis is to introduce the statistical model and its basic results. Nonequilibrium models along with chemical potentials are also introduced. Moreover, the influence of resonances and their finite widths on the temperature of the ensemble is researched using the SHAREv3 program, whose documentation is part of this thesis. We also study how results of chemical fits depend on the inclusion of resonances with higher masses.

Key words: Quark-Gluon plasma, heavy-ion collisions, grand-canonical approach, canonical suppression, SHAREv3

Obsah

Seznam obrázků

Úvod

Jedním z fundamentálních stavů hmoty je tzv. kvark-gluonové plazma (QGP), o kterém se předpokládá, že existovalo na samém počátku vesmíru, a které často (ne však vždy) vzniká bezprostředně po srážce dvou ultrarelativistických těžkých iontů.

Statistický neboli termální model je v současné době jedním z nejspolehlivějších prostředků, jak popsat produkci hadronů z fireballu vzniklého po srážce dvou jader a případně usoudit na existenci stavu QGP. V první kapitole se tedy seznámíme s kvark-gluonovým plazmatem jako takovým a rovněž srovnáme tzv. *big-bang* a *micro-bang*, které budou esenciální k pochopení rozdílu mezi Velkým třeskem a těžkoiontovou srážkou.

Poté vybudujeme matematický aparát nutný ke statistickému popisu produkovaných hadronů. Bude představen grandkanonický statistický model, který odvodíme pomocí klasické termodynamiky. Vysvětlíme také pojmy, jako jsou *hadronový plyn* či *Fermiho a Boseho kvantové plyny*. Na závěr **první kapitoly** představíme teoretický aparát nutný k zahrnutí interakce pomocí rezonancí. Zvláštní pozornost bude věnována vlivu (konečné) šířky rezonancí jako funkce teploty a korekci na vyloučený objem.

Ve **druhé kapitole** se zaměříme na kanonické potlačení zachovávajících se nábojů s důrazem na kanonickou partiční funkci pro ábelovské náboje a odvození kanonického potenciálu jako limitního případu grandkanonického.

Třetí kapitola bude věnována praktické analýze. Bude nás zajímat zejména to, jaký vliv mají rezonance s vysokou hmotností na teplotu souboru. Přitom rozlišíme případy, kdy budou zahrnuty konečné šířky rezonancí a kdy ne. Představen bude program SHARE with CHARM, který umožňuje získávat data o statistických veličinách. Taktéž se zaměříme na nerovnovážné modely, kde opět zvlášť analyzujeme případy vyloučení a zahrnutí konečné šířky rezonancí.

Ve **čtvrté kapitole** provedeme motivační náhled do problematiky výtěžků nestabilních rezonancí se zaměřením na hadronové rozpady. Bude provedeno srovnání teoretických předpovědí s experimentálními výsledky na urychlovačích RHIC a LHC.

Kapitola 1

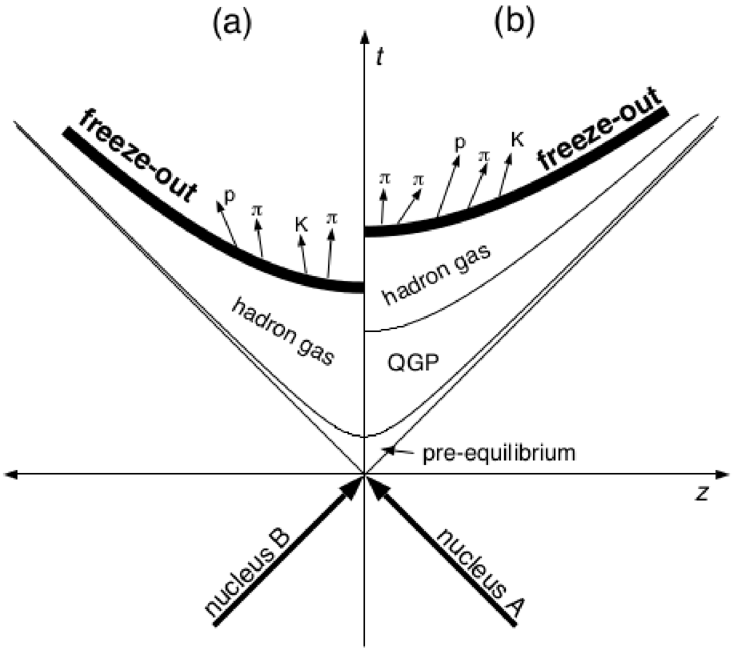
Grand-kanonický statistický model a zahrnutí interakce pomocí rezonancí

Prakticky veškeré vědecké práce týkající se tohoto tématu vycházejí z toho, že vesmír vznikl důsledkem Velkého třesku zhruba před 13,8 miliardami let (poměrně precizní údaj plyne z analýzy reliktního záření). Je všeobecně předpokládáno, že během Velkého třesku bylo vytvořeno přibližně stejné množství hmoty a antihmoty a že většina antihmoty anihilovala po ochlazení a expanzi vesmíru s hmotou, k čemuž došlo přibližně 20 μs po Velkém třesku [1]. V tomto okamžiku však již veškerá hmota, která existuje i ve stavu, v jakém se vesmír nachází dnes, existovala ve formě protonů, neutronů a dalších hadronů složených z konfinovaných (vázaných) kvarků a gluonů (tzv. partonů).

Než však došlo k hadronizaci, existoval vesmír ve stavu dekonfinovaných partonů. Tento stav nazýváme kvark-gluonovým plazmatem (QGP). Pomocí ultrarelativistických těžko-iontových srážek, což jsou srážky, při kterých se atomová jádra (nazývaná *těžké ionty*) srážejí za velmi vysokých energií [1], se částicová fyzika pokouší reprodukovat podmínky, které vládly na samém prvopočátku vesmíru. Tato snaha spočívá v ověřování předpovědí kvantové chromodynamiky (QCD), která popisuje interakce mezi kvarky a rovněž i interakce mezi hadrony. Mezi nejvýznamnější experimenty, které se tímto zabývají, patří experiment ALICE na urychlovači LHC v laboratoři CERN a experiment STAR na urychlovači RHIC v Brookhaven National Laboratory (BNL). Jednou z otázek, které v této problematice zcela přirozeně vyvstávají, je ta, jak nejlépe popsat produkci hadronů z horké hmoty. Přitom se ukazuje, že je překvapivě dobře charakterizována modelem, na který klademe co nejméně předpokladů. Tímto modelem je tzv. termální neboli statistický model.

1.1 Kvark-gluonové plazma

Kvark-gluonové plazma (QGP) je stav hmoty, kdy partony nejsou vázány v hadronech. Teoreticky se předpokládá, že při velmi vysokých teplotách by partony byly asymptoticky volné, což znamená, že za předpokladu extrémně malých vzdáleností a velmi vysoké hustoty energie síly působící mezi partony vymizí. Předpokládá se, že vesmír ve své nejranější fázi (~ 10 μs po Velkém třesku [1]) rovněž existoval v tomto stavu. Takový stav hmoty taktéž za jistých podmínek vzniká v ultrarelativistických těžko-iontových srážkách. V druhém případě je však doba jeho existence omezena pouze na řádově fm/c. Vzhledem



Obrázek 1.1: Prostoročasový vývoj fireballu: (a) bez přítomnosti QGP, (b) s přítomností QGP (převzato z [7]).

k tomu, že jde z fyzikálního hlediska o podobný proces jako u Velkého třesku, označuje se srážka, při které vzniká QGP, někdy jako *little-bang* či *micro-bang*.

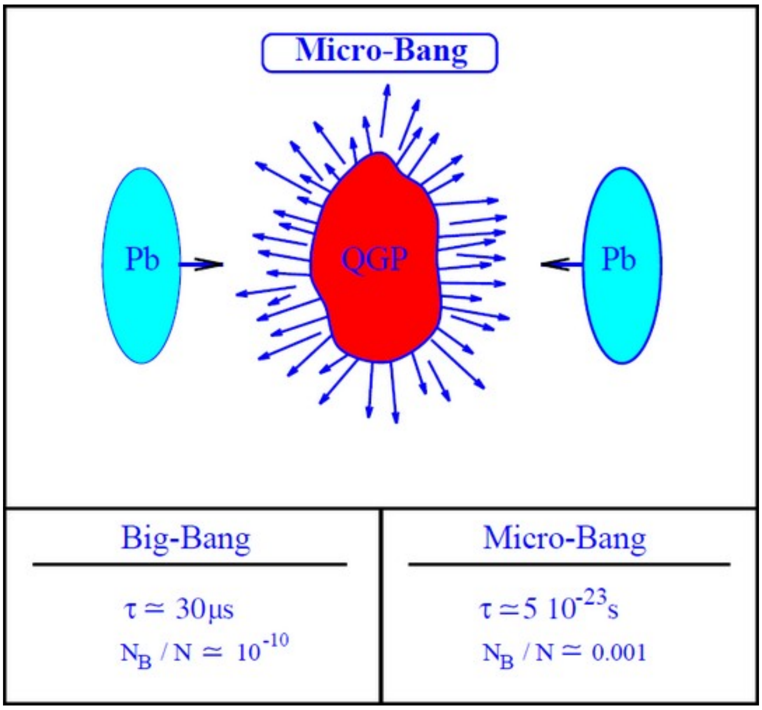
Na Obr. 1.1 je znázorněn prostoročasový vývoj fireballu po srážce dvou jader A a B. Toto má za následek vznik extrémně husté hadronové hmoty, jejíž hustota energie ϵ zhruba odpovídá hodnotě větší než $\epsilon = 1$ GeV fm^{-3} a příslušný tlak relativistické hmoty je pak přibližně roven $P \simeq \frac{1}{3}\epsilon$ [1]. Vzhledem k tomu, že pro studium fyzikálních vlastností raného vesmíru je třeba téměř nekonečného objemu hmoty, je nutno v ultrarelativistických těžko-iontových srážkách použít prvků s vyšším protonovým číslem, např. ^{82}Pb či ^{79}Au.

Vlivem vysokého vnitřního tlaku bude vzniklý fireball dále expandovat, až dojde k tzv. *freeze-outu* ("vymrznutí"). Doba života fireballu τ (rozuměj doba mezi srážkou a vymrznutím) je závislá na velikosti systému a je přibližně dána rovnicí

$$\tau = \frac{2R}{c} \tag{1.1}$$

kde R je poloměr koule, kterou aproximujeme fireball, a c je rychlost světla ve vakuu.

Po vymrznutí lze pozorovat produkci velkého počtu hadronů o nízké energii. Toto je typické pro ultrarelativistickou těžko-iontovou srážku, neboť tato je charakterizována tím, že energie srážky je rozdělena na velké množství hadronů, na rozdíl od elementárních interakcí, kdy převážně vzniká malé množství částic, zato s vysokou energií (viz zdroj [1]). Právě kvůli velkému výtěžku je všeobecně předpokládáno, že užitím metod statistické fyziky získáme dobrý popis. Výhodou těchto metod je fakt, že nevyžadují kompletní popis jedné každé částice v systému.



Obrázek 1.2: Jádra olova ve stavu lorentzovské kontrakce (převzato z [1]).

1.1.1 Srovnání big-bangu a micro-bangu

Kvalitativně je *micro-bang* zachycen na Obr. 1.2. Zde můžeme vidět dvě jádra, která podléhají lorentzovské kontrakci ve směru pohybu. Srážka je nakreslena v soustavě hmotného středu. Důsledkem srážky jader dochází ke vzniku velmi husté hmoty - *fireballu*. Následně fireball expanduje podle Obr. 1.1, až dosáhne konečného stavu, kdy po vymrznutí volně vyletují jednotlivé částice, což je v Obr. 1.2 naznačeno šipkami.

Ač podmínky navozené bezprostředně po srážce jsou velmi podobné těm na počátku vesmíru, nelze tyto dvě události srovnávat, už jenom proto, že doba existence kvark-gluonového plazmatu ve vesmíru se liší přibližně o 18 řádů.

Časová stupnice rozpínání vesmíru je určena vzájemnou souhrou gravitačních sil a radiačního a Fermiho tlaku horké hmoty, zatímco v případě micro-bangu neexistuje žádné gravitační působení, které by zpomalovalo expanzi fireballu, což ospravedlňuje již zmíněný rozdíl mezi dobami expanze fireballu a vesmíru. Oproti ranému vesmíru je u fireballu rovněž třeba vzít v potaz fakt, že jeho velikost a vlastnosti se s expanzí rapidně mění. Vesmírnou časovou konstantu expanze τ_U lze vyjádřit vztahem

$$\tau_U = \sqrt{\frac{3c^2}{32\pi GB}} \tag{1.2}$$

kde B je energie vakua (tzv. "bag constant"- viz kapitola 1.2) a G gravitační konstanta.

V raném vesmíru byla rovněž velmi nízká hustota baryonového čísla, což bylo způsobeno přítomností baryonů a téměř stejného množství antibaryonů. Naproti tomu v laboratorních podmínkách vzniká fireball husté hmoty s nezanedbatelným baryonovým číslem N_b. Výraz "nezanedbatelný"používáme v tomto případě v tom významu, že poměr rozdílu počtu baryonů a počtu antibaryonů ku počtu baryonů, což lze zapsat jako

$$\frac{N_b - \bar{N}_b}{N_b},$$

je ve srážkách mnohem větší než 0 (při energiích v řádu stovek MeV je tento poměr téměř roven 1; v raném vesmíru je pak téměř nulový). Z tohoto důvodu předpokládáme v případě laboratorního micro-bangu významnou asymetrii hmota-antihmota.

Číselný rozsah konstanty B je zhruba 145 MeV $< B^{\frac{1}{4}} <$ 235 MeV a časové konstanty τ_U zhruba 66 μs $> \tau_U >$ 25 μs (převzato z [1]). Vzhledem k hodnotě τ_U lze teoreticky předpokládat, že veškeré nestabilní částice hadronové povahy se rozpadají, všech rovnovážných stavů, kterých bylo možno dosáhnout, bylo dosaženo a že je dostatek času na to, aby ve "smíšené fázi" QGP a hadronového plynu (HG) vznikly struktury makroskopické povahy, stejně jako lze předpokládat existenci a působení slabé interakce. Nic z toho však nemůže v jaderné srážce nastat, neboť v těžko-iontové srážce je doba existence fireballu příliš krátká.

Časový vývoj vesmíru je zachycen na Obr. 1.3, který ukazuje závislost typické energie částic ve vesmíru na čase. Rovněž jsou do grafu zaneseny hodnoty energií jednotlivých urychlovačů (sestupně po řadě LHC, RHIC a SPS). Zde je vidět, že od doby, kdy se oddělila neutrina, je další vývoj vesmíru dobře znám a zdokumentován. Totéž však neplatí pro dřívější úseky. Jak bylo již zmíněno výše, v době zhruba 10 μs od velkého třesku dochází k přeměně dekonfinované fáze partonů na horký plyn složený z hadronů, konkrétně z mezonů, baryonů a antibaryonů. Bezprostředně poté došlo ve vesmíru k baryon-antibaryonové anihilaci a k možnému oddělení baryonů od antibaryonů - ačkoliv jsme zatím nebyli schopni pozorovat antihmotu v okolí naší galaxie, nelze s jistotou prohlásit, že ve vesmíru jako takovém žádná antihmota neexistuje.

Výpočty QCD na mřížce prokázaly, že k přeměně QGP na hadronový plyn nastává přibližně při teplotě $T \simeq 170$ MeV. Použijeme-li metody statistické fyziky, zjistíme, že podíl baryonů a antibaryonů na celkové energii hmoty v raném vesmíru je asi 25 % , z čehož zhruba polovinu tvoří těžké baryony a antibaryony. Předpokládá se, že silná komponenta antihmoty se v okamžiku nukleosyntézy ve vesmíru již nevyskytovala.

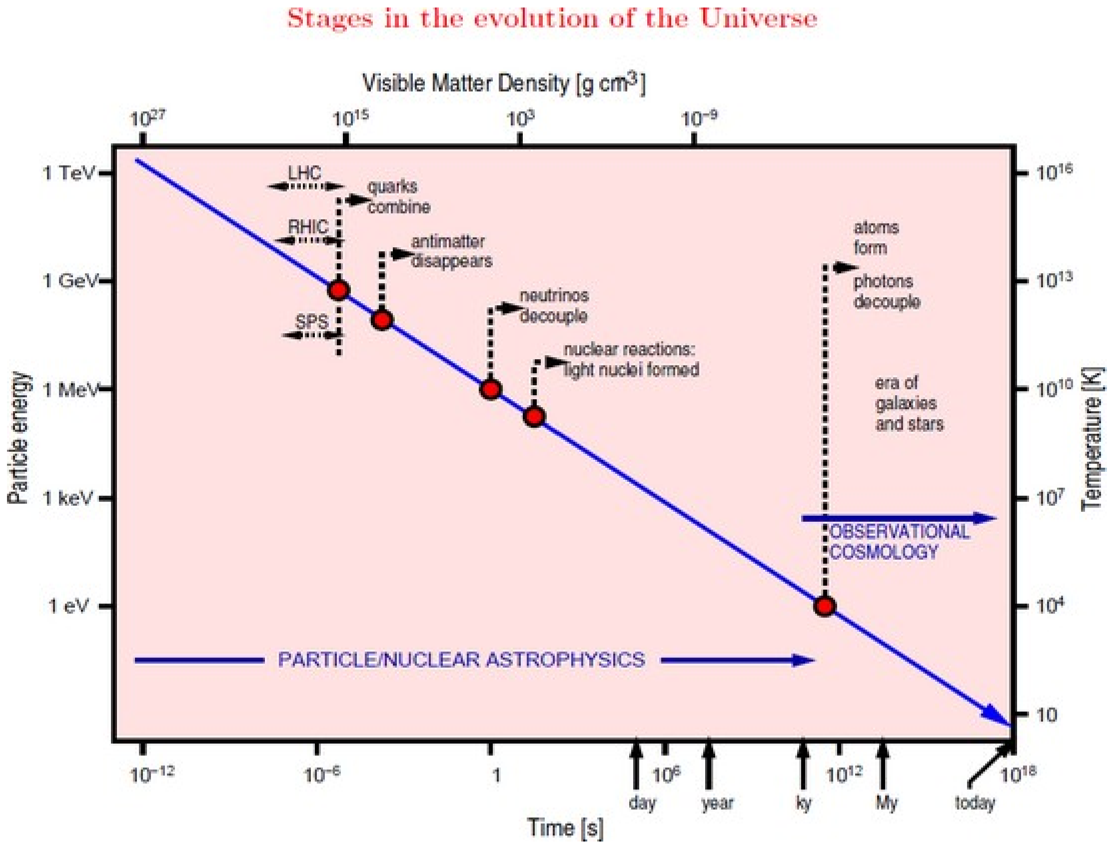
1.2 Hadronový fázový přechod v raném vesmíru

Stěžejním momentem v určování podmínek přechodu mezi fázemi je "vymrznutí" kvark-gluonových dekonfinovaných barevných stupňů volnosti. Přechodové fáze mají dostatek času na to, aby se dostaly do stavu rovnováhy. Automaticky předpokládáme přítomnost latentního tepla B ve fázovém přechodu a také to, že počty stupňů volnosti na jedné a druhé straně přechodu nejsou stejné, což lze vyjádřit jako

$$g_2 \neq g_1 \tag{1.3}$$

kde index 1 označuje stav "prvotního" QGP a index "2" konečný stav hadronového plynu.

Abychom našli bod fázového přechodu, musíme určit kritickou teplotu, za které jsou tlaky v obou fázích stejné. V případě fázového přechodu prvního druhu dochází ke skoku



Obrázek 1.3: Graf závislosti energie částic ve vesmíru na čase (převzato z [1]).

v hodnotách (hustot) energie, tedy $\epsilon_1 \neq \epsilon_2$, což souvisí s latentním teplem B. Budeme-li systém pro jednoduchost modelovat jako ultrarelativistický plyn, což je vlastně fotonový plyn, je Stefan-Boltzmannův tlak o degeneračním faktoru g_i je ve fázi s vyšší teplotou dán vztahem

$$P_1(T_c) = \frac{\pi^2}{90} g_1 T_c^4 - B \tag{1.4}$$

a v nízkoteplotní fázi vztahem

$$P_2(T_c) = \frac{\pi^2}{90} g_2 T_c^4. \tag{1.5}$$

Označme $\Delta g = g_1 - g_2$. Pak z rovnosti tlaků v bodě fázového přechodu získáme vztahy pro poměr latentního tepla B a čtvrté mocniny kritické teploty T_c^4

$$\frac{B}{T_c^4} = \frac{\pi^2}{90} \Delta g, \tag{1.6}$$

z čehož plyne vztah pro kritickou teplotu T_c

$$T_c = B^{\frac{1}{4}} \left(\frac{90}{\pi^2 \Delta g} \right)^{\frac{1}{4}} \tag{1.7}$$

a dosazením do (1.5) rovněž vztah pro tlak fázového přechodu P_c

$$P_c = B \frac{g_2}{\Delta g}. \tag{1.8}$$

Ve srovnání s hodnotou získanou v laboratorních experimentech je hodnota T_c pro vesmír o něco vyšší. To je způsobeno tím, že tlak a tedy i dynamika fázového přechodu v raném vesmíru záleží i na počtu nehadronických stupňů volnosti, které v laboratorních experimentech s těžkými ionty zcela chybí.

Dynamika fázových přechodů je tedy v raném vesmíru dána následujícími faktory [1]:

(a) počtem stupňů volnosti v konfinované fázi, g_2 a T_c;
(b) změnou počtu stupňů volnosti Δg, která se odehrává výhradně v sektoru silné interakce;
(c) vakuovým tlakem (latentním teplem) B, který je vlastní silným interakcím.

Abychom mohli porozumět ranému vesmíru, musíme tyto veličiny určit měřením v laboratorních experimentech. Obě fáze, kterými hmota prochází - QGP a HG - obsahují nehmotné elektroslabě (EW) interagující částice. Ačkoliv kritická teplota T_c na elektroslabém pozadí, které se fázového přechodu neúčastní, nezávisí, tlak P_c už ano, což znamená, že v příslušných úvahách musíme zahrnout aktivní elektroslabě stupně volnosti. Toto zahrnuje fotony γ a všechny lehké fermiony, tzn. e, μ a neutrina ν_e, ν_μ a ν_τ. Lepton τ vzhledem k jeho vysoké hmotnosti nezapočítáváme, neboť platí $m_\tau >> T$. Předpokládáme-li teplotu $T \approx 200$ MeV, získáme faktor g^{EW} pro elektroslabé interakce daný vztahem a hodnotou

$$g^{EW} = g_\gamma + \frac{7}{4} g_F^{EW} = 14.25. \tag{1.9}$$

kde $g_\gamma = 2$, $\frac{7}{4} g_F^{EW} = \frac{7}{8} \times 2 \times (2_e + 2_\mu + 3_\nu) = 12.25$.

V dekonfinované QGP fázi raného vesmíru tedy vycházíme z toho, že započítáváme stupně volnosti kvarků (q), gluonů (g) a elektroslabého pozadí (EW). Celkem tedy pro faktor degenerace g_1 příslušný původní QGP fázi a použitý v rovnici (1.4) získáme vztah

$$g_1 = g^{EW} + g_g + \frac{7}{4} g_q. \tag{1.10}$$

Interakce mezi kvarky a gluony je charakterizována vazebnou konstantou silné interakce α_S. Počet efektivních stupňů volnosti kvarků a gluonů je rovněž ovlivněn jejich vzájemnými interakcemi a pro gluony je dán vztahem

$$g_g = 2_s \times 8_c \left(1 - \frac{15}{4\pi} \alpha_s\right) \tag{1.11}$$

a pro kvarky vztahem

$$\frac{7}{4} g_q = \frac{7}{4} 2_s \times 2.5_f \times 3_c \left(1 - \frac{50}{21\pi} \alpha_s\right). \tag{1.12}$$

Dolní indexy přísluší spinu (s) a barvě (c).

Pro poruchové QCD interakce získáváme pro hodnoty $\alpha_S = 0.5 - 0.6$ hodnoty degeneračního faktoru $g_1 \simeq 35 \pm 2$.

Zaměříme-li se na konečnou HG fázi raného vesmíru, pak zjistíme, že v ní neexistují žádné lehké silně interagující fermiony. Pro teplotu přibližně $T \leq 170$ MeV zaznamenáváme příspěvky tří lehkých bosonů (pionů $\pi^{\pm}$ a π^{0}) a pro hadronové stupně volnosti získáme celkovou hodnotu $g_2^h \simeq 5$. Se započítáním elektroslabého pozadí získáme pro hodnotu degeneračního faktoru g_2 příslušného konečné HG fázi a použitého v rovnici (1.5) vztah

$$g_2 = g^{EW} + g_2^h \simeq 19. \tag{1.13}$$

Pro poruchové QCD interakce s hodnotou konstanty $\alpha_S = 0.5 - 0.6$ zjišťujeme, že zhruba polovina stupňů volnosti v průběhu fázového přechodu v raném vesmíru zmizí.

Pro hodnotu latentního tepla $B = 190$ MeV a hodnotu vazebné konstanty silné interakce $\alpha_S \simeq 0.5$ získáme z rovnic (1.6) a (1.7) hodnotu kritické teploty fázového přechodu $T_c \simeq 160$ MeV. Za této teploty je kritický tlak P_c daný vztahem (1.8) roven přibližně $P_c \simeq 1.4B$, přičemž jsou zahrnuty jak příspěvky hadronové, tak příspěvky elektroslabé části.

1.3 QGP a konfinované HG fáze

V tomto oddíle se budeme zabývat kvalitativním porozuměním (řádové) velikosti teploty, při které QGP fáze hadronizuje. Nyní se budeme - na rozdíl od předcházející kapitoly - zabývat případy těžkoiontových srážek. Vyjdeme-li z obecného Stefan-Boltzmannova zákona (1.4), získáme hustotu energie ϵ a tlaku P jako funkce teploty T nehmotného relativistického plynu. Toto je vyjádřeno vztahem

$$P^{SB} = \frac{1}{3}\epsilon^{SB} = \frac{\pi^2}{90} g T^4. \tag{1.14}$$

$$g = g_g + \frac{7}{4} g_q \tag{1.15}$$

Degenerační faktor g je dán vztahem (1.15). Na rozdíl od předešlého případu zde neuvažujeme elektroslabé pozadí. Faktor $2 \times \frac{7}{8} = \frac{7}{4}$ vyjadřuje přítomnost nehmotných kvarků (fermionů) spolu s antičásticemi (proto je přítomen faktor 2). Gluony jsou nositeli barvy a spinu stejně jako kvarky, které se navíc vyskytují ve dvou vůních u a d (zde označeno jako $n_f = 2$ [1]). Protože při vysokých teplotách mohou vůně obsahovat i podivnost reprezentovanou podivným kvarkem s, je na parametr n_f za těchto podmínek nahlíženo jako na proměnnou. V kvark-gluonovém plazmatu tedy získáváme následující hodnoty degenerace g_g - vztah

$$g_g = 2(spin) \times (N_c^2 - 1)(color) = 2 \times 8 = 16 \tag{1.16}$$

a degenerace g_q - vztah

$$g_q = 2(spin) \times N_c(color) \times n_f(flavor) = 2 \times 3 \times n_f. \tag{1.17}$$

Numerické simulace získané implementací QCD na mřížku (Lattice-QCD) potvrzují, že pro ideální kvark-gluonový plyn při teplotě přibližně

$$T_H = 160\ MeV$$

a energetické hustotě

$$\epsilon_H = 1.1\ GeV\ fm^{-3}$$

existuje fázový přechod mezi konfinovanou a dekonfinovanou fází. Rovněž lze pozorovat velmi výrazné změny s proměnlivým počtem kvarků a jejich hmotností m_s a m_q.

Výpočty QCD na mřížce rovněž potvrzují, že fázový přechod má **spojitý** charakter.

1.4 Statistické vlastnosti jaderné hmoty

Hlavním zdrojem informací o povaze, složení a velikosti média původu jsou hadronové multiplicity. Hlavním středobodem zájmu je pak otázka, do jaké míry měřené částicové výtěžky vykazují rovnováhu. Podle teoretického základu, z něhož je vycházeno ve zdroji [6], je hlavní indicií umožňující usuzovat na existenci QGP fáze to, že vzniknuvší hadronové konstituenty jsou ve stavu chemické rovnováhy, důsledkem čehož může být vysoká úroveň chemického nasycení - hlavně co se týče podivných částic - spojována s existencí dekonfinované fáze v prvotních momentech těžko-iontové srážky.

V Gibbsově přiblížení (viz zdroj [6]) lze rovnovážné chování termodynamických pozorovatelných kvantifikovat jako průměr přes všechny statistické vzorky (nikoliv jako časový průměr pro konkrétní stav). Rovnovážné rozdělení je tedy získáno tak, že průměrujeme přes celý fázový prostor. Navíc je vzorek odpovídající termodynamické rovnováze právě takový vzorek, ve kterém je fázová hustota stejná v celém dostupném fázovém prostoru. V tomto významu je "rovnoměrné naplnění"dostupného fázového prostoru jak nutnou, tak postačující podmínkou termodynamické rovnováhy.

1.4.1 Rovnovážné rozdělení energie

Nejprve shrneme fyzikální nástroje užívané k popisu statistických souborů, které se v našem (ultrarelativistickém) případě neliší od aparátu užívaného v klasické statistické fyzice.

Mějme tedy N identických vázaných systémů, které jsou rozlišitelné např. podle energetických stavů E_i. Abychom celou situaci zjednodušili, předpokládáme, že energetické stavy E_i dosahují pouze diskrétních hodnot a že existuje K odlišných "makro"stavů takových, že $K << N$. Obecně lze předpokládat, že některé energetické stavy E_i budou obsazeny více než jednou, nechť tedy n_i reprezentuje obsazenost energetických stavů. Pak lze celkovou energii $E^{(N)}$ zapsat ve tvaru

$$E^{(N)} = \sum_{i=1}^{K} n_i E_i \tag{1.18}$$

a celkový počet stavů ve tvaru

$$N = \sum_{i=1}^{K} n_i. \tag{1.19}$$

Neuvažujeme-li žádná další kvantová čísla, pak jsou stavy se stejnou energií E_i ekvivalentní, tedy z hlediska statistické fyziky **nerozlišitelné**. Rozdělení takové, že n_i stavů má energii E_i, může být dosaženo několika různými způsoby. Mějme vztah

$$K^N = (x_1 + x_2 + \cdots + \cdots + x_K)^N|_{x_i=1} = \sum_n \frac{N!}{n_1!n_2!\cdots n_K!} x_1^{n_1} x_2^{n_2} \cdots x_K^{n_K}|_{x_i=1}, \quad (1.20)$$

pak normalizované koeficienty vyjadřující relativní pravděpodobnost dosažení i-tého stavu v souboru $\mathbf{n}$ s n_i ekvivalentními prvky jsou dány vztahem

$$W(\mathbf{n}) = \frac{K^{-N} N!}{\prod_{i=1}^{K} n_i!}. \quad (1.21)$$

Našim cílem je nalézt nejpravděpodobnější rozdělení $\bar{n}$, což znamená nalézt maximální hodnotu logaritmu $\ln W$, kde W je dáno vztahem (1.21) vzhledem k podmínkám (1.18) a (1.19). Celý problém tedy přejde v hledání **vázaných extrémů**. Lagrangeova funkce takového systému $A(n_1, n_1, \cdots, n_K)$ je dána vztahem

$$A(n_1, n_1, \cdots, n_K) = \ln W(\mathbf{n}) - a \sum_i n_i - \beta \sum_i n_i E_i. \quad (1.22)$$

kde a a β jsou příslušné Lagrangeovy multiplikátory.

Celou rovnici parciálně zderivujeme podle n_i a položíme rovnu nule. Zanedbáním vlivu konstant K a N získáme rovnici pro i-tý stav

$$\frac{\partial}{\partial n_i}[-\ln(n_i!) - n_i a - \beta n_i E_i]|_{n_m} = 0 \quad (1.23)$$

vyčíslenou v bodě $\bar{n}_m$, kterou za účelem nalezení bodu podezřelého z extrému položíme rovnu nule. Jestliže dále $\bar{n}_i >> 1$, můžeme s pomocí Lagrangeovy věty o přírůstku zapsat aproximaci derivace logaritmu faktoriálu libovolného čísla k ve tvaru

$$\frac{d}{dk}[\ln(k!)] \approx \frac{\ln(k!) - \ln(k-1)!}{k - (k-1)} = \ln k. \quad (1.24)$$

Maximální hodnotu $\bar{n}_i$ výrazu (1.21) lze tedy zapsat ve tvaru

$$\bar{n}_i = \gamma e^{-\beta E_i}. \quad (1.25)$$

Inverzní hodnota parametru β má fyzikální význam teploty T, což je vyjádřeno vztahem

$$T = \frac{1}{\beta}. \quad (1.26)$$

Z rovnice (1.19) plyne vztah pro celkový počet částic

$$\sum_{i=1}^{K} \bar{n}_i = \gamma \sum_{i=1}^{K} e^{-\beta E_i} = N. \quad (1.27)$$

Význam parametru γ pak reguluje celkový počet členů v souboru N. Lze jej zapsat v exponenciálním tvaru

$$\gamma = e^{-a}. \quad (1.28)$$

Dosadíme-li (1.25) do (1.18), získáme vztah pro celkovou energii $E^{(N)}$

$$E^{(N)} = \sum_{i=1}^{K} \bar{n}_i E_i = \gamma \sum_i E_i e^{-\beta E_i}. \tag{1.29}$$

Vydělíme-li $E^{(N)}$ počtem systémů N, dovede nás to ke vztahu

$$\frac{E^{(N)}}{N} = \bar{E}^{(N)} = \frac{\gamma \sum_i E_i e^{-\beta E_i}}{\gamma \sum_i e^{-\beta E_i}} = -\frac{d}{d\beta} \ln Z. \tag{1.30}$$

Symbolem Z označujeme **kanonickou partiční sumu**, kterou vyjádříme ve tvaru

$$Z = \sum_i \gamma e^{-\beta E_i}. \tag{1.31}$$

Na rozdíl od mikrokanonického přiblížení, kde je energie pro každý člen souboru zafixována, je ve statistickém "kanonickém"přiblížení studováno nejpravděpodobnější rozdělení energie a další fyzikální interakce mezi členy souboru. Tyto vlastnosti jsou závislé pouze na parametrech β a γ, Lagrangeových multiplikátorech reprezentujících po řadě zachování energie a počet členů v souboru.

1.4.2 Grandkanonický formalismus

Předpokládejme nyní, že nejen energie je rovnoměrně rozdělená, neboť dochází k energetické výměně mezi makrosystémy. V grandkanonickém přiblížení budeme opět hledat nejpravděpodobnější rozdělení, tentokrát ovšem vezmeme v úvahu další kvantové číslo odpovídající změně mezi jednotlivými členy statistického souboru. Budeme postupovat ekvivalentně jako v případě kanonického přiblížení, ale vzhledem k dalšímu (diskrétnímu) kvantovému číslu je třeba každý z nich charakterizovat dalším (diskrétním) parametrem, které nazveme **baryonovým číslem**. Podmínka zachování baryonového čísla je vyjádřena vztahem

$$\sum_{i=1}^{N} n_i^b b_i = b^{(N)} = N\bar{b}_i \tag{1.32}$$

kde $\bar{b}_i$ je průměrný počet baryonů v každém vzorku, který bereme v úvahu. K podmínkám (1.18) a (1.19) tedy přibude další podmínka daná zmíněným vztahem (1.32).

Uvažujme tedy podmínky (1.18), (1.19) a (1.32). Podmínce (1.32) je nutno přiřadit další Lagrangeův multiplikátor, který z důvodu jednoduchosti zapíšeme ve tvaru $\kappa = -\ln \lambda$. Nyní přistoupíme k hledání extrémů příslušné Lagrangeovy funkce. Provedeme-li ekvivalentní postup jako v předchozím oddíle, pak dojdeme k derivaci Lagrangeovy funkce podle parametru n_i^b ve tvaru

$$\frac{\partial}{\partial n_i^b}[-\ln(n_i^b!) - n_i^b a - \beta n_i^b E_i + \ln \lambda n_i^b\ b_i]|_{\bar{n}_m} = 0. \tag{1.33}$$

Derivaci pokládáme rovnu nule z důvodu nalezení bodu podezřelého z extrému.

Ekvivalentním postupem jako v předchozím oddíle získáme i nejpravděpodobnější rozdělení $\bar{n}_i$, dané rovnicí

$$\bar{n}_i^b = \gamma \lambda^{b_i} e^{-\beta E_i}. \tag{1.34}$$

Zadefinujme nyní chemický potenciál μ vztahem

$$\mu = T \ln \lambda. \tag{1.35}$$

Pak můžeme veličinu λ přepsat ve tvaru

$$\lambda = e^{\beta\mu} = e^{\frac{\mu}{T}}, \tag{1.36}$$

čímž jej vyjádříme jako funkci teploty T a chemického potenciálu μ. Tuto veličinu nazýváme **fugacitou**.

Výše uvedené chemické potenciály mají význam energie potřebné k přidání resp. odebrání částice za pevně daného tlaku, energie a entropie. Použitím stejného aparátu jako v případě kanonického potenciálu, kterým jsme získali rovnici (1.30) lze dojít i k rovnici

$$\bar{E}_{(N)} = \gamma \frac{\sum_{i;b} E_i \lambda^{b_i} e^{-\beta E_i}}{\gamma \sum_{i;b} \lambda^{b_i} e^{-\beta E_i}} = -\frac{d}{d\beta} \ln Z. \tag{1.37}$$

Veličina Z pak reprezentuje grandkanonickou partiční funkci danou vztahem

$$Z(V, \beta, \lambda) = \gamma \sum_{i;b} \lambda^{b_i} e^{-\beta E_i}. \tag{1.38}$$

Rovněž můžeme zapsat vztah pro průměrnou hodnotu b vzhledem ke grandkanonické partiční funkci. Toto je dáno vztahem

$$\bar{b} = \frac{\sum_{i;b} b_i \lambda^{b_i} e^{-\beta E_i}}{\sum_{i;b} \lambda^{b_i} e^{-\beta E_i}} = \lambda \frac{d}{d\lambda} \left(\ln \sum_{i;b} \gamma \lambda^{b_i} e^{-\beta E_i} \right) = \lambda \frac{d}{d\lambda} \ln Z(\beta, \lambda). \tag{1.39}$$

1.4.3 Nezávislé kvantové (kvazi)částice

Z hlediska kvantové mechaniky lze na grandkanonický soubor pohlížet jako na soubor s hamiltoniánem $\hat{H}$, který má vlastní hodnoty E_i, které odpovídají diskrétním energetickým stavům $|i\rangle$. Souhrnně lze tuto skutečnost zapsat ve tvaru

$$\hat{H} |i\rangle = E_i |i\rangle . \tag{1.40}$$

Vzhledem k tomu, že operátor $\hat{b}$ (podle principu korespondence přiřazený baryonovému číslu b) komutuje s Hamiltoniánem, lze rovněž psát

$$\hat{b} |i, b\rangle = b |i, b\rangle . \tag{1.41}$$

Hodnoty b pak odpovídají vlastním hodnotám operátoru $\hat{b}$.

Grandkanonickou partiční funkci, kterou jsme odvodili ve tvaru (1.38), lze tedy v operátorové reprezentaci přepsat do tvaru

$$Z = \sum_{i,b} \langle i, b| \, \gamma e^{-\beta(\hat{H}-\mu\hat{b})} \, |i, b\rangle = Tr \ \gamma e^{-\beta(\hat{H}-\mu\hat{b})} \tag{1.42}$$

kde symbol Tr symbolizuje stopu matice.

Tento vztah je velmi důležitý, neboť stopa kvantového operátoru **nezávisí na reprezentaci**. To znamená, že můžeme zvoli jakoukoliv sadu $|n\rangle$ bazických stavů a vždy najdeme odpovídající (kvantovou) kanonickou či grandkanonickou partiční funkci. Takto získáváme informace o vlastnostech kvantových plynů, které jsou často aproximovány jako soubor nezávislých (kvazi)částic. Stejně můžeme tímto způsobem zahrnout i interakce mezi těmito částicemi pomocí poruchové expanze.

O kvazičásticích mluvíme např. tehdy, pokud v médiu existují částicím podobné objekty, jejichž hmotnosti se liší od hmotností elementárních částic. V obecném případě budeme pozorovat stavy kolektivní excitace charakterizované hmotnostním spektrem. V tomto smyslu se hustá hadronová hmota chová jako jakýkoliv jiný systém s vysokou hustotou hmoty. Pokud máme dobře definované stavy excitací, nezáleží na tom, zda máme při výpočtu stopy (1.42) co dočinění s reálnými částicemi či kvazičásticemi.

Zvolme nyní bázi obsazovacího čísla "jedné kvazičástice". V tomto případě je každý makrostav $|n\rangle$ charakterizován sadou obsazovacích čísel n_i s baryonovým číslem b_i, energií ε_i a energií stavu $E_n = \sum_i n_i \varepsilon_i$. Suma přes všechny stavy odpovídá sumě přes všechny dovolené sady n_i: Pro fermiony platí $n_i \in 0, 1$ a pro bosony $n_i \in 0, 1, 2, \cdots, \infty$. Partiční funkci Z lze tedy zapsat ve tvaru

$$\begin{aligned} Z = \sum_n e^{-\sum_{i=1}^{\infty} n_i \beta(\varepsilon_i - \mu b_i - \beta^{-1}\ln\gamma)} &= \sum_n \prod_i e^{-n_i\beta(\varepsilon_i - \mu b_i - \beta^{-1}\ln\gamma)} \\ &= \prod_i \sum_{n_i = 0,1\cdots} e^{-n_i\beta(\varepsilon_i - \mu b_i - \beta^{-1}\ln\gamma)}. \end{aligned} \tag{1.43}$$

V poslední úpravě jsme využili možnosti záměny sumy a produktu, která vyplývá z ekvivalentnosti sumování přes všechny stavy a sumování přes všechny dovolené sady n_i. Pro fermiony (značíme F, používáme Fermi-Diracovu statistiku) můžeme dosáhnout pouze hodnot $n_i = 0, 1$, zatímco pro bosony (značíme B, používáme Bose-Einsteinovu statistiku) máme přípustné hodnoty $n_i = 0, 1, \cdots, \infty$. Logaritmus partiční sumy lze tedy vyjádřit vztahem

$$\ln Z_{F/B} = \ln \prod_i \left(1 \pm \gamma e^{-\beta(\varepsilon_i - \mu b_i)}\right)^{\pm 1} = \pm \sum_i \ln(1 \pm \gamma \lambda_i^b e^{-\beta\varepsilon_i}) \tag{1.44}$$

kde znaménko "+"odpovídá fermionům F a znaménko "-"bosonům B.

Rovněž je třeba ověřit, jaké hodnoty získáme, budeme-li mít místo částic antičástice. Vlastní hodnota operátoru $\hat{b}$ v rovnici (1.44) opačnou hodnotou k hodnotě získané pro částice. To nutně znamená, že fugacita $\lambda_{\bar{f}}$ pro antičástice je rovna

$$\lambda_{\bar{f}} = \lambda_f^{-1}.$$

Pro chemické potenciály pak klademe

$$\mu_f = -\mu_{\bar{f}}.$$

Pro homogenní prostoročas je energie i-tého stavu ε_i určena vztahem

$$\varepsilon_i = \sqrt{m_i^2 + \vec{p}^2}. \tag{1.45}$$

1.4.4 Fermiho a Boseho kvantové plyny

Mějme nyní částici o hmotnosti m a stupni degenerace g. Potom může být rovnice (1.44) přepsána do tvaru

$$\ln Z_{F/B}(V, \beta, \lambda, \gamma) = \pm gV \int \frac{d^3p}{(2\pi)^3} \left[\ln(1 \pm \gamma\lambda e^{-\beta\sqrt{p^2+m^2}}) + \ln(1 \pm \gamma\lambda^{-1} e^{-\beta\sqrt{p^2+m^2}}) \right]. \tag{1.46}$$

Druhý logaritmus v rovnici (1.46) byl přidán kvůli přítomnosti antičástic. Provedeme-li klasickou Boltzmannovu limitu, což znamená, že výraz v exponenciále pokládáme za malý vzhledem k jedničce, dostaneme vztah

$$\ln Z_{cl} = gV \int \frac{d^3p}{(2\pi)^3} \gamma(\lambda + \lambda^{-1}) e^{-\beta\sqrt{p^2+m^2}}. \tag{1.47}$$

Normalizované částicové spektrum, které je reprezentováno jako průměrná relativní pravděpodobnost nalezení částice na energetické hladině E_i, lze s využitím rovnic (1.25) a (1.27) zapsat ve tvaru

$$\bar{w_i} = \frac{\bar{n_i}}{N} = \frac{e^{-\beta E_i}}{\sum_j e^{-\beta E_j}} = -\frac{1}{\beta} \frac{\partial}{\partial E_i} \left(\ln \sum_j \gamma e^{-\beta E_j} \right), \tag{1.48}$$

odkud pomocí (1.44) plyne vztah pro jednočásticové spektrum

$$f_{F/B}(\varepsilon; \beta, \lambda, \gamma) = \frac{1}{\gamma^{-1}\lambda^{-1}e^{\beta\varepsilon} \pm 1} \tag{1.49}$$

kde znaménko (+) symbolizuje fermiony, znaménko (-) bosony.

1.4.5 Hadronový plyn

Velmi důležitou fází je tzv. "hadronový plyn"(HG), který se skládá z individuálně konfinovaných hadronů. Nachází-li se v hadronovém plynu velké množství různých druhů hadronů, zaujímá každý typ částic malou a nedegenerovanou část fázového prostoru a může tedy být popsán vztahem (1.47). Máme-li tedy dostatečně vysokou teplotu, vyvstává jako důsledek vysokého počtu příspěvků různých druhů hadronů vysoká hustota, která ale nemusí mít nutně za následek degeneraci fázového prostoru. I v HG fázi je ovšem stále možné zaznamenat přítomnost (pionové) kvantové degenerace. Toto však již vyžaduje popis pomocí kompletní kvantové statistiky dané rovnicí (1.46).

Uvažujme nyní kvantové rozdělení (1.49). I pro nejméně hmotné hadrony - piony - dosahuje jmenovatel stále dobře definovaných hodnot. Pro teploty v pásmu $T < 150$ MeV, pro které existují konfinované hadronové stavy, platí

$$\exp(-E_\pi/T) < \exp(-m_\pi/T) < 1.$$

Nyní zde krátce shrneme vlastnosti hadronového Boltzmannova plynu. Mějme tedy logaritmickou funkci ze vztahu (1.46) a vyjádřeme ji ve tvaru Taylorova rozvoje

$$\ln Z = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n} Z_n. \tag{1.50}$$

Pak pro každý výraz Z_n, který zahrnuje jak bosonové B_f, tak fermionové příspěvky F_f, platí vztah (1.51)

$$Z_n = \sum_{B_f} g_f \gamma_f^n (\lambda_f^n + \lambda_f^{-n}) V \int \frac{d^3p}{(2\pi)^3} e^{-n\beta\varepsilon_f} + (-1)^{n+1} \sum_{F_f} g_f \gamma_f^n (\lambda_f^n + \lambda_f^{-n}) V \int \frac{d^3p}{(2\pi)^3} e^{-n\beta\varepsilon_f}. \tag{1.51}$$

Jednočásticová energie ε_f je závislá na hmotě m_f podle vztahu (1.45). V Boltmannově klasické limitě je první výraz v rovnici (1.50) (tzn. pro $n = 1$) zachován (zatímco ostatní se zanedbávají) a neexistuje tedy rozdíl mezi Boseho a Fermiho ideálním plynem, což lze vidět v rovnici (1.47), kterou lze přepsat do tvaru

$$\ln Z_{cl} = \sum_f g_f \gamma (\lambda + \lambda^{-1}) V \int \frac{d^3p}{(2\pi)^3} e^{-\beta\varepsilon(\vec{p})} = Z^{(1)}. \tag{1.52}$$

Symbol $Z^{(1)}$ znamená, že se jedná o partiční funkci pro jedinou částici uzavřenou v konečném objemu.

Ze vztahu (1.52) a vlastností Taylorova rozvoje ihned plyne vztah

$$Z_{cl} = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{k!} (Z^{(1)})^k. \tag{1.53}$$

Tato rovnice vyjadřuje partiční funkci jako sumu příspěvků k mikroskopických částic. Faktor $\frac{1}{k!}$ zde symbolizuje nerozlišitelnost částic. Pouze pokud jej zahrneme, můžeme získat korektní Maxwellovo rozdělení atomů v plynu. Vyčíslíme-li integrál v rovnici (1.52), získáme vztah

$$\ln Z_{cl} = \frac{\beta^{-3} V}{2\pi^2} \sum_f g_f \gamma (\lambda_f + \lambda_f^{-1}) W(\beta m_f) \tag{1.54}$$

kde $W(x) = x^2 K_2(x)$, kde $K_2(x)$ je Besselova funkce 2. řádu (viz Dodatek).

Pomocí rovnice (1.54) získáme vlastnosti hadronového plynu v klasické Boltzmannově limitě. Čistá částicová hustota ρ_f (hustota rozdílu počtu částic a počtu antičástic) lze pomocí rovnice (1.39) vyjádřit ve tvaru

$$\rho_f = \frac{T^3}{2\pi^2} \sum_f g_f \gamma_f (\lambda_f - \lambda_f^{-1}) (\beta m_f)^2 K_2(\beta m_f), \tag{1.55}$$

tlak P_{cl} ve tvaru

$$P_{cl} = \frac{T}{V} \ln Z_{cl} = \frac{T^4}{2\pi^2} \sum_f g_f \gamma_f (\lambda_f + \lambda_f^{-1}) (\beta m_f)^2 K_2(\beta m_f) \tag{1.56}$$

a hustotu energie ε_{cl} ve tvaru

$$\varepsilon_{cl} = -\frac{1}{V} \frac{\partial}{\partial \beta} \ln Z_{cl} = \frac{T^4}{2\pi^2} \sum_f g_f \gamma_f (\lambda_f + \lambda_f^{-1}) \times [3(\beta m_f)^2 K_2(\beta m_f) + (\beta m_f)^3 K_1(\beta m_f)], \tag{1.57}$$

přičemž jsme využili platnosti vztahu $\frac{d}{dx} x^2 K_2(x) = -x^2 K_1(x)$ (viz Dodatek).

Vzhledem k vlastnostem Besselových funkcí, které dále rozvedeme v Dodatku, ze kterých plyne $K_2(x) \to 2/x^2$ a $K_1(x) \to 1/x$, lze pro relativistické limity (tedy pro případ, kdy $\varepsilon_f >> m_f$) rovnic (1.56) a (1.57) psát

$$P_{cl} \to \frac{T^4}{\pi^2} \sum_f g_f \gamma_f (\lambda_f + \lambda_f^{-1}) \tag{1.58}$$

resp.

$$\varepsilon_{cl} \to \frac{3T^4}{\pi^2} \sum_f g_f \gamma_f (\lambda_f + \lambda_f^{-1}) \tag{1.59}$$

Tyto rovnice využijeme pro aproximaci relativistického hadronového plynu, který obsahuje přibližně stejné množství bosonů a fermionů. Pro jeho efektivní degeneraci pak s využitím rovnice (1.58) a (1.59) platí vztah

$$g_{eff}^P = \pi^2 \frac{P}{T^4} \tag{1.60}$$

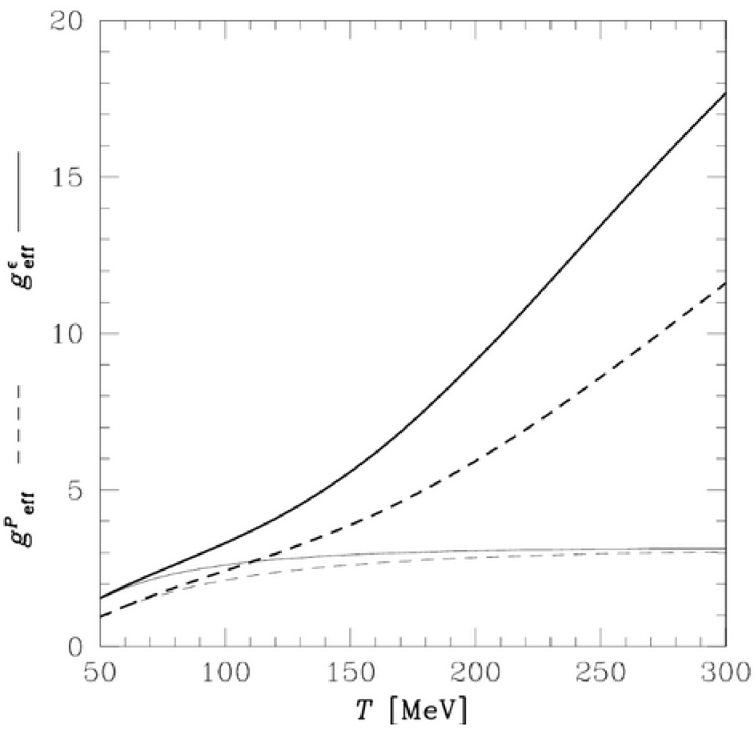
resp.

$$g_{eff}^\varepsilon = \frac{\pi^2}{3} \frac{\varepsilon}{T^4} \tag{1.61}$$

Závislost této efektivní degenerace je zachycena na Obrázku (1.4). Předpokládáme zde jednoduchý hadronový plyn a pro všechny částice předpokládáme $\gamma = 1$, což odpovídá chemické rovnováze a $\lambda = 1$, což zase odpovídá téměř bezbaryonovému systému, jakým byl např. raný vesmír. V případě, že máme zahrnuty pouze piony, pozorujeme konvergenci k limitě vysoké teploty přibližně na teplotě $T \simeq 300$ MeV. Vidíme rovněž, že hustota energie se blíží své relativistické limitě rychleji než tlak.

Z Obrázku (1.4) lze rovněž učinit dva závěry:
(1) Protože piony jsou mnohokrát lehčí než další nejlehčí hadronová částice, určují přesně vlastnosti hadronového plynu při nízkých teplotách, tzn. při teplotách $T \simeq (m_\pi/2)$ MeV.

(2) Vliv velkého množství těžkých hadronových částic získává na důležitosti spolu s rostoucí teplotou. Při nízkých teplotách jsou kvantové korekce, které v Obrázku (1.4) nejsou zachyceny, mnohem důležitější než příspěvky těžších částic. S rostoucí teplotou zůstává malá kvantová korekce vedlejším efektem ve srovnání s nárůstem vlivem excitace mnoha těžkých hadronových stavů.



Obrázek 1.4: Závislost efektivní degenerace energetické hustoty (plná čára) a tlaku (čárkovaná čára) na teplotě. Boltzmannův pionový plyn je znázorněn tenkými čarami, tlusté čáry pak symboizují hadronový plyn sestávající z pionů, nukleonů, kaonů a resonancí $\Delta(1232)$. Převzato z [1]).

1.4.6 Statistický pohled na kvark-gluonové plazma

Mějme nyní QGP modelované na počátku jako chemicky vyvážený plyn kvarků a gluonů. Při studiu kvark-gluonového plynu nám pozorování značně zjednodušuje fakt, že u a d kvarky považujeme v horkém plazmatu ($T \approx 200$ MeV) za nehmotné částice.

Hustota energie je obecně dána vztahem

$$\varepsilon = -\frac{\partial}{\partial\beta}\frac{1}{V}\ln Z(\beta,\lambda), \tag{1.62}$$

přičemž argument parciální derivace pro je pro nehmotné částice obecně dán vztahem

$$\frac{1}{V}\ln Z(\beta,\lambda) = \beta^{-3}f(\lambda). \tag{1.63}$$

kde $f(\lambda)$ je obecná funkce závisející na parametru λ a $\beta = 1/T$.

Z těchto rovnic pak plyne vztah

$$\varepsilon = 3\beta^{-4}f(\lambda) = 3\frac{T}{V}\ln Z(\beta,\lambda) = 3P, \tag{1.64}$$

čímž získáme i vztah mezi hustotou energie ε a tlakem P.

Přítomnost hmotných kvarků však tyto vztahy pro relativistické plyny porušuje. Hmotné částice jsou totiž za dané teploty méně mobilní, z čehož plyne, že tlak, který vyvíjejí, je menší než $\varepsilon/3$.

V limitním případě $\beta m = m/T << 1$ lze integrály ideálního kvantového plynu přes fázový prostor snadno spočíst. Můžeme totiž zanedbat hmostnost částic m, která je ve srovnání s velkou hybností malá. Nechť jsou nyní zanedbány chemické potenciály, čímž pro hustotu energie získáme vztah

$$\frac{E_{F,B}}{V} = \frac{g}{2\pi^2}\int_0^\infty p^2 dp \frac{p}{e^{\beta p} \pm 1} = \frac{g\beta^{-4}}{2\pi^2} 3! \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(\pm 1)^{n-1}}{n^4}. \tag{1.65}$$

Nekonečné sumy řadíme mezi tzv. Riemannovy sumy (viz Dodatek). S jejich použitím dostaneme pro bosony známý Stefan-Boltzmannův zákon. Toto lze zapsat ve tvaru

$$P_B|_{m=0} = \frac{T}{V}\ln Z_B|_{m=0} = \frac{g\pi^2}{90}T^4 = \frac{1}{3}\varepsilon_B = \frac{E_B}{3V}. \tag{1.66}$$

Nyní jsme odvodili tvar hustoty energie a tlaku pro bosony v případě, že hmotnost částic je oproti energii zanedbatelná. V případě fermionů představuje suma v rovnici (1.65) relativní redukční faktor, který je roven $\frac{7}{8}$. Protože ale rovněž uvažujeme možnou přítomnost antifermionů, musíme tento faktor vynásobit dvěma, což znamená, že pro energetickou hustotu pro fermiony platí

$$\varepsilon_F = \frac{E_F}{V} = \frac{g\pi^2}{30}\frac{7}{4}T^4 = 3P_F. \tag{1.67}$$

V případě fermionů je rovněž třeba zahrnout konečný chemický potenciál. V limitě $m \to 0$ mohou být Fermiho integrály relativistického kvantového plynu vyjádřeny ve tvaru

$$P_F|_{m=0} = \frac{T}{V}\ln Z_F|_{m=0} = g\frac{(\pi T)^4}{90\pi^2}\left(\frac{7}{4} + \frac{15\mu^2}{2(\pi T)^2} + \frac{15\mu^4}{4(\pi T)^4}\right). \tag{1.68}$$

Napišme tedy nyní partiční funkci kvark-gluonového plazmatu. Abychom to mohli provést, musíme započítat příspěvky kvarků, gluonů a vakua, což nám dává rovnici

$$\frac{T}{V}\ln Z_{QGP} = P_{QGP} = -B + \frac{8}{45\pi^2}c_1(\pi T)^4 + \frac{n_f}{15\pi^2}\left[\frac{7}{4}c_2(\pi T)^4 + \frac{15}{2}c_3\left(\mu_q^2(\pi T)^2 + \frac{1}{2}\mu_q^4\right)\right]. \tag{1.69}$$

Kvarkové a gluonové degenerace jsme zahrnuli podle rovnic (1.16) a (1.17). Interakce mezi kvarky a gluony jsou reprezentovány koeficienty c_i, které jsou vyjádřeny následujícími vztahy:

$$c_1 = 1 - \frac{15\alpha_s}{4\pi} + \cdots \tag{1.70}$$

$$c_2 = 1 - \frac{50\alpha_s}{21\pi} + \cdots \tag{1.71}$$

$$c_3 = 1 - \frac{2\alpha_s}{\pi} + \cdots \tag{1.72}$$

Tlak daný rovnicí (1.69) lze jednoduše vyjádřit, pokud vybereme hodnoty "bag-konstanty"B a vazebné konstanty silných interakcí α_s. Lze ukázat, že v oblasti teplot, která nás zajímá, se hodnota konstanty α_s mění velmi rychle, což vede k potřebě zavést ji jako funkci teploty, tedy $\alpha_s = \alpha_s(T)$.

1.5 Zahrnutí interakce pomocí rezonancí

Pro velmi vysoké energie je výhodné považovat hadronový plyn za ideální plyn, ačkoliv stupeň aproximace (míra přesnosti odhadu) nemůže být teoreticky kvantifikován [8]. Předpokládáme, že všechny částice mohou být považovány za konstituenty kvantového ideálního plynu až na korekci na "vyloučený"objem (viz dále). V této části se rovněž budeme zabývat zahrnutím rezonancí, na kterou lze nahlížet jako na vzájemnou interakci mezi hadrony. V grandkanonické aproximaci platí pro tlak ideálního plynu P složeného z kvantových částic vztah

$$P(T,\mu) = \frac{\pm g}{(2\pi)^3} \int d^3p \ln(1 \pm e^{\beta(\mu-\varepsilon(\vec{p}))}) \tag{1.73}$$

kde p značí hybnost, g degenerační faktor, μ chemický potenciál a ε energetickou hustotu. Znaménko (+) odpovídá fermionům, (-) bosonům.

Abychom se v popisu více přiblížili skutečnosti, měli bychom zahrnout veškeré rezonance, které se v plynu vyskytují. Rovněž se nyní neomezíme pouze na baryonové číslo b, ale zaměříme se i na jiná zachovávající se kvantová čísla. V tomto případě neplatí pouze $\mu = \mu_B$, ale celkový chemický potenciál musíme přepsat jako

$$\mu = B\mu_B + S\mu_S + T^{(3)}\mu_3$$

kde $B, S, T^{(3)}$ jsou kvantová čísla příslušející baryonům, podivnosti a třetí komponentě izospinu. Vždy jsou přenásobena odpovádajícím chemickým potenciálem μ_B, μ_S, μ_3.

Za těchto předpokladů je tedy nutno přepsat rovnici (1.73) do zobecněného tvaru

$$P_{HG}(T,\mu_B,\mu_S,\mu_3) = \sum_i p_i(T,\mu_i) \tag{1.74}$$

kde $\mu_i = B_i\mu_B + S_i\mu_S + T_i^{(3)}\mu_3$ je chemický potenciál i-té částice s příslušnými kvantovými čísly.

Z termodynamických zákonů pak plyne identita

$$n_B = \left(\frac{\partial p}{\partial \mu_B}\right)_{V,T} = \sum_i \left(\frac{\partial p_i(T,\mu_i)}{\partial \mu_B}\right) = \sum_i B_i n_i^{(i)} \tag{1.75}$$

kde symbolem $n^{(i)} = (\frac{\partial p_i(T,\mu_i)}{\partial \mu_i})$ označujeme hustotu i-tého typu částic.

Kromě pionů mohou být všechny hadrony a rezonance aproximovány Boltzmannovou limitou. V tomto případě lze psát

$$P_i(T,\mu_i) \simeq g_i \frac{T^2 m_i^2}{2\pi^2} K_2\left(\frac{m_i}{T}\right) e^{\frac{\mu_i}{T}} \tag{1.76}$$

resp.

$$n_i = g_i \frac{T m_i^2}{2\pi^2} K_2\left(\frac{m_i}{T}\right) e^{\frac{\mu_i}{T}} \tag{1.77}$$

kde K_2 je modifikovaná Besselova funkce.

Jestliže započítáme i šířky rezonancí, pak musí být rovnice (1.74) upravena. Započítat šířky rezonancí v podstatě znamená, že z ideálního plynu se stane interagující plyn, jehož tlak P vypočítáme podle vztahu

$$P(T,\mu) = P^{id}(T,\mu) + T\sum_{n=2}^{\infty} b_n(T)e^{\beta\mu n}. \tag{1.78}$$

Koeficienty b_n nazýváme viriálovými koeficienty a P^{id} je tlak odpovídajícího ideálního plynu. Index n probíhá od $n = 2$, neboť uvažujeme interakci mezi minimálně dvěma částicemi.

Lze ukázat [9], že druhý viriálový koeficient může být vyjádřen pomocí fázového posunu rozptylu l-té parciální vlny interagujících částic δ_l. Tato metoda byla zobecněna [10] a výsledek lze vyjádřit ve tvaru

$$b_2(T) = \frac{T}{2\pi^2}\int_{W_0}^{\infty} dW\ W^2 K_2(\beta W) \times \frac{1}{\pi}\sum_l (2l+1)\frac{\partial}{\partial W}\delta_l(W) \tag{1.79}$$

Pokud mají rezonance šířku Γ a spin J, pak v sumě převažuje pouze $l = J$ a pro fázový posun l-té parciální vlny $\delta_l(W)$ platí vztah

$$\delta_l(W) = \frac{\Gamma}{2}\frac{1}{M_R - W}. \tag{1.80}$$

Z toho lze vyvodit tvar Breit-Wignerovy formule

$$\frac{\partial}{\partial W}\delta_l(W) = \frac{\Gamma}{2}\frac{1}{(M_R - W)^2 + \frac{\Gamma^2}{4}} \tag{1.81}$$

kde M_R je hmotnost rezonance, která vznikla srážkou dvou částic M.

Tlak systému P tedy může být zapsán ve tvaru

$$P = P^{id} + P_R = P^{id} + g_R\frac{T^2\Gamma}{4\pi^3}e^{\beta\mu_R}\int_{W_0}^{\infty} dW\frac{W^2K_2(\beta W)}{(M_R - W)^2 + \frac{\Gamma^2}{4}} \tag{1.82}$$

kde

$$g_R = 2S + 1$$
$$\mu_R = 2\mu.$$

Mějme nyní limitní případ $\Gamma \to 0$. Pak pro složku P_R v rovnici (1.82) platí vztah

$$P_R \to g_R\frac{T^2M_R^2}{2\pi^2}K_2(\beta M_R)e^{\beta\mu_R}, \tag{1.83}$$

což je přesně tlak ideálního relativistického Boltzmannova plynu složeného z rezonancí o hmotnosti M_R.

1.5.1 Vliv šířky rezonancí jako funkce teploty

Z rovnice (1.82) je patrné, že vliv šířky rezonance na tlak plynu je závislý na teplotě. Zaveďme tedy nyní veličinu (F) vztahem

$$F(T, M_R, \Gamma) = \frac{\Gamma}{2\pi M_R^2 K_2(M_R/T)} \times \int_{W_0}^{\infty} dW \frac{W^2 K_2(\beta W)}{(M_R - W)^2 + \frac{\Gamma^2}{4}}. \tag{1.84}$$

Taktéž můžeme zavést veličinu "efektivní hmotnost rezonance"(M_{eff}) definovanou vztahem

$$M_{eff} = M_R^2 K_2(\beta M_R) F(T, M_R, \Gamma). \tag{1.85}$$

Rezonanční tlak P_R, který můžeme definovat jako tlak ideálního plynu obsahujícího částice o hmotnosti M_{eff}, lze zapsat v následujícím tvaru:

$$P_R = g_R \frac{T^2 M_{eff}^2}{2\pi^2} K_2(\beta M_R) e^{\beta \mu_R} \tag{1.86}$$

kde $P_R = P_R^{\Gamma=0} \times F(T, M_R, \Gamma)$ je tvar P_R vyjádřený pomocí kvantity F.

1.5.2 Korekce na vyloučený objem

Z analýzy termálních (statistických) modelů je jasné, že popis pomocí ideálního plynu vyžaduje modifikaci, kterou zohledníme velikost částic. Toto lze provést tzv. efektem vyloučeného objemu, jakým je např. Van der Waalsova korekce na tvrdé jádro. Tímto způsobem je rovnice (1.74) upravena na soustavu rovnic

$$P_{HG}(T, \mu_B, \mu_S, \mu_3) = \sum_{i=1} P_i^{id}(T, \bar{\mu_i}) \tag{1.87}$$

$$\bar{\mu_i} = \mu_i - v_i P_{HG} \tag{1.88}$$

kde $\mu_i = B_i \mu_B + S_i \mu_S + T_i^3 \mu_3$ je chemický potenciál a v_i je "vyloučený objem"i-tého druhu hadronů. Horní index id znamená případ ideálního plynu.

Tuto soustavu rovnic můžeme vyřešit vzhledem k P_{HG} iterativně pro danou soustavu parametrů $T, \mu_B, \mu_S a \mu_3$. Hustota hadronu i-tého typu je dána vztahem

$$n_i^{excl}(T, \mu_i) = \frac{n_i^{id}(T, m\bar{u}_i)}{1 + \sum_j v_j n_j^{id}(T, \bar{\mu_j})}. \tag{1.89}$$

Kapitola 2

Kanonické potlačení zachovávajících se nábojů

Chceme-li se ve statistické fyzice zabývat problémem zachování kvantových čísel, zavádíme grandkanonickou partiční sumu v následujícím tvaru, kdy uvažujeme pouze jedno kvantové číslo, například podivnost S. Systém je popsán hamiltoniánem $\hat{H}$ a chemickému potenciálu μ_S odpovídá operátor podivnosti $\hat{S}$.

$$Z(\mu_S, T) = Tr[e^{-\beta(\hat{H}-\mu_S\hat{S})}] \tag{2.1}$$

Z tvaru grandkanonické partiční sumy (2.1) lze vyvodit, že pro vybrané kvantové číslo S se jeho hodnota zachovává a její střední hodnota je rovna

$$\langle S\rangle = T\frac{\partial \ln Z(\mu_S, T)}{\partial \mu_S}. \tag{2.2}$$

Tato aproximace ovšem funguje pouze tehdy, je-li počet částic nesoucích podivnost dostatečně velký a jejich fluktuace tedy mohou být zanedbány. Abychom odvodili partiční funkci, která dobře popisuje daný systém a nejsou na ni kladeny tyto omezující předpoklady, je třeba provést v rovnici (2.1) následující úpravy: označme $|s\rangle$ stavy, které odpovídají stopě (2.1) tak, že pro vlastní hodnoty operátorů $\hat{H}$ a $\hat{S}$ platí $\hat{H}\,|s\rangle = E_S\,|s\rangle$ a $\hat{S}\,|s\rangle = s\,|s\rangle$. Sumu (2.1) tedy přepíšeme do tvaru

$$Z(\mu_S, T) = \sum_{-\infty}^{+\infty} e^{-\beta E_s} e^{s\beta\mu_S} = \sum_{-\infty}^{+\infty} Z_S\lambda_S^s. \tag{2.3}$$

Veličina Z_S je tedy koeficientem v Laurentově řadě pro fugacitu a jedná se o kanonickou partiční funkci pro fixní hodnotu podivnosti S, kterou lze vyjádřit jako

$$Z_S = Tr_S[e^{-\beta\hat{H}}]. \tag{2.4}$$

Chceme-li vypočítat Z_S , stačí vyjít z rovnice (2.3). Použijeme-li Cauchyův vzorec a provedeme inverzní transformaci, získáme

$$Z_S(T, V) = \frac{1}{2\pi i}\oint \frac{d\lambda_S}{\lambda_S^{s+1}} Z(\lambda_S, T, V). \tag{2.5}$$

Pokud jako integrační křivku zvolíme jednotkovou kružnici, přejde předchozí vztah (2.5) pomocí substituce $\lambda = e^{i\phi}$ a patřičnou úpravou diferenciálu ve vztah

$$Z_S(T,V) = \int_{-\pi}^{+\pi} \frac{d\phi e^{-S\phi}}{2\pi} \tilde{Z}(\phi,T,V) \tag{2.6}$$

kde generující funkci $\tilde{Z}(\phi,T,V) = Z(\lambda_S = e^{i\phi},T,V)$ získáme z grandkanonické partiční sumy pomocí Wickovy rotace chemického potenciálu $\mu_S \to i\phi$. Wickova rotace spočívá v převedení problému z Minkowského prostoru do klasického euklidovského tím, že čas necháme nabývat pouze imaginárních hodnot. Tato generující funkce je stejná pro všechny partiční funkce o libovolné (ale pevně dané) hodnotě zachovávajícího se náboje. Jedná se v podstatě o projekci zachovávajícího se ábelovského náboje (náboje popsaného ábelovskou symetrií) na stavy s přesnou hodnotou S.

Zachování aditivních kvantových čísel, jakým je například baryonové číslo, podivnost, elektrický náboj nebo půvab, lze ztotožnit s invariancí Hamiltoniánu vzhledem k Lieově grupě U(1). V mnoha aplikacích je ovšem důležité zobecnit projekční metodu na symetrie, které jsou spjaté s neábelovskou Lieovou grupou G. Příkladem takové grupy je například grupa unitárních čtvercových matic s jednotkovým determinantem $SU(N)$, která je klíčová v teorii silných interakcí. Zahrnutím neábelovských symetrií se zabývá např. práce [6].

2.1 Kanonická partiční funkce pro ábelovské náboje

Zde se budeme zabývat tzv. projekční metodou, která vede k popisu částicových výtěžků za omezujících podmínek daných ábelovskou symetrií $U_B(1)$. Protože tato je řádu $n = 1$, závisí všechny veličiny zastoupené v této reprezentaci, které odpovídají vlastním číslům zachovávajícího se náboje B, na jednom jediném parametru ϕ, což lze vyjádřit jako

$$\chi^B_{U_B(1)} = e^{iB\phi} \tag{2.7}$$

Abychom stále měli zaručeno zachovávání ábelovských nábojů, musíme všechna kvantová čísla systému - to znamená podivnost (S), baryonové číslo (B), elektrický náboj (Q) a půvab (C) - zahrnout do U(1) symetrie: $U_S(1) \times U_B(1) \times U_Q(1) \times U_C(1)$. Požadujeme-li tedy například, aby se zachovávalo barynonové číslo B zároveň s podivností S, pak pro charakteristickou funkci musí platit

$$\chi^{S,B}_{U_S(1)\times U_B(1)} = \chi^S_{U_S(1)} \cdot \chi^B_{U_B(1)} = e^{i(S\psi+B\phi)} \tag{2.8}$$

kde ψ a ϕ jsou proměnné odpovídající S a B, které jsme použili při parametrizaci fugacity v komplexní rovině.

V jádro-jaderných srážkách jsou hodnoty baryonového čísla, elektrického náboje a podivnosti pevně stanoveny počátečními podmínkami. Pokud chceme modelovat produkci částic pomocí statistické termodynamiky, musí být všechna kvantová čísla formulovány kanonicky. V dalším textu se však budeme zabývat pouze případy, kdy nejvýše dva zachovávající se náboje budou současně kanonické (např. podivnost a baryonové číslo) a všechna ostatní kvantová čísla budou popsána grandkanonicky. Z rovnice (2.6) plyne posunutím mezí přímo vztah

$$Z_S = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} d\phi e^{-iS\phi}\tilde{Z}(T,V,\phi) \tag{2.9}$$

a také vztah

$$Z_{B,S} = \frac{1}{4\pi^2}\int_0^{2\pi} d\phi e^{-iQ\phi}\int_0^{2\pi} d\psi e^{-iS\psi}\tilde{Z}(T,V,\phi,\psi) \tag{2.10}$$

kde $\tilde{Z}$ získáme z grandkanonické partiční funkce tak, že fugacity λ_B a λ_S nahradíme výrazy $e^{i\phi}$ resp. $e^{i\psi}$, což lze symbolicky zapsat jako

$$\tilde{Z}(T,V,\phi) = Z^{GC}(T,V,\lambda_B \to e^{i\phi}, \lambda_S \to e^{i\psi}). \tag{2.11}$$

Konkrétní podoba $\tilde{Z}$ v předchozí rovnici závisí na použitém modelu. Obvykle je v hadron-hadronových srážkách používám model rezonančního plynu. V dalším textu zanedbáme interakce mezi hadrony a rezonancemi stejně jako jakékoliv další efekty způsobené prostředím a rovněž budeme kanonicky nadále pracovat pouze s podivností. Pro jednoduchost budeme předpokládat takovou teplotu a hustotu energie, že všechny částice mohou být popsány užitím Boltzmannovy statistiky.

Zanedbáme-li tedy příspěvky baryonů, které jsou vícenásobně podivné (v našem případě hyperony Ξ a Ω), pak se generující funkce v rovnici (2.9) dá zapsat ve tvaru

$$\tilde{Z}(T,V,\mu_Q,\mu_B,Q) = \exp(N_{s=0} + N_{s=1}e^{i\phi} + N_{s=-1}e^{-i\phi} \tag{2.12}$$

kde $N_{s=0,\pm1}$ je suma přes všechny částice a rezonance s podivností $0, \pm1$:

$$N_{s=0,\pm1} = \sum_k Z_k^1 \tag{2.13}$$

kde jednočásticovou partiční sumu Z_k^1 vyjádříme ve tvaru

$$Z_k^1 = \frac{Vg_k}{2\pi^2}m_k^2\; T\; K_2(m_k/T)\exp(B_k\mu_B + Q_k\mu_Q) \tag{2.14}$$

kde m_k je hmotnost, g_k faktor degenerace, B_k baryonové číslo a Q_k elektrický náboj, μ_B a μ_Q pak příslušné chemické potenciály. Předpokládáme, že systém je uzavřen do objemu V.

Mějme tedy generující funkci (2.12). Pak lze generující funkci Z_S získat z rovnic (2.9)-(2.11) ve tvaru

$$Z_S = Z_0\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} d\phi e^{-iS\phi}e^{S_1e^{i\phi}}e^{S_{-1}e^{-i\phi}} \tag{2.15}$$

kde $Z_0 = \exp(N_{S=0})$ a $S_{\pm1} = N_{s=\pm1}$.

Abychom mohli explicitně spočítat kanonickou partiční funkci (2.15), musíme každý výraz v integrandu rozložit do mocninné řady a pak zintegrovat podle $d\phi$. Rovnici (2.15) si přepíšeme do tvaru

$$Z_S = Z_0\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} d\phi e^{-iS\phi}e^{\sqrt{S_1S_{-1}}(\sqrt{\frac{S_1}{S_{-1}}}e^{i\phi}+\sqrt{\frac{S_{-1}}{S_1}}e^{-i\phi})}. \tag{2.16}$$

Použitím vztahu pro modifikovanou Besselovu funkci $I_S(x)$

$$e^{\frac{x}{2}}(t+\frac{1}{t}) = \sum_{-\infty}^{+\infty} t^S I_S(x) \tag{2.17}$$

získáme po integraci podle $d\phi$ vztah pro Z_S

$$Z_S(T,V,\mu_B,\mu_Q) = Z_0(T,V,\mu_B,\mu_Q)(\frac{S_1}{S_{-1}})^{S/2} I_S(x) \tag{2.18}$$

kde za argument Besselovy funkce jsme dosadili $x = 2\sqrt{S_1 S_{-1}}$.

Lze tedy přímo spočítat hustotu n_k k-tého druhu částic. Využijeme relace

$$Z_k^1 \rightarrow \lambda_k Z_k^1, \tag{2.19}$$

kde jednočásticová suma Z_k^1 odpovídá té v rovnici (2.12), a napíšeme vztah pro zmíněnou sumu:

$$n_k^C = \lambda_k \frac{\partial}{\partial \lambda_k} \ln Z_S(\lambda_k)|_{k=1} \tag{2.20}$$

Jako příklad lze uvést výrazy pro částicovou hustotu kaonů K^+ a antikaonů K^- v prostředí s čistou celkovou podivností $S = S_B - S_{\bar{B}}$:

$$n_{K+}^C = \frac{Z_{K+}^1}{V} \frac{S_{-1}}{\sqrt{S_1 S_{-1}}} \frac{I_{S-1}(x)}{I_S(x)} \tag{2.21}$$

$$n_{K-}^C = \frac{Z_{K-}^1}{V} \frac{S_1}{\sqrt{S_1 S_{-1}}} \frac{I_{S+1}(x)}{I_S(x)} \tag{2.22}$$

Je ovšem třeba mít na paměti, že jak rovnice (2.16), tak rovnice (2.20) byly odvozeny za podmínky zanedbání příspěvků vícenásobně podivných baryonů. Vícenásobně podivné baryony jsou ale důležitou součástí fireballu, který vzniká při těžkojaderných srážkách, což vede k tomu, že je musíme. Předpokládejme omezující podmínku podivnostní neutrality $S = 0$ a zahrňme hadrony o podivnosti $s = \pm1, \pm2, \pm3$. Výraz pro kanonickou partiční funkci v rovnici (2.15) bude tedy nahrazen vztahem

$$Z_{S=0}^C = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} d\phi \exp\left(\sum_{n=-3}^{3} S_n e^{in\phi} \right) \tag{2.23}$$

kde $S_n = \sum_k Z_k^1$.

2.2 Kanonický potenciál jako grandkanonická limita

V tomto oddíle ukážeme, že grandkanonická formulace je asymptotickou realizací přesného kanonického přiblížení. Uvažujme tedy termální systém obsahující částice pouze o podivnosti $S = 1$ a jejich odpovídající antičástice. V takovém případě bude grandkanonická hustota pro částicový plyn s podivností $s = 0, \pm1$ rovna

$$n_{s=\pm1}^{GC} = \frac{Z_{s=\pm1}^1}{V} \lambda_s^{\pm1} \tag{2.24}$$

s fugacitou $\lambda_s = \exp(\mu_S/T)$.

Pokud srovnáme výsledky pro GC soubor a kanonický soubor (rovnice (2.21) a (2.22) - zde jsou uvedeny rovnice pro kaonovou hustotu, což lze, protože porovnáváme kanonickou a grandkanonickou hustotu částic obsahující podivné kvarky), získáme pro $S = 0$ vztah mezi kanonickou a grandkanonickou hustotou částic:

$$n^C_{s=\pm 1} = n^{GC}_{s=\pm 1}(\bar{\lambda}_s) \tag{2.25}$$

kde $\bar{\lambda}_s$ je efektivní fugacita dána vztahem

$$\bar{\lambda}_s = \frac{S_{\mp 1}}{\sqrt{S_1 S_{-1}}} \frac{I_1(x)}{I_0(x)}. \tag{2.26}$$

Vidíme, že pro velká x, pro která platí $x \to \infty$ jsou grandkanonická a kanonická formulace ekvivalentní. Zanedbáme-li vícenásobně podivné baryony v generujícím funkcionálu (2.23), získáme vztah

$$n^C_{s=\pm 1} = n^{GC}_{s=\pm 1} \frac{I_1(x)}{I_0(x)}. \tag{2.27}$$

Je však třeba pamatovat na to, že výše uvedený vztah je platný pouze tehdy, je-li termální fázový prostor všech vícenásobně podivných baryonů zanedbatelné malý. Tento předpoklad je ale nanejvýš sporný, hlavně pokud se blížíme termodynamické limitě.

Z rovnice (2.27) vidíme, že můžeme zavést parametr $F_S(x)$ vztahem

$$F_S = \frac{I_1(x)}{I_0(x)}, \tag{2.28}$$

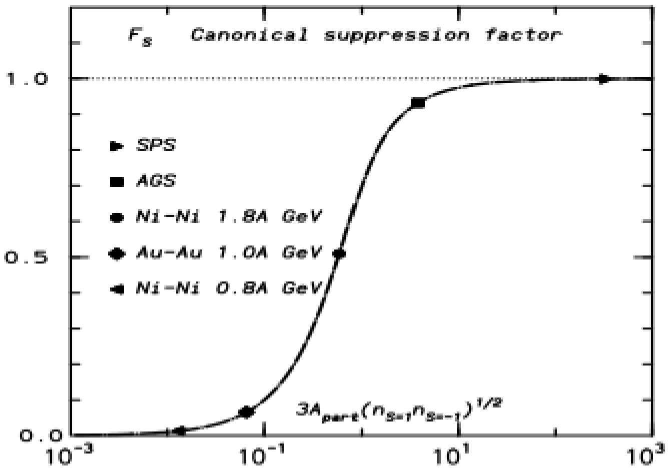
pro nějž v limitním případě pro malá x platí

$$\lim_{x \to 0} \frac{I_1(x)}{I_0(x)} \to x/2. \tag{2.29}$$

Tento parametr popisuje odchylky částicových multiplicit od jejich grandkanonické hodnoty. Průběh parametru $F_S(x)$ v závislosti na x je vyobrazen v grafu na Obrázku 2.1.

Argument Besselovy funkce x popisuje velikost termálního fázového prostoru, který je dostupný podivným částicím. Pro systém neobsahující vícenásobně podivné částice je tento argument přímo úměrný celkovému počtu podivných párů částice-antičástice v grandkanonické limitě.

Průběh kanonického faktoru potlačení podivnosti $F_S(x)$ je zachycen na Obrázku 2.1 spolu s typickými hodnotami x, které očekáváme pro SIS, AGS a SPS energie v centrálních srážkách. Obrázek 2.1 rovněž poukazuje na důležitost kanonického potlačení fázového prostoru částic při SIS energiích. V centrálních těžkoiontových srážkách na AGS a hlavně při vyšších energiích, jaké máme na SPS,RHIC,LHC - [6], je kanonické potlačení zanedbatelné. Proto je pro tato pásma vyšších energií vhodnější použít grandkanonické aproximace. Obecně vzato je záhodno použít kanonického přiblížení pro energie srážky okolo (2 - 4) GeV. Zároveň ovšem platí, že efekt kanonického potlačení může být důležitý i pro vysokoenergetické necentrální těžkoiontové srážky a pro popis produkce těžkých kvarků.



Obrázek 2.1: Kanonický faktor potlačení podivnosti, závislost vynesená pro hodnoty na SPS a AGS pro Pb-Pb a Au-Au srážky. Převzato z [6].

Pokud zanedbáme příspěvky vícenásobně podivných baryonů, a nábojové asymetrie mezi částicemi a antičásticemi, lze přepsat generující funkcionál $\tilde{Z}(T, V, \phi, \psi)$ z rovnice (2.11) v logaritmickém tvaru jako

$$\ln \tilde{Z}_S(T, V, \mu_Q = 0\phi, \psi) = N_{s=0,b=0} + 2N_{s=1,b=0} \cos\psi + 2N_{s=0,b=1} \cos\phi + 2N_{s=1,b=1} \cos(\phi - \psi) \tag{2.30}$$

kde $N_{s,b}$ je definováno jako suma přes všechny částice a rezonance o podivnosti s a baryonovém čísle b:

$$N_{s,b} = \sum_k Z_k^1 \tag{2.31}$$

pro jednočásticovou partiční sumu $Z_k^1 = \frac{Vg_k}{2\pi^2}\ m_k^2\ T\ K_2(m_k/T)$, která vyjadřuje termální fázový prostor, který zabírá částice nesoucí podivnost s a baryonový náboj b.

Výše popsaný generující funkcionál můžeme použít v rovnici (2.10), abychom získali kanonickou partiční funkci fireballu s čistou hodnotou podivnosti S a baryonovým číslem B ve tvaru

$$Z_{B,S}(T, V) = \frac{Z_0(T, V)}{4\pi^2} \int_0^{2\pi} d\phi e^{-iB\phi} \exp[z_N \cos\phi] \int_0^{2\pi} d\psi e^{-iS\psi} \exp[z_K \cos\psi + z_Y \cos(\phi - \psi)] \tag{2.32}$$

kde $Z_0 = \exp(N_{s=0,b=0})$, $z_K = N_{s=1,b=0}$, $z_N = N_{s=0,b=1}$ a $z_Y = N_{s=1,b=1}$.

Přepišme nyní argument exponenciály integrálu podle $d\psi$ v rovnici (2.32) jako

$$z_K \cos\psi + z_Y \cos(\phi - \psi) = z(\phi) \cos(\psi - \alpha(\phi)) \tag{2.33}$$

kde $\alpha(-\phi) = -\alpha(\phi)$ a

$$z(\phi) = (z_K^2 + 2z_K z_Y \cos\phi + z_Y^2)^{1/2} \tag{2.34}$$

$$e^{i\alpha(\phi)} = \frac{z_K}{z(\phi)} + \frac{z_Y}{z(\phi)} e^{i\phi} \tag{2.35}$$

Protože integrujeme přes celou periodu, můžeme integrační meze posunout o α a spočítat část integrálu (2.32) příslušnou parametru ψ přesně, čímž předchozí rovnici získáme ve tvaru

$$Z_{B,S}(T,V) = \frac{Z_0(T,V)}{\pi} \int_0^{\pi} \cos(B\phi + S\alpha(\phi)) \exp[2z_N \cos\phi] I_S(2z(\phi)) d\phi. \tag{2.36}$$

Tuto integraci však nedokážeme provést analyticky.

Pokud vyjdeme z předchozí rovnice, můžeme snadno najít tvar střední hodnoty multiplicity částice typu i. Postup je následující ([6]):

(i) v rovnici (2.31) odseparujeme výrazy pro částice a antičástice,
(ii) vynásobíme hodnotu příslušnou zkoumané částici odpovídajícím faktorem fugacity λ,
(iii)dle rovnice (2.20) provedeme derivaci v bodě $\lambda = 1$.

Výsledek pro částici typu i s podivností S_i a baryonovým číslem B_i je tedy

$$\langle N_i \rangle_{B_i,S_i} = Z_i^1(m_i,T,V) \frac{Z_{B-B_i,S-S_i}(T,V)}{Z_{B,S}(T,V)}. \tag{2.37}$$

Výsledky získané využitím rovnice (2.37) by měly korespondovat s hodnotou získanou pomocí GC aproximace pro velká B a V, ovšem s fixní baryonovou hustotou B/V. Toto lze explicitně ukázat využitím Čebyševovy aproximace příslušných integrálů.

Kapitola 3

Vliv rezonancí na teplotu souboru

V této kapitole shrneme výsledky, které jsme získali s využitím dat z urychlovačů LHC a RHIC za pomoci programu SHARE with CHARM (viz zdroj [3]), jehož dokumentaci a princip fungování krátce shrneme v odstavci 3.0.1.

Pochopení produkce hadronů složených ze čtyř kvarkových vůní u, d, s, c je pro analýzu vlastností kvark-gluonového plazmatu (QGP), které vzniklo v relativistické těžkoiontové srážce v pásmu energie Velkého hadronového urychlovače (LHC), velmi důležité. V našem případě produkci hadronů popíšeme pomocí horkého fireballu. Tento fireball popíšeme pomocí statistického modelu, který připouští chemickou nerovnováhu všech vyjmenovaných kvarků zvlášť. Odpovídající parametry statistického hadronového modelu SHM (v našem případě se zaměříme hlavně na teplotu T a baryochemický potenciál μ_B) získáme fitováním částicových četností, které podléhají omezujícím podmínkám plynoucím z vlastností zdroje (v našem případě fireballu).

Obecně platí, že zdroj částic (v tomto případě fireball) lze po hadronizaci charakterizovat několika vlastnostmi - například energií, entropií, tlakem, celkovou podivností a baryonovým číslem. Každá z těchto veličit může být použita jako omezující podmínka fitu, což prakticky znamená, že její hodnotu zafixujeme na určitou hodnotu a tato veličina se fitu nebude účastnit.

Zaměříme-li se nyní speciálně například na půvabný kvark c, můžeme říct následující: mějme určitý vstupní počet kvarkových párů v čase, kdy dojde pro půvabný kvark k chemickému vymrznutí. Hadronový výtěžek pak záskáme prostředky statistické hadronizace, a to pro předepsanou sadu parametrů, podle kterých fitujeme. Tuto sadu určujeme podle povahy zdroje částic. Vzniknuvší hadronové rezonance se pak rozpadají, čímž "krmí"stabilní půvabné hadrony. Tyto stabilní půvabné hadrony existují však velmi krátce. Vliv rozpadů těchto půvabných hadronů má vliv na změnu četnosti produkovaných hadronů. Způsob, jakým k této změně dochází, je různý, záleží na druhu částice.

3.0.1 Metoda řešení

V programu SHARE with CHARM je řešení tohoto problému založeno na numerické metodě vyvinuté pro jeho předchůdce SHARE [3], který se zabýval popisem rozdělení lehkých hadronů (hadronů složených pouze z u, d, s kvarků. Program SHARE with CHARM navíc rozděluje předepsaný počet půvabných kvarků (a antikvarků) $N_{c\bar{c}}$ do jednotlivých půvabných hadronů za použití pravidel statistické hadronizace implementovaných v přidaném modulu CHARM, který získává výtěžky na základě řešení příslušných Besselových funkcí (viz Dodatek). Podobně jako lehké hadrony jsou i rozpady půvabných hadronů modelovány pomocí daných tabulek, přičemž vždy postupujeme "sestupně"- tj. od nejtěžší částice k nejlehčí. Výtěžky každého hadronu jsou získány pomocí tabulek rozpadového větvicího poměru mateřské částice. V případě, že nejsou k dispozici potřebná data, použije program patřičný teoretický model. To proto, aby bylo zajištěno, že všechny částice se určitě rozpadají. Příspěvek každé z výsledných dceřinných hadronů je započítáván do hadronového u, d, s výtěžku samostatně a s uvážením příslušné SHM parametrizace v příslušných souborech modulu SHARE. V dalším textu budeme pracovat s hadrony **neobsahujícími** půvabný kvark c.

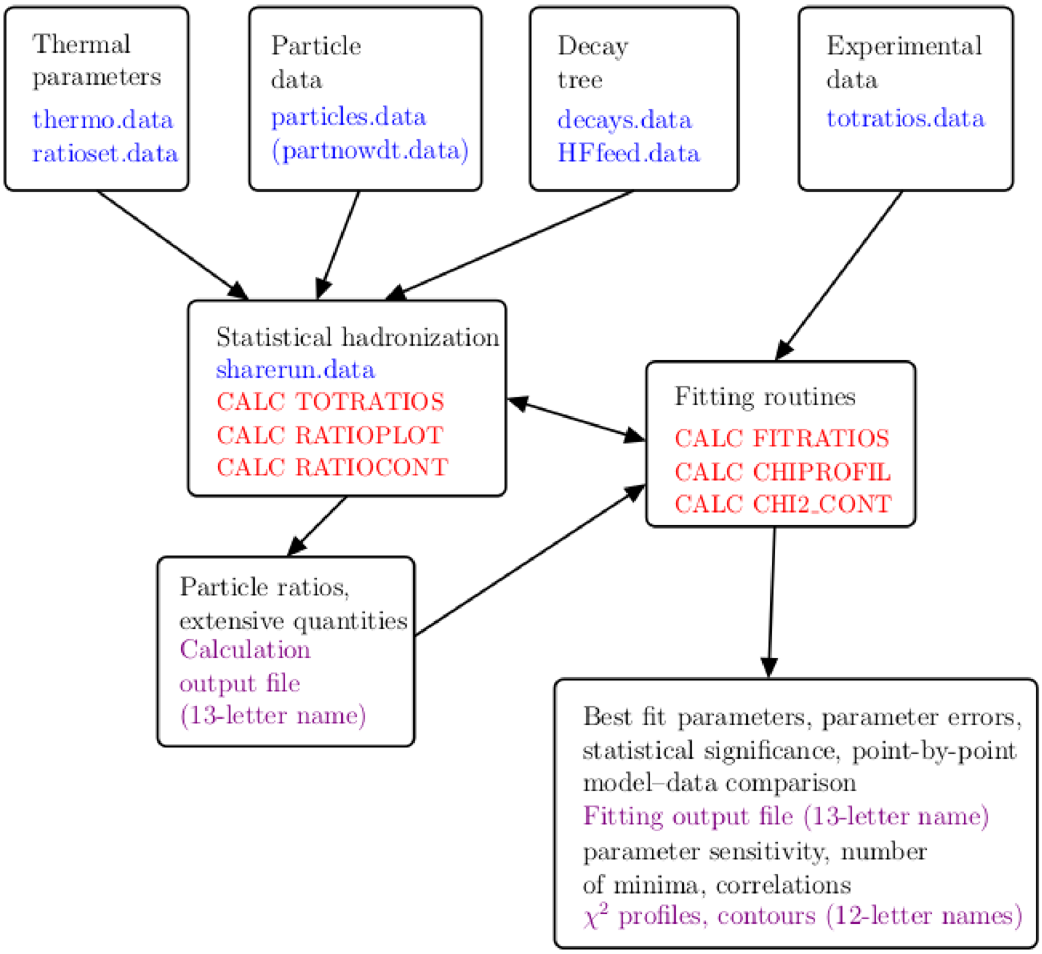
3.1 SHARE with CHARM

SHARE with CHARM je program založený na bázi programovacích jazyků C++ a FORTRAN77 využívající knihoven CERNLIB. Jeho schéma je zachyceno na Obrázku 3.1. Celkově potřebujeme šest vstupních souborů, které obsahují seznam částic, rozpadový strom a hodnoty jednotlivých parametrů. Program může následně provést velké množství operací, které načítá ze souboru *sharerun.data*. Vstupní soubory, které potřebujeme zahrnout do bezchybného běhu programu, jsou následující:

(a) *particles.data* - seznam vlastností částic (název částice, hmotnost, šířka rezonance, spin, částicový izospin,. . .),
(b) *decays.data* - seznam rozpadů hadronů neobsahujících půvabný kvark c,
(c) *HFfeed.data* - seznam větvicích poměrů půvabných hadronů,
(d) *thermo.data* - seznam parametrů modelu,
(e) *ratioset.data* - seznam rozsahu jednotlivých parametrů a
(f) *totratios.data* - experimentální data a fyzikální vlastnosti, které chceme získat na výstupu.
(g) *sharerun.data* - soubor, ze kterého program načte, co má dělat; seznam operací, které má program provést.

V případě, že nějakou částici (v našem případě nejčastěji rozpad) nechceme zahrnout do fitu, napíšeme na začátek řádku symbol #, který programu SHARE řekne, že vše, co se na řádku vyskytuje, má ignorovat. V případě, že nechceme, aby hodnota nějaké veličiny zůstávala konstantní, změníme v souboru *ratioset.data* v příslušném sloupci (posledním, viz dokumentace SHARE [3]) hodnotu 1 (true=uvažovat) na hodnotu 0 (false=neuvažovat).

Pro další práci jsou podstatné především soubory *particles.data*, *partnowdt.data* (soubor identický se souborem *particles.data*, který ale pokládá šířku rezonancí automaticky rovnu nule), *decays.data*, *thermo.data* a *ratioset.data*. Je třeba si rovněž dát pozor, abychom pro každou simulaci (v našem případě je budeme provádět s daty z LHC a RHIC) uvedli příslušný zdrojový soubor (pro každou simulaci je třeba vytvořit nový soubor typu *particles.data* atd.). Toto je součástí souboru se zdrojovým kódem *sharerun.data*. Stejně tak je třeba vytvořit (a do běhu programu zařadit) výstupní soubor, kde jsou uvedeny výsledky



Obrázek 3.1: Schéma programové struktury SHARE with CHARM. Vstupní soubory jsou vyznačeny modře, programové příkazy červeně a výstupní soubory fialově. Převzato z [3].

provedeného fitu. V případě standardní distribuce SHARE je tento soubor pojmenován *fitTESTne.out*, uživatel si však může vytvořit i soubor jiný, který bude sloužit jako výstupní, jen toto opět nesmí opomenout zahrnout do skriptu v *sharerun.data* (v praxi to znamená nahradit všechny *fitTESTne.out* názvem příslušného souboru). Totéž platí i pro ostatní soubory, přičemž skoro vždy je třeba dát si pozor na počet znaků v názvu souboru - například soubor *ratioset.data* tudíž nemusí vždy nést právě tento název, důležitá je koncovka *.data* a to, že počet znaků v názvu souboru je právě 13 (včetně tečky). Analogické tvrzení platí i pro ostatní výše uvedené soubory (nutný počet znaků je zřejmý z názvů souborů).

Jedinou výjimku, kdy není třeba dbát na přesný počet znaků v názvu souboru, tvoří soubor *LHC1020MI.data* (název je opět možno přizpůsobit). V tomto souboru jsou uvedeny výtěžky jednotlivých částic, což znamená experimentální hodnota, statistická chyba, systematická chyba a indikace, zda je tato hodnota zahrnuta do fitu (1), nebo není. Jako příklad můžeme vzít například baryon lambda s hodnotou $\Lambda = 17 \pm 2$. Toto bude v souboru LHC1020MI.data uvedeno jako:

$$Lm1115zer \quad prt\_yield \quad 17. \quad 2.0 \quad 0. \quad 1$$

I v tomto případě však musíme dbát na to, abychom pro každý experiment, ze kterého bereme data, měli jeden takovýto seznam.

3.2 Vliv rezonancí s vysokou hmotností na teplotu souboru

S využitím programu SHARE jsme zkoumali, jaký vliv mají rezonance na teplotu souboru. V našem případě to znamená, že jsme v souboru *decays.data*, který je uspořádán způsobem

$$Parent \quad daughter1 \quad daughter2 \quad BR \quad C-G?$$

pro dvoučásticový rozpad a

$$Parent \quad daughter1 \quad daughter2 \quad daughter3 \quad BR \quad C-G?$$

pro tříčásticový rozpad, postupně zanedbávali rozpady částic od určité hmotnosti. V tomto případě platí následující značení:

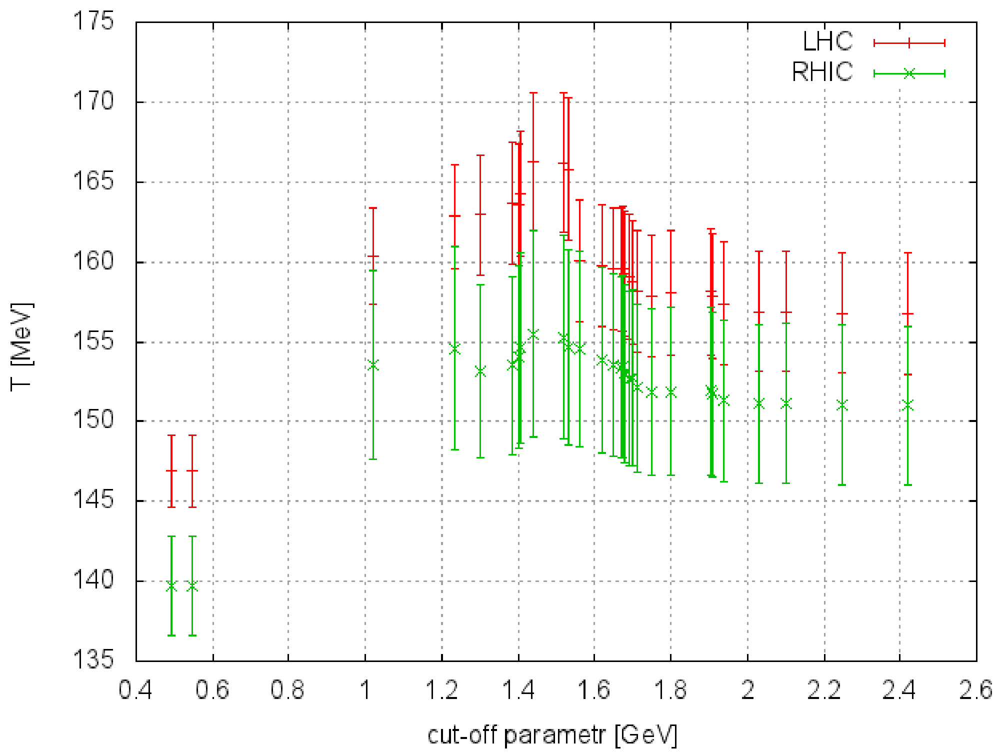
(a) *Parent* - rozpadající se částice,
(b) *DaughterN* - produkty rozpadu,
(c) *BR* - Branching ratio = větvicí poměr (pravděpodobnost rozpadu daným způsobem),
(d) *C-G?* - indikace, zda je (1) či není (0) nutné upravit větvicí poměr Clebsch-Gordanovými koeficienty.

Hmotnost je u každé *parent*-částice vždy uvedena. Hodnotu, od které všechny těžší částice zanedbáme, nazveme **cut-off parametrem**.

Rovněž jsme předpokládali, že hodnoty parametru γ dané rovnicí (1.28) nehrají ve fitu žádnou roli, což v praxi znamená, že v souboru *thermo.data* jejich číselnou hodnotu položíme z důvodu jejich exponenciálního charakteru rovnu 1 a v souboru *ratioset.data* přepíšeme odpovídající hodnoty parametru $Fit? = 0/1$ na 0, což znamená, že hodnoty γ_q a γ_s nebudou ve fitu vůbec zahrnuty.

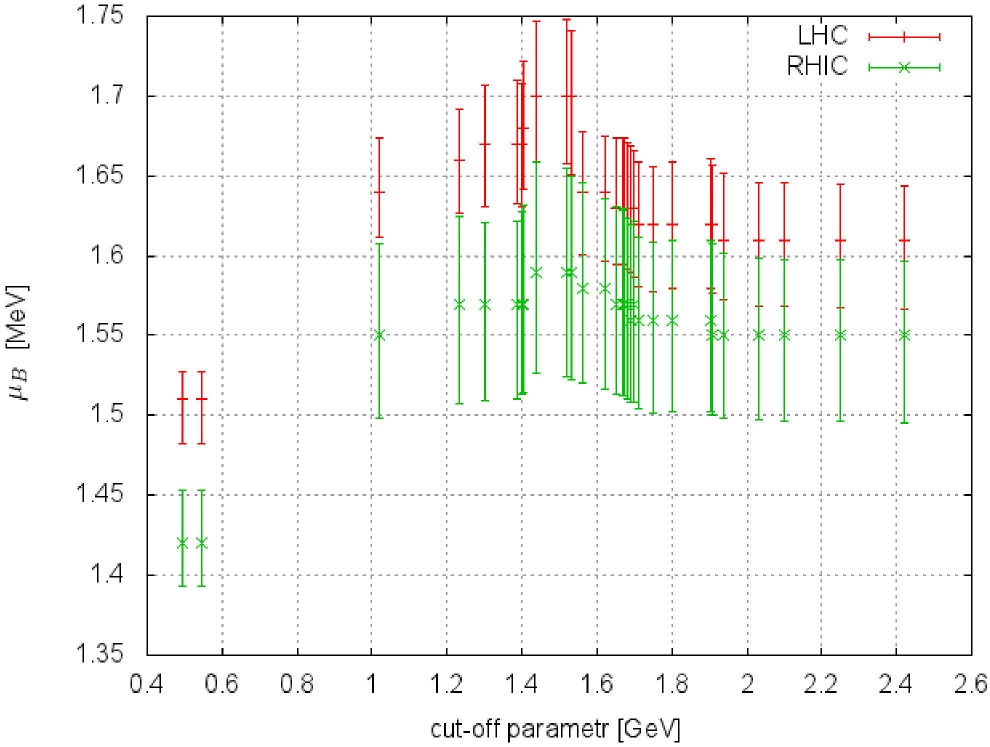
Vzhledem k tomu, že zatím neuvažujeme šířku rezonancí, bereme data o vlastnostech částic ze souboru *partnowdt.data* a pro sadu hodnot částicových výtěžků z LHC (vycházíme z původního souboru *LHC1020.data*, který reprezentuje data o 10-20% centralitě z experimentu ALICE ze srpna 2013) a RHIC (data převzata ze zdroje [12]) pro centralitu 0-5%. Pro data z RHIC jsme vytvořili speciální soubor založený na souboru *LHC1020.data* v souladu s podmínkami uvedenými výše. Rozdíl byl jak v centralitě, tak v uvažovaných částicích. Zatímco na RHICu jsme brali v potaz pouze protony, kaony a piony (s výtěžky pro odpovídající centralitu převzatými z [12]), pro LHC jsme započítávali např. i Λ a Ξ baryony.

Zkoumali jsme závislost teploty T a baryochemického potenciálu μ_B na cut-off parametru. Výsledky pro teplotu T (jak pro LHC, tak pro RHIC) jsou na Obrázku 3.2. V tomto grafu (a i ve všech následujícíh) jsou samozřejmě zachyceny i chyby veličin, jejichž velikost lze rovněž získat ze souboru, ve kterém jsou napsány výsledky fitu. Z grafu je vidět, že v případě zafixování parametrů λ_s a λ_q je experimentální závislost teploty na cut-off parametru velmi podobná pro výsledky jak z LHC, tak z RHIC. Až na případ, kdy cut-off parametr je rovný hodnotám 492 MeV a 547 MeV, kdy výsledky leží mimo oblast, ve které se nacházejí výsledky pro ostatní cut-off parametry, leží všechny výsledky v rámci chyby, a to jak na RHICu (přibližně 155 MeV), tak na LHC (přibližně 160 MeV). To by ale znamenalo, že zanedbávání rozpadů nemá na celkovou teplotu souboru téměř žádný vliv, pokud je nezanedbáme (téměř) všechny (!). Pokud však chyby nebereme v potaz, vidíme, že datové body vykazují jistou systematiku. V takovém případě se výsledná teplota nemění až od hodnoty cut-off parametru 1,8 GeV.



Obrázek 3.2: Závislost teploty souboru T na cut-off parametru pro zanedbané šířky rezonancí.

Pokud jde o průběh baryochemického potenciálu μ_B, pak je tento zachycen na Obrázku 3.3. Lze u něj jak v případě LHC, tak v případě RHIC pozorovat stejný trend jako v případě teploty. Rovněž můžeme vidět, že pro hodnoty cut-off parametru 492 MeV a 547 MeV (stejně jako v předešlém případě), dochází k určité odchylce od převažujícího trendu, kdy veškeré výsledky opět leží v rámci chyby. Pro LHC pozorujeme hodnotu přibližně $\mu_B = 1,65$ MeV, u RHICu pak $\mu_B = 1,55$ MeV. To znamená, že změny ve velikosti baryochemického potenciálu opět nastávají až tehdy, když zanedbáme téměř všechny rozpady. Pokud však i zde zanedbáme chyby, dojdeme ke stejnému závěru jako v případě teploty. Vidíme zde i podobnou systematiku, kterou datové body vykazují a opět můžeme říct, že výsledný baryochemický potenciál se nemění od hodnoty cut-off parametru 1,8 GeV.



Obrázek 3.3: Závislost baryochemického potenciálu μ_B na cut-off parametru pro zanedbané šířky rezonancí.

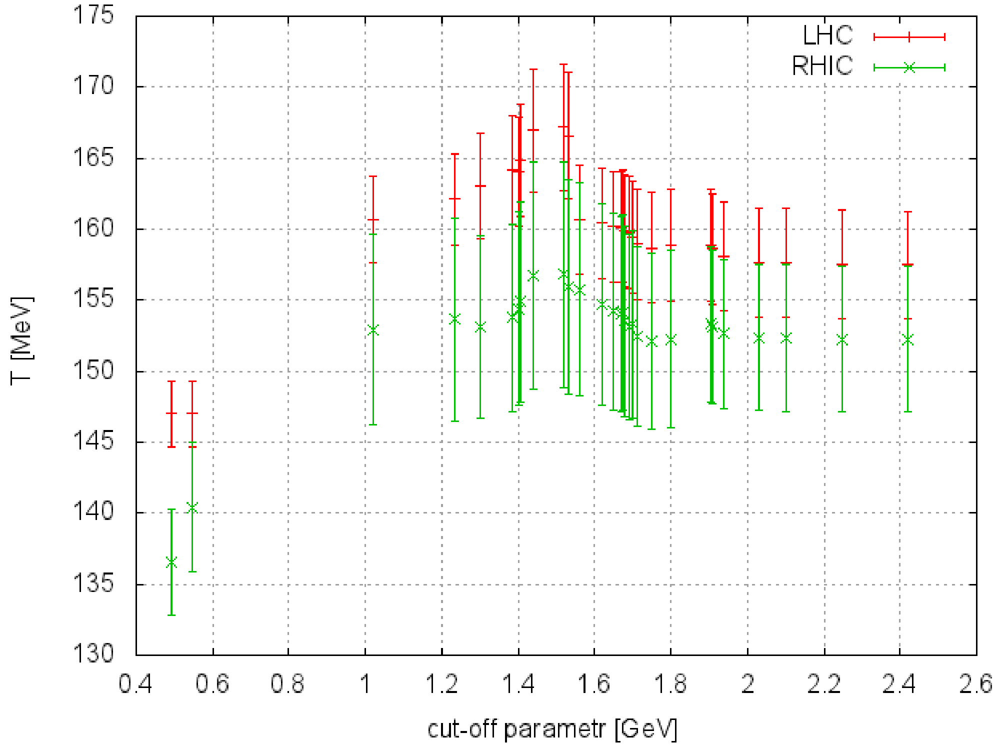
3.3 Vliv konečné šířky rezonancí na teplotu souboru

Zde jsme postupovali úplně stejně jako v předchozím případě. Opět jsme vyšetřovali závislost teploty T a baryochemického potenciálu μ_B na cut-off parametru, nicméně tentokrát jsme rovněž vzali v potaz konečné šířky rezonancí. To znamená, že místo načítání vlastností částic ze souboru *partnowdt.data* jsme tyto brali ze souboru *particles.data*. Výsledky pro teplotu T a baryochemický potenciál μ_B jsou na Obrázku 3.4 resp. na Obrázku 3.5.

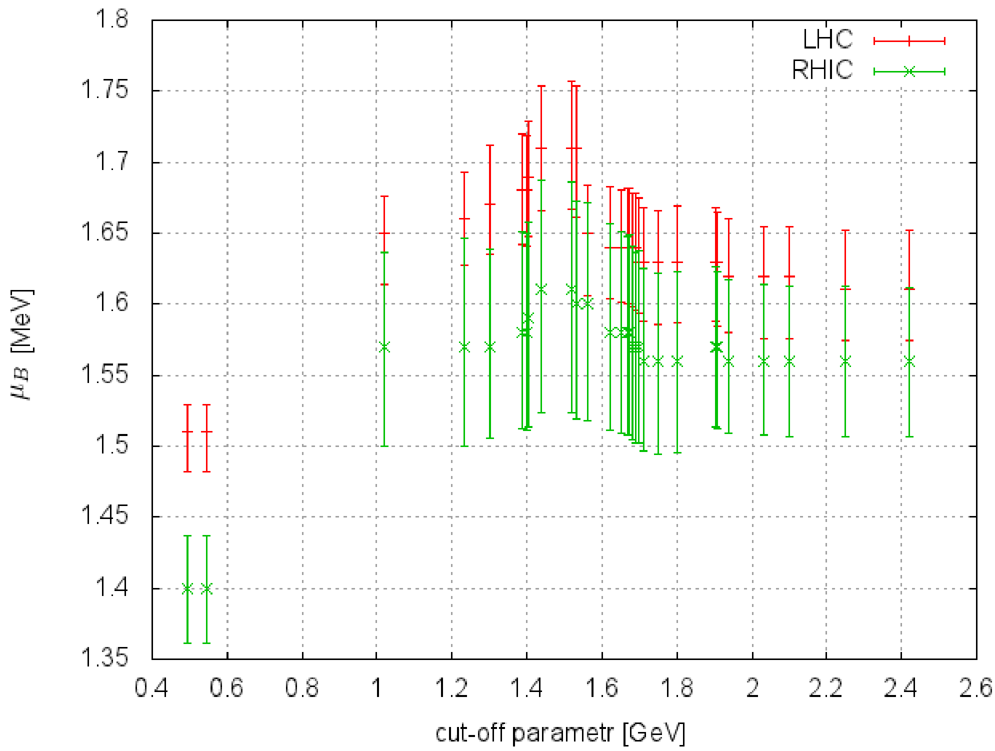
Na první pohled lze z obou grafů vyčíst, že hodnoty teplot a baryochemických potenciálů jsou přibližně stejné jako v předchozím případě, kdy jsme rezonance zanedbali úplně. Zaznamenat lze i pokles hodnot pro dva nejnižší cut-off parametry. Tento výsledek je velmi zarážející, neboť teoreticky by zahrnutí rezonancí na teplotu souboru vliv mít mělo (viz kapitola 1.5 o vlivu šířky rezonancí jako funkce teploty). Stejně jako v případě zanedbání vlivu konečné šířky rezonancí pozorujeme hodnoty teploty T pro LHC, resp. pro RHIC $T = 160$ MeV, resp. $T = 155$ MeV a hodnoty baryochemického potenciálu μ_B $\mu_B = 1,65$ MeV v případě LHC a $\mu_B = 1,55$ MeV v případě urychlovače RHIC.

3.4 Nerovnovážné modely, chemické potenciály a fugacity

V tomto případě jsme upustili od fixování faktorů γ a jak γ_s, tak γ_q jsme nechali na původních přednastavených hodnotách, stejně jako jsme v souboru *ratioset.data* zadali,



Obrázek 3.4: Závislost teploty souboru T na cut-off parametru pro zahrnuté konečné šířky rezonancí.

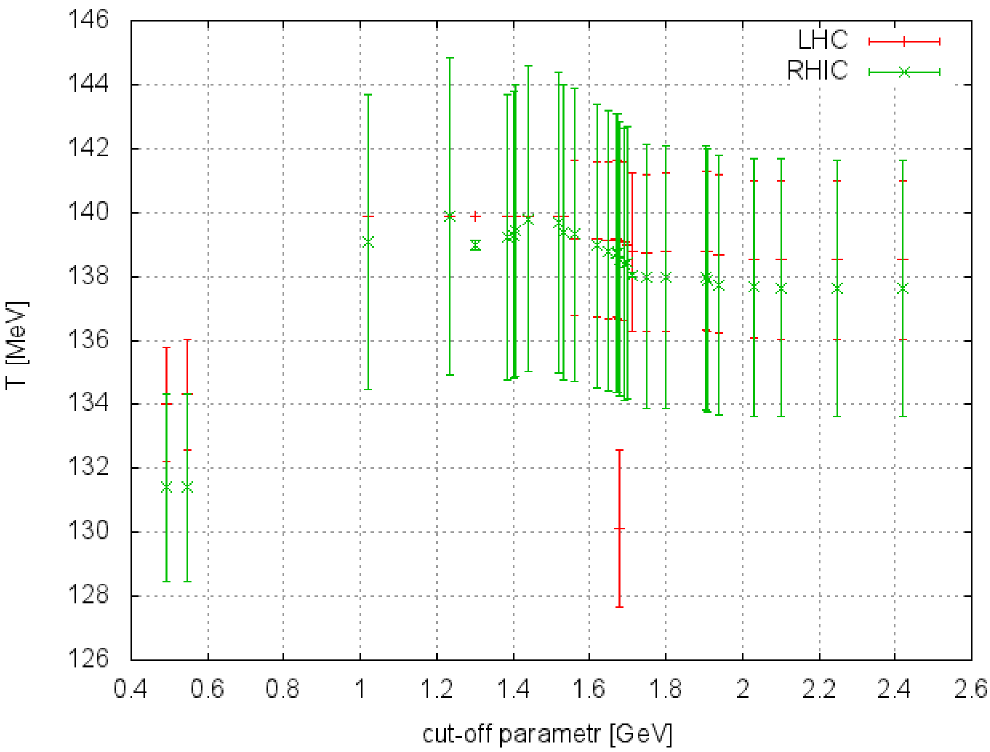


Obrázek 3.5: Závislost baryochemického potenciálu μ_B na cut-off parametru pro zahrnuté konečné šířky rezonancí.

že hodnota faktorů nebude fixována a bude tedy součástí fitu. Opět jsme rozlišili dva případy - zahrnutí a nezahrnutí konečné šířky rezonancí.

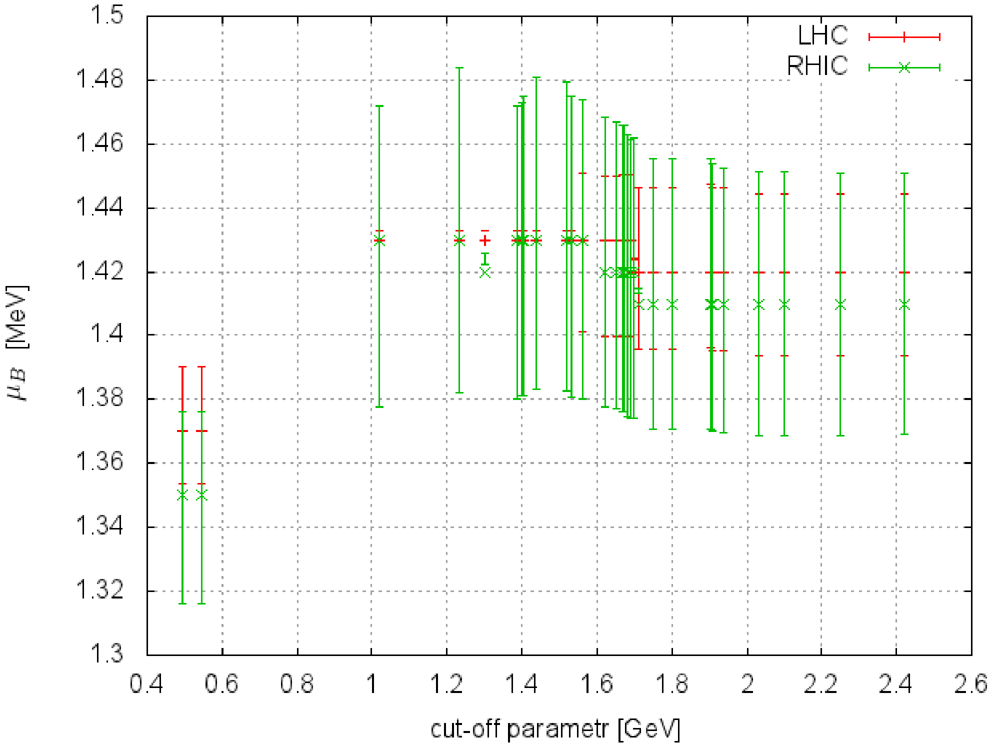
3.4.1 Zahrnutí rezonancí s vysokou hmotností

Na Obrázku 3.6 vidíme závislost teploty T na cut-off parametru a na Obrázku 3.7 stejnou závislost pro baryochemický potenciál μ_B. Konečnou šířku rezonancí jsme zde neuvažovali (tzn. používáme soubor *partnowdt.data*). Opět zde vidíme pokles hodnoty u dvou nejmenších cut-off parametrů, ale už zde nepozorujeme přibližně stejný průběh pro LHC a pro RHIC. Zatímco v předchozích případech hodnoty pro LHC byly vždy vyšší než ty pro RHIC, zde už to neplatí. Pro hodnotu cut-off parametru 1675 MeV pozorujeme dokonce velmi nízkou hodnotu pro LHC, o hodně nižší než hodnoty ostatní a také nižší než odpovídající hodnota pro RHIC. U stejného cut-off parametru podobnou odchylku nepozorujeme v případě baryochemického potenciálu μ_B.



Obrázek 3.6: Závislost teploty souboru T na cut-off parametru pro nerovnovážné soubory se zanedbáním šířek rezonancí.

Vidíme zde ale i něco jiného. U několika hodnot - jak v případě LHC, tak v případě RHICu - nezaznamenáváme v grafu žádnou chybu měření. Ve skutečnosti tato chyba samozřejmě existovala, jen byla zhruba o 4 řády nižší než měřená hodnota. Pro dané hodnoty cut-off parametrů toto zaznamenáváme i v případě baryochemického potenciálu μ_B. Jak již bylo uvedeno, nezaznamenáváme v tomto případě výrazné rozdíly mezi LHC a RHIC a teplota je v obou případech rovna přibližně $T = 140$ MeV a baryochemický potenciál hodnotě $\mu_B = 1,43$ MeV. To opět potvrzuje, že pro pozorování znatelné změny, která není v rámci chyby měření, je třeba zanedbat téměř všechny rozpady. Oproti předchozímu případu, kdy jsme uvažovali rovnovážný model - tedy kdy jsme zafixovali hodnoty γ_s a γ_q



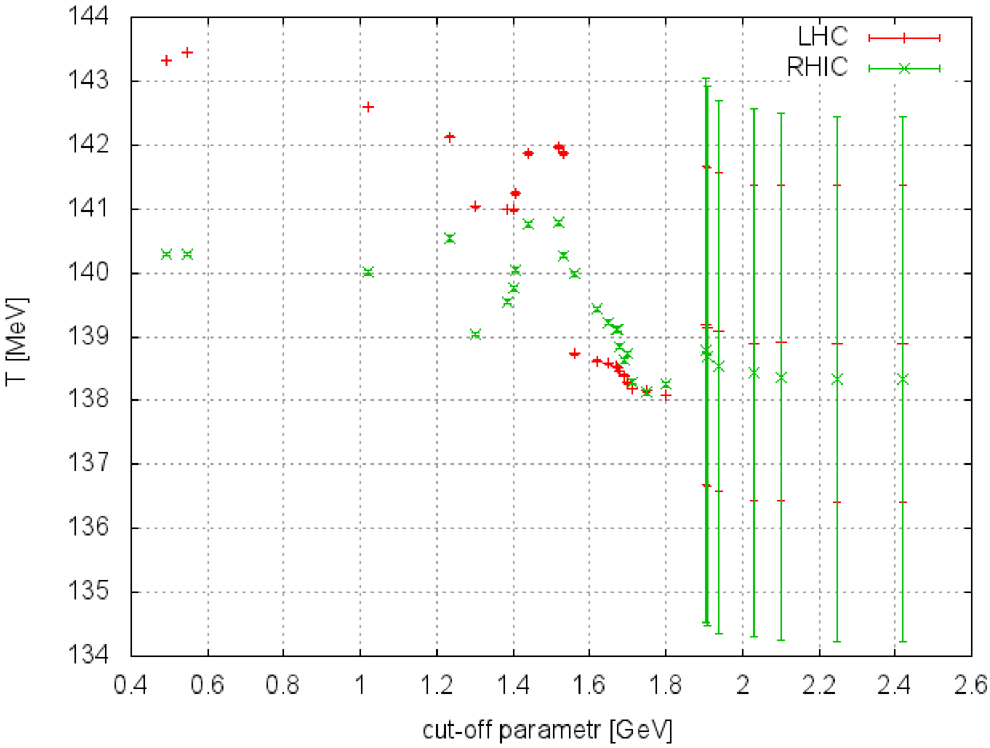
Obrázek 3.7: Závislost baryochemického potenciálu μ_B na cut-off parametru pro nerovnovážné soubory se zanedbáním šířek rezonancí.

- však lze zaznamenat pokles průměrné teploty, a to až o zhruba 15 MeV, jak dokládají výsledky uvedené výše. Totéž lze pozorovat v případě baryochemického potenciálu μ_B, zde však pokles leží vzhledem k průměrné hodnotě parametru (jednotky MeV) v řádu desetin MeV.

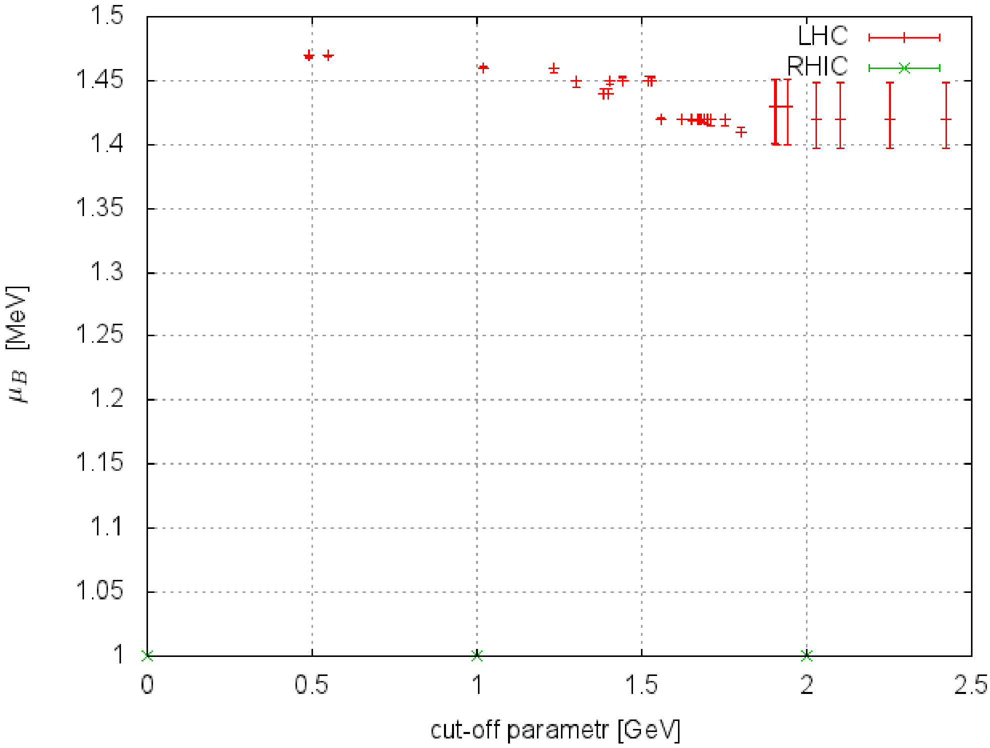
3.4.2 Zahrnutí konečné šířky rezonancí

Nyní opět započítáme konečnou šířku rezonancí (použijeme soubor *particles.data*). Na Obrázku 3.8 a Obrázku 3.9 vidíme závislost teploty T resp. baryochemického potenciálu μ_B na cut-off parametru. V tomto případě nejenže opět došlo k velkému zmenšení řádu chyby vůči řádu výsledku, ale dokonce toto pozorujeme u mnoha hodnot. Hodnota teploty se téměř nemění, stejně jako se nemění hodnota baryochemického potenciálu. Odpovídající hodnoty jsou $T = 138$ MeV resp. $\mu_B = 1,42$ MeV.

Jestliže jsme v předchozích případech pozorovali nějakou pravidelnost, pak lze nelze mluvit naprosto o žádné. Tam, kde předtím docházelo k mírnému poklesu teploty resp. baryochemického potenciálu (první dva cut-off parametry) nyní dokonce dochází k mírnému zvýšení hodnoty. Množství dat, kde je chyba velmi malá (resp. řádově zanedbatelná) je v tomto případě značně více.



Obrázek 3.8: Závislost teploty souboru T na cut-off parametru pro nerovnovážné soubory se zahrnutím šířek rezonancí.



Obrázek 3.9: Závislost baryochemického potenciálu μ_B na cut-off parametru pro nerovnovážné soubory se zahrnutím šířek rezonancí.

Kapitola 4

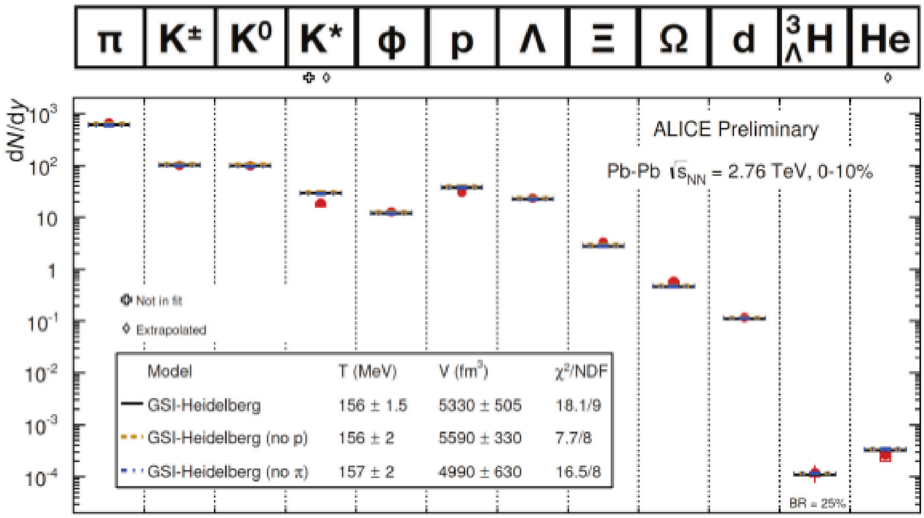
Výtěžky nestabilních rezonancí

Data z experimentů na LHC a RHIC jednoznačně ukazují, že těžkoiontová srážka je velmi komplexním jevem [11], mnohem komplexnějším, než jak by jej popsalo srovnání fitů prvotních srážek a předpovědí statistického modelu. Obzvláště pokud chceme získat hlubší porozumění proton-protonových (pp), proton-těžkoiontových (pA) dvou těžkoiontových (AA) srážek, pak si musíme uvědomit, že klasický popis, kdy v AA srážkách je vytvořeno kvark-gluonové plasma popsané hydrodynamickým modelem, v pA srážkách lze studovat studenou jadernou hmotu a že pp srážky jsou elementární ve smyslu, že dochází pouze ke srážce dvou partonů, ze kterých jsou nalétávající protony složeny, není kompatibilní s experimentálními výsledky. V případě vysokých multiplicit nacházíme u všech třech typů srážky společné prvky, jakými jsou například hřebeny (ridges) a hmotnostní závislost faktoru $v_2(p_T)$, což se očekávalo pouze pro AA srážky. To vede k závěru, že existují kolektivní efekty a hydrodynamické chování ve smyslu silné interakce mezi částicemi dokonce i v pp a pA srážkách [11].

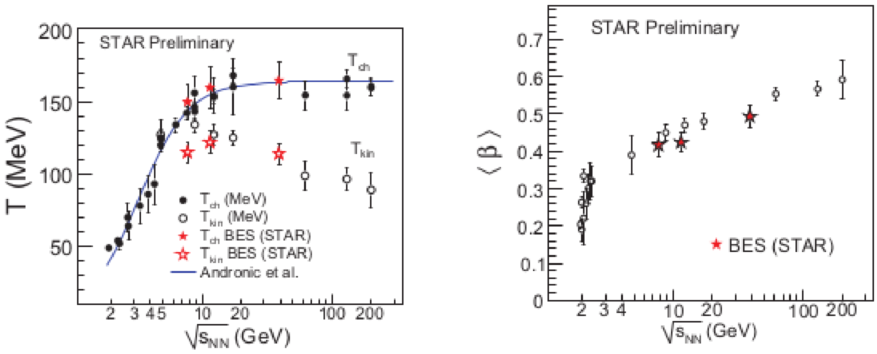
V takové situaci však studium nejběžněji vyskytujících se hadronů - pionů, kaonů, protonů - příliš nepomáhá. Pro centrální AA srážky na LHC vidíme na Obrázku 4.1. Jejich multiplicita nám tedy o způsobu jejich produkce a jejich interakci předtím, než dorazí do detektoru, řekne málo. Teplota okolo 156 MeV je podle předpovědi QCD na mřížce blízká teplotě, při které dochází k hadronizaci. To vede k předpokladu, že chemické složení hadronového plynu je při dané teplotě pevně dané. Avšak při hustotě energie okolo $0,5$ GeV/fm^3, která odpovídá teplotě 156 MeV, jsou hadrony blízko sebe a stále budou cestou k detektoru mezi sebou interagovat. Na Obrázku 4.2 vlevo vidíme teplotu chemického vymrznutí T_{ch}, která určuje chemické složení hadronového plynu, a také teplotu kinetického vymrznutí T_{kin}, při které hadrony přestávají interagovat. Vidíme, že mezi oběma je výrazný rozdíl. Zároveň ale - viz Obrázek 4.2 vpravo vidíme kolektivní rychlost expanze, která roste.

Ultimátní výzvou ve fyzice ultrarelativistických těžkých iontů je porozumění vzniku, expanze a hadronizace QGP. Toto je však zkreslené tím, že v oblasti mezi T_{ch} a T_{kin} stále dochází k vzájemné interakci hadronů, což razantně změní statistické rozdělení hybnosti hadronů. Právě rezonance nám mohou být při pochopení tohoto regionu velmi nápomocny, a to hned několika způsoby:

(a) - jejich měřená multiplicita při srovnání s očekávanou multiplicitou získanou



Obrázek 4.1: Multiplicity vybraných hadronů v centrálních (0-10%) Pb-Pb srážkách o energii 2,76 AGeV ve srovnání s předpovědí statistického modelu. Převzato z [11].



Obrázek 4.2: Vlevo: teplota, při které dochází k chemickému vymrznutí T_{ch} a teplota, při které dochází ke kinetickému vymrznutí T_{kin} jako funkce energie srážky $\sqrt{s}$. Vpravo: průměrná radiální rychlost jako funkce $\sqrt{s}$. Převzato z [11].

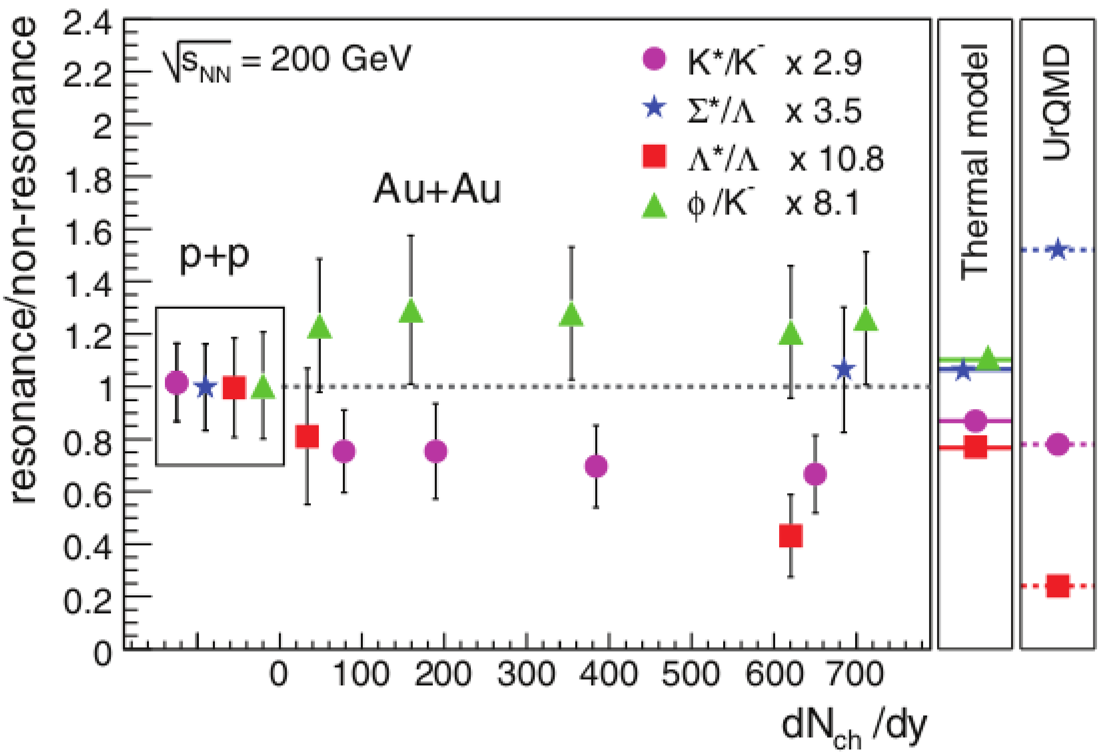
užitím statistického modelu poskytuje informace o době trvání interakcí a jejich účinném průřezu. Důvodem je to, že pouze takové rezonance, jejichž rozpadové produkty se nesrazily s okolními hadrony, mohou být experimentálně rekonstruovány. S využitím různých dob života různých rezonancí lze rekonstruovat celý časový vývoj expanze hadronového plynu.

(b) - rezonance, které se rozpadají na fotony nebo dileptony určují celkový čas expanzu, protože musíme započítat příspěvky všech produkovaných rezonancí, i když jsou tyto později absorbovány. Proto čím déle hadronový plyn interaguje, tím více fotonů a dileptonů získáme. Spolu se signálem eliptického toku toto může poskytnout informace o příspěvcích QGP a tím pádem i o jeho časovém vývoji.

(c) - ani těžké kvarky, ani těžké mezony nedosáhnou rovnováhy s okolím. Jejich spektra poskytují informace o jejich interakci s konstituenty QGP a také s hadronovým plynem. Poměr multiplicit excitovaných stavů těžkých mezonů, jako například $\Psi(2S)$, $Y(2S)$ a $Y(3S)$ a základních stavů nám dává navíc informaci o hadronovém rozptylu. Vzhledem k velkým vazebným energiím těchto stavů je tento poměr velmi citlivý na vysokoenergetické srážky.

4.1 Hadronové rozpady

Hadronové rozpady rezonancí byly měřeny jak na RHIC, tak na LHC. Výsledky z experimentu STAR, které pokrývají různé časy rezonancí ($\phi = 44 fm/c$, $\lambda^* = 13 fm/c$, $\Sigma = 5,7 fm/c$, $K^* = 4 fm/c$ - převzato z [11]), jsou zachyceny na Obrázku 4.3. Zde jsou srovnány výsledky z experimentu STAR s předpověďmi termálního modelu a s UrQMD výpočty. UrQMD (Ultra relativistic Quantum Molecular Dynamics) je typ Monte Carlo simulace pro výše uvedené typy srážek (pp, pA, AA).



Obrázek 4.3: Produkce rezonancí na RHIC. Srovnány jsou výsledky z experimentu STAR, z předpovědi termálního modelu a z UrQMD výpočtů. Převzato z [11].

Budeme-li předpokládat, že dochází pouze k rozpadu rezonancí, nabízelo by se, že poměr výtěžků pro krátce žijící rezonance klesá s centralitou rychleji než pro rezonance dlouho žijící. Experiment toto potvrzuje jen částečně, což dokazuje fakt, že pro poměr Λ^*/Λ zaznamenáváme silný pokles, ale poměr K^*/K zůstává konstantní a pro poměr Σ^*/Λ vidíme, že pro centrální těžkoiontové srážky je tento stejný jako při pp srážkách.

Nemůžeme rovněž zanedbat případnou regeneraci rezonancí. Protože však většinu účinných průřezů těchto regenerací neznáme, představuje toto problém pro UrQMD výpočty pro centrální srážky. I když zatím neexistuje srovnání s teoretickou předpovědí, výsledky napovídají, že by statistický model měl skutečné výtěžky nadhodnotit. Toto lze pozorovat u poměru Λ^*/Λ a K^*/K, nikoliv však pro poměr Σ^*/Λ. Potlačení rezonancí odpovídá nejvýše 60%, ale obvykle je nižší. Proto chceme-li učinit nějaké závěry týkající se regionu interakce hadronů pomocí rezonancí, je třeba použít měřicích metod s malou systematickou chybou.

Dodatek

V této sekci budou stručně shrnuty některé základní teoretické poznatky týkající se matematického aparátu používaného v bakalářské práci. Řeč bude hlavně o Besselových funkcích s důrazem na jejich význam při řešení relativistického fázově-prostorového integrálu.

Besselovy funkce

Besselovy funkce byly poprvé definovány Danielem Bernoullim a poté zobecněny Friedrichem Besselem. Jsou definovány jako kanonická řešení (řešení ve tvaru $y = y(x)$) diferenciální rovnice (známé jako Besselova diferenciální rovnice)

$$x^2 \frac{d^2y}{dx^2} + x\frac{dy}{dx} + (x^2 - \alpha^2)y = 0 \tag{4.1}$$

kde obecně komplexní konstantu α nazýváme řádem Besselovy funkce.

Besselovy funkce se dají rozlišit podle typu parametru α. Je-li α celočíselné, pak mluvíme o cylindrických (nebo cylindricky harmonických) Besselových funkcích. Pokud je α poločíselné (tj. ve tvaru $\alpha = n + \frac{1}{2}$, kde n je přirozené číslo), pak mluvíme o sférických Besselových funkcích.

Modifikované Besselovy funkce

Besselovy funkce jsou dobře definovány, i když je jejich argument x komplexní. Nastane-li speciální případ, kdy je tento argument čistě komplexní, mluvíme o **modifikované Besselově funkci** (rovněž nazývané hyperbolická Besselova funkce) prvního druhu (značíme $I_\alpha(x)$) a druhého druhu (značíme $K_\alpha(x)$). Tyto definujeme následujícími vztahy:

$$I_\alpha(x) = \sum_{m=0}^{\infty} \frac{1}{m!\Gamma(m+\alpha+1)} \left(\frac{x}{2}\right)^{2m+\alpha} \tag{4.2}$$

$$K_\alpha(x) = \frac{\pi}{2} \frac{I_{-\alpha}(x) - I_\alpha(x)}{\sin(\alpha\pi)} \tag{4.3}$$

Tato řešení jsou dvěma nezávislými řešeními modifikované Besselovy rovnice

$$x^2 \frac{d^2y}{dx^2} + x\frac{dy}{dx} - (x^2 + \alpha^2)y = 0. \tag{4.4}$$

Na rozdíl od klasických Besselových funkcí, které oscilují jako funkce reálného argumentu, jak $I_\alpha(x)$, tak $K_\alpha(x)$ exponenciálně rostou. Uveďme ještě integrální tvar modifikovaných Besselových funkcí (předpokládejme, že $Re(x) > 0$):

$$I_\alpha(x) = \frac{1}{\pi}\int_0^\pi \exp(x\cos(\theta))\cos(\alpha\theta)d\theta - \frac{\sin(\alpha\pi)}{\pi}\int_0^\infty \exp(-x\cosh t - \alpha t)dt \tag{4.5}$$

$$K_\alpha(x) = \int_0^\infty \exp(-x\cosh t)\cosh(\alpha t)dt \tag{4.6}$$

Besselovy funkce v relativistickém fázově-prostorovém integrálu

Abychom mohli kvantitativně popsat ideální relativistický plyn, potřebujeme explicitně spočíst relativistický hybnostní integrál, který se vyskytuje ve všech integracích přes fázový prostor v obdobné formě. Zavádíme proto již zmíněné tzv. "Besselovy funkce"$K_\nu(z)$, které jsou pro obecně komplexní z definovány následujícím vztahem:

$$K_\nu(z) = \frac{\sqrt{\pi}(z/2)^\nu}{\Gamma(\nu+\frac{1}{2})}\int_1^\infty e^{-zt}(t^2-1)^{\nu-\frac{1}{2}}dt,\ Re\ \nu > -\frac{1}{2} \tag{4.7}$$

kde pro proměnnou z předpokládáme $|arg\ z| < \frac{\pi}{2}$.

Ve většině případů jsme používali $\nu = 1$. V takovém případě pokládáme $z = \beta m$ a substituujeme do rovnice (4.7):

$$t \to \sqrt{p^2+m^2}/m, \tag{4.8}$$

čímž pro $\varepsilon = \sqrt{p^2+m^2}$ získáme

$$K_\nu(\beta m) = \frac{\sqrt{\pi}}{\Gamma(\nu+\frac{1}{2})}\left(\frac{\beta}{2m}\right)^\nu \int_0^\infty \frac{p^{2\nu}}{\varepsilon}e^{-\beta\varepsilon}dp. \tag{4.9}$$

Integrací metodou per partes a využitím vztahu

$$\frac{\partial}{\partial p}e^{-\beta\varepsilon} = -\beta\frac{p}{\varepsilon}e^{-\beta\varepsilon}$$

získáme pro ($\nu > \frac{1}{2}$) vztah

$$K_\nu(\beta m) = \frac{\sqrt{\pi}}{\Gamma(\nu-1/2)}\frac{1}{m}\left(\frac{\beta}{2m}\right)^{\nu-1}\int_0^\infty p^{2\nu-2}e^{-\beta\varepsilon}dp. \tag{4.10}$$

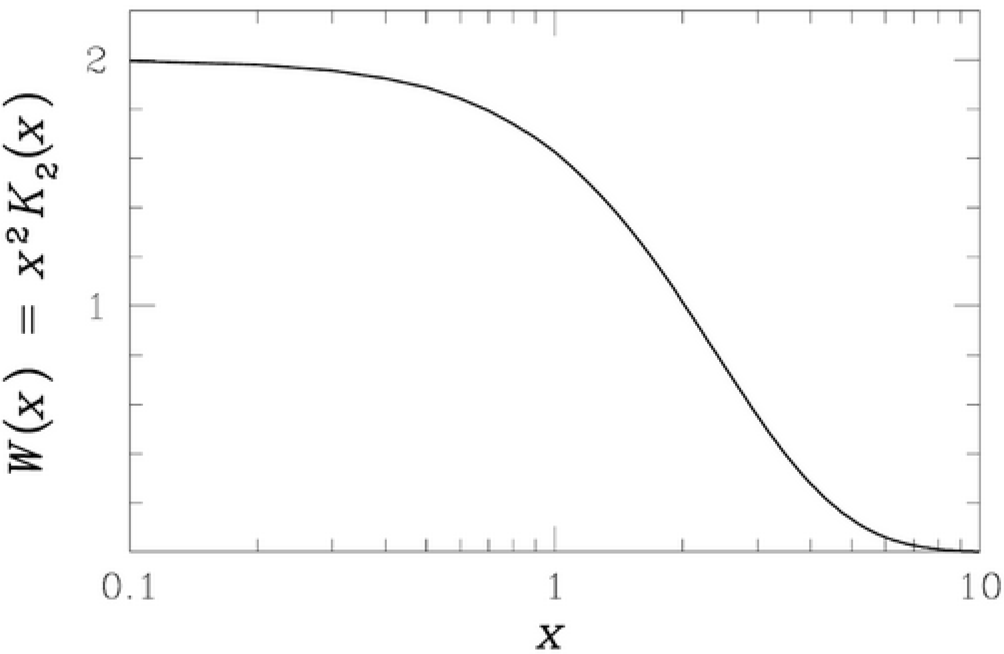
Víme, že

$$\Gamma(\frac{1}{2}) = \sqrt{\pi};\quad \Gamma(\frac{3}{2}) = \sqrt{\pi}/2;\quad \Gamma(\frac{5}{2}) = \frac{3}{2}\Gamma(\frac{3}{2});\cdots$$

Rozložíme-li Besselovu funkci $K_\nu(z)$ danou rovnicí (4.7) do řady, získáme dva limitní případy:

(1) **Nerelativistickou limitu**, v níž uvažujeme p/m jako velmi malý parametr:

$$\begin{aligned} K_\nu(z) \to \sqrt{\frac{\pi}{2z}}e^{-z}\Bigg(1 + \frac{4\nu^2-1}{8z} + \frac{(4\nu^2-1)(4\nu^2-9)}{2!(8z)^2} \\ + \frac{(4\nu^2-1)(4\nu^2-9)(4\nu^2-25)}{3!(8z)^3} + \cdots\Bigg) \end{aligned} \tag{4.11}$$



Obrázek 4.4: Průběh relativistické distribuční funkce $W(x) = x^2 K_2(x)$. Převzato z [1].

Tento rozklad konverguje velmi pomalu. Pro nás velmi zajímavým případem je poměr

$$\frac{K_1(z)}{K_2(z)} = 1 - \frac{3}{2}\frac{1}{z} + \frac{15}{8}\frac{1}{z^2} - \frac{15}{8}\frac{1}{z^3} + \frac{135}{128}\frac{1}{z^4} + O(z^{-5}). \tag{4.12}$$

(2) **Relativistickou limitu**, v níž je hmota zanedbatelná v porovnání s řádovou velikostí energií, čímž můžeme psát $m \simeq 0$. Pro $\nu = 1$ a $\nu = 2$ máme (za předpokladu, že $z \to 0$):

$$K_1(z) = \frac{1}{z} + \left[\ln\left(\frac{z}{2}\right) + \gamma_E\right]\frac{z}{2} + \left[\ln\left(\frac{z}{2}\right) + \gamma_E - \frac{5}{4}\right]\frac{z^3}{16} + \cdots \tag{4.13}$$

$$K_2(z) = \frac{2}{z^2} - \frac{1}{2} - \left[\ln\left(\frac{z}{2}\right) + \gamma_E - \frac{3}{4}\right]\frac{z^2}{8} - \left[\ln\left(\frac{z}{2}\right) + \gamma_E - \frac{17}{12}\right]\frac{z^4}{96} + \cdots, \tag{4.14}$$

což vede ke vztahu

$$\frac{K_1(z)}{K_2(z)} = \frac{z}{2} + \left[\ln\left(\frac{z}{2}\right) + \gamma_E\right]\frac{z^3}{4} + \cdots. \tag{4.15}$$

Připomeňme, že pro Eulerovu konstantu γ_E platí

$$\gamma_E = \lim_{n\to\infty}\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{k} - \ln n = 0,577\ 215\ 664\ 9\ldots$$

Často také narážíme na relativistickou distribuční funkci $W(x) = x^2 K_2(x)$, jejíž průběh je vyobrazen na Obrázku 4.4, přičemž proměnnou x jsme si zadefinovali jako $x = \beta m = m/T$. Z grafu je patrné, že inflexní bod se nachází někde okolo hodnoty $x = \beta m = 1$.

Nyní již můžeme aplikovat aparát Besselových funkcí na výpočet vlastností relativistického plynu. Uvažujme rovnici (1.50). Pro $n = 1$ získáme z rovnice (1.52) vztah

$$\ln Z_{cl} = Z^{(1)} = \sum_f \gamma_f(\lambda_f + \lambda_f^{-1})Z_f^{(1)} \tag{4.16}$$

kde

$$Z_f^{(1)} = g_f V \int \frac{d^3p}{(2\pi)^3} e^{-\beta p} = g_f \frac{\beta^{-3} V}{2\pi^2} W(\beta m_f). \tag{4.17}$$

V klasické Boltzmannově limitě je počet částic každého druhu dán vztahem

$$N^{cl} = \lambda \frac{\partial}{\partial \lambda} \ln Z_{cl} = \lambda Z^{(1)} = g\lambda \frac{\beta^{-3} V}{2\pi^2} W(\beta m). \tag{4.18}$$

Velmi často používaným vztahem ve fyzice ultrarelativistických těžkoiontových srážek je následující rovnice:

$$\frac{E}{N} = \frac{-(\partial/\partial\beta)\ln Z_{cl}}{\lambda(\partial/\partial\lambda)\partial \ln Z_{cl}} = 3T + m\frac{K_1(\beta m)}{K_2(\beta m)} \tag{4.19}$$

Pro účely předcházející rovnice zmiňme ještě další vlastnosti funkce $W(x) = x^2 K_2(x)$:

$$\frac{d}{dx} W(x) = -x^2 K_1(x), \tag{4.20}$$

což vyplývá z rekurzivní relace K-funkcí:

$$\frac{d}{dx} K_{nu}(x) = -K_{\nu-1}(x) - \frac{\nu}{x} K_\nu(x), \tag{4.21}$$

kterou lze přepsat do tvaru

$$\frac{d}{dx}(x^\nu K_\nu(x)) = -x^\nu K_{\nu-1}(x). \tag{4.22}$$

Předchozí vztahy budeme opět analyzovat pro dva případy:
(1) **V relativistické limitě** $\beta m \to 0$ získáme

$$\frac{E}{N}|_{m=0} = 3T. \tag{4.23}$$

(2) **V nerelativistické limitě** $\beta m >> 1$ je poměr $K_1(z)/K_2(z)$ dán vztahem (4.12) a získáme

$$\frac{E}{N} = m + \frac{3}{2}T\left(1 + \frac{5}{4}\frac{T}{m} - \frac{5}{4}\frac{T^2}{m^2} + \frac{45}{64}\frac{T^3}{m^3}\cdots\right), \quad \frac{m}{T} > 1. \tag{4.24}$$

Vzhledem k tomu, že řada v rovnici (4.24) konverguje pomalu, je třeba, aby platilo $m >> T$. Pro $m \simeq T$ je lépe použít relativistickou aproximaci.

Závěr

V této práci jsme se seznámili se základními charakteristikami tzv. termálního neboli statistického modelu jako spolehlivého nástroje na modelování produkce hadronů. V prvních dvou kapitolách jsme položili teoretické základy grandkanonického přiblížení a kanonického potlačení zachovávajících se nábojů.

Ve třetí kapitole jsme pomocí programu SHARE with CHARM zjistili, že zahrnutí konečné šířky rezonancí nemá na teplotu souboru podstatný vliv. Je třeba mít ovšem na paměti, že se jedná pouze o vliv kvantitativní.

Ve čtvrté kapitole jsme naznačili aplikaci statistického modelu na výtěžky nestabilních rezonancí. Došli jsme k závěru, že závislost poměru výtěžků částic na centralitě se liší podle druhů částic. To dokazuje, že statistický model není v tomto případě zcela v souladu s experimentálními daty.

Literatura

[1] J. Lettesier, J. Rafelski: Hadrons and Quark Gluon Plasma, Cambridge UP, 2002

[2] W. Florkowski, Phenomenology of Ultrarelativistic Heavy-Ion Collisions, World Scientific, Singapore 2010

[3] M. Petráň et al, Comput. Physics Commun. 184 (2014) 2056

[4] S. Wheaton, J. Cleymans, M. Hauer, Comput. Physics Commun. 180 (2009) 84

[5] A. Andronic et al., Nucl. Phys. A 904-905 (2013) 535c

[6] P. Braun-Munzinger, K. Redlich, J. Stachel, Particle Production in Heavy-Ion Collisions, in Quark-Gluon Plasma (R.C. Hwa, X.-N. Wang ed., s. 491), World Scientific, Singapore, 2003

[7] F. Sanino, I. Bearden, B. Tomášik, T. Dossing – Topics in modern nuclear physics

[8] Y. Hama, T. Kodama, O. Socolowski Jr. - Topics on Hydrodynamic Model of Nucleus-Nucleus Collisions, Brazilian Journal of Physics, vol. 35, no. 1, March, 2005

[9] G.H. Uhlenbeck, E. Beth - The Quantum Theory of the Non-Ideal Gas - I. Deviations from the Classical Theory, Natuurkundig Laboratorium der Rijks-Universiteit,Utrecht, Physica III, no 8, August, 1936

[10] R. Dashen, Shang-keng Ma, H. J. Bernstein - S-Matrix Formulation of Statistical Mechanics, Physical Review

[11] J. Aichelin: Why hadronic resonances and particle unstable states are interesting?, EPJ Web of Conferences 97, 00001 (2015)

[12] S. S. Adler et al.: Identified Charged Particle Spectra and Yields in Au+Au Collisions at $\sqrt{s_{NN}} = 200$ GeV, arXiv:nucl-ex/0307022v1 28 Jul 2003