

ČESKÉ VYSOKÉ UČENÍ TECHNICKÉ V PRAZE

Katedra fyziky

Obor: Fyzika plazmatu a termojaderné fúze



Studie vzájemné synergie mezi Hallovými a induktivními senzory magnetického pole pro budoucí fúzní reaktory

Feasibility study of potential synergy between Hall and inductive magnetic sensors for future fusion devices

VÝZKUMNÝ ÚKOL

Vypracoval: Bc. Matěj Ivánek

Vedoucí práce: Ing. Ivan Ďuran, Ph.D.

Rok: 2021



Katedra: fyziky

Akademický rok:

2020/2021

VÝZKUMNÝ ÚKOL

Student: Bc. Matěj Ivánek

Studijní program: Fyzika plazmatu a termojaderné fúze

Vedoucí úkolu: Ing. Ivan Ďuran, Ph.D.

Název úkolu (česky/anglicky): Studie vzájemné synergie mezi Hallovými a induktivními senzory magnetického pole pro budoucí fúzní reaktory/

Feasibility study of potential synergy between Hall and inductive magnetic sensors for future fusion devices.

Pokyny pro vypracování:

Výzkumný úkol (VÚ) má za cíl přispět k vývoji nových Hallových senzorů aplikovatelných na budoucích fúzních reaktorech a zejména analyzovat potenciální synergii mezi těmito senzory a cívkami. Student se při řešení VÚ soustředí zejména na:

1. Analýzu vlivu geometrických rozměrů a materiálových parametrů citlivé vrstvy a substrátu (měrný odpor, tepelná vodivost atp.) Hallova senzoru na jeho očekávané výsledné provozní vlastnosti.
2. Návrh a realizaci „kombinovaného senzoru“ spojením TPC cívky a Hallova senzoru. Analýza srovnatelnosti výstupů obou senzorů pro různé typy magnetických polí zejména s ohledem na řádový rozdíl v prostorovém rozlišení obou senzorů.
3. Návrh metodiky vyhodnocení magnetického pole na základě dílčích signálů měřených Hallovým senzorem a cívkou. Analýza chyb pro různé frekvenční a amplitudové charakteristiky měřeného magnetického pole.
4. Návrh a v ideálním případě i realizace experimentu umožňujícího testovat funkci „kombinovaného senzoru“.

Součástí zadání výzkumného úkolu je jeho uložení na webové stránky katedry fyziky.

Literatura:

- [1] R. S. Popovic: Hall effect devices, IOP Publishing, second edition, 2004, ISBN 0 7503 0855 9
- [2] I.H. Hutchinson: Principles of Plasma Diagnostics, Cambridge University Press, 2002
- [3] P. Ripka: Magnetic sensors and magnetometers, Artech House Inc., Norwood MA, 2001
- [4] E. Ramsden: Hall effect sensors, theory and application, Advanstar Communications, Cleveland, Ohio, 2001

Datum zadání: 23. 10. 2020

Datum odevzdání: 30. 06. 2021

.....
vedoucí katedry

Prohlášení

Prohlašuji, že jsem svůj výzkumný úkol vypracoval samostatně a použil jsem pouze podklady uvedené v příloženém seznamu.

Nemám závažný důvod proti použití tohoto školního díla ve smyslu § 60 Zákona č. 121/2000 Sb., o právu autorském, o právech souvisejících s právem autorským a o změně některých zákonů (autorský zákon).

V Praze dne 10. 9. 2021

Bc. Matěj Ivánek

Poděkování

Mnohokrát děkuji svému školiteli, panu doktoru Ivanu Ďuranovi, za morální i akademickou podporu, pochopení a především za jeho trpělivost v období pandemie

Bc. Matěj Ivánek

Název práce:

Studie vzájemné synergie mezi Hallovými a induktivními senzory magnetického pole pro budoucí fúzní reaktory

Autor: Bc. Matěj Ivánek

Obor: Fyzika plazmatu a termojaderné fúze

Druh práce: Výzkumný úkol

Vedoucí práce: Ing. Ivan Ďuran, Ph.D.

Ústav fyziky plazmatu Akademie věd České republiky

Abstrakt: Rešeršní část této práce pojednává o dopadech geometrie Hallových senzorů na jejich detekční vlastnosti a o vlivech vlastností senzitivních materiálů na výstupní signál senzoru, zejména o vlivu termoelektrických jevů. Dále je diskutován návrh kombinovaného Hallova a indukčního senzoru. Hlavním tématem práce je analýza výstupního signálu takového senzoru pomocí metody Kalmanova filtru. Je diskutována chyba aplikované metody a závěrem pak navržen experiment pro ověření funkčnosti kombinovaného senzoru.

Klíčová slova: magnetická diagnostika, Hallovy senzory, Kalmanův filtr

Title:

Feasibility study of potential synergy between Hall and inductive magnetic sensors for future fusion devices

Autor: Bc. Matěj Ivánek

Abstract: This thesis deals with the influence of the geometry of Hall sensors on their detection properties, furthermore the impact of the properties of sensitive materials on the output signal of the sensor cause by thermoelectric effects is discussed. The design of the combined Hall and induction sensor is discussed. The focus of this thesis is the analysis of the synergy between these sensors by the means of the Kalman filter. The error of this method is discussed and lastly the experiments to prove the functionality of such a sensor are proposed.

Key words: magnetic diagnostics, Hall sensors, Kalman filter

Obsah

1 Úvod	10
2 Teoretický úvod	11
2.1 Termojaderná fúze	11
2.1.1 Fúzní reakce	11
2.1.2 Fúzní reaktory	12
2.1.3 Tokamaky	13
2.2 Vliv magnetického pole na průběh fúzního výboje v tokamaku	15
2.2.1 Drifty v magnetickém poli	15
2.2.2 Helicita magnetického pole	16
2.2.3 Magnetické udržení	16
2.3 Měření magnetického pole	17
2.3.1 Indukční senzory	17
2.3.2 Hallovy senzory	18
2.4 Vliv geometrie Hallova senzoru na jeho citlivost	22
2.4.1 Geometrický faktor napětí	22
2.4.2 Magnetorezistance a geometrický faktor rezistivity	23
2.5 Vliv vlastností materiálu senzoru na detekční vlastnosti	25
2.5.1 Ettinghausenův efekt, Nernstův efekt a termoelektrický jev	26
2.6 Omezení výkonu na detekční vrstvě	29
3 Design kombinovaného Hallova a indukčního senzoru	30
3.1 TPC cívka	30
3.2 Hallův senzor	32
4 Kombinace signálů z indukčních a Hallových senzorů (Data fusion)	33
5 Model kombinovaného senzoru	37
5.1 Proces měření indukčním senzorem	37
5.2 Kalmanův filtr	40
6 Data fusion	40
6.1 Aplikace Kalmanova filtru	41
7 Návrh experimentu pro ověření funkčnosti kombinovaného senzoru	47
7.1 Rotující magnet	47
7.2 Více zdrojů pole	47
7.3 Experimenty v PlasmaLabu ČVUT FJFI	48
8 Závěr	49

Seznam obrázků

1	Graf závislosti vazebné energie jádra B/A na jeden nukleon na počtu nukleonů A v jádře. Dostupné z [1], upraveno.	11
2	Grafické znázornění závislosti účinného průřezu σ fúzních reakcí na kinetické energii těžiště reakce (vlevo) a znázornění reaktivity reakcí $\langle\sigma v\rangle$ na teplotě T	12
3	Schéma tokamaku. Dostupné z [2], upraveno.	14
4	Schéma driftů v toroidální geometrii. Dostupné z [4].	15
5	Schéma Hallova senzoru. A a B jsou napájecí kontakty, C a D jsou kontakty detekující Hallovo napětí U_{CD} . Veličiny l , w a t označují délku, šířku a tloušťku senzoru.	18
6	Výstupní napětí naměřené na Hallově senzoru s bismutovou detekční vrstvou. Dostupné z [10].	21
7	Normálová složka Hallova napětí korespondující s prvním členem ve výrazu (32). Dostupné z [10].	21
8	Planární složka Hallova napětí korespondující s druhým členem ve výrazu (32). Dostupné z [10].	21
9	Závislost normálového Hallova koeficientu R_H na magnetickém poli B . Dostupné z [10].	22
10	Závislost normálového Hallova koeficientu R_H na teplotě senzoru T . Dostupné z [10].	22
11	Schéma Hallova senzoru ve tvaru kříže. Dostupné z [9].	23
12	Průběhy geometrického faktoru G_H jakožto funkce poměru h/k , kde Θ_H je parametr.	24
13	Schéma vysvětlující geometrickou magnetorezistanci.	24
14	Schéma Hallova senzoru s teplotním gradientem tvořeným Ettinghausenovým jevem. U_S značí napětí způsobené Seebeckovým jevem a \mathbf{E}_N elektrické pole způsobené jevem Nernstovým.	27
15	Schéma Hallova senzoru s teplotním gradientem tvořeným Ettinghausenovým jevem. U_S značí napětí způsobené Seebeckovým jevem a \mathbf{E}_N elektrické pole způsobené jevem Nernstovým. Zde je situace s opačným magnetickým polem	27
16	Grafické znázornění poměrného vlivu Ettinghausenova jevu na výstupním napětí U_{CD} Hallova senzoru.	28
17	Schéma Hallova senzoru s teplotním gradientem podél Hallova elektrického pole \mathbf{E}_H	28
18	Schéma Hallova senzoru s teplotním gradientem podél Hallova elektrického pole \mathbf{E}_H	28
19	Schéma Hallova senzoru s teplotním gradientem podél Hallova elektrického pole \mathbf{E}_H	29
20	Schéma Hallova senzoru s teplotním gradientem podél Hallova elektrického pole \mathbf{E}_H	29
21	Schéma vrstev TPC cívky. Schéma mi bylo poskytnuto školitelem.	31
22	Rozměry TPC cívky. Schéma mi bylo poskytnuto školitelem.	31
23	Fotografie TPC cívky. Fotografie mi byla poskytnuta školitelem.	32

24	Fotografie TPC cívky. Fotografie mi byla poskytnuta školitelem.	32
25	Schéma Hallova senzoru pro kombinaci s TPC cívkou. Schéma mi bylo poskytnuto školitelem.	33
26	Jednoduchý RC integrátor bez operačního zesilovače.	33
27	Schéma RC obvodu s operačním zesilovačem. Dostupné z [7]	35
28	Schéma kombinovaného Hallova (červeně) a indukčního (černě) senzoru.	36
29	Schéma fungování časových vrstev při modelování měření magnetického pole kombinovaným senzorem.	38
30	Zvolený průběh modelového magnetického pole.	39
31	Výstupny z Hallova a indukčního senzoru ve formě magnetického pole a jeho derivace.	39
32	Signály z Hallova a indukčního senzoru určené pro aplikaci Kalmanova filtru.	42
33	Výsledky kalmanova filtru mezi signálem z cívky (s offsetem) a z Hallova senzoru pro 2 různé hodnoty gainu.	42
34	Vliv postupného snižování gainu filtru na tvar jeho výstupu.	43
35	Vývoj chyby Kalmanova filtru v závislosti na ω_0	44
36	Průběh magnetického pole s magnetickým ostrovem uprostřed výboje	44
37	Signály z Hallova senzoru a cívky.	45
38	Aplikace Kalmanova filtru na signál s magnetickým ostrovem	45
39	Závislost Kalmanova filtru na ω_0 pro signál s magnetickým ostrovem.	46
40	Průběhy chyby Kalmanova filtru pro různé hodnoty parametru ω_0	46
41	Průběh magnetického pole pro experiment, jež by měl ověřit funkčnost kombinovaného senzoru.	47

Seznam tabulek

- 1 Tabulka důležitých fúzních reakcí, energie z nich uvolněná Q a jejich účinný průřez. . 11
- 2 Tabulka tvarů funkcí $g(\lambda)$ pro různé typy Hallových sensorů. Přesnost se týká aproximace ve vztahu (37). Dostupné z [9]. 23

1 Úvod

Magnetická diagnostika je nedílnou součástí provozu termojaderných zařízení. V počátcích fúzního výzkumu sloužily jako dostačující senzory magnetického pole cívky, které dokázaly měřit jeho změnu a integrací signálu pak bylo možné získat informaci o poli samotném. S postupným vývojem fúzních experimentů však dochází k prodlužování fúzních výbojů, při nichž magnetické pole dosahuje stacionárního stavu a není tak možné jej měřit cívkou. Cívky jsou navíc zatíženy ofsetem, který po integraci jejich výstupu znehodnocuje měření. Vystává tedy potřeba senzoru komplementárního a jako východisko se jeví senzory Hallovy.

Rešeršní část této práce pojednává o vlastnostech Hallových senzorů v závislosti na jejich geometrii. Konkrétně je zaměřena na Hallovy senzory křížového tvaru, které byly na základě výzkumu shledány jako neefektivnější. Dále je v práci zkoumán vliv materiálových vlastností senzitivní vrstvy na výstupní signál Hallova senzoru. Primárně se jedná o parazitní termoelektrické jevy jako jsou Ettinghausenův, Seebeckův či Nernstův.

V další kapitole je popsán návrh kombinovaného Hallova a indukčního senzoru. Pro kombinaci byla zvolena TPC cívka z keramického podkladu z měděnými natištěnými kontakty a Hallův senzor. Kompletace senzoru je zamýšlena mechanicky pomocí šroubů, případně lepením.

Ve čtvrté kapitole je poté podrobněji diskutována nutnost doplnit indukční senzory o senzory Hallovy a schematicky i matematicky popsán předpokládaný princip kombinace signálů z obou senzorů pomocí Kalmanova filtru.

Pro ověření námi vybrané metody je v páté kapitole popsán model měření magnetického pole pomocí cívky a Hallova senzoru. Model byl vyvinut v jazyce Python a bere v potaz rozložení magnetického pole v tokamaku podle závislosti $1/R$. Měření magnetických polí je popsáno pomocí rovnic dynamického systému a následně převedeno do rovnice, jež je ústředním prvkem samotné data fusion.

V následující kapitole je rovnice Kalmanova filtru aplikována na námi zvolené časové průběhy magnetického pole. Nejprve je funkčnost testována na jednoduché funkci a následně demonstrována na průběhu magnetického pole s magnetickým ostrovem. Na základě těchto analýz je diskutována závislost chyby Kalmanova filtru na volbě jeho parametrů.

V poslední kapitole je navržen experiment, který by měl výsledky modelu potvrdit, čímž by bylo možné rozhodnout o použitelnosti kombinovaných senzorů s využitím Kalmanova filtru pro budoucí fúzní zařízení.

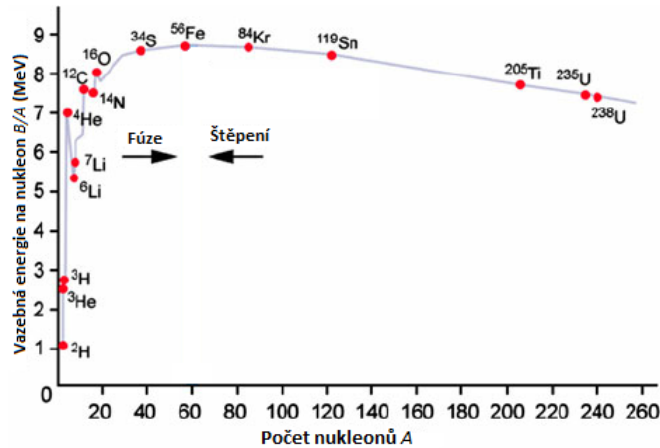
2 Teoretický úvod

2.1 Termojaderná fúze

Termojadernou fúzi lze definovat mnoha způsoby. Jednou z častých definic je:

„Fúzní reakce jsou jaderné reakce mezi lehkými atomovými jádry, při kterých se uvolňuje energie.“

V této definici se objevuje pojem **lehké jádro**, čímž je myšleno jádro, jehož nukleonové číslo A je menší než 56. Definice dává dobrý smysl v souvislosti s následujícím grafem (Obr. 1).



Obr. 1: Graf závislosti vazebné energie jádra B/A na jeden nukleon na počtu nukleonů A v jádře. Dostupné z [1], upraveno.

Při slučování jader se až do izotopu železa 56 uvolňuje energie. Tehdy je vazebná energie na nukleon nejvyšší a poté už jen klesá. Právě toto je ideou pro získávání energie pomocí termojaderné fúze.

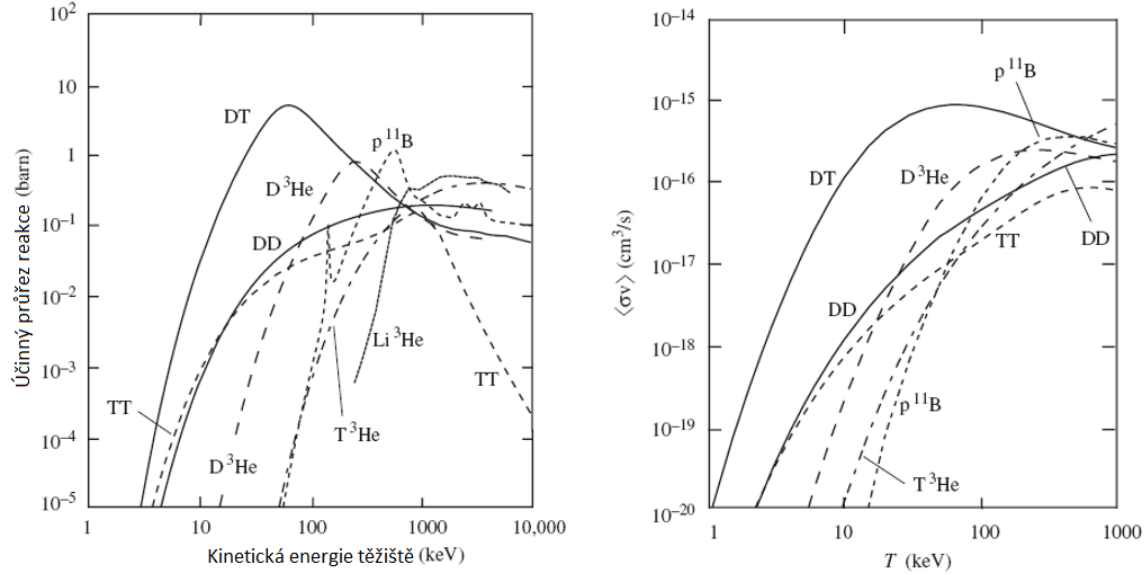
2.1.1 Fúzní reakce

S ohledem na graf 1 je v současné době zvažováno několik následujících fúzních reakcí reakcí.

Reakce	Q [MeV]	σ [barn]
$D + T \rightarrow \alpha + n$	17,59	5,000
$D + D \rightarrow T + p$	4,04	0,096
$D + D \rightarrow {}^3\text{He} + n$	3,27	0,110
$T + T \rightarrow \alpha + 2n$	11,33	0,160

Tab. 1: Tabulka důležitých fúzních reakcí, energie z nich uvolněná Q a jejich účinný průřez.

Jak je patrné z tabulky 1, největším účinným průřezem a výstupní energií disponuje reakce deuteria a tritia (ozn. DT reakce). Jako doplnění tabulky slouží následující grafy (obr 2). Ty navíc zohledňují okolnosti, za jakých platí účinné průřezy reakcí v tabulce 1.



Obr. 2: Grafické znázornění závislosti účinného průřezu σ fúzních reakcí na kinetické energii těžiště reakce (vlevo) a znázornění reaktivity reakcí $\langle\sigma v\rangle$ na teplotě T .

V tomto textu se tedy budeme zabývat specifikacemi termojaderné fúze právě pro tuto reakci. DT reakce má jedno zásadní úskalí. Jejím produktem je neutron a α částice. Výstupní energie se dělí tak, že 4/5 případnou neutronu a pouze 1/5 α částici. Tedy vzniká neutron s energií 14 MeV. Navíc takový neutron nelze zachytit v magnetickém poli a ve formě ionizujícího záření dopadá na stěny reaktoru a veškerou přítomnou diagnostiku, což může vést k jejich degradaci.

2.1.2 Fúzní reaktory

Fúzní reaktory jsou zařízení, ve kterých se dosahuje podmínek pro termojadernou fúzi. Tyto podmínky jsou v jistém smyslu popsány pomocí *trojného součinu*. Ten udává jakousi minimální hodnotu součinu koncentrace částic v jednotce objemu n , teploty T a doby udržení energie τ_E , při které bude četnost fúzních reakcí taková, že není nutné dodávat plazmatu další energii k ohřevu. Tvaru tohoto kritéria lze dosáhnout pomocí následujícího řetězce úvah.

Při termojaderné fúzi je naším cílem dosáhnout řetězové reakce s kladnou energetickou bilancí. Tuto bilanci lze popsat jako

$$P_L + \frac{dW_P}{dt} = P_H + P_I, \quad (1)$$

kde P_L je ztrátový výkon výboje, W_P je vnitřní energie plazmatu, P_H je příkon z ohřevu a P_I je vlastní ohřev plazmatu. V tomto vztahu můžeme určit veličiny W_P a P_I :

$$W_P = \int_V nk_B T dV = 3Nk_B T, \quad (2)$$

kde n je koncentrace částic v jednotce objemu, k_B je Boltzmannova konstanta, T je teplota a N je počet částic. Pro vnitřní výkon plazmatu P_I platí, že přibližně pouze 1/5 lze uvažovat jako přínosnou pro ohřev plazmatu, protože 4/5 výkonu z DT reakce odnese neutron, který nelze zachytit v magnetickém poli.

$$P_I = \frac{1}{5} \int_V n_D n_T \langle \sigma v \rangle \varepsilon_{DT}, \quad (3)$$

kde n_D a n_T jsou koncentrace deuteria, respektive tritia, $\langle \sigma v \rangle$ je reaktivita DT reakce a ε_{DT} je energetický výtěžek DT reakce. Jestliže budeme uvažovat, že $n_D = n_T = \frac{n}{2}$, dostaneme pro vlastní ohřev plazmatu vztah

$$P_I = \frac{1}{20} n^2 \langle \sigma v \rangle \varepsilon_{DT} V. \quad (4)$$

Dále můžeme definovat dobu udržení energie τ_E jako

$$\tau_E = \frac{W_P}{P_L} = \frac{W_P}{P_H + P_I - \frac{dW_P}{dt}}. \quad (5)$$

Nyní už jen stačí uvážit, že k zapálení dojde v energetické rovnováze za absence vnějšího ohřevu P_H a dostaneme kritérium

$$P_I \geq \frac{W_P}{\tau_E}. \quad (6)$$

Po dosazení vztahů (2) a (4) získáme nerovnost

$$n\tau_E \geq \frac{12k_B T}{\langle \sigma v \rangle \varepsilon_\alpha}, \quad (7)$$

kteřá se nazývá Lawsonovo kritérium. Zde ε_α je $1/5\varepsilon_{DT}$. Lawsonovo kritérium je zřejmě závislé na teplotě. Přejdeme-li nyní k trojnému součinu, v podmínkách magnetického udržení při optimální teplotě 14 keV dostaneme konkrétní hodnotu

$$nT\tau_E \geq 5,55 \cdot 10^{21} \text{ m}^{-3} \cdot \text{keV} \cdot \text{s}. \quad (8)$$

Po splnění této podmínky teoreticky nastane stav, kdy vlivem četnosti fúzních reakcí není třeba dodávat další energie pro udržení teploty plazmatu.

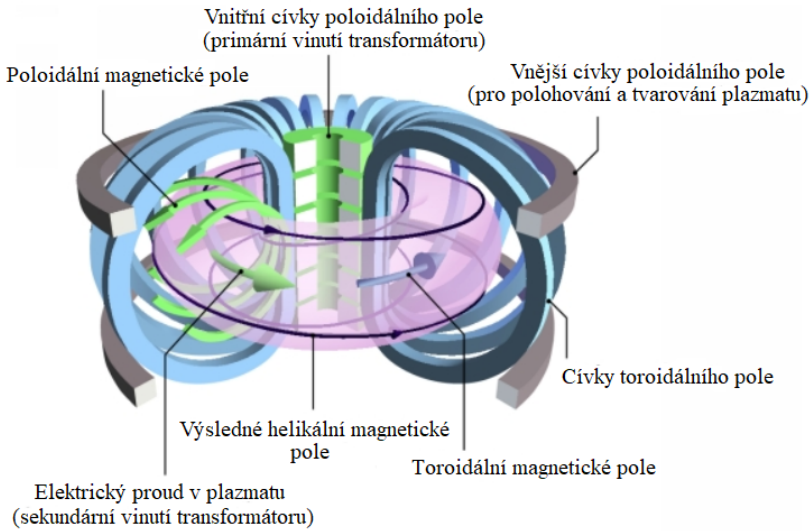
2.1.3 Tokamaky

Vzhledem k tomu, že termojaderná fúze nutně probíhá podle kritéria (8) v horkém plazmatu, jsou fúzní reaktory konstruovány tak, aby se toto plazma nedotýkalo reaktoru samotného. Toho lze dosáhnout pomocí specifické konfigurace magnetického pole. Konfigurace magnetického pole se liší v závislosti na typu reaktoru. V této práci se budeme konkrétně zabývat *tokamaky*. Jedná

se o uzavřené fúzní reaktory, tedy magnetické silokřivky jsou uvnitř uzavřené. Středem toroidální komory, v níž probíhají plazmatické výboje, prochází centrální solenoid, který funguje jako primární vinutí. Magnetickým tokem vyvolaným průchodem elektrického proudu tímto solenoidem dochází k indukci elektrického proudu v plazmatu. Plazma v tomto případě funguje jako sekundární vinutí transformátoru, čímž získáváme napětí, kterému se u tokamaků konvenčně říká **napětí na závit** a je značeno U_{loop} . Celou tuto situaci lze popsat matematicky:

$$\begin{aligned} \text{rot } \vec{E} &= -\frac{\partial \vec{B}}{\partial t} \\ \int_S \text{rot } \vec{E} \cdot d\vec{S} &= -\int_S \frac{\partial \vec{B}}{\partial t} \cdot d\vec{S} \\ \oint_{\delta S} \vec{E} \cdot d\vec{l} &= -\frac{d}{dt} \int_S \vec{B} \cdot d\vec{S} \\ U_{loop} &= -\frac{d\Phi}{dt} = -\frac{d\Phi}{dI_{CS}} \frac{dI_{CS}}{dt} = -L \frac{dI_{CS}}{dt} \end{aligned} \quad (9)$$

V tomto odvození jsme proud centrálním solenoidem označili jako I_{CS} a indukčnost centrálního solenoidu jako L . Samotná toroidální nádoba je poté osázena sérií cívek. Jedná se především o cívky toroidálního pole a cívky poloidálního pole. Schéma takového uspořádání je znázorněno v následujícím obrázku. (Obr. 3).



Obr. 3: Schéma tokamaku. Dostupné z [2], upraveno.

Cívkami toroidálního pole se starají o formování plazmatu a jeho udržení v rovnovážném stavu. Samotné plazma přitom indukuje vlastní poloidální magnetické pole, kterým se samo stlačuje. Součtem těchto polí je pole helikální (Obr. 3).

2.2 Vliv magnetického pole na průběh fúzního výboje v tokamaku

V této kapitole bude vysvětleno, jakým způsobem dochází v tokamaku k magnetickému udržení. Jak bylo zdůrazněno již výše, magnetické pole v tokamaku je helikální. Taková konfigurace je nezbytná pro stabilitu plazmatického výboje.

2.2.1 Drifty v magnetickém poli

Abychom lépe porozuměli této problematice, představíme zde pojem *driftu*. O částici řekneme, že podléhá driftovému pohybu, pakliže se pohybuje napříč směru, jež udává silové pole, ve kterém se nachází. Konkrétně v plazmatu v magnetickém poli, můžeme driftové pohyby pospat takzvanou driftovou rovnicí:

$$\mathbf{v}_{drift} = \frac{\mathbf{F}_{ext} \times \mathbf{B} - \mu \nabla B \times \mathbf{B} - m \mathbf{a} \times \mathbf{B}}{qB^2} \quad (10)$$

Driftový pohyb může podle driftové rovnice (10) vznikat třemi způsoby. Jednak vlivem jisté externí síly \mathbf{F}_{ext} , potom vlivem gradientu magnetického pole, ve kterém se částice nachází nebo nerovnoměrným pohybem gyračního středu částice. Mezi drifty řadíme následující pohyby:

- $\mathbf{E} \times \mathbf{B}$ drift - Toto je příklad driftu způsobeného vnějším silovým polem ve tvaru $\mathbf{F}_{ext} = q\mathbf{E}$. Driftová rychlost při $\mathbf{E} \times \mathbf{B}$ driftu bude

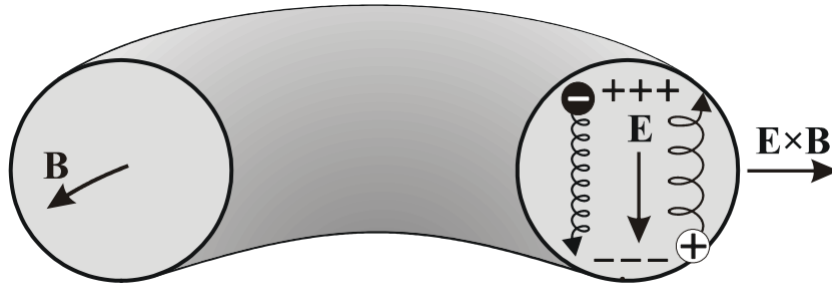
$$\mathbf{v}_E = \frac{\mathbf{E} \times \mathbf{B}}{B^2} \quad (11)$$

- $\nabla|B|$ drift - Zde se jedná o drift způsobený nehomogenitou magnetického pole. Driftová rychlost při $\nabla|B|$ driftu má tvar

$$\mathbf{v}_{\nabla B} = \frac{mv_{\perp}^2}{2} \frac{\mathbf{B} \times \nabla B}{qB^3} \quad (12)$$

Zde rychlost \mathbf{v}_{\perp} představuje rychlost pohybu kolmého na magnetické indukční čáry, tedy rychlost be směru Larmorovy rotace.

Driftů samozřejmě existuje mnohem více, ale právě kombinace těchto dvou tvoří nutnost helikálního pole. Pokud by bylo pole pouze toroidální, nastane v toroidální geometrii následující situace:



Obr. 4: Schéma driftů v toroidální geometrii. Dostupné z [4].

Vlivem křivosti toru se v magnetickém poli vytvoří oblasti vysokého magnetického pole (HFS) a nízkého magnetického pole (LFS). HFS se nachází blíže k hlavní ose toru a LFS dále od hlavní osy toru. Tím ale napříč plazmatem vzniká ∇B . Protože $\nabla|B|$ drift závisí na náboji částice, dojde tímto k separaci náboje, jak je naznačeno na schématu (4), čímž vznikne elektrické pole \mathbf{E} . Tím už ale vzniká $\mathbf{E} \times \mathbf{B}$ drift, který míří směrem ven z toru. Plazma se tak dostane do kontaktu se stěnou a dojde tak k přerušení výboje. Řešení tohoto problému existuje několik. V případě tokamaku je situace ošetřena tak, že se plazma stane sekundárním vinutím transformátoru a bude jím při výboji protékat elektrický proud. Tento proud bude indukovat poloidální magnetické pole, které s již přítomným toroidálním zajistí v součtu helicitu. Tímto způsobem vlastně dojde ke zkratu elektrického pole vzniklého v situaci (4), čímž je eliminován $\mathbf{E} \times \mathbf{B}$ drift.

2.2.2 Helicita magnetického pole

Helicitu magnetického pole můžeme popsat pomocí veličiny s příhodným názvem *helicita* $K(t)$. Ta se spočítá jako integrál hustoty helicity \mathcal{H} :

$$K(t) = \int_V \mathcal{H}(\mathbf{x}, t) dV = \int_V \text{rot} \mathbf{B} \cdot \mathbf{B} dV \quad (13)$$

Pro nás však bude užitečnější zaměřit se na veličinu $q(r)$, jež je s helicitou spjata. V mezinárodní literatuře se označuje jako *safety factor*, v českém jazyce ji většinou nazýváme *zásobou stability*. Zásoba stability je funkcí vedlejšího poloměru tokamaku a vyjadřuje, kolik oběhu v toroidálním směru musí magnetická indukční čára vykonat, aby oběhla právě jednou ve směru poloidálním. U tokamaků s kruhovým průřezem je tato závislost poměrně přímočará a sice

$$q(r) = \frac{r}{R} \frac{B_T}{B_P} \quad (14)$$

Vzhledem k tomu, že poloidální magnetické pole B_P vzniká na základě elektrického proudu plazmatem I_p , můžeme po provedení několika úprav vztah pro zásobu stability přepsat ve tvaru [5]:

$$q(r) = \frac{2\pi B_T}{R\mu_0 I_p} \frac{r^2}{1 - \left(1 - \frac{r^2}{a^2}\right)^{\nu+1}} \quad (15)$$

Veličina a označuje vedlejší poloměr a číslo ν označuje *peaking profile factor*.

Hodnoty $q(r)$ v různých místech plazmatu nám udávají stabilitu plazmatu vůči různým druhům nestabilit. Například $q(a) > 2$ je podmínka stability vůči proudem hnaným *kink* nestabilitám.

2.2.3 Magnetické udržení

Magnetické udržení je v principu realizováno vztahem

$$\nabla p = \mathbf{j} \times \mathbf{B} \quad (16)$$

Vyjadřuje stav, kdy je ustálena rovnováha mezi Lorentzovou silou a gradientem tlaku. Je zřejmé, že z této rovnice plyne fakt, že proudová hustota \mathbf{j} i magnetické pole \mathbf{B} musí ležet v ploše konstantního

tlaku p . Taková plocha může mít i tvar toru (nebo obecně toroidu) jako v případě tokamaků. Tyto plochy jsou poté popsány takzvanými funkcemi povrchů $\Psi(\mathbf{x}) = c$, někdy také označovanými jako magnetické povrchy. Tvar těchto funkcí povrchu je dán Grad-Šafranovovou rovnicí, jež má tvar

$$\Delta^* \Psi + \frac{\mu_0^2}{2} \frac{dI^2}{d\Psi} + 4\pi^2 \mu_0 R^2 \frac{dp}{d\Psi} \quad \Delta^* = R \frac{\partial}{\partial R} \frac{1}{R} \frac{\partial}{\partial R} + \frac{\partial^2}{\partial z^2} \quad (17)$$

Plazma je tedy drženo Lorentzovou silou $\mathbf{j} \times \mathbf{B}$, která působí proti gradientu kinetického tlaku plazmatu ∇p . Jako jakýsi indikátor míry magnetického udržení slouží *parametr* β . Ten udává poměr mezi tlakem magnetického pole a kinetickým tlakem plazmatu:

$$\beta = \frac{p}{\frac{B^2}{2\mu}} \quad (18)$$

Jmenovatel složeného zlomku je právě magnetický tlak, kterým je plazma udržováno. Typické hodnoty parametru β pro tokamaky se pohybují okolo 0,05. Pro účely škálování se zavádí takzvaný normalizovaný parametr β , díky němuž je možné porovnávat magnetické udržení různých tokamaků:

$$\beta_N = \beta \frac{a B_T}{I_p}, \quad (19)$$

kde a je vedlejší poloměr tokamaku, B_T je toroidální magnetické pole tokamaku a I_p je proud plazmatem v MA.

2.3 Měření magnetického pole

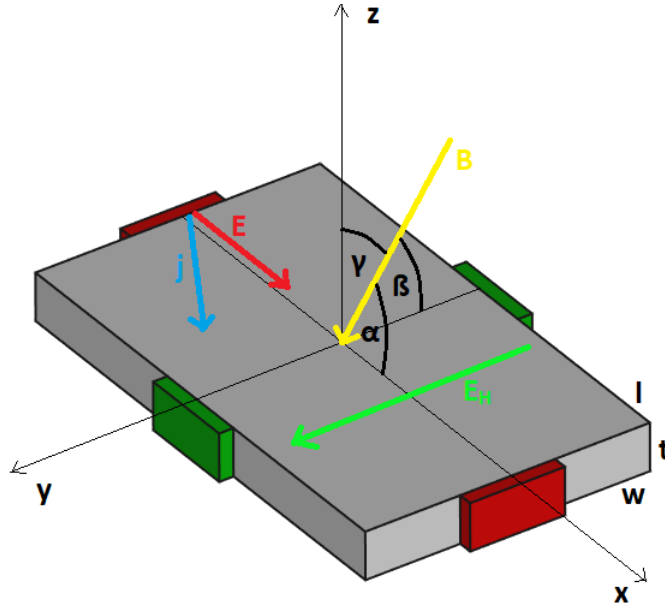
2.3.1 Indukční senzory

V současné době jsou pro měření magnetického pole v tokamacích používány převážně indukční senzory. Jejich použití je založeno na principu elektromagnetické indukce, kterou lze popsat matematicky následovně:

$$\begin{aligned} \text{rot} \mathbf{E} &= -\frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t} \\ \int_S \text{rot} \mathbf{E} \cdot d\mathbf{S} &= -\frac{\partial}{\partial t} \int_S \mathbf{B} \cdot d\mathbf{S} \\ \int_{\partial S} \mathbf{E} \cdot d\mathbf{l} &= -\frac{\partial}{\partial t} \Psi \\ U_{ind} &= -\frac{\partial \Psi}{\partial t}. \end{aligned} \quad (20)$$

Zde se jedná o situaci, kdy skrze uzavřenou vodivou smyčku prochází magnetický indukční tok Ψ . Změna tohoto toku v čase indukuje na dané smyčce napětí, které jsme schopni zaznamenat. Pakliže chceme z tohoto signálu získat informaci o magnetickém poli, jež smyčkou prochází, budeme uvažovat, že plocha uzavřená smyčkou se v čase nemění a navíc uvažme, že směry normály plochy S a vektoru indukce magnetického pole \mathbf{B} jsou shodné. Poté můžeme z rovnice pro indukované napětí U_{ind} vyjádřit magnetické pole:

$$U_{ind} = -S \frac{\partial B}{\partial t}$$



Obr. 5: Schéma Hallova senzoru. A a B jsou napájecí kontakty, C a D jsou kontakty detekující Hallovo napětí U_{CD} . Veličiny l , w a t označují délku, šířku a tloušťku senzoru.

$$\int_0^t U_{ind} = -S \int_0^t \frac{\partial B}{\partial \tau} d\tau \quad (21)$$

$$B(t) = -\frac{1}{S} \int_0^t U_{ind}(\tau) d\tau.$$

Záporné znaménko nám zde pouze vyjadřuje, že naindukované napětí bude působit proti změně magnetického pole \mathbf{B} . Zajímá-li nás však pouze velikost, můžeme jej opomenout a získat vzorec pro výpočet magnetického pole procházejícího vodivou smyčkou ve tvaru

$$B(t) = \frac{1}{S} \int_0^t U_{ind}(\tau) d\tau. \quad (22)$$

Pakliže bude navrstveno N závitů za sebou, dostaneme vztah pro magnetické pole prošlé cívkou

$$B(t) = \frac{1}{NS} \int_0^t U_{ind}(\tau) d\tau. \quad (23)$$

2.3.2 Hallové senzory

Hallův jev, na jehož principu jsou Hallové senzory založeny, patří do skupiny galvanomagnetických jevů. Tyto popisují transport náboje v prostředí za přítomnosti vnějšího magnetického pole. Hallův jev konkrétně nastává v situaci, která je vyobrazena na obrázku 5. Pakliže kovový nebo polovodičový vzorek napájíme napětím U_{AB} , poteče zřejmě z bodu A do bodu B elektrický proud I . Pakliže vložíme takto napájený vzorek do vnějšího magnetického pole, budeme pozorovat výstupní napětí U_{CD} mezi body C a D. Tento jev vzniká ze skutečnosti, že trajektorie nosičů náboje jsou

při průchodu magnetickým polem zakřivovány. Výsledné elektrické pole \mathbf{E} v takovém vzorku je pak možno pospat vztahem

$$\mathbf{E} = \rho_B \mathbf{j} - R_H (\mathbf{j} \times \mathbf{B}) + P_H (\mathbf{j} \cdot \mathbf{B}) \mathbf{B}. \quad (24)$$

Vektor \mathbf{j} zde označuje proudovou hustotu napříč vzorkem a \mathbf{B} je vektor indukce magnetického pole. Koeficientům ρ_B , R_H a P_H lze přiřadit následující významy:

- ρ_B - Tato veličina se nazývá magnetorezistivita. Vyjadřuje skutečnost, že rezistivita se pro různé nosiče náboje pohybující se ve směru proudové hustoty \mathbf{j} mění s externím magnetickým polem \mathbf{B} .
- R_H - Tato veličina se nazývá (normálový) Hallův koeficient. Lze ji chápat jako jakousi konstantu úměrnosti mezi výstupním napětím U_{CD} a veličinami \mathbf{j} a \mathbf{B} . Jak později uvidíme, je tento koeficient spojován s citlivostí Halloových senzorů.
- P_H - Tato veličina se nazývá planární Hallův koeficient. Podobně jako Hallův koeficient R_H , vyjadřuje P_H úměru mezi výstupním napětím U_{CD} a veličinami \mathbf{j} a \mathbf{B} . Je nutno podotknouti, že planární Hallův jev, jež je charakterizován koeficientem P_H , pozorujeme pouze tehdy, není-li externí magnetické pole \mathbf{B} přesně rovnoběžné s normálou vzorku nebo pokud je externí pole \mathbf{B} v rovině senzoru, ale zároveň není kolmé na proudovou hustotu \mathbf{j} . To je patrné z výrazu $\mathbf{j} \cdot \mathbf{B}$.

Podrobný postup odvození rovnice (24) lze najít v [9], [10] nebo [11]. Pro praktické využití však musíme přejít od lokálních veličin \mathbf{E} a \mathbf{j} k veličinám pozorovatelným a lehce měřitelným. Přirozenými volbami jsou zde napětí U a proud I . Zaveďme si následující označení:

- $\hat{\mathbf{x}}$ - jednotkový vektor ve směru osy x
- $\hat{\mathbf{y}}$ - jednotkový vektor ve směru osy y
- $\hat{\mathbf{z}}$ - jednotkový vektor ve směru osy z
- $\hat{\mathbf{b}}$ - jednotkový vektor ve směru vektoru magnetické indukce \mathbf{B}

Pomocí takového formalizmu lze rovnici (24) zapsat ve formě

$$\mathbf{E} = \rho_B \mathbf{j} - R_H B (\mathbf{j} \times \hat{\mathbf{b}}) + P_H B^2 (\mathbf{j} \cdot \hat{\mathbf{b}}) \hat{\mathbf{b}}. \quad (25)$$

Za zjednodušujícího předpokladu, že vzorek je nekonečně dlouhý ($l \rightarrow \infty$), můžeme prohlásit proudovou hustotu za rovnoběžnou s $\hat{\mathbf{x}}$ a vyjádřit ji tedy jako

$$\mathbf{j} = \frac{I}{wt} \hat{\mathbf{x}}, \quad (26)$$

což lze dosadit do rovnice (25), čímž získáme elektrické pole vyjádřené jako funkci proudu I :

$$\mathbf{E} = \rho_B \frac{I}{wt} \hat{\mathbf{x}} - R_H \frac{I}{wt} B (\hat{\mathbf{x}} \times \hat{\mathbf{b}}) + P_H \frac{I}{wt} B^2 (\hat{\mathbf{x}} \cdot \hat{\mathbf{b}}) \hat{\mathbf{b}}. \quad (27)$$

Výstupní napětí U_{CD} už pak získáme jednoduše integrací pole \mathbf{E} podél osy y . Získáme tedy

$$U_{CD} = \int_C^D \mathbf{E} \cdot d\mathbf{y} = \mathbf{E} \cdot w\hat{\mathbf{y}} = -R_H \frac{I}{wt} B w (\hat{\mathbf{x}} \times \hat{\mathbf{b}}) \cdot \hat{\mathbf{y}} + P_H \frac{I}{wt} B^2 w [(\hat{\mathbf{x}} \cdot \hat{\mathbf{b}})\hat{\mathbf{b}}] \cdot \hat{\mathbf{y}}. \quad (28)$$

Člen s koeficientem magnetorezistance ρ_B musí být roven 0, protože $(\hat{\mathbf{x}} \cdot \hat{\mathbf{y}}) = 0$. Zaměřme se nyní na úpravu skalárních a vektorových součinů. Situace u členu s P_H je velmi přímočará:

$$[(\hat{\mathbf{x}} \cdot \hat{\mathbf{b}})\hat{\mathbf{b}}] \cdot \hat{\mathbf{y}} = \cos \alpha (\hat{\mathbf{b}} \cdot \hat{\mathbf{y}}) = \cos \alpha \cos \beta. \quad (29)$$

V případě členu s R_H je vhodné si složený součin rozepsat:

$$(\hat{\mathbf{x}} \times \hat{\mathbf{b}}) \cdot \hat{\mathbf{y}} = [(1, 0, 0) \times (b_1, b_2, b_3)] \cdot (0, 1, 0) = (0, -b_3, b_2) \cdot (0, 1, 0) = -b_3 \quad (30)$$

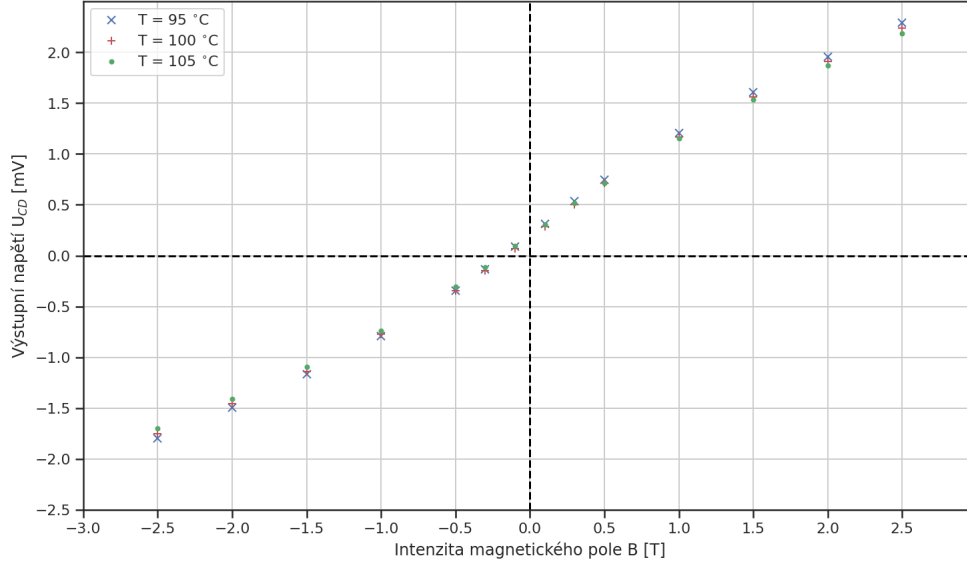
Tento výraz je tedy ve výsledku pouze projekce vektoru $\hat{\mathbf{b}}$ do směru osy z . Protože $\hat{\mathbf{b}}$ je vektor jednotkový, můžeme říct, že

$$(\hat{\mathbf{x}} \times \hat{\mathbf{b}}) \cdot \hat{\mathbf{y}} = \cos \gamma. \quad (31)$$

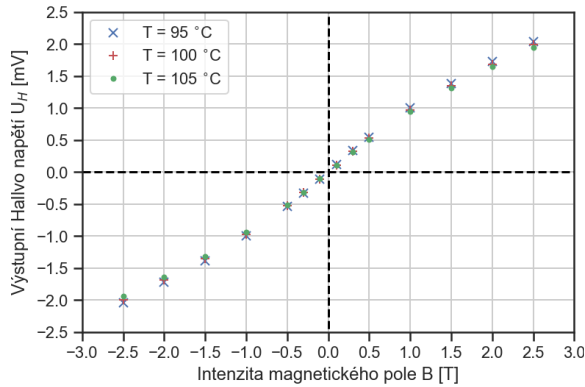
Dosazením (29) a (31) do (28) tedy získáme vztah pro výstupní napětí

$$U_{CD} = -R_H \frac{I}{t} B \cos \gamma + P_H \frac{I}{t} B^2 \cos \alpha \cos \beta. \quad (32)$$

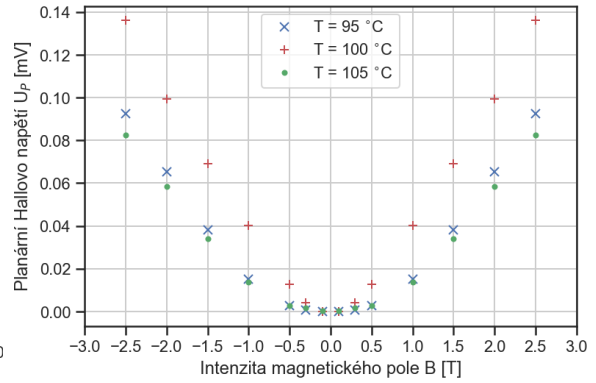
Pro lepší orientaci v tomto vztahu je vhodné nahlédnout do obrázku 5. Pokud bychom chtěli Hallův jev využít například pro měření magnetického pole, budeme planární složku Hallova napětí často považovat za parazitní, případně jako indikátor toho, že je senzor mírně nakloněn (tedy že úhly α a β v obrázku 5 nejsou 90°). Jak můžeme vidět na obrázku 6, je výstupní napětí U_{CD} zatíženo jak asymetrií, tak offsetem. Rozkladem na normálovou a planární složku získáme čisté průběhy obou napětí jako na grafech 7 a 8.



Obr. 6: Výstupní napětí naměřené na Hallově senzoru s bismutovou detekční vrstvou. Dostupné z [10].



Obr. 7: Normálová složka Hallova napětí korespondující s prvním členem ve výrazu (32). Dostupné z [10].



Obr. 8: Planární složka Hallova napětí korespondující s druhým členem ve výrazu (32). Dostupné z [10].

Je vhodné zmínit, že offsetový člen ve výrazu (32) nevystupuje, jelikož nepochází z teoretických základů. Jeho původ je v konstrukčních metodách senzorů. Navíc má podle [11] náhodný charakter lišící se od senzoru k senzoru.

Nyní můžeme vztahy pro měření magnetického pole pomocí indukčních a Halloových senzorů porovnat. Vyjděme ze vztahů

$$B(t) = -\frac{1}{NS} \int_0^t U_{ind}(\tau) d\tau \quad B = \frac{U_{CD}t}{R_H I}. \quad (33)$$

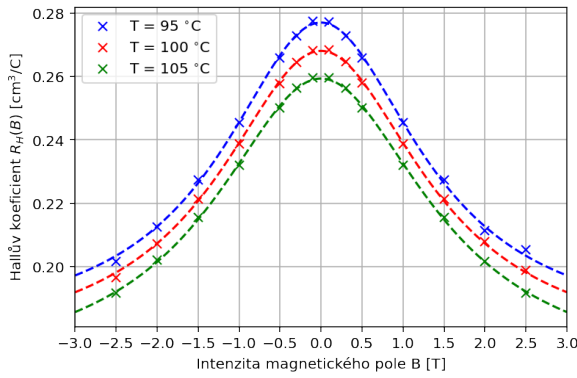
Z těchto vztahů můžeme usuzovat, že pro indukční a Hallovy senzory platí

$$U_{ind} \sim \frac{\partial B}{\partial t} \quad U_{CD} \sim B \quad (34)$$

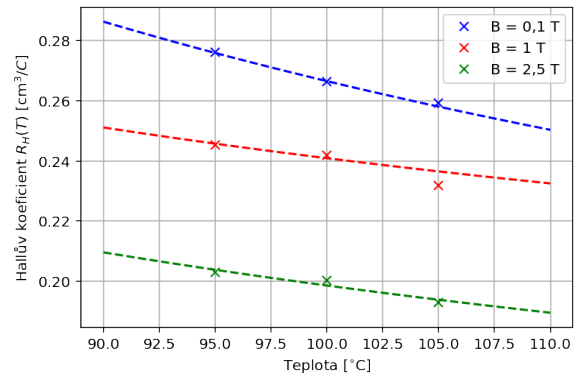
Z porovnání vztahů (34) lze usuzovat, že indukční senzory nebudou fungovat spolehlivě v oblastech konstantního magnetického pole. Jejich integrační povaha způsobuje, že v přítomnosti šumu budou zaznamenávat špatnou hodnotu. Své nevýhody však mají i Hallovy senzory. Jejich závislost magnetického pole na indikovaném napětí je zdánlivě jednoduchá, avšak ve chvíli, kdy budeme uvažovat dva typy volných nosičů náboje, bude pro Hallův koeficient platit následující vztah [10]:

$$R_H(B) = \frac{\frac{\sigma_1 \mu_1}{1 + \mu_1^2 B^2} + \frac{\sigma_2 \mu_2}{1 + \mu_2^2 B^2}}{\left(\frac{\sigma_1 \mu_1 B}{1 + \mu_1^2 B^2} + \frac{\sigma_2 \mu_2 B}{1 + \mu_2^2 B^2}\right)^2 + \left(\frac{\sigma_1}{1 + \mu_1^2 B^2} + \frac{\sigma_2}{1 + \mu_2^2 B^2}\right)^2} \quad (35)$$

Ve vztahu (35) označuje μ pohyblivost nosiče náboje a σ vodivost příslušící nosiči náboje. Tento vztah byl odvozen pro bismut, o němž lze předpokládat, že na transportu náboje se podílí primárně dva typy elektronů; odtud poté indexy 1 a 2. Pokud bychom chtěli započítat tři typy volných nosičů náboje, byla by situace ještě složitější. Nejenže je tedy Hallův koeficient R_H podle vztahu (35) funkcí magnetického pole, ale veličiny μ a σ jsou samy ještě funkcí minimálně teploty T . Takové závislosti lze pozorovat v grafech 9 a 10.



Obr. 9: Závislost normálového Hallova koeficientu R_H na magnetickém poli B . Dostupné z [10].



Obr. 10: Závislost normálového Hallova koeficientu R_H na teplotě senzoru T . Dostupné z [10].

2.4 Vliv geometrie Hallova senzoru na jeho citlivost

2.4.1 Geometrický faktor napětí

Při odvozování rovnice (32) jsme uvažovali $l \rightarrow \infty$, což je ale samozřejmě prakticky neproveditelné. Zavádí se tedy veličina s názvem *geometrický faktor* G_H , která koriguje výstupní napětí U_{CD} s ohledem na reálné rozměry vzorku a také na jeho tvar. Skutečné výstupní napětí U_H bude tedy mít vůči napětí U_{CD} detekovanému na nekonečném vzorku vztah

$$U_H = G_H U_{CD}. \quad (36)$$

Geometrický faktor, jak již bylo zmíněno, zahrnuje jak rozměry, tak tvar senzoru. Navíc však závisí na Hallově úhlu Θ_H , což je úhel mezi externím (napájecím) elektrickým polem a hustotou proudu

ve vzorku za přítomnosti externího magnetického pole. Vznik tohoto odchýlení bude popsán níže a graficky je znázorněn například na obr. 13. Tento úhel je v nekonečném senzoru nulový, proto se geometrický faktor v nekonečných vzorcích neprojeví. Podle [9] má vztah pro geometrický faktor G_H u senzorů, jež jsou symetrické vůči rotaci o $\pi/2$, tvar

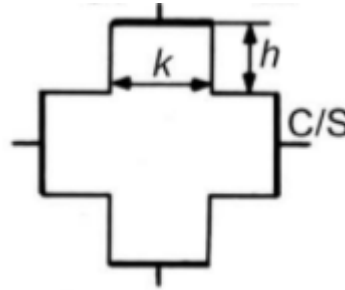
$$G_H(\lambda, \Theta_H) \approx 1 - g(\lambda) \frac{\Theta_H}{\tan \Theta_H} \approx 1 - g(\lambda) \left(1 - \frac{\Theta_H^2}{3}\right) \quad (37)$$

Ve vzorci (37) se vyskytuje jistý parametr λ . Ten je specifický pro daný typ rotačně symetrického senzoru. Vyjadřuje poměr mezi délkou kontaktů (senzitivních i napájecích) a délkou zbývajících hranic senzoru. V následující tabulce jsou uvedeny tvary funkcí $g(\lambda)$ pro různé typy Hallových senzorů. Pro senzor ve tvaru kříže je místo parametru λ užít poměr h/k .

Tvar senzoru	$g(\lambda)$ nebo $g(h/k)$	Podmínka pro přesnost do 0,5%
Čtverec	$0,062\lambda$	$0,3 \geq \lambda$
Kruh	$0,636\lambda$	$0,31 \geq \lambda$
Kříž	$1,045 \exp(-\pi(h/k))$	$0,38 \geq k/2h$

Tab. 2: Tabulka tvarů funkcí $g(\lambda)$ pro různé typy Hallových senzorů. Přesnost se týká aproximace ve vztahu (37). Dostupné z [9].

My se budeme konkrétně zabývat senzory ve tvaru kříže. Jejich schéma je na obrázku 11.



Obr. 11: Schéma Hallova senzoru ve tvaru kříže. Dostupné z [9].

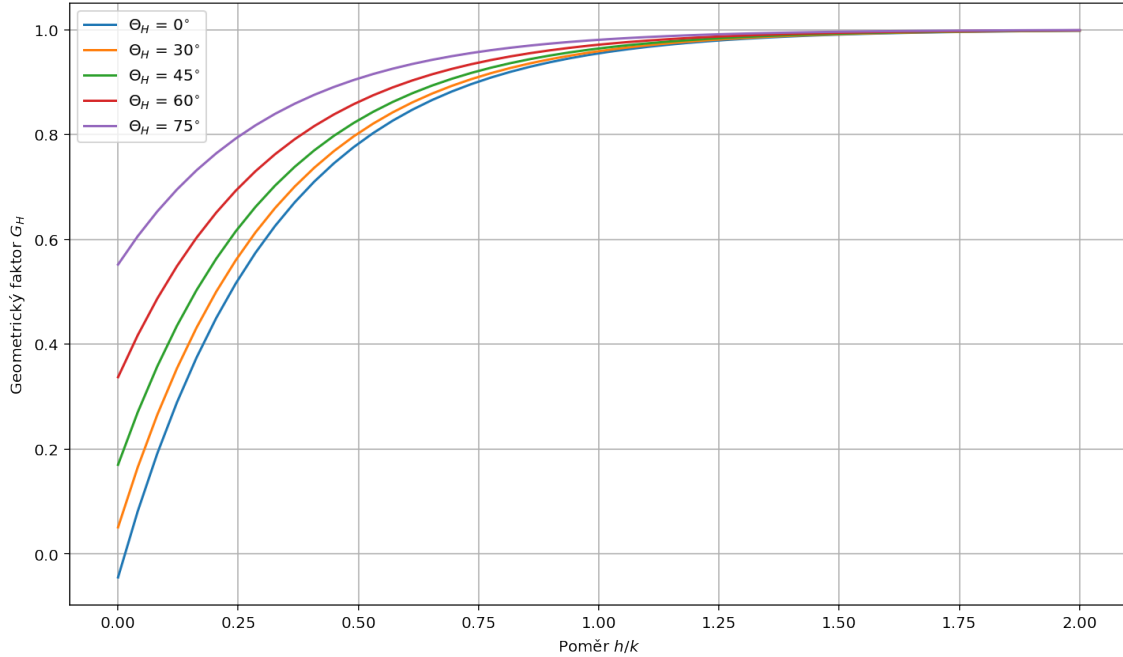
S funkcí $g(h/k)$ tedy získáváme vztah pro hodnoty geometrického faktoru G_H pro senzory tvaru kříže:

$$G_H(h/k, \Theta_H) \approx 1 - 1,045 \exp\left(-\pi \frac{h}{k}\right) \left(1 - \frac{\Theta_H^2}{3}\right) \quad (38)$$

V grafu 12 je vykreslených několik případů funkce $G_H(h/k)$, kde Hallův úhel Θ_H uvažujeme jako parametr.

2.4.2 Magnetorezistance a geometrický faktor rezistivity

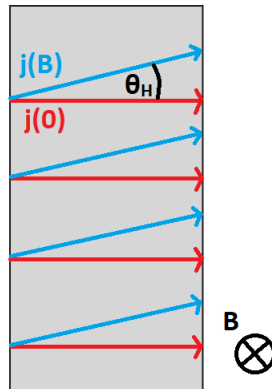
Elektrický odpor R vodivého vzorku, který je vystaven magnetickému poli, bude na tomto poli záviset. Tedy bude platit, že $R = R(B)$. Tento jev se nazývá *magnetorezistance*. Magnetorezistanci



Obr. 12: Průběhy geometrického faktoru G_H jakožto funkce poměru h/k , kde Θ_H je parametr.

lze rozdělit na dva podjevy. Geometrickou a fyzikální magnetorezistanci.

Geometrickou magnetorezistanci lze vysvětlit pomocí schématu 13.



Obr. 13: Schéma vysvětlující geometrickou magnetorezistanci.

Tento podjev je devízou infinitezimálně krátkých vzorků, tedy kde se nosiče náboje nedostanou ke kontaktům C a D na obrázku 5. Proudová hustota \mathbf{j} bude v magnetickém poli \mathbf{B} odchýlena o Hallův úhel Θ_H . Z geometrického hlediska je vektor proudové hustoty $\mathbf{j}(B)$ delší, než $\mathbf{j}(0)$, což lze fyzikálně vysvětlit jako zvýšení odporu ve vzorku. Rezistivita $\rho(B)$ v takovém případě bude mít tvar [9]

$$\rho(B) = \rho(0)(1 + \mu_H^2 B^2). \quad (39)$$

Zde μ_H označuje Hallovu pohyblivost příslušných nosičů náboje. Tato veličina udává, s jakou ochotou se budou nosiče náboje pohybovat ve směru $\mathbf{j}(0) \times \mathbf{B}$.

Je patrné, že čím větší mobilita v tomto směru, tím silnější bude magnetorezistanční jev, protože nosiče náboje budou unášeny dál, tím pádem budou vektory $\mathbf{j}(B)$ delší.

Fyzikální magnetorezistivitu můžeme pozorovat ve vzorcích naopak dlouhých. Jedná se o situaci, kdy odchýlení proudové hustoty může být tak velké, že vlastně část proudu poteče v opačném směru. Tím vznikne efekt zdánlivé rezistivity. Abychom odlišili geometrickou a fyzikální magnetorezistivitu, budeme tu fyzikální značit ρ_B . V reálném případě jsou však přítomny oba jevy, a celkovou magnetorezistivitu bychom tedy měli značit

$$\rho_B(B) = \rho_B(1 + \mu_H^2 B^2). \quad (40)$$

Podobně jako v případě výstupního napětí, závisí na geometrii senzoru také jeho odpor. Závislost bude podobná jako (37), tedy

$$R(B)_{AB} = G_R R_\infty(B). \quad (41)$$

Zde G_R je geometrický faktor magnetorezistivity. Podobně jako u (37) je zde R_∞ odpor neomezeně dlouhého vzorku a R_{AB} reálný odpor vzorku po zohlednění jeho geometrie. Abychom mohli geometrický faktor G_R nějak přiblížit, převedeme celý problém do řeči rezistivit

$$\frac{R(B)}{R(0)} = \frac{\rho(B)}{\rho(0)}. \quad (42)$$

Když uvážíme, že v reálném senzoru zahrnujeme jak geometrickou, tak fyzikální magnetorezistanci, dostaneme vztah

$$\frac{R(B)}{R(0)} = \frac{\rho_B(B)}{\rho_B(0)} G_R, \quad (43)$$

kde geometrický faktor G_R bude náležet intervalu $(1; 1 + \mu_H^2 B^2)$. Můžeme tedy očekávat, že celkový odpor senzoru v podélném směru bude

$$R(B) = \rho_B(B) \frac{l}{wt} G_R, \quad (44)$$

kde l , w a t jsou rozměry senzoru podle obrázku 5. Pomocí (37) a (44) můžeme přepsat výstupní napětí do tvaru zahrnujícího geometrii senzoru:

$$U_H = R_H \frac{U_{AB}}{R(B)t} B = \frac{G_H}{tG_R} R_H \frac{U_{AB}}{tR(B)} B = \frac{G_H}{G_R} R_H I B \quad (45)$$

2.5 Vliv vlastností materiálu senzoru na detekční vlastnosti

Na výstupní napětí senzoru nemají vliv pouze aspekty spojené přímo s Hallovým jevem. Volba materiálu pro senzor tedy neovlivňuje pouze velikost Hallova koeficientu, je třeba zahrnout i další fyzikální jevy, které při používání Hallových senzorů hrají roli.

2.5.1 Ettinghausenův efekt, Nernstův efekt a termoelektrický jev

- **Ettinghausenův efekt** je úzce spjat s jevem Hallovým. Představme si v našem případě již klasickou situaci. Máme vzorek s volnými nosiči náboje, který budeme napájet externím elektrickým polem \mathbf{E} . Kolmo na vzorek podle obrázku 5 bude působit magnetické pole \mathbf{B} . Lehčí nosiče náboje budou zodpovědné za generaci Hallova elektrického pole \mathbf{E}_H , tedy výstupního napětí U_H . Těžší nosiče náboje, které nestihly reagovat při tvorbě Hallova pole, budou nyní unášeny tímto polem v opačném směru oproti lehčím nosičům náboje. V daném elektrickém poli se budou lehčí nosiče náboje pohybovat rychleji než těžší, tím pádem jsme dospěli k jistému narušení rychlostního rozdělení. Na jedné straně senzoru se hromadí nosiče náboje s vyšší kinetickou energií než na straně druhé. Tím se ale vytvoří teplotní gradient ∇T podél Hallova pole \mathbf{E}_H . Matematicky je tento jev vyjádřen vztahem

$$\nabla T = P_E(\mathbf{j} \times \mathbf{B}), \quad (46)$$

kde P_E je Ettinghausenův koeficient. Podle [12] je konkrétně pro bismut roven

$$P_{E(Bi)} = 7,34 \cdot 10^{-4} \frac{\text{K} \cdot \text{m}}{\text{A} \cdot \text{T}}. \quad (47)$$

- **Seebeckův jev** nastává ve vodičích za přítomnosti teplotního gradientu. Vztah mezi vzniklým napětím a tímto gradientem je přímo úměrný:

$$U_{\nabla T} = -S\nabla T, \quad (48)$$

kde S je Seebeckův koeficient. Opět podle [12] je hodnota tohoto koeficientu pro bismut

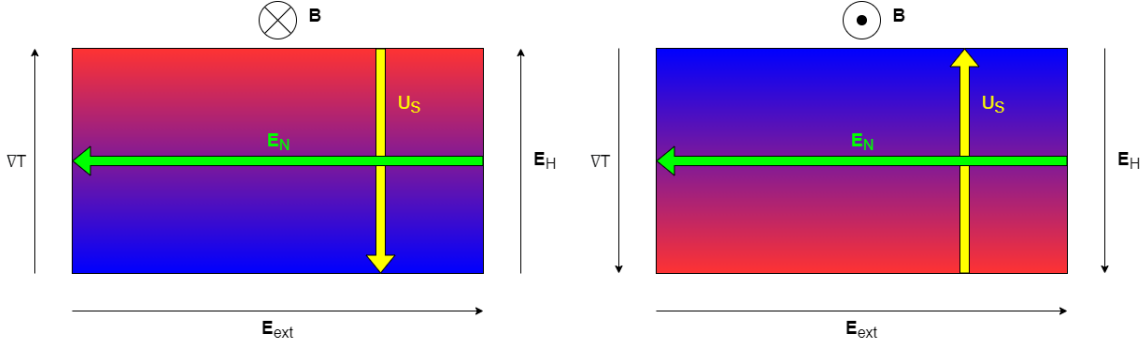
$$S_{Bi} \approx 7 \cdot 10^{-5} \text{V/K}. \quad (49)$$

- **Nernstův jev** je vlastně obdobou Hallova jevu s tím, že místo pohybu částic vlivem elektrického pole je buzen pohybem částic vlivem teplotního gradientu. Jsou-li totiž tyto částice v magnetickém poli, bude jejich trajektorie v tomto poli taktéž zakřivena, jako by byly hnány elektrickým polem. Tuto situaci lze matematicky popsat jako

$$\mathbf{E}_N = N(\nabla T \times \mathbf{B}), \quad (50)$$

kde N je Nernstův koeficient.

Schéma takovéto situace, ve které figurují výše popsané jevy, je znázorněno na obrázcích 14 a 15. Na nich je vyobrazeno, jak to bude se směry jednotlivých elektrických polí vzniklých termoelektrickými jevy.



Obr. 14: Schéma Hallova senzoru s teplotním gradientem tvořeným Ettinghausenovým jevem. U_S značí napětí způsobené Seebeckovým jevem a \mathbf{E}_N elektrické pole způsobené jevem Nernstovým.

Obr. 15: Schéma Hallova senzoru s teplotním gradientem tvořeným Ettinghausenovým jevem. U_S značí napětí způsobené Seebeckovým jevem a \mathbf{E}_N elektrické pole způsobené jevem Nernstovým. Zde je situace s opačným magnetickým polem

Jak je ze schémat vidět, působí v tomto případě jak Seebeckův, tak Nernstův jev proti polím, která nás zajímají. Bude asi tedy v budoucnu vhodné provádět korekci na tyto jevy. Matematicky by se dal popsat jev následovně:

$$U_{CD} = -R_H \frac{I - I_N}{t} B \cos(\gamma) + P_H \frac{I - I_N}{t} B^2 \cos(\alpha) \cos(\beta) - U_S, \quad (51)$$

kde I_N je elektrický proud vyvolaný Nernstovým elektrickým polem \mathbf{E}_N a U_S napětí způsobené Seebeckovým jevem.

Omezíme se nyní na jednoduchou situaci, kdy zanedbáme Nernstův jev. Aproximujeme nárůst teploty napříč senzorem jako lineární, tedy můžeme (46) zapsat do tvaru

$$\Delta T = \frac{P_E I B}{t}. \quad (52)$$

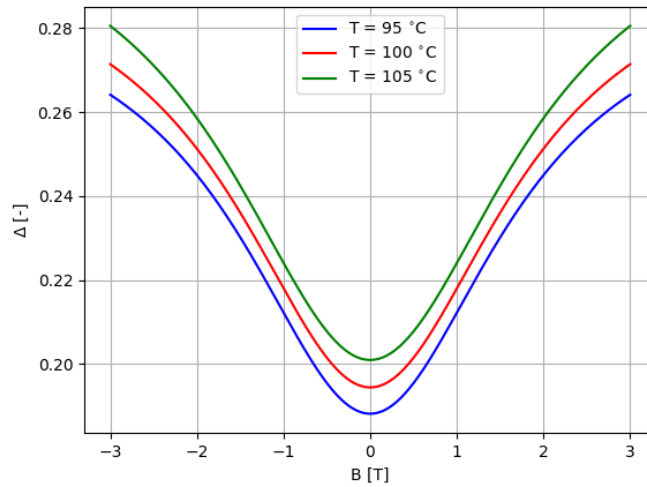
Zde předpokládáme, že vektory \mathbf{j} a \mathbf{B} jsou na sebe kolmé tak, že gradient teploty vzniká podélně s Hallovým elektrickým polem \mathbf{E}_H . Gradient teploty tedy nutně vzniká zároveň s Hallovým napětím. Pomocí termoelektrického koeficientu pak můžeme vyjádřit, jaké napětí bude vlivem teplotního gradientu generováno. Tedy

$$U_{\nabla T} = \frac{S P_E}{t} I B, \quad (53)$$

kde S je termoelektrický nebo také Seebeckův koeficient. V rámci získání jakési představy o tom, jak moc Ettinghausenův jev ovlivňuje výstupní napětí, můžeme se dívat na podíl $U_{\nabla T}$ a U_{CD} .

$$\Delta = \frac{\frac{S P_E I B}{t}}{\frac{R_H I B}{t}} = \frac{S P_E}{R_H}. \quad (54)$$

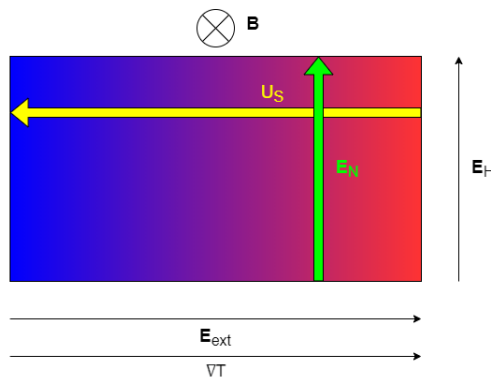
Můžeme nyní využít znalosti závislosti normálového Hallova koeficientu R_H ze vztahu (35) [10] a dostat tak poměrný vliv Ettinghausenova efektu v závislosti na magnetickém poli. Výsledné závislosti jsou vyobrazeny v grafu 16.



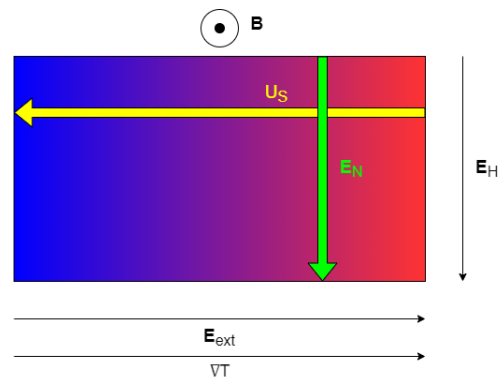
Obr. 16: Grafické znázornění poměrného vlivu Ettinghausenova jevu na výstupním napětí U_{CD} Hallova senzoru.

Ačkoliv můžeme teplotní gradient očekávat díky Ettinghausenovu jevu vždy když pozorujeme Hallův jev, může se taktéž stát, že budou teplotní gradienty vznikat v důsledku vnějších vlivů, jako například z ohřevu nehomogenním ozařováním. V takovém případě můžeme uvažovat několik situací:

- $\nabla T \parallel \mathbf{E}_H$ - Pakliže nehomogenní ohřev způsobí gradient teploty rovnoběžně s Hallovým elektrickým polem, bude situace vypadat obdobně jako na schématech 14 a 15. Příslušné termoelektrické jevy pak budou buď zeslabeny nebo posíleny.
- $\nabla T \perp \mathbf{E}_H$ - Pokud vlivem nehomogenního ohřevu vznikne teplotní gradient vodorovně se směrem napájení, tedy kolmo k Hallovu elektrickému poli, nastane některá ze situací na schématech 17 až 20.



Obr. 17: Schéma Hallova senzoru s teplotním gradientem podél Hallova elektrického pole \mathbf{E}_H .

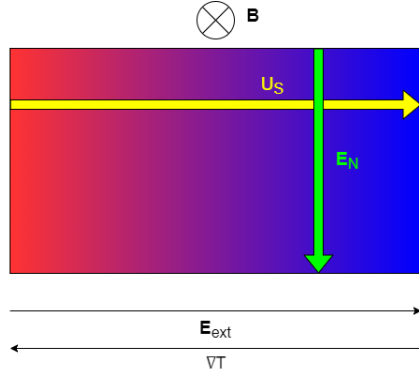


Obr. 18: Schéma Hallova senzoru s teplotním gradientem podél Hallova elektrického pole \mathbf{E}_H .

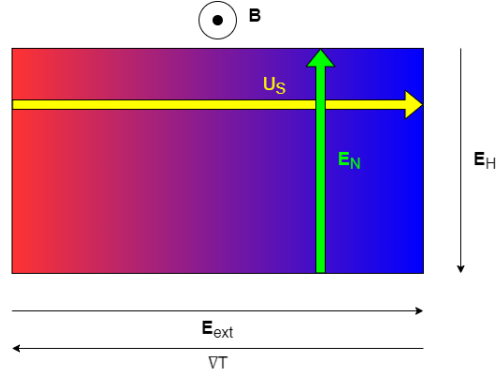
Jestliže je teplotní gradient ve stejném směru jako vnější napájecí elektrické pole, bude Seebeckův jev vždy napájecí pole zeslabovat. Naopak Nernstův jev bude vždy zesilovat Hallovo elektrické pole. Budeme-li chtít situaci popsat podobně jako v (51), získáme vztah

$$U_{CD} = -R_H \frac{I - I_S}{t} B \cos(\gamma) + P_H \frac{I - I_S}{t} B^2 \cos(\alpha) \cos(\beta) + U_N, \quad (55)$$

kde I_S je elektrický proud vyvolaný napětím U_S vzniklého Seebeckovým jevem a U_N je napětí vzniklé jevem Nernstovým.



Obr. 19: Schéma Hallova senzoru s teplotním gradientem podél Hallova elektrického pole \mathbf{E}_H .



Obr. 20: Schéma Hallova senzoru s teplotním gradientem podél Hallova elektrického pole \mathbf{E}_H .

Je-li teplotní gradient ve směru opačném vůči vnějšímu napájecímu poli, Seebeckův a Nernstův jev si oproti předchozí situaci vymění role. Tedy napětí U_S bude vždy posilovat napájecí pole a Nernstovo pole \mathbf{E}_N bude vždy zeslabovat pole Hallovo. Chtěli bychom opět popsat situaci jako v (51) nebo (55), získáme vztah

$$U_{CD} = -R_H \frac{I + I_S}{t} B \cos(\gamma) + P_H \frac{I + I_S}{t} B^2 \cos(\alpha) \cos(\beta) - U_N \quad (56)$$

V reálné situaci však může být vnější ohřev původcem teplotního gradientu v nějakém dříve neurčeném směru. V takovém případě už nebudeme moci sestavit jednoduché vztahu jako (55) nebo (56) a budeme odkázáni na obecné tvary napětí vycházející ze vztahů (48) a (50).

2.6 Omezení výkonu na detekční vrstvě

Hallův senzor musí být pro plnění své funkce napájen vnějším elektrickým polem. Jelikož se jedná o objekt s konečnou vodivostí, bude v přítomnosti tohoto pole ohmicky ohříván. To může být pro senzor nebezpečné, jelikož citlivost senzoru klesá s jeho teplotou. Existuje tedy jistá horní hranice výkonu na detekční vrstvě, kterou nesmíme překročit, aby nedošlo ke znehodnocení senzoru. Nechť tedy detekční vrstvou senzoru o odporu R protéká elektrický proud I .

V tomto případě bude příkon této detekční vrstvy vyjádřen vztahem

$$P = RI^2 = \rho \frac{l}{wt} I^2 = \frac{1}{\mu q n} \frac{l}{wt} I^2 \quad (57)$$

Budeme tento vztah kombinovat se vztahem (45) vyjádřením proudu I . Tím získáme vzorec:

$$U_H = \frac{G_H}{G_R} R_H \sqrt{\mu q n} \sqrt{\frac{w}{tl}} \sqrt{PB}. \quad (58)$$

Jak je zmíněno v [13], udává nám tento vztah, že pro danou geometrii senzoru a výkon na detekční vrstvě je z hlediska výstupního napětí výhodné snažit se minimalizovat tloušťku detekční vrstvy t . Na druhou stranu je nutné zvážit fakt, že tenčí detekční vrstva zapříčiní horší signal-to-noise ratio.

Dalším důležitým poznatkem je, že vliv tvaru Hallova senzoru je jednoznačně určen geometrickými koeficienty G_H a G_R a přecházet mezi jednotlivými tvary detekční vrstvy je tedy z výpočetního hlediska velmi jednoduché a elegantní

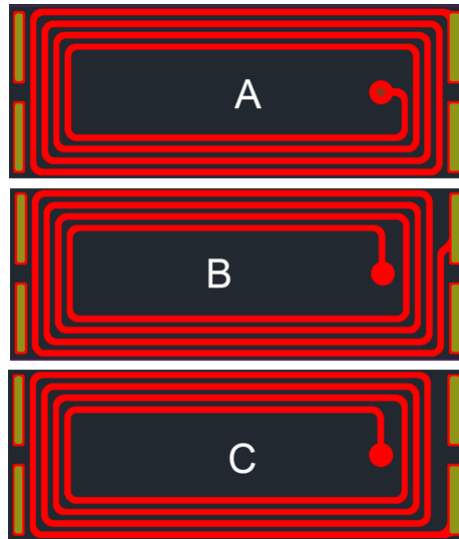
3 Design kombinovaného Hallova a indukčního senzoru

Návrh kombinovaného senzoru je ve své podstatě velmi jednoduchý. Bude se jednat o Hallův senzor připevněný k TPC cívce a to buď lepidlem šrouby.

3.1 TPC cívka

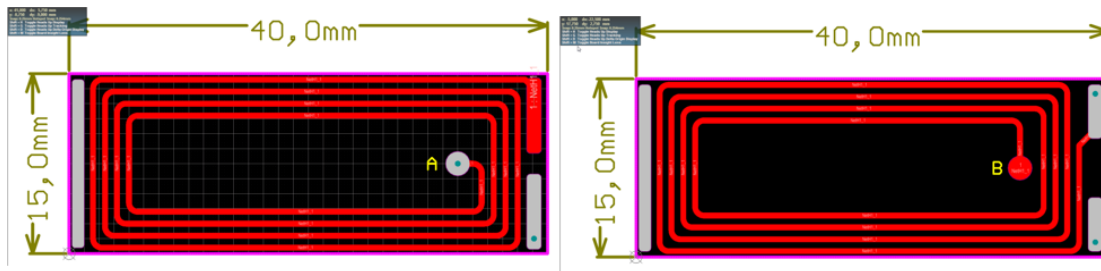
Jedná se o speciální typ cívky tvořený několika vrstvami hliničité či křemičité keramiky s natištěnými měděnými kontakty. Tištění probíhá tryskovým nanášením mědi do předdefinovaných vzorů, následně je pak vrstva vypalována při přibližně 900 °C.

V TPC cívce jsou 3 typy vrstev konvenčně značeny A , B a C . Schéma těchto vrstev je na obrázku 21.



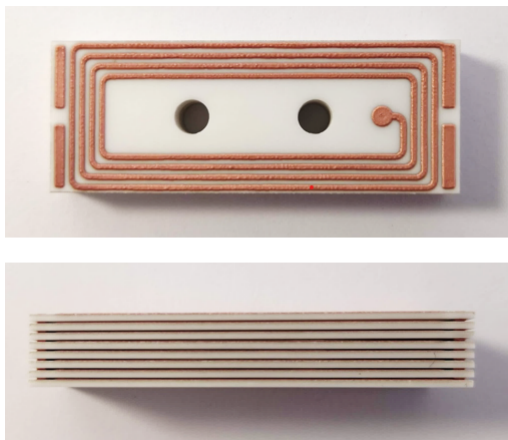
Obr. 21: Schéma vrstev TPC cívky. Schéma mi bylo poskytnuto školitelem.

Vzájemné uspořádání jednotlivých vrstev je v našem případě *ABABABAC*. Rozměry cívky jsou popsány na obrázku 22.

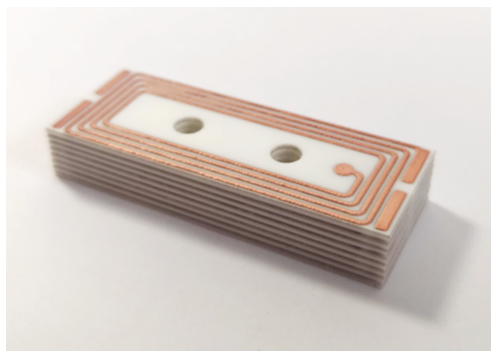


Obr. 22: Rozměry TPC cívky. Schéma mi bylo poskytnuto školitelem.

Skutečný senzor je pak vyfocen na obrázcích 23 a 24.



Obr. 23: Fotografie TPC cívky. Fotografie mi byla poskytnuta školitelem.

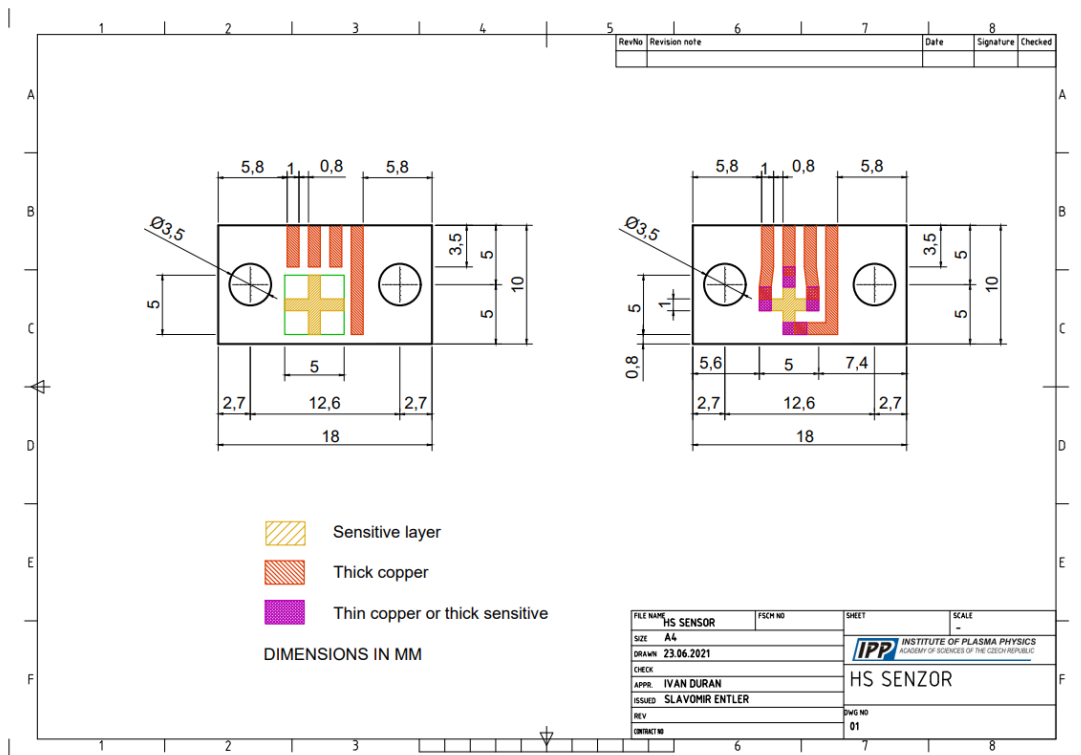


Obr. 24: Fotografie TPC cívky. Fotografie mi byla poskytnuta školitelem.

Tato konkrétní cívka poskytuje efektivní plochu 109 cm^2 . Takováto cívka navíc poskytuje odolnost vůči termálním šokům až do teploty okolo $500 \text{ }^\circ\text{C}$.

3.2 Hallův senzor

Vlastnosti Hallových senzorů jsou blíže popsány v [10] a v předchozí kapitole. Jak z těchto předchozích studií vyplývá, optimální tvar Hallova senzoru je kříž detekčního kovu (bismut/chrom) naprášený na keramické podložce opatřené měděnými kontakty. Schéma takového senzoru mi bylo poskytnuto školitelem a je na obrázku 25.

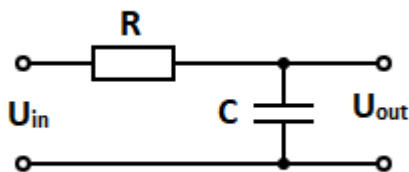


Obr. 25: Schéma Hallova senzoru pro kombinaci s TPC cívkou. Schéma mi bylo poskytnuto školitelem.

V takovéto podobě je Hallův senzor připraven pro kombinaci s TPC cívkou pomocí šroubů vedených skrz díry po stranách detekčního kříže.

4 Kombinace signálů z indukčních a Hallových senzorů (Data fusion)

Jak již bylo zmíněno v sekci 2 ve vztahu (33), nelze pomocí indukčních senzorů měřit magnetické pole při výbojích, jež trvají déle než nějaká časová konstanta τ . Ta je spojena s parametry integrátorů a její tvar lze odvodit následovně:



Obr. 26: Jednoduchý RC integrátor bez operačního zesilovače.

Situaci na schématu (26) můžeme popsat pomocí Kirchhoffových zákonů. Označíme U_{in} jako vstupní napětí integrátoru, v našem případě výstup z indukčního senzoru, U_R jako napětí na rezistoru s odporem R a U_{out} jako výstupní napětí, v v této situaci shodné s napětím na kondenzátoru o kapacitě C . Postup je pak následovný:

$$\begin{aligned}
U_{in}(t) &= U_R(t) + U_{out}(t) \\
U_{in}(t) &= RI(t) + \frac{Q(t)}{C} = R \frac{\partial Q(t)}{\partial t} + \frac{Q(t)}{C} \\
\frac{U_{in}(t)}{R} &= \frac{\partial Q(t)}{\partial t} + \frac{Q(t)}{RC} \\
\frac{1}{R} \int_0^t U_{in}(\tau) d\tau &= \int_0^t \frac{\partial Q(\tau)}{\partial \tau} d\tau + \frac{1}{R} \int_0^t U_{out}(\tau) d\tau \quad (59) \\
\frac{1}{RC} \int_0^t U_{in}(\tau) d\tau &= U_{out}(t) + \frac{1}{RC} \int_0^t U_{out}(\tau) d\tau \quad / \mathcal{F} \\
\frac{1}{i\omega RC} U_{in}(t) &= U_{out}(t) + \frac{1}{i\omega RC} U_{out}(t) \\
U_{out}(t) &= \frac{1}{1 + i\omega RC} U_{in}(t)
\end{aligned}$$

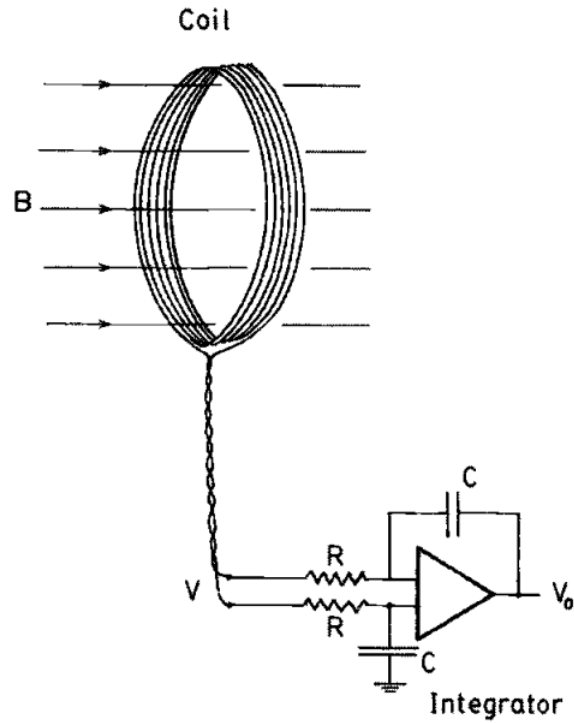
Pokud by však platilo, že frekvence integrovaného signálu je dostatečně vysoká, konkrétně $\omega RC \gg 1$, mohli bychom na třetím řádku odvození zanedbat druhý člen na pravé straně a obvod by se choval jako pasivní integrátor podle vztahu:

$$U_{out}(t) = \frac{1}{RC} \int_0^t U_{in}(\tau) d\tau \quad (60)$$

Tento vztah však, jak již bylo řečeno, platí pouze pro vysokofrekvenční vstupní signály a v oblastech nižších frekvencí neplatí. V takovém případě již bude třeba postupovat striktně podle odvození (4). Dalším problémem tohoto integrátoru je, že jeho funkčnost selhává pro časové škály srovnatelné s časovou konstantou RC . To však nelze kompenzovat tím, že tuto konstantu jednoduše zvětšíme, protože podle (60) je výstup integrátoru tímto číslem dělen. Abychom mohli číslo RC zvětšit, musíme využít aktivního integrátoru s operačním zesilovačem. Ten dokáže výstupní napětí amplifikovat jistým faktorem G a mitigovat tak snižování jeho amplitudy navýšením konstanty RC . Schéma takového integrátoru je na obrázku 27.

Nicméně ani operační zesilovač neřeší problém nutnosti integrace signál z cívek. Podle [6] se driftы způsobené integrací offsetu pohybují v řádu $1\text{mV}\cdot\text{s}$ i v případě použití integrátoru s aktivní zpětnou vazbou. Pro dlouhé tokamakové výboje řádově 1000 s bude již výsledný offset signifikantní a je tedy třeba hledat řešení tohoto problému.

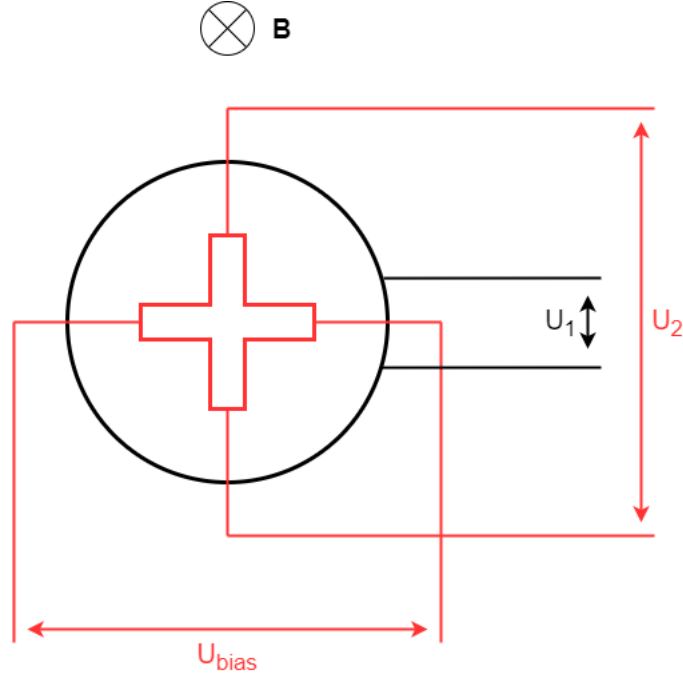
Jako doplnění indukčních senzorů budou použity senzory Hallovy. Ty sice nejsou optimální pro měření magnetického pole, jež se mění s vysokou frekvencí, avšak mohou suplovat cívky při měření stacionárních magnetických polí. U Hallových senzorů je však vždy přítomný jistý offset, který je způsobený nedokonalostmi ve výrobě senzoru, jako například spoje napájecích kontaktů



Obr. 27: Schéma RC obvodu s operačním zesilovačem. Dostupné z [7]

a spoje kontaktů detekčních. Navíc mohou Hallovy senzory registrovat různé nežádoucí signály, které mohou v radiačně a teplotně náročném prostředí tokamaku vznikat. Zvažovaným způsobem, kterým by teoreticky bylo možné těmto nežádoucím signálům zabránit, by mohla být takzvaná *current spinning* metoda, která spočívá v periodickém střídání napájecích a snímacích kontaktů a následném průměrování takovýchto měření [6].

Každý ze sensorů má tedy své výhody a nevýhody. Jejich kombinací však lze tyto nedostatky vzájemně kompenzovat. Schéma takového kombinovaného senzoru je na obrázku 28.



Obr. 28: Schéma kombinovaného Hallova (červeně) a indukčního (černě) senzoru.

V případě takového senzoru je hlavním problémem to, jak kombinovat výstupní napětí U_1 a U_2 , které nám poskytují informaci o magnetickém poli \mathbf{B} . Zabývejme se jednotlivými napětími postupně. Pro napětí U_1 platí:

$$U_1(t) = a_1 \frac{dB}{dt} + U_{s1}(t), \quad (61)$$

kde a_1 je koeficient nepřímo úměrný efektivnímu průřezu cívky a U_{s1} reprezentuje parazitní napětí indukované při měření cívkou. Takový signál je poté digitalizován a integrován, čímž získá tvar

$$\hat{U}_1^{int}(t_i) = b_1 \hat{B}(t_i) + c_1 \sum_{k=0}^i \hat{U}_{s1}(t_k). \quad (62)$$

Zde symbol stříšky reprezentuje digitalizovanou formu signálu s diskrétním časovým krokem t_i . Z rovnice (62) je dobře vidět, že druhý člen pravé strany nám bude zavádět do signálu kumulativní chybu.

Výstupem z Hallova senzoru je napětí $U_2(t)$. To bude mít tvar

$$U_2(t) = a_2 B(t) + U_{s2}(t). \quad (63)$$

Zde obdobně jako v případě indukčního senzoru je $U_{s2}(t)$ parazitní napětí a a_2 je koeficient úměrný Hallovu koeficientu. V případě Hallova senzoru, zakomponujeme-li do diagnostiky i *spinning current* metodu (což se na schématu 28 projeví záměnou U_2 a U_{bias}), budeme schopni do jisté míry nahradit parazitní napětí U_{s2} napětím U_{s2}^{CS} , pro které platí $U_{s2}^{CS} \ll U_{s2}$. Opět jako v případě indukčního senzoru budeme i tento signál digitalizovat a jeho finální podoba tedy bude

$$\hat{U}_2(t_i) = a_2 \hat{B}(t_i) + \hat{U}_{s2}^{CS}(t_i). \quad (64)$$

Na rozdíl od signálu (62) zde nefiguruje žádný kumulativní člen. Na výstupu kombinovaného senzoru tedy můžeme porovnávat 2 signály:

- Signál z indukčního senzoru:

$$\hat{B}_1(t_i) = B(t_i) + \Delta\hat{B}_1(t_i), \quad \Delta\hat{B}_1(t_i) \sim \frac{c_1}{b_1} \sum_{k=0}^i \hat{U}_{s1}(t_k) \quad (65)$$

- Signál z Hallova senzoru:

$$\hat{B}_2(t_i) = B(t_i) + \Delta\hat{B}_2(t_i) \quad \Delta\hat{B}_2(t_i) \sim \frac{\hat{U}_{s2}^{CS}(t_i)}{a_2} \quad (66)$$

5 Model kombinovaného senzoru

Abychom bylo možné lépe pochopit, vizualizovat a studovat vlastnosti kombinovaných senzorů bez nutnosti jejich sestavení a přípravy experimentu, byl v jazyce Python vyvinut jednoduchý model, který měření pomocí kombinovaného senzoru umožňuje.

5.1 Proces měření indukčním senzorem

Princip modelování měření magnetického pole indukčním senzorem vychází z indukčního zákona

$$U_{ind}(t) = S \frac{\partial B(t)}{\partial t}. \quad (67)$$

Abychom mohli zohlednit rozměry a tvar cívky, rozdělíme její efektivní plochu S na menší čtvercové plochy S_i a přes všechny tyto "sub-plochy" poté vysčítáme:

$$U_{ind}(t) = \sum_n S_n \frac{\partial B_n(t)}{\partial t}. \quad (68)$$

Je důležité zmínit, že vzhledem k povaze magnetického pole v tokamacích ($B \sim 1/R$) musíme indexovat i magnetická pole v jednotlivých "sub-plochách".

Aby bylo možné tuto rovnici implementovat, je třeba ještě diskretizovat derivaci $B(t)$. V našem případě provedeme standardní zpětnou diferenci

$$\frac{\partial B_n(t)}{\partial t} \approx \frac{B_n^i - B_n^{i-1}}{\Delta t}. \quad (69)$$

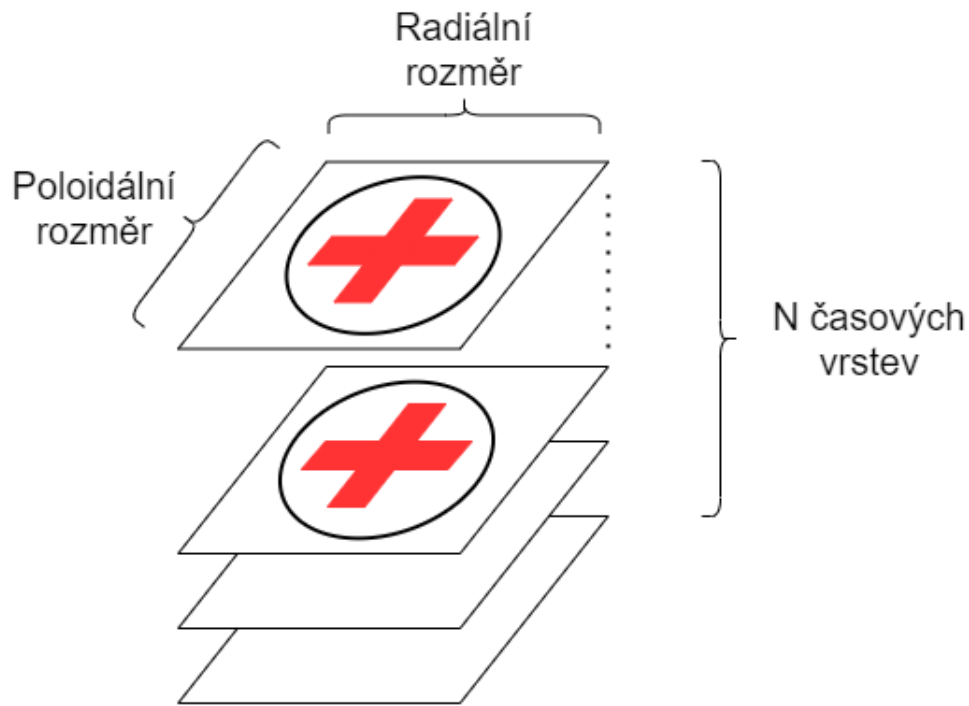
Tato diskretizace je právě základem části modelu, která simuluje měření pomocí indukčního senzoru. Iniciujeme totiž jednorozměrné pole o délce celkového počtu časových kroků N . Do tohoto pole pak ukládáme informaci o derivaci magnetického pole vysčítanou přes všechny sub-plochy (68) za použití aproximace (69). Nutno podotknout, že tento model neoperuje přímo s TPC cívku, ale s cívku s kruhovým průřezem. Implementace TPC cívky by model zesložila.

Měření pomocí Hallova senzoru budeme realizovat poněkud zjednodušeně. Budeme postupovat pomocí vzorce

$$U_H = \frac{G_H}{G_R} R_H I B, \quad (70)$$

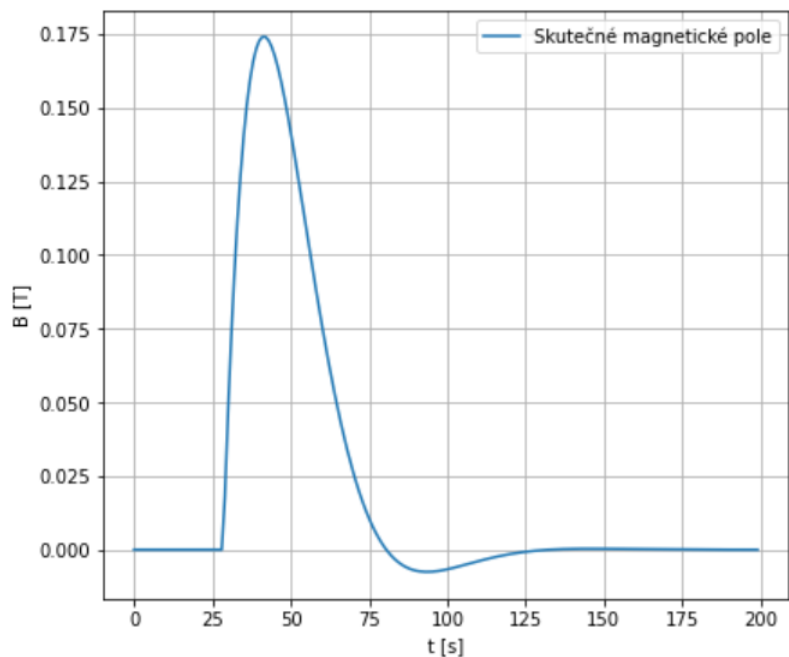
problém však tkví ve tvaru hallova koeficientu $R_H = R_H(B)$. Budeme-li chtít ze signálu z Hallova senzoru získat informaci o magnetickém poli $B = B(U_H)$, musíme nutně vyjádřit magnetické pole ze vztahu (35). To však není triviální. Aproximace pomocí Taylorova polynomu konvergují pouze velmi pomalu a sudost funkce $R_H = R_H(B)$ je komplikací navíc. Z tohoto důvodu bylo rozhodnuto, že pro účely této práce zanedbáme závislost Hallova koeficientu na magnetickém poli a budeme je považovat za konstantní.

Způsob měření pomocí našeho modelu lze názorně ilustrovat na schématu 29:



Obr. 29: Schéma fungování časových vrstev při modelování měření magnetického pole kombinovaným senzorem.

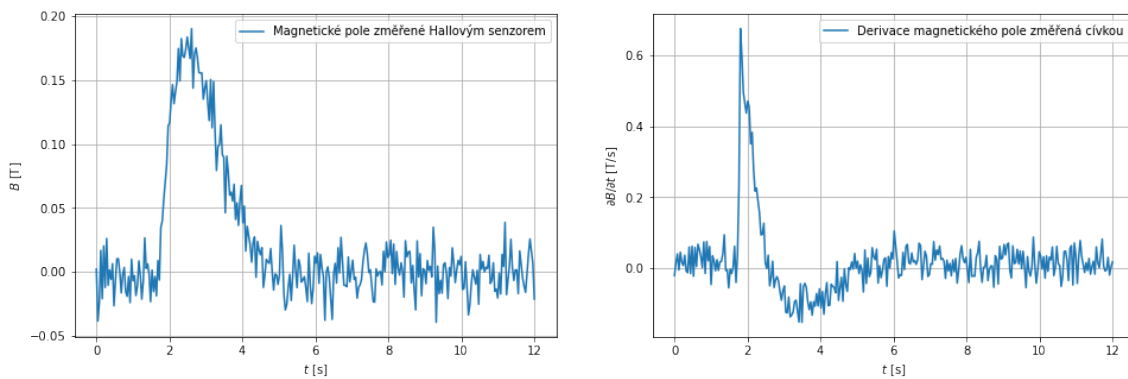
Pro modelované magnetické pole jsme zvolili přetlumenou sinusoidu. Dobře totiž simuluje jak rychlé změny dobře zachytitelné pomocí indukčních senzorů, tak pomalé "flat"části, které by měly být doménou Hallových senzorů. Zvolený průběh je na grafu 30.



Obr. 30: Zvolený průběh modelového magnetického pole.

Konkrétní tvar této funkce je $B(t) = \Theta(t-t_0)Ae^{-\delta t}\sin(t-t_0)$. Heavisideova funkce nám dovoluje simulovat náhlé sepnutí cívek toroidálního pole.

V následujících grafech 31 jsou znázorněny průběhy magnetického pole, resp. jeho derivace změřené pomocí Hallova, resp. indukčního senzoru. Uvažujeme, že jak cívka tak Hallův senzor zavedou do signálu jistou formu bílého šumu a offsetu.



Obr. 31: Výstupy z Hallova a indukčního senzoru ve formě magnetického pole a jeho derivace.

5.2 Kalmanův filtr

Kalmanův filtr je způsob, jakým skládat zašumělé signály z několika sensorů a po případném porovnání s příslušnou modelovou situací je schopen poskytnout optimální odhad stavu měřeného systému. Pro následující vysvětlení si definujeme několik symbolů:

- $x(t)$ - stav systému v čase t
- $y(t)$ - výsledek měření systému v čase t
- $u(t)$ - vstupní veličina systému v čase t
- $\hat{x}(t)$ - odhad stavu systému v čase t
- $\hat{y}(t)$ - odhad výstupu měření systému v čase t
- $w(t), n(t)$ - členy představující šum

Pomocí těchto veličin pak lze popsat časový vývoj stavu systému jako

$$\dot{x}(t) = \mathbb{A}x(t) + \mathbb{B}u(t) + w(t), \quad y(t) = \mathbb{C}x(t) + \mathbb{D}u(t) + n(t). \quad (71)$$

Tyto rovnice je ještě třeba doplnit o počáteční podmínku $x(0)$ a zmínit, že členy $w(t)$ a $n(t)$ jsou uvažovány z normálního rozdělení. Odhad vnitřních stavů $\hat{x}(t)$ lze zjistit z rovnic doplněných o takzvaný observer:

$$\dot{\hat{x}}(t) = \mathbb{A}\hat{x}(t) + \mathbb{B}u(t) + \mathbb{L}(t)(y(t) - \hat{y}(t)) \quad (72)$$

$$\hat{y}(t) = \mathbb{C}\hat{x}(t) + \mathbb{D}u(t)$$

Člen $\mathbb{L}(t)$ se nazývá *gain*. Tento koeficient v sobě zohledňuje i členy $w(t)$ a $n(t)$ ve formě kovariančních matic \mathbb{W} a \mathbb{N} a lze jej vypočítat podle vztahu

$$\mathbb{L}(t) = \Sigma(t)\mathbb{C}^T\mathbb{N}^{-1} \quad (73)$$

, kde člen $\Sigma(t)$ lze získat z takzvané Riccatiho rovnice:

$$\dot{\Sigma}(t) = \Sigma(t)\mathbb{A}(t) + \mathbb{A}\Sigma(t) + \mathbb{W} - \Sigma(t)\mathbb{C}^T\mathbb{N}^{-1}\mathbb{C}\Sigma(t) \quad (74)$$

Intuitivně vzato nám určuje $\mathbb{L}(t)$, jak moc je zohledňován odklon měřené $y(t)$ od odhadu měřené hodnoty \hat{y} . Další možné interpretace budou zřejmé z aplikací Kalmanova filtru.

6 Data fusion

V předchozí kapitole jsme pomocí modelu získali průběhy signálů z indukčního a Hallova senzoru. Nyní na tyto signály aplikujeme Kalmanův filtr. Nejdříve je třeba určit, jakým způsobem přiřadit

signály z indukčního (\dot{B}_c) a Hallova (B_H) senzoru k jednotlivým veličinám v rovnicích (72). Přiřazení můžeme provést tak, že si nejdříve popíšeme náš systém soustavou rovnic

$$\dot{B} = \dot{B}_c - d_c \quad (75)$$

$$B_H = B + d_H$$

Budeme tedy uvažovat, že stav systému, který chceme zjistit, je skutečná hodnota magnetického pole B . Pro účely Kalmanova filtru, který nám tento stav odhaduje, si odhad označíme jako \hat{B} . Za vstupní informaci u budeme považovat signál z indukčního senzoru \dot{B}_c a výstup měření y budeme používat signál z Hallova senzoru B_H . Podle [8] budeme dále uvažovat, že \mathbb{A} a \mathbb{D} budou nulové. Soustava pro kalmanův filter pak vypadá následovně

$$\dot{\hat{B}}(t) = \dot{B}_c(t) + \mathbb{L}(t)(B_H(t) - \hat{y}(t)) \quad (76)$$

$$\hat{y}(t) = \hat{B}(t)$$

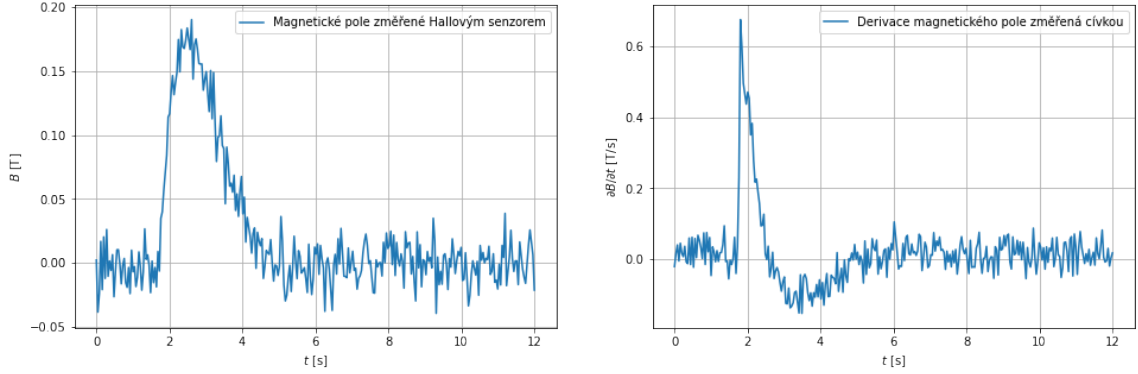
Dosadíme-li druhou rovnici do první, dostaneme vztah

$$\dot{\hat{B}}(t) = \dot{B}_c(t) + \mathbb{L}(t)(B_H(t) - \hat{B}(t)). \quad (77)$$

Nyní stačí určit gain filtru $\mathbb{L}(t)$. V [8] je gain určený fixně. Což nemusí být vždy výhodné. Jak již bylo zmíněno, gain určuje, jak moc je zohledňováno odchýlení odhadovaného outputu systému od měření. Pokud navíc vezmeme v potaz rovnici (77), lze intuitivně vidět, že pokud $\mathbb{L}(t)$ zvolíme příliš malé nebo příliš velké, budeme jeden ze senzorů penalizovat natolik, že nebude mít na výsledný odhad \hat{B} téměř žádný vliv. Názorně jsou situace vyobrazené v následující sekci.

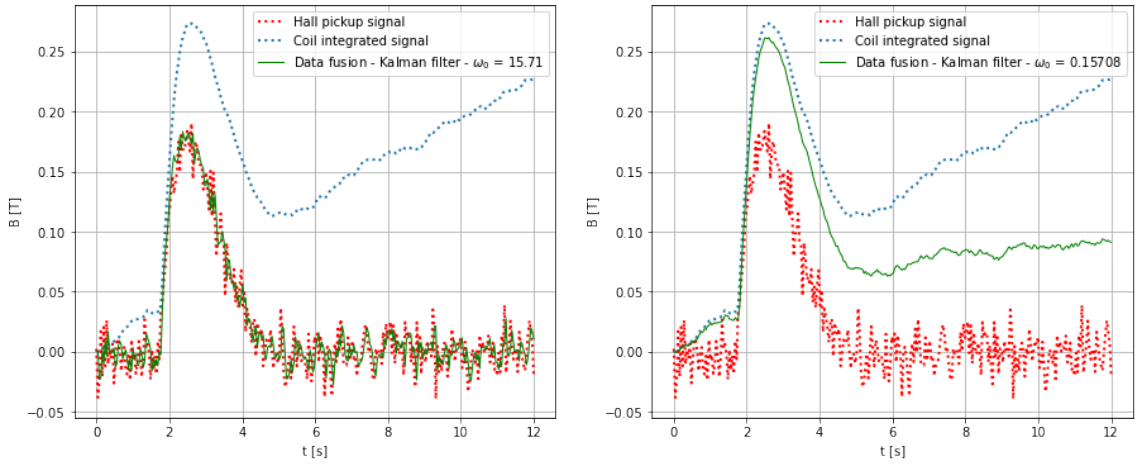
6.1 Aplikace Kalmanova filtru

Z modelu měření magnetického pole jsme získali 2 signály \dot{B}_c a B_H . Ty nyní můžeme pomocí Kalmanova filtru kombinovat. Jejich průběhy jsou pro připomenutí vyneseny v grafech 32. Oba jsou zatíženy jistou formou šumu, konkrétně jsme volili bílý šum. Tento šum nám bude sloužit jako funkce $w(t)$ a $n(t)$ a budou moci být ve formě kovariančních matic \mathbb{W} a \mathbb{N} použity pro výpočet gainu $\mathbb{L}(t)$ z Riccatiho diferenciální rovnice (74).



Obr. 32: Signály z Hallova a indukčního senzoru určené pro aplikaci Kalmanova filtru.

Kombinaci provedeme podle vztahu (77) a budeme pozorovat, jak se bude výsledný signál chovat pro různé hodnoty gainu L , prozatím konstantní. Výsledky jsou na grafech 33.



Obr. 33: Výsledky kalmanova filtru mezi signálem z cívkou (s offsetem) a z Hallova senzoru pro 2 různé hodnoty gainu.

V grafech 33 je gain filtru označen jako ω_0 . To má v našem případě dobrý důvod. Jednak je možné si povšimnout, že nižší hodnota tohoto parametru vyústí v relativně hladší signál, tedy se jedná a jakousi "sampling" frekvenci Kalmanova filtru. O frekvenci se musí jednat také z rozměrových důvodů. V rovnici (77) totiž figuruje spolu s členy představujícími derivace magnetického pole a tedy $[\omega_0] = s^{-1}$. Gain pro náš případ má ještě další možnou interpretaci. Ta bude jasná po fourierovské analýze vztahu (77):

$$\hat{B}(\xi) = \frac{\omega_0 B_H(\xi) + \xi B_c(\xi)}{\omega_0 + \xi}, \quad (78)$$

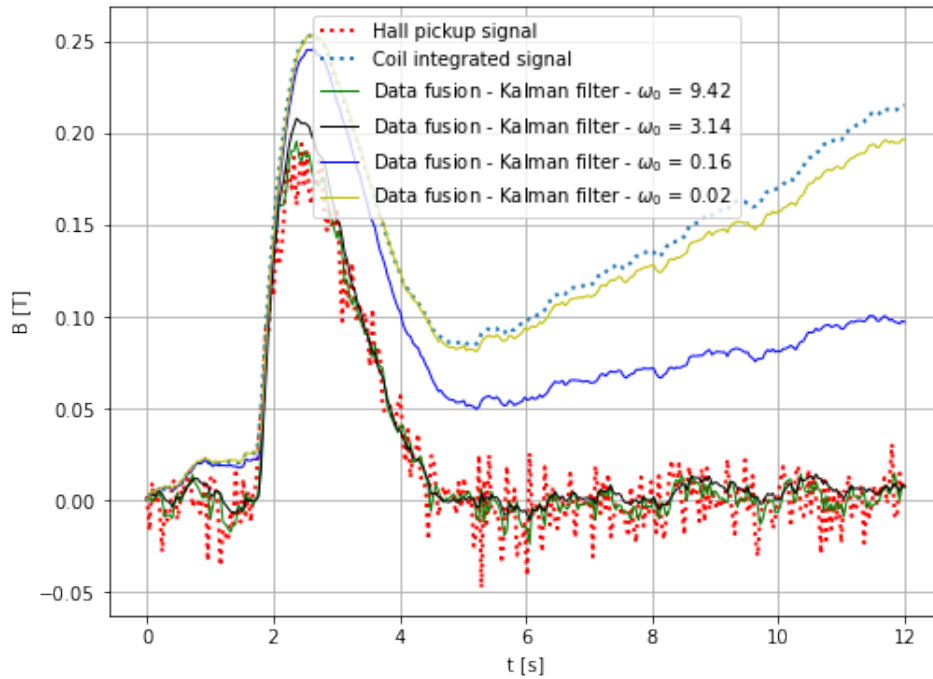
kde $\xi = i\omega$. Podobný vztah bude platit i pro chybu odhadu pole \hat{B} a sice

$$e(\xi) = \frac{\omega_0 d_H(\xi) + d_c(\xi)}{\omega_0 + \xi}, \quad (79)$$

přičemž platí, že $\hat{B} = B + e$. Ze vztahu (79) je patrné, že gain filtru (v tomto případě ω_0) zároveň funguje i jako jakási mezní frekvence, která určuje, která část chyby bude dominantnější. Lze tak usuzovat z následujícího vztahu:

$$e(\xi) = \frac{\omega_0 d_H(\xi) + d_c(\xi)}{\omega_0 + \xi} \approx \begin{cases} d_H(\xi) + \frac{d_c(\xi)}{\omega_0} & \omega \ll \omega_0 \\ \frac{\omega_0 d_H(\xi) + d_c(\xi)}{\xi} & \omega \gg \omega_0 \end{cases} \quad (80)$$

Funkce gainu je názorná na obrázku 34.



Obr. 34: Vliv postupného snižování gainu filtru na tvar jeho výstupu.

Z grafu je jasně patrné, že hodnota gainu výrazně ovlivňuje, který ze senzorů bude preferován. Tuto skutečnost lze jasně vidět i ze vztahu (77):

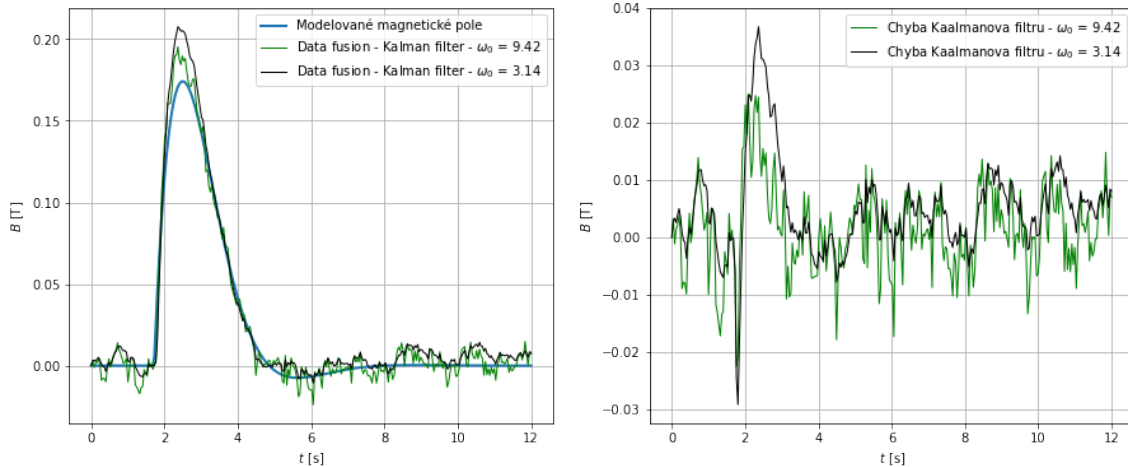
- pokud $\omega_0 \rightarrow 0$:

$$\dot{B} \approx \dot{B}_c$$

- pokud $\omega_0 \gg 1$:

$$\dot{B} \approx \omega_0(B_H - \hat{B})$$

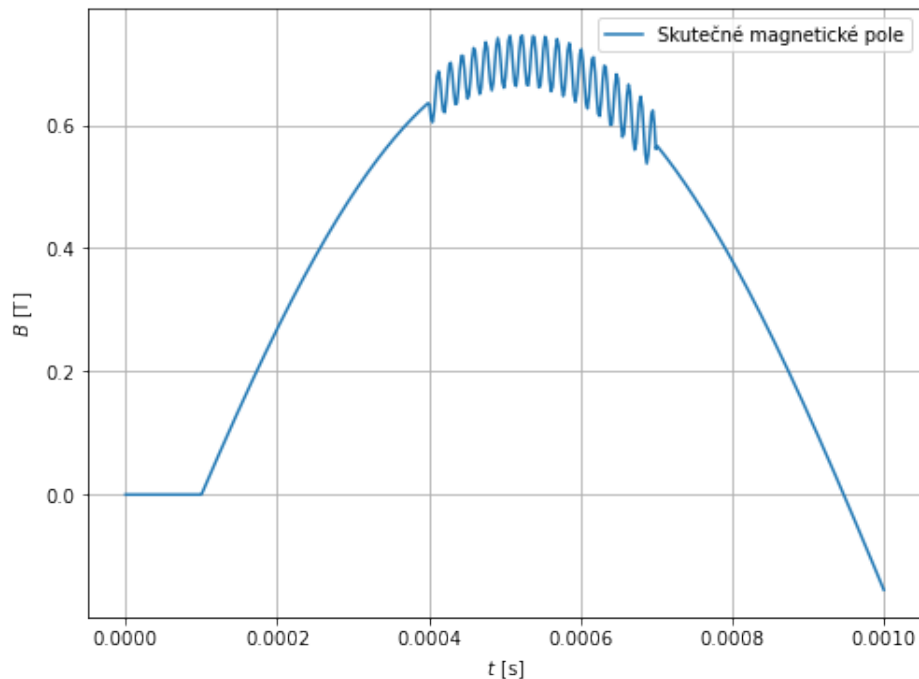
Nyní zbývá analyzovat chybu Kalmanova filtru oproti modelovanému poli.



Obr. 35: Vývoj chyby Kalmanova filtru v závislosti na ω_0

Jak je patrné z grafů 35, odchylka Kalmanova filtru závisí na volbě ω_0 . Pro vyšší hodnoty je chyba filtru menší, avšak nedokáže tolik korigovat zašumění signálu a filtr tak nebude schopně přebírat vlastnosti cívky, jako by tomu bylo u filtru s nižším ω_0 . U toho je vidět, že do jisté míry odstraní šum, avšak maximální odchylka je v absolutní hodnotě větší než v případě vyššího ω_0 .

Podobnou analýzu provedeme ještě pro jeden, poněkud realističtější průběh magnetického pole. Jedná se o situaci, kdy v průběhu výboje dojde ke vzniku magnetického ostrovu. Průběh magnetického pole by pak mohl vypadat následovně:



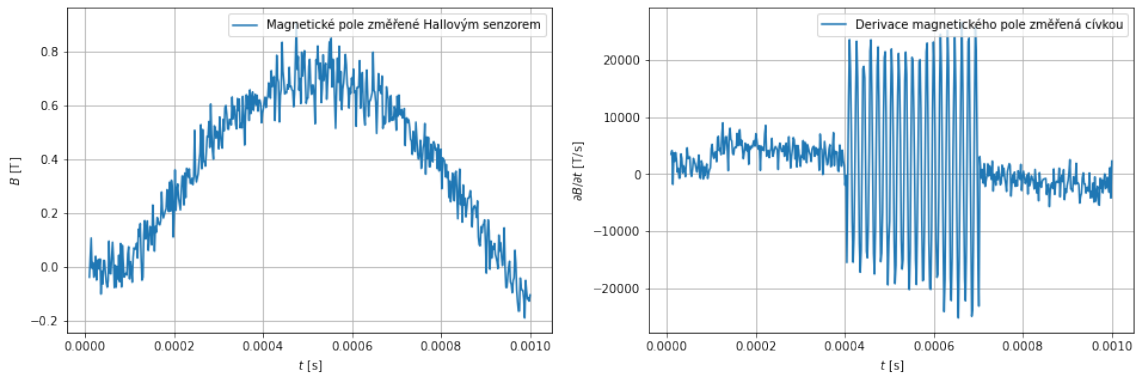
Obr. 36: Průběh magnetického pole s magnetickým ostrovem uprostřed výboje

Čistě pro úplnost zmiňme, že tvar funkce, pomocí které modelujeme tento průběh má tvar

$$B(t) = \Theta(t - t_s)(\sin(\omega t) - \sin(\omega t_s)) + \Theta(t - t_l)\Theta(t_u - t)A\sqrt{t}(\sin(\omega t_l)\sin(\omega_i t)), \quad (81)$$

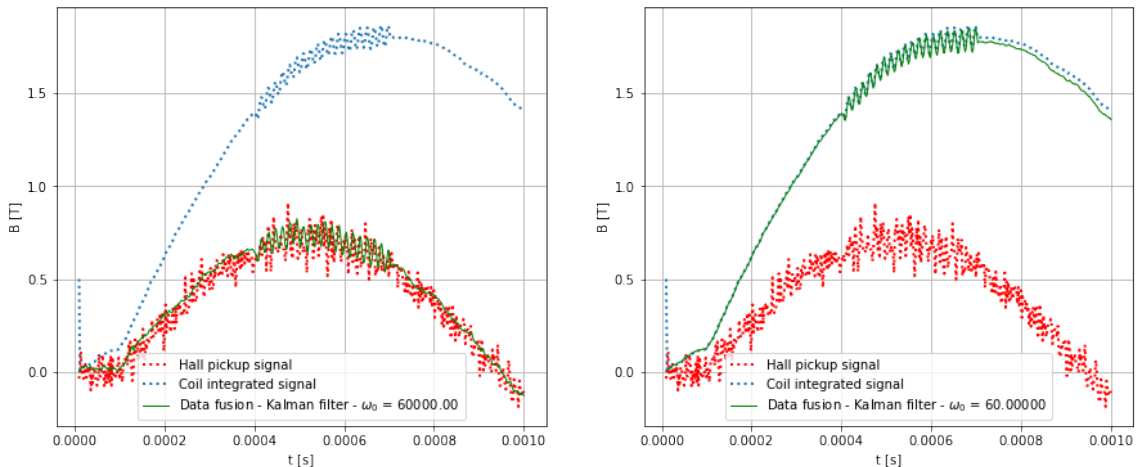
kde t_s je čas zapnutí magnetického pole, ω je frekvence "nosné" funkce, t_l je začátek magnetického ostrova, t_u je jeho konec, A označuje "amplitudu" ostrova a ω_i je frekvence rotace magnetického ostrova. Θ je v tomto případě Heavisidova funkce.

Obdobně jako v předchozím případě jsme magnetické pole změřili pomocí cívky a Hallova senzoru. Výsledky tohoto numerického měření jsou v grafu 37.



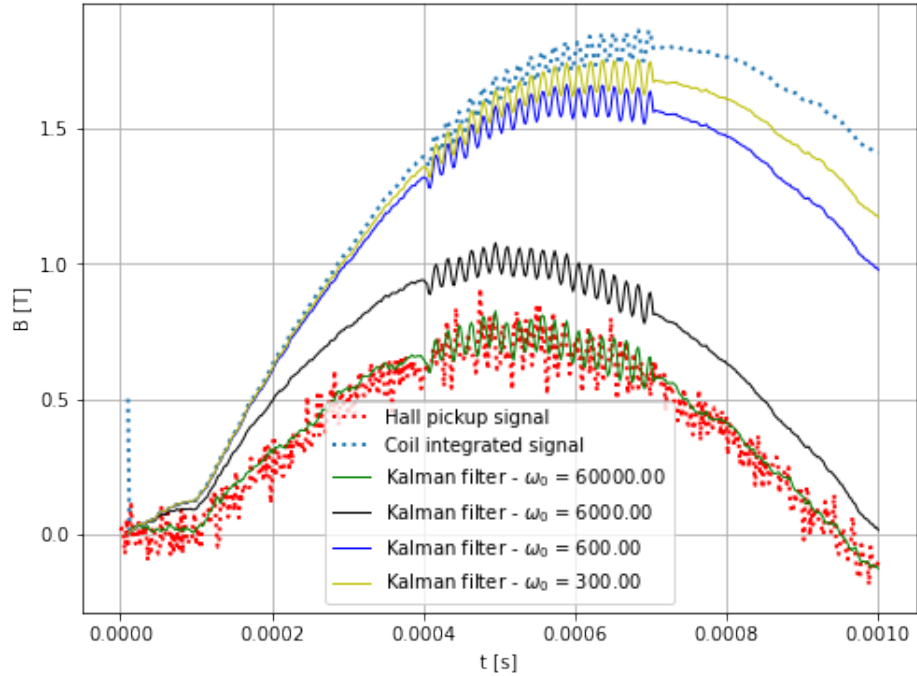
Obr. 37: Signály z Hallova senzoru a cívky.

Podobně jako v předchozím případě i tady závisí výsledek filtru na jeho gainu. Pověšměme si, že v tomto případě je nutné volit ω_0 jinak. Je totiž závislá na "sampling" frekvenci původního signálu. Výsledky Kalmanova filtru jsou v grafech 38.



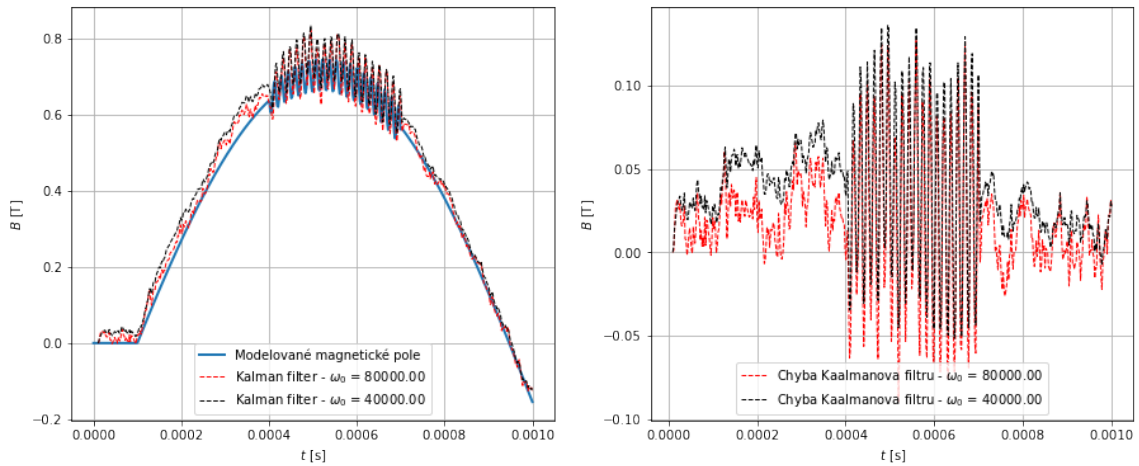
Obr. 38: Aplikace Kalmanova filtru na signál s magnetickým ostrovem

Na následujícím grafu 39 je opět jako v předchozím případě zobrazena poněkud pozvolnější závislost Kalmanova filtru na změně ω_0 .



Obr. 39: Závislost Kalmanova filtru na ω_0 pro signál s magnetickým ostrovem.

I v tomto případě se můžeme podívat na vývoj chyby Kalmanova filtru pro různé ω_0 . Průběhy jsou v grafu 40.



Obr. 40: Průběhy chyby Kalmanova filtru pro různé hodnoty parametru ω_0 .

Jak je patrné z analýz chyb v grafech 35 a 40, volba hodnoty parametru ω_0 závisí na tom, jak moc jsme ochotni obětovat dobré vlastnosti Hallova senzoru na úkor degradace výsledku Kalmanova filtru offsetem cívky. Je jasné, že pokud budeme volit ω_0 příliš vysoké, signál bude silně zašuměný a vysokofrekvenční hrany budou vlivem Hallova senzoru vyhlazovány.

7 Návrh experimentu pro ověření funkčnosti kombinovaného senzoru

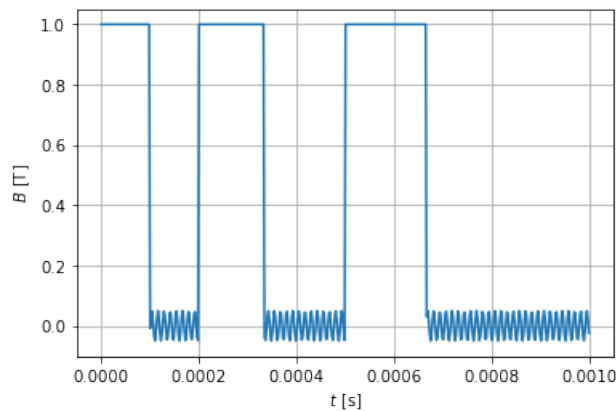
Experiment jež by měl ověřovat funkčnost kombinovaného senzoru doplněného o zpracování signálu pomocí Kalmanova filtru musí být schopen generovat magnetické pole jak stacionární pro ověření funkčnosti Hallova senzoru, tak rychle se měnící, kde je naopak potřeba přítomnost cívky. Zároveň je třeba, aby měl takový signál dostatečnou amplitudu. Problém by totiž mohl nastat v případě, že by se signál pohyboval pod řádem 1 mT. Vzhledem k relativně nízkému Hallovu koeficientu by totiž mohl být output z Hallova senzoru v podstatě nečitelný kvůli velikosti šumu. Kalmanův filtr sice poskytuje jakousi možnost šumu se zbavit, nicméně i tak nemůže být signal to noise ratio příliš nevýhodné.

7.1 Rotující magnet

Jedním z návrhů byla konstrukce rotujícího permanentního magnetu. Ten by mohl poskytovat dostatečně silné magnetické pole, problém by však tkvěl v omezené frekvenci takového pole. Z mechanického hlediska není možné rotovat magnetem s frekvencí v řádu kHz. Nicméně pro nižší frekvence či stacionární pole by tento experiment mohl fungovat dostatečně. Alternativou tohoto přístupu by pak mohl být stacionární magnet a kolem něj rotující senzor, čímž by se zamezilo nutnosti počítat magnetické pole rotujícího magnetu.

7.2 Více zdrojů pole

Další možností by byla kombinace dvou zdrojů magnetického pole. Jeden ze zdrojů by poskytoval magnetické pole stacionární určené pro měření pomocí Hallova senzoru, druhý pak pole vysokofrekvenční zaměřené na měření pomocí cívky. Zdroje by pak byly střídavě přepínány tak, aby vytvořily průběh jako na grafu 41.



Obr. 41: Průběh magnetického pole pro experiment, jež by měl ověřit funkčnost kombinovaného senzoru.

Největší obtíží tohoto experimentu by pak byla jeho konstrukce a časování spínání zdrojů magnetického pole.

7.3 Experimenty v PlasmaLabu ČVUT FJFI

Další zvažovanou možností by pak byly experimenty prováděné v PlasmaLabu FJFI ČVUT. Tato laboratoř je vybavena experimentem pro měření polohy plazmatu, resp. vodiče pomocí magnetických sond a bylo by tedy v principu možné pokusit se tato pole měřit pomocí námi navrženého kombinovaného senzoru. Vzhledem k předpokládanému účelu tohoto senzoru se zdá být jako nejrozzumnější možnost testovat jej přímo na experimentech týkajících se fúzního výzkumu a tedy právě v této laboratoři, případně se pak pokusit o měření přímo na tokamaku.

8 Závěr

V této práci byly v úvodní kapitole diskutovány vlastnosti Halloových senzorů v závislosti na jejich geometrii. Analyzovali jsme vlivy geometrie na výstupní signál senzoru a finální vzorec je uveden ve vztahu (45).

Dále byly prozkoumány vlivy termoelektrických jevů na výstupní signál senzoru. Dospěli jsme k závěru, že největší vliv bude mít složení Ettinghausenova a Seebeckova jevu. Relativní poměr zatížení výstupního signálu je v grafu 16. Dále je nutné vzít v potaz, že pakliže bude senzor v tokamaku vystaven teplotnímu gradientu libovolného původu, bude muset být napětí vyvolané termoelektrickými jevy kompenzováno.

Následně byl navržen design kombinovaného indukčního a Hallova senzoru pro vzájemnou komplementaci nedostatků dílčích senzorů. Jedná se o TPC cívku s keramickým podkladem a měděnými tištěnými vodiči. Hallův senzor je taktéž na keramickém podkladu opatřeném měděnými kontakty pro snímání výstupního napětí a pro napájení senzoru. Sensory jsou spojeny pomocí šroubů skrze otvory v jejich keramických základech.

Následně byl aplikován Kalmanův filtr coby metoda pro kombinaci signálů z cívky a Hallova senzoru. Funkčnost Kalmanova filtru byla ověřena na průbězích magnetického pole na grafech 30 a 36. Tyto průběhy byly numericky změřeny pomocí modelu kombinovaného senzoru napsaného v jazyce Python a následně použity pro aplikaci Kalmanova filtru. Výsledky filtru lze pozorovat na grafech 33, 38 a 35, 40. Z analýzy je jasné, že Kalmanův filtr nám poskytuje jakousi schopnost potlačit offset indukčních senzorů při zachování dobrých vlastností Halloových senzorů. Bohužel je však třeba přistupovat ke kompromisům. Přílišné zachování vlastností cívky vede opět k integraci offsetu, naopak přílišná váha na Hallův senzor vede k signálu, který je zašuměný a nedokáže podchytit případné ostré hrany, které by detekovala cívka.

Závěrem práce byly navrženy možné experimenty pro ověření funkčnosti kombinovaného senzoru. Největší úskalí těchto experimentů je, že důkaz skutečné funkčnosti senzorů požaduje jak vysokofrekvenční tak stejnosměrné magnetické pole o dostatečné amplitudě a frekvenci, které by měl senzor detekovat ve fúzních zařízeních. Navrženo bylo několik experimentů, z nichž nejproveditelnější se jeví ověření funkčnosti kombinovaného senzoru na již existujících fúzních experimentálních zařízeních.

Reference

- [1] LÉPINE-SZILY, Alinka a Pierre DESCOUVEMONT. Nuclear astrophysics: nucleosynthesis in the Universe. *International Journal of Astrobiology* [online]. 2012, 11(4), 243-250 [cit. 2021-04-05]. ISSN 1473-5504. Dostupné z: doi:10.1017/S1473550412000158
- [2] Tokamak principle. EUROfusion [online]. [cit. 2020-07-23]. Dostupné z: <https://www.euro-fusion.org/news/detail/tokamak-principle/>
- [3] BRIBIESCA ARGOMEDO, Federico, Emmanuel WITRANT, Christophe PRIEUR, Didier GEORGES a Sylvain BREMOND. Model-based control of the magnetic flux profile in a Tokamak plasma. In: 49th IEEE Conference on Decision and Control (CDC) [online]. IEEE, 2010, 2010, s. 6926-6931 [cit. 2021-04-05]. ISBN 978-1-4244-7745-6. Dostupné z: doi:10.1109/CDC.2010.5717184
- [4] KULHÁNEK, Petr. Úvod do teorie plazmatu. Praha: AGA, 2011. ISBN 9788090458222.
- [5] MARKOVIČ, Tomáš. Measurement of Magnetic Fields on GOLEM Tokamak. Praha, 2012. Diplomová práce. ČVUT FJFI.
- [6] BOLSHAKOVA, Inessa. TS Title DEMO diagnostic RD: magnetic diagnostics based on Hall sensors (KIPT). 2020.
- [7] HUTCHINSON, I.H. Principles of Plasma Diagnostics. 2nd Ed. Cambridge: Cambridge University Press, 2002. ISBN 0-521-80389-6.
- [8] QUERCIA, A. a A. PIRONTI. Long term operation of the Radiation-hard Hall Probes system and the path toward a high performance hybrid magnetic field sensor. Napoli, 2021.
- [9] POPOVIĆ, R.S. Hall-effect devices. *Sensors and Actuators* [online]. 1989, 17(1-2), 39-53 [cit. 2020-07-23]. DOI: 10.1016/0250-6874(89)80063-0. ISSN 02506874. Dostupné z: <https://linkinghub.elsevier.com/retrieve/pii/0250687489800630>
- [10] IVÁNEK, Matěj. Vlastnosti teplotně a radiačně odolných Hallových senzorů pro fúzní elektrárny. Praha, 2020. Bakalářská práce. ČVUT, FJFI. Vedoucí práce Ing. Slavomír Entler, Ph.D.
- [11] RAMSDEN, Edward. Hall-Effect Sensors: Theory and Applications [online]. 2nd ed. Elsevier, 2006 [cit. 2021-9-6]. ISBN 978-0-7506-7934-3. Dostupné z: <https://www.sciencedirect.com/book/9780750679343/hall-effect-sensors#book-info>
- [12] Gruppe, and Träutlein, Daniel and Bubek, Moritz and Müller, Markus and Thomay, Tim and Frank, Pascal and Sommersemester, Markus. (2020). Projektpraktikum Physik Ettinghausen-Effekt an Bismuth.

- [13] DURAN, I., J. SENTKERESTIOVA, K. KOVARIK a L. VIERERBL. Prospects of steady state magnetic diagnostic of fusion reactors based on metallic Hall sensors [online]. In: . 2012, s. 317-324 [cit. 2021-04-05]. Dostupné z: [doi:10.1063/1.4706886](https://doi.org/10.1063/1.4706886)